САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ "ЛЭТИ"

На правах рукописи

Железняк Александр Владимирович

Степенные ряды с обобщенными условиями Харди-Калуца

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт–Петербург – 2022

Работа выполнена на кафедре алгоритмической математики ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет».

Научный руководитель:	**Широков Николай Алексеевич** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
Официальные оппоненты:	**Старков Виктор Васильевич** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»
	Осипов Николай Николаевич кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

Защита состоится « » 2022 г. в на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «____» ________________

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук К. С. Рядовкин

Общая характеристика работы

Цели и задачи диссертационной работы

Диссертация посвящена расширению и обобщению условия Харди-Калуца для формальных степенных рядов одной и нескольких переменных. Эти результаты могут быть впоследствии востребованы при решении задач Неванлинны-Пика.

Получены новые достаточные условия на коэффициенты формальных степенных рядов одной и нескольких переменных. Эти условия обобщают ранее известный результат - условие Харди-Калуца.

Получено новое мультипликативное свойство рядов, обобщающее результаты на случай одной и нескольких переменных. Оно находит применение в теории гильбертовых пространств фунцкий с воспроизводящими ядрами Неван-линны-Пика.

Актуальность темы исследования

В работах Пика [1] и Неванлинны [2], [3] в начале 20 века исследовались задачи об интерполяции в единичном круге. Эта тематика получила развитие в последние десятиелетия. В работах Аглера и МакКарти [4], [5] рассматривается общая задача Неванлинны-Пика. Пусть H – гильбертово пространство функций на некотором множестве X такое, что функционал вычисления значения в точке непрерывен, то есть H пространство с воспроизводящим ядром k_y таким, что

$$(f(z), k_y)_H = f(y).$$

Рассмотрим также ядро следующего вида

$$k(y, x) = (k_x, k_y) = k_x(y).$$

Для пространства H определим алгебру мультипликаторов:

$$M(H) = \{\varphi | g \in H \Rightarrow \varphi g \in H\}.$$

С мультипликатором φ связан ограниченный оператор умножения, действующий на пространстве H, $M_\varphi(g) = \varphi g, g \in H$. Положим $||\varphi||_{M(H)} = ||M_\varphi||$.

Для данных $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ ищется мультипликатор φ пространства H такой, что $\varphi(x_k) = w_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $||\varphi|| \leq 1$. Будем предполагать линейную независимость k_x и k_y при $x \neq y$. Пусть теперь t – натуральное число, определим H_t как $H_t = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$ – ортогональная сумма t экземпляров пространств H.

$$H_t : F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix}, \quad f_k \in H, \quad ||F||_{H_t} = \sqrt{\sum_{k=1}^{t} ||f_k||^2}.$$

Пусть t и s — два натуральных числа. Определим алгебру мультипликаторов:

$M(H_t, H_s) = \left\{R = (f_{i,j})_{s*t} | F \in H_t \Rightarrow RF \in H_s\right\}.$

Мультипликатор R порождает оператор умножения M_R в $L(H_t, H_s)$, а множество $L(H_t, H_s)$ – множество ограниченных линейных операторов из H_t в H_s. Положим теперь $||R||_{M(H_t,H_s)} = ||M_R||$. Пусть $M_{s\times t}$ обозначает множество матриц размером $s \times t$. Верна следующая теорема:

Теорема. Пусть H– гильбертово пространство функций на множестве X, точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и матрицы $W_1, W_2, \ldots, W_n \in M_{s\times t}$. Необходимым условием для решения интерполяционной задачи

$$\varphi(x_i) = W_i$$

с мультипликатором φ с нормой $||\varphi|| \leq 1$ является неотрицательность матрицы Пика:

$$[(I_{\mathbb{C}^s} - W_i W_j{}^{\star})k(x_i, x_j)],$$

где $k(x_i, x_j)$ - ядро H. Иными словами для любых векторов $v_1, v_2, \cdots, v_N \in \mathbb{C}^s$ верно соотношение:

$$\sum_{i,j=1}^{N} ((I_{\mathbb{C}^s} - W_i W_j{}^{\star})v_j, v_i)k(x_i, x_j) \geq 0.$$

Следующие два определения, введенные Мак-Каллахом [6], помогут определить полное свойство Пика.

Определение. Воспроизводящее ядро k на множестве X удовлетворяет $M_{s\times t}$ свойству Пика, если для всяких точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и матриц $W_1, W_2, \ldots,$

$W_n \in M_{s\times t}$ таких, что

$$(I_{\mathbb{C}^s} - W_i W_j^{\star}) k(x_i, x_j) \geq 0,$$

существует мульпликатор φ с нормой $||\varphi|| \leq 1$, решающий интерполяционную задачу Неванлинны-Пика $\varphi(x_i) = W_i$.

Определение. Воспроизводящее ядро k на множестве X удовлетворяет полному свойству Пика, если оно удовлетворяет $M_{s\times t}$ свойству Пика при всех натуральных числах t и s.

Определение. Воспроизводящее ядро k на множестве X называется неприводимым, если $k(x, y) \neq 0$.

В работах [6], [7] доказана следующая теорема:

Теорема (Мак-Каллах). Неприводимое воспроизводящее ядро k на множестве X удовлетворяет полному свойству Пика тогда и только тогда, когда ядро $k(x, y)$ представимо в виде

$$k(x, y) = \frac{\delta(x)\overline{\delta(y)}}{1 - b(x, y)},$$

где $\delta(x)$ не принимает значение 0, а функция $|b(x, y)| < 1$ такая, что матрица $B = (b(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n}$ положительно определена.

Эта теорема имеет важное практическое применение при рассмотрении пространства $l^2(w_n)$ функций $f(z)$ аналитических в единичном круге, где функция $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n z^n$ с нормой

$$||f||^2 = \sum_{n\geq 0} w_n ||f_n||^2 < \infty.$$

Известно [11], [12], что в этом случае, для выполнения полного свойства Пика необходимо и достаточно, чтобы числа w_n были строго положительны и для формального степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0} (w_n)^{(-1)} x^n$ справедливы соотношения

$$(\sum_{n\geq 0} (w_n)^{(-1)} x^n)^{(-1)} = w_0 - \sum_{n>0} b_n x^n, b_n \geq 0, n > 0.$$

Тем самым, возникает естественный вопрос: для каких рядов $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ с положительными коэффициентами a_n верно, что обратный ряд имеет все неположительные коэффициенты, кроме нулевого. Оказалось, что подобный вопрос важен и для других задач анализа. Харди [8] использовал достаточное условие для выполнения указанного свойства степенных при исследовании свойств суммирования рядов методом Вороного, ссылаясь при это на Сеге [9]. Сеге использует достаточное условие и приписывает авторство Калуца [10].

Классическая теорема Калуца была сформулирована и доказана в начале 20 века немецким математиком Калуца и использовалась им для изучения структуры и свойств одномерных монотонных последовательностей. Формулировка ее довольно проста и звучит следующим образом:

Теорема Калуца. *Пусть коэффициенты a_n формального степенного ряда*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

строго положительны и удовлетворяют условию логарифмической выпуклости, а именно

$$a_{n+1} a_{n-1} \geq a_n^2$$

при всех натуральных n. Тогда все коэффициенты обратного ряда

$$g(x) = (f(x))^{-1} = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$$

неположительны за исключением b_0.

Научная новизна

Все основные результаты новые.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер.

Результаты диссертации могут быть использованы при дальнейшем расширении теории Неванлинны–Пика на функции одной и нескольких переменных.

Методология и методы исследования

В работе используются приемы,применявшиеся при действиях со степенными рядами в работы Калуца, Сеге, Харди. Использовалась связь между свойствами степенных рядов и пробемой Неванлинны-Пика в работах Аглера и Маккартни, Шиморина, Винникова. Центральной темой доказательства результатов первой главы является получение оценок коэффициентов обратного степнного ряда. Используемый метод сводится к разложению рассматриваемого коэффициента на составные части, оценка каждой из которых представляется относительно простой задачей. Отдельно рассматривается и доказывается, что полченные оценки усиливают ранее известные. В многомерном случае трудность в доказательстве заключается в написании оценок в неравенств, что составляет существенный объём работы.

Во второй главе рассматривается задача о существовании такого нулевого коэффициента формального степенного ряда, что ряд, обратный исходному, имеет все неположительные коэффициенты. Для этого пишутся формальные оценки на коэффициенты обратного ряда, что дает требуемый результат.

В третьей главе рассматривается задача о неположительности коэффициентов обратного степенного ряда, являющегося произведением Адамара рядов, чьи обратные ряды имеют все неположительные коэффициенты, кроме нулевого. Для этого строятся две вспомогательные конструкции, впоследствии доказывается, что они являются эквивалентными. Доказательство этого факта занимает основной объем работы. Для доказательства оценок величин коэффициентов обратного ряда также используются построенные до этого конструкции. Многомерный случай отличается от одномерного некоторым усложнением построения конструкций. Полученные результаты указывают на то, что такой подход может оказаться полезным инструментом в будущем.

Положения, выносимые на защиту:

1. Получены новые, более широкие, достаточные условия, гарантирующие неположительность коэффициентов обратного степенного ряда одной переменной. Получены условия, гарантирующие неположительность коэффициентов обратного ряда нескольких переменных.

2. Доказано, что при достаточном увеличении нулевого коэффициента ряда для рядов, у которых условие логарифмической выпуклости коэффициентов выполняется при всех натуральных n, больших некоторого натурального n_0, можно

подобрать такой нулевой коэффициент a_0, чтобы ряд обратный данному имел все неположительные коэффициенты, кроме нулевого.

3. Получено новое мультипликативное свойство рядов, обобщающее результаты на случай одной и нескольких переменных.

4.Получено полугрупповое свойство пространств: если пространства $l^2(w_n)$ и $l^2(v_n)$ обладают ядрами Неванлинны-Пика, то и пространство $l^2(w_n v_n)$ обладает тем же свойством.

Степень достоверности и апробация результатов

Все материалы, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами, были опубликованы в рецензируемых журналах, а также докладывались на семинарах и конференциях, а именно на семинарах кафедры Алгоритмической Математики СПб ГЭТУ, семинаре по теории функций и операторов, 18th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в статьях [15], [16], [17] и [18], опубликованных в журналах, переводные версии которых входят в международную реферативную базу данных Scopus. Статьи написаны без соавторов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, из трех глав, разбитых на параграфы, а также заключения и библиографии. Введение содержит обзоры трех глав. Помимо основных результатов, в этих обзорах приводятся исторические справки, основные определения и необходимые обозначения. Каждая из глав также содержит перечень используемых в ней определений и обозначений.

Формулы и утверждения имеют двойную нумерацию, где первая цифра – номер главы.

Общий объём диссертации составляет 81 страницу. Библиография насчитывает 18 наименований.

Личный вклад автора

Все новые результаты доказаны автором лично.

Содержание работы.

Обзор первой главы

Теорема Калуца, к сожалению, дает только достаточное условие на коэффициенты ряда f, но не является необходимым. Контрпримером к ней может являться ряд:

$$h_1(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots ,$$

где F_n обозначает $n-$ное число Фибоначчи, обратный ему ряд $h_2(x)$ будет иметь вид

$$h_2(x) = 1 - x - x^2.$$

Легко видеть, что для коэффициентов ряда $h_1(x)$ условие логарифмической выпуклости не выполнено. Целью первой главы будет получить новые более широкие достаточные условия на коэффициенты ряда f и продолжить условие Харди-Калуца на случай нескольких переменных.

Вспомогательные обозначения и определения. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n)$ – мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на $i-$м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \ldots, 1)-$ мультииндексы, состоящие целиком из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ и $a_s = a_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$. Также будет писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i-$ порядок мультииндекса s.

Определение 1.1. *Будем говорить, что тройка мультииндексов* (s,t,u) *B-выпуклая если выполнено неравенство:*

$$a_{s+t+u}a_s \geq B a_{s+t}a_{s+u}.$$

Определение 1.2. *Будем говорить, что последовательность* $(a_k)_0^\infty$ *удовлетворяет условию Харди-m по отношению к набору чисел* $b_0, b_1, b_2, ..., b_{m-1}$ *если при всех натуральных числах* k *выполнено соотношение:*

$$a_{k-1}\sum_{t=0}^{m-1} b_t a_{k+m-t} \geq a_k \sum_{t=0}^{m-1} b_t a_{k+m-1-t}.$$

Основной результат: Получено новое условие, аналогичное теореме Калуца для рядов нескольких переменных.

Теорема 1.1. *Пусть коэффициенты* a_s *формального степенного ряда* n *переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{s_1, s_2, ..., s_n \geq 0} a_{s_1,s_2,...,s_n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n} = \sum_{s \geq \mathbb{O}} a_s x^s,$$

с положительными коэффициентами a_s *удовлетворяют следующим условиям:*
a) тройки (s, e_i, e_i) *1-выпуклы,* $1 \leq i \leq n$*;*
b) тройки (s, e_i, e_j) *1-выпуклы при* $s_i s_j > 0$*,* $i \neq j$*;*
c) тройки (s, e_i, e_j) $(n-l)/(n-l-1)$*-выпуклы если* $n > 1$*,* $s_i s_j = 0$*, где* l *– число нулей в последовательности* $\{s_k\}_{k\neq i, k\neq j}$*,*
тогда все коэффициенты обратного ряда

$$g(x) = g(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{s_1, s_2, ..., s_n \geq 0} b_{s_1,s_2,...,s_n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n} = \sum_{s \geq \mathbb{O}} b_s x^s,$$

неположительны за исключением $b_{\mathbb{O}}$*.*

При $n = 1$ теорема 1.1 есть теорема Калуца. На случай формальных степенных рядов двух переменных получено новое достаточное условие:

Теорема 1.2. *Пусть коэффициенты* $a_{m,n}$ *формального степенного ряда 2 переменных*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} x_1^m x_2^n = \sum_{s \geq \mathbb{O}} a_s x^s,$$

с положительными коэффициентами $a_{m,n}$ удовлетворяют следующим условиям:
a) тройка $((0,0), e_1, e_2)$ 2-выпукла;
b) тройки (me_i, e_i, e_i) 1-выпуклы,$m \geq 0$, $1 \leq i \leq 2$;
c) тройки $(ne_j, e_j, (m+1)e_i)$ 1-выпуклы при $m^2 + n^2 > 0$, $i \neq j$;
d) для всех пар мультииндексов (m, n), таких что $m^2 + n^2 > 0$, и для всех пар мультииндексов (k, l) таких, что $k^2 + l^2 > 0$ и $(k, l) \leq (m, n)$ выполнено соотношение:

$$\frac{a_{m+1-k,n+1-l}}{a_{m+1,n+1}} - \frac{a_{m-k,n+1-l}}{a_{m,n+1}} - \frac{a_{m+1-k,n-l}}{a_{m+1,n}} + \frac{a_{m-k,n-l}}{a_{m,n}} \leq 0,$$

тогда все коэффициенты обратного ряда

$$g(x) = g(x_1, x_2) = \sum_{m,n \geq 0} b_{m,n} x_1^m x_2^n = \sum_{s \geq \mathbb{O}} b_s x^s,$$

неположительны за исключением $b_{0,0}$.
Приводятся примеры рядов, удовлетворяющих условиям теорем 1.1 и 1.2, более того получена оценка снизу на коэффициенты формального стпеннного ряда, удовлетворяющегот условиям теоремы 1.1, с точностью до нормировки нулевого коэффициента.

Следующая теорема описывает целый класс условий Харди-m и дает достаточные условия для неположительности коэффициентов обратного ряда.
Теорема 1.3. *Пусть формальный степенной ряд одной переменной $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ с положительными коэфиициентами a_k и коэффициенты b_k обратного ряда $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ удовлетворяет следующим условиям:*
a) $b_0 > 0$, $b_1, ..., b_{m-1} \leq 0$;
b) последовательность (a_k) удовлетворяет условию Харди-m по отношению к числам $b_0, b_1, ..., b_{m-1}$;
тогда все коэффициенты обратного ряда g неположительны за исключением b_0.
Теорема 1.3 , которая при $m = 1$ вырождается в теорему Калуца, как и теорема Калуца, является достаточной, но не является необходимой при любом натуральном m. Приводятся примеры рядов, удовлетворяющих условиям теоремы 1.3 при всех натуральных $m > 1$, для которых, при этом не будет верно условие логарифмической выпуклости коэффициентов. Кроме того, приведен пример ряда,

который показывает, что теорема 1.3 не является достаточной.

Обзор второй главы

Условие логарифмической выпуклости коэффициентов Харди-Калуца может выполняться необязательно для всех элементов последовательности a_n, а начиная с некоторого места в этой заданной последовательности чисел a_n, например, при $n > n_0$. Возникает вопрос, существует ли какое-нибудь число a_0, чтобы можно было гарантировать неотрицательность коэффициентов обратного ряда? Тем самым все коэффициенты ряда, кроме нулевого остаются неизменными, а коэффициент a_0 меняется, так чтобы у обратного ряда все коэффициенты кроме нулевого были неположительны.

Определение 2.1. *Пусть* $\{a_n\}$ *— последовательность положительных чисел,* K *— натуральное число. Говорят, что последовательность удовлетворяет условию* K*-Харди, если при всех натуральных* $n \geq K$ *выполнено условие:*

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Основной результат:

Теорема 2.1. *Положим* $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$*– формальный степенной ряд, рассмотрим* $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$*– формальный степенной ряд обратный к* $f(x)$*. Тогда, для любой последовательности чисел* $a_1, a_2, \ldots,$ *, удовлетворяющей условию* K*-Харди, существует достаточно большое число* a_0 *такое, что числа* $b_n < 0$ *при всех натуральных* n*.*

Так же получены результаты, аналогичные теореме 2.1, для формальных степенных рядов нескольких переменных.

Обзор третьей главы

Теорема Калуца, к сожалению, дает только достаточное условие на коэффициенты ряда f и не дает необходимые. Целью настоящей главы будет дать описание множества рядов (для случая одной и нескольких переменных), у которых все коэффициенты положительны, а у обратного ряда все коэффициенты, кроме нулевого будут неположительны.

Вспомогательные обозначения и определения. Пусть $s = (s_1, \dots, s_n)$ – мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ – мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на $i-$м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \dots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \dots, 1)-$ мультииндексы, состоящий из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ и $a_s = a_{s_1, s_2, \dots, s_n}$. Также будет писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i-$ порядок мультииндекса s. Будем говорить, что $s >> t$ если выполнены два условия $s \geq t$ и $s \neq t$. Кроме того, $s >< t$, если коэффициенты s и t несравнимы.

Произведением Адамара двух формальных степенных рядов является поэлементное произведение коэффициентов степенных рядов:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \star (\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n x^n.$$

Историческая справка. Теорема Калуца, доказанная в 1920-х годах дает только достаточное условие на коэффициенты ряда f - это условие логарифмической выпуклости коэффициентов. Впоследствии она находила применение в работах Сеге и Харди для изучения различных вопросов связанных со степенными рядами. Во второй половине 20 века теорема Калуца находит применение в вопросе разрешимости задачи Неванлинны-Пика и появляется в работах Аглера [4], Шиморина [11], Болла, Винникова и Трента [12], [13] и др. В 2011 году Вести, Вуоринен и Батиш [14] описали свойства рядов обладающих условием логарифмической выпуклости коэффициентов, охарактеризовав множество рядов обладающих свойством логарфмической выпуклости коэффициентов.

Основной результат. Получено новое условие, аналогичное теореме Батиша-Вести-Вуоринена, для произвольных формальных степенных рядов одной переменной.

Теорема 3.1. *Пусть $f_1(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $f_2(x) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ – два формальных степенных ряда с положительными коэффициентами, и пусть $g_1(x) = b_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ и $g_2(x) = d_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ – ряды обратные f_1 и f_2 соот-*

ветственно, причем коэффициенты b_n и d_n неотрицательны при всех n. Пусть ряд $F(x) = f_1(x) \star f_2(x)$, $G(x) = l_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n x^n$ – ряд обратный F. Тогда все коэффициенты l_n ряда G будут неотрицательны.

Ряды, удовлетворяющие условие логарфмической выпуклости коэффициентов, в частности теорема Батиша-Вести-Вуоринена является частным случаем рассматриваемой конструкции. Кроме того, получен аналог теоремы 3.1 для рядов нескольких переменных.

Теорема 3.2. *Пусть $f_1(x) = a_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} a_s x^s$ и $f_2(x) = c_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} c_s x^s$ – два формальных степенных ряда от n переменных с положительными коэффициентами, и пусть $g_1(x) = b_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} b_s x^s$ и $g_2(x) = d_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} d_s x^s$ – ряды обратные f_1 и f_2 соответственно, причем коэффициенты b_s и d_s неотрицательны при всех s. Пусть $a_{\mathbb{O}} = b_{\mathbb{O}} = c_{\mathbb{O}} = d_{\mathbb{O}} = 1$. Пусть ряд $F(x) = a_{\mathbb{O}} c_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} (a_s c_s) x^s$, $G(x) = l_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} l_s x^s$ – ряд обратный F. Тогда все коэффициенты l_s ряда G будут неотрицательны.*

Теорема 3.1 имеет важное приложение в теории гильбертовых пространств фунцкий с воспроизводящими ядрами Неванлинны-Пика. Одним из важных примеров является простанство $l^2(w_n)$ функций $f(z)$ аналитических в единичном круге, $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n z^n$ с нормой

$$||f||^2 = \sum_{n\geq 0} w_n ||f_n||^2 < \infty,$$

при этом числа w_n строго положительны и для формального степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0} (w_n)^{(-1)} x^n$ справедливы соотношения

$$(\sum_{n\geq 0} (w_n)^{(-1)} x^n)^{(-1)} = w_0 - \sum_{n>0} b_n x^n, b_n \geq 0, n > 0.$$

В обозначениях теоремы 3.1 $w_n = a_n^{(-1)}$. Из теоремы 3.1 следует полугрупповое свойство пространств: если пространства $l^2(w_n)$ и $l^2(v_n)$ обладают ядрами Неванлинны-Пика, то и пространство $l^2(w_n v_n)$ обладает тем же свойством.

В качестве следствия теоремы 3.1 мы получаем новое гильбертово пространство, в котором проверено полное свойство Неванлинны-Пика. Примером такого нового пространства является пространство, где $w_n = F_n^{(-2)}$, где F_n обозначает $n-$ное число Фибоначчи.

Литература

[1] *Pick G.* Uber die Beschrankungen analytischer Funktionen, weiche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden,
Math. Ann. 77, 1916.

[2] *Nevanlinna R.* Uber Beschrankte Funktionen, die is gegebenen Punkten vorgeschriben Werte annehmen,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A13, 1919.

[3] *Nevanlinna R.* Uber Beschrankte Funktionen,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A32, 1929.

[4] *Agler J., McCarthy J.* Pick Interpolation and Hilbert function spaces,
Am. Math. Soc. Rhode Island, 2000.

[5] *Agler J.* Some Interpolation theorems of Nevanlinna-Pick type,
Preprint, 1988.

[6] *Mc Cullough S.* The local de Branges-Rovnyak Construction and complete Nevanlinna-Pick kernels,
Birkhauser verlag Boston, pp. 15–24, 1994.

[7] *P. Quiggin* Generalization of Pick's theorem of reproducing kernel Hilbert spaces,
Ph.D. thesis, Lancaster Univercity, 1993.

[8] *Харди Г.* Расходящиеся ряды,
Москва, Издательство иностранной литературы. 1951.

[9] *Szego. G.* Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejer uber die Legendreschen Polynome,
Mathematische Zeitschrift, Vol. 25, pp. 285–98, 1926.

[10] *Kaluza Th.* Uber die Koeffizienten reziproker Potenzreihen,
Mathematische Zeitschrift, Vol. 28, pp. 161–170, 1928.

[11] *Shimorin S.* Complete Nevanlinna-Pick property of Dirichlet-type spaces,
Journal of Functional Analysis 191, pp. 276–296, 2002.

[12] *Ball J.A., Trent T., Vinnicov V.* Inperpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernels Hilbert spaces,
Operator theory: Advances and applications, Vol. 122, pp. 89–138, Birkhauser verlag Basel, 2001.

[13] *Ball J.A., Trent T.* Unitary colligations, reproducing kernel Hilbert spaces and Nevanlinna-Pick interpolation in several variables,
Journal of Functional Analysis 197, pp. 1–61, 1998.

[14] *Baricz A., Vesti J., Vuorinen M.* On Kaluza's sign criterion for reciprocal power series,
Annales Universitate Maria Curie-Sklodowska Lublin-Poland Vol. LXV, NO. 2, pp 1–16, 2011 SECTIO A.

[15] *Железняк А.В.* Многомерный аналог условия Харди для степенных рядов,
Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия, вып. 4, стр. 28–33, 2009.

[16] *Железняк А.В.* Степенные ряды одной переменной с условием логарифмической выпуклости коэффициентов,
Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 7 (65), вып. 1, стр. 28–38, 2020

[17] *Железняк А.В.* Степенные ряды нескольких переменных с условием логарифмической выпуклости коэффициентов,
Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 8 (66), вып. 1, стр. 49–62, 2021.

[18] *Железняк А.В.* Мультипликативное свойство рядов, используемых в задаче Неванлинны-Пика,

Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 9 (67) вып. 1, 2022.