На правах рукописи

ЛОГУНОВ Александр Андреевич

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2015

Работа выполнена на кафедре математического анализа Математико-механического факультета ФГБОУ ВПО “Санкт-Петербургский государственный университет”.

Научный руководитель:
Хавин Виктор Петрович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Математико-механического факультета ФГБОУ ВПО “Санкт-Петербургский государственный университет”

Официальные оппоненты:

Капустин Владимир Владимирович
доктор физико-математических наук, зам. директора отдела “Международный математический институт им. Л. Эйлера” ФГБУН “Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук” (ПОМИ РАН)

Старков Виктор Васильевич
доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа Математического факультета ГОУ ВПО “Петрозаводский государственный университет”

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО “Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ” им. В. И. Ульянова (Ленина)”

Защита состоится «____» ____________ 2015 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д002.202.01 в ФГБУН ПОМИ РАН: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «____» ____________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д. ф.-м. н. А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Работа затрагивает следующие вопросы теории гармонических функций: частные гармонических функций с общим множеством нулей, теорема Левинсона о повторном логарифме, тауберовы теоремы для положительных гармонических функций. Теория гармонических функций играет значительную роль в математике, физике и прикладных областях. В двумерном эвклидовом пространстве эта теория связана с комплексным анализом, средствами которого она успешно развита. В старших размерностях ситуация усложняется: отсутствуют комплексное умножение и конформные отображения, играющие важную роль в двумерном случае, вопросы о нулях гармонических функций в значительной степени открыты.

Отношения гармонических функций. Отношения гармонических функций часто фигурируют в классической теории потенциала, в том числе в связи с границей Мартина, (граничным) неравенством Гарнака (см., например, [4], [5]) и функцией Грина (3G-неравенства, см. [6]). Наш интерес к теме отношений гармонических функций мотивирован недавней работой Мангуби [7], где изучались отношения гармонических функций в размерности два с общим нодальным множеством (множеством нулей), и была получена оценка градиента логарифма модуля отношения гармонических функций с константой, зависящей только от нодального множества и расстояния до границы. Теорему Мангуби можно трактовать как обобщение классического неравенства Гарнака на гармонические функции, меняющие знак. Классическое неравенство Гарнака соответствует случаю, когда нодальное множество пусто. Также частное $f = u/v$ гармонических функций u и v удовлетворяет сильно вырожденному эллиптическому уравнению $\operatorname{div}(v^2 \nabla f) = 0$. Неравенство Гарнака для общих равномерно эллиптических операторов было получено Мозером [8] и обобщено на различные классы вырожденных эллиптических операторов, см. [9–11]. Однако вес v^2 очень сингулярен, не лежит в классе Макенхаупта A_2, если v обращается в нуль, и совсем неочевидно, когда уравнение

$\mathrm{div}(v^2 \nabla f) = 0$ имеет непостоянные решения.

Вопрос о справедливости неравенства Гарнака и неравенства Мангуби для отношений гармонических функций с общим нодальным множеством в старших размерностях ($n \geq 4$) открыт. Из результатов, изложенных в первой главе диссертации, следует справедливость этих неравенств в размерности три.

Теорема Левинсона о повторном логарифме.

Теорема Левинсона о повторном логариме, варианты которой принадлежат Берлингу, Шобергу, Карлеману и другим математикам, есть критерий нормальности семейства голоморфных функций, ограниченных по модулю некоторой мажорантой, зависящей, скажем, только от одной координаты, при условии, что мажоранта удовлетворяет некоторому интегральному условию. Первое утверждение такого рода принадлежит Карлеману (см. [12]), оно обобщает классическую теорему Лиувилля. Самое знаменитое утверждение, где фигурирует условие сходимости интеграла с повторным логарифмом, есть локальная теорема, известная как теорема Левинсона о повторном логарифме. Есть несколько разных теорем типа теоремы Левинсона, а доказательств – значительно больше. Этой теме посвящены работы Берлинга, Домара, Вольфа, Шоберга, Гурария, Мацаева, Рашковского, Риппона и других.

Стоит отметить, что в теореме Левинсона можно заменить класс голоморфных функций на класс гармонических, и утверждение останется верным. Возникает естественный вопрос о справедливости этого утверждения для гармонических функций в старших размерностях, где есть дополнительные сложности, связанные с тем, что логарифм модуля градиента гармонической функции в размерности три и выше не всегда является субгармонической функцией. Это создает большую разницу с двумерной ситуацией, и многомерный случай требует новых идей. Первый результат такого рода при некоторых дополнительных предположениях о мажоранте был получен Дынькиным в работе [13] как следствие его исследований по асимптотической задаче Коши для уравнения Лапласа. В работе автора [1] доказана теорема, которая обобщает теорему Левинсона на гармонические функции в старших размерностях. Этому результату посвящена вторая глава диссертации.

В недавних работах [14], [1] теорема Левинсона для голоморфных функций и ее аналог для гармонических функций применяются к изучению граничных свойств универсальных рядов Тейлора голоморфных и гармонических функций.

Тауберовы теоремы о граничном поведении положительных решений эллиптических уравнений в частных производных.

Классическая теорема Фату говорит, что если заряд μ на единичной окружности дифференцируем в некоторой точке, то гармоническое продолжение u_μ заряда μ внутрь диска имеет предел вдоль нормали в этой точке. Обратное утверждение неверно: из существования радиального предела не следует дифференцируемость заряда μ в соответствующей точке границы. Но это утверждение становится верным, если сделать дополнительное предположение: для *неотрицательных* зарядов μ существование радиального предела и производной граничной меры равносильны. Эта тауберова теорема с положительностью в роли тауберова условия была доказана в работе Люмиса [15] в размерности два, обобщена Рудиным на старшие размерности в [16]. А в работе [17] был получен аналогичный критерий существования некасательного предела положительной гармонической функции в полупространстве.

В третьей главе доказывается критерий степенного роста вдоль нормали в точке границы для положительной гармонической функции, критерий формулируется в терминах граничной меры. В одном частном случае этот результат дает критерий существования предела вдоль нормали, изученный в работах Рудина и Люмиса. А другой частный случай легко следует из принципа минимальности Берлинга, изучавшийся в работах Берлинга, Дальберга и Мазьи. Этот принцип можно интерпретировать как условие на рост положительной гармонической функции вдоль последовательности точек, стремящихся к фиксированной точке границы, которое гарантирует наличие точечной нагрузки у граничной меры.

Мы обобщим этот результат и критерий существования некасательного предела положительной гармонической функции на случай областей с достаточно гладкой границей и эллиптических операторов второго порядка с переменными гельдеровыми коэффициентами при помощи асимптотических оценок гармонической меры.

Цель диссертационной работы состоит в получении неравенства Гарнака и оценки градиента для частного гармонических функций с общим множеством нулей, в доказательстве многомерного гармонического аналога теоремы Левинсона о повторном логарифме и изучении граничных свойств положительных решений эллиптических дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в теории эллиптических уравнений в частных производных и в теории потенциала.

Методы исследований. Основные методы можно отнести к теории потенциала и комплексному анализу, также использовались некоторые результаты алгебраической геометрии и тауберовой теории.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Доказаны вещественная аналитичность и принципы максимума и минимума для частных гармонических функций с общим нодальным множеством.

2. В размерности три получено неравенство Гарнака и оценка старших производных частного гармонических функций с одинаковым (фиксированным) нодальным множеством.

3. Доказан многомерный аналог теоремы Левинсона о повторном логарифме для гармонических функций.

4. Для положительных гармонических функций доказан критерий степенного роста вдоль нормали в точке границы в терминах граничной меры. Этот результат и некоторые другие тауберовы теоремы (критерий Рэми-Ульриха существования некасательного предела и принцип минимальности Берлинга) обобщены единым методом на класс эллиптиче-

ских операторов второго порядка в недивергентной форме в областях с достаточно гладкой границей.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, представленные в работе, являются достоверными, математически строго доказанными фактами. Основные результаты диссертации докладывались на семинаре по теории операторов и теории функций в ПОМИ РАН (Санкт-Петербург, 2014), на семинарах лаборатории им. П. Л. Чебышева (Санкт-Петербург, 2013-2014), на семинарах по анализу в Норвежском Институте Естественных и Технических Наук (Норвегия, г. Тронхейм, 2013-2014), на конференции "Perspectives of Modern Complex Analysis"(Польша, г. Бедлево, 2014), на конференции "XXIII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis"(Санкт-Петербург, 2014), на конференции "Spaces of Analytic Functions and Singular Integrals"(Санкт-Петербург, 2014).

Публикации. Результаты диссертации полно и своевременно опубликованы в 3 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [1–3] из Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК. Работа [3] написана в соавторстве с Е. В. Малинниковой. По мнению соавторов, их вклад в последнюю работу равный.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 88 страниц. Библиография включает 71 наименование на 6 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель исследований, приведено описание структуры диссертации.

В первой главе изучаются отношения гармонических функций с общим множеством нулей. Пусть u и v – гармонические функции в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а $Z(u)$ и $Z(v)$ есть множества всех нулей функций u и v соответственно, которые называются нодальными множествами функции u (и v).

В разделе 1.1 мы формулируем главные результаты этой главы. Первая теорема содержит утверждение об аналитичности и принцип максимума для частного гармонических функций (в работе [7] в размерности два была установлена гладкость таких частных).

Теорема 1. *Пусть u и v – гармонические функции в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Если $Z(v) \subset Z(u)$, то существует вещественно аналитическая функция f в Ω, такая что $u = vf$. Более того, f удовлетворяет принципам максимума и минимума, т.е. для любой подобласти $O \Subset \Omega$*

$$\max_{\partial O} f = \max_{\bar{O}} f \quad \& \quad \min_{\partial O} f = \min_{\bar{O}} f.$$

Следующая торема дает неравенство Гарнака для отношений гармонических функций в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 2. *Пусть w – гармоническая функция в единичном шаре $B \subset \mathbb{R}^3$. Для любого компактного множества $K \subset B$ существует такая константа C, зависящая только от w и K, что для любых гармонических функций u, v в B с $Z(u) = Z(v) = Z(w)$ выполнено*

$$\left|\frac{u}{v}(x)\right| \leq C \left|\frac{u}{v}(y)\right|$$

для любых точек $x, y \in K$.

Сформулированные выше теоремы 1,2 используются в доказательстве следующей теоремы об оценках производных частного гармонических функций.

Теорема 3. *Предположим, что функции u и v гармоничны в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Если $Z(v) = Z(u) = Z$, то существует вещественно аналитическая в Ω функция f, такая что $u = vf$. Если мы зафиксируем $x_0 \in \Omega$ и предположим, что $\frac{u}{v}(x_0) = 1$, тогда для любого компактного множества $K \subset \Omega$ существуют положительные числа A и R, зависящие только от K, Z и Ω, такие что для любого $x \in K$ и любого мультииндекса α верно*

$$\left|D^\alpha \left(\frac{u}{v}\right)(x)\right| \leq \alpha! A R^{|\alpha|}.$$

В разделе 1.2 представлен план доказательства этих результатов. В разделе 1.3 сформулировано граничное неравенство Гарнака, а также кратко изложена его история. В разделе 1.4 доказывается вещественная аналитичность частного гармонических функций с общим множеством нулей. Сначала будет обсуждаться частный случай, когда функции – однородные гармонические полиномы, в этом случае частное тоже оказывается однородным полиномом (уже необязательно гармоническим). Главным инструментом служит теорема Брело–Шоке, утверждающая, что непостоянный делитель однородного гармонического полинома меняет знак. Затем будет доказано, что если вещественно-аналитическая функция исчезает на множестве нулей гармонической функции, то первую функцию можно поделить на вторую как формальные степенные ряды. После этого будет доказано, что ряд Тейлора частного имеет положительный радиус сходимости, что даст вещественную аналитичность частного. Принципы максимума и минимума для отношений гармонических функций обсуждаются в разделе 1.5. Они используются вместе с граничным неравенством Гарнака в доказательстве неравенства Гарнака для отношений гармонических функций в размерности три, изложенном в разделе 1.6. Затем полученное неравенство Гарнака для отношений в комбинации с локальной теоремой о делении дадут оценку градиента и частных производных старшего порядка для отношений гармонических функций с общим множеством нулей. В разделе 1.7 собрано несколько двумерных и многомерных примеров гармонических функций с общим множеством нулей. Расширенный список примеров в размерности два содержится в работе [7]. В разделе 1.8 приведены несколько заключительных замечаний и дополнений к основному тексту главы: приведен пример гармонической функции с нодальными областями, у которых граница не представима локально в виде графика липшицевой функции, кратко обсуждается сильно вырожденное дифференциальное эллиптическое уравнение, которому удовлетворяет частное гармонических функций. Также мы предложили доказательство одной используемой леммы о делении гармонических полиномов, сделали замечание о совпадении комплексных нулей гармоничеких функций, сформулировали вопрос о нормальности семейства гармонических функций с фиксированным нодальным множеством.

Вторая глава посвящена теореме Левинсона о повторном логарифме. Главный результат этой главы – аналог теоремы Левинсона для гармонических функций в старших размерностях.

Теорема 13 *Пусть* Ω *обозначает множество* $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \in \mathbb{R}, |x| < R, |y| < H\}$, *где* R *и* H *– положительные числа. Предположим, что функция* $M\colon (0, H) \to \mathbb{R}_+$ *не возрастает и*

$$\int\limits_0^H \log^+ \log^+ M(y) dy < +\infty, \tag{1}$$

где $\log^+ x := \begin{cases} \log x, & x \geq 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$. *Тогда множество* H_M *всех функций* u, *гармонических в* Ω *и таких, что* $|u(x, y)| \leq M(|y|)$, $(x, y) \in \Omega$, *является нормальным семейством в* Ω, *т.е. равномерно ограничено на компактных подмножествах области* Ω.

Классическая теорема Левинсона соответствует размерности $n = 2$ и изначально формулировалась для класса голоморфных функций. Мы кратко описываем идею доказательства Домара классической теоремы Левинсона в разделе 2.1. Раздел 2.2 посвящен осесимметричным гармоническим функциям, в этом разделе описаны два приема: первый позволяет сводить вопросы об осесимметричных гармонических функциях в размерности 4 к обычным гармоническим функциям двух переменных, а второй прием позволит свести случай нечетных размерностей к трехмерной ситуации в гармоническом аналоге теоремы Левинсона, которая будет доказана в разделе 2.3. В разделе 2.4 мы задаем вопрос об односторонних оценках в теореме Левинсона, а в разделе 2.5 формулируем одно приложение этой теоремы к граничным свойствам универсальных рядов Тейлора гармонических функций.

В третьей главе речь пойдет о тауберовых теоремах для положительных гармонических функций и положительных решений эллиптических дифференциальных уравнений. В разделе 3.1 мы кратко излагаем историю вопроса, начиная с классической теоремы Фату, вводим определения граничной меры и класса эллиптических операторов $\mathrm{L}^+(\lambda, \alpha, \Omega)$, затем формулируем и обсуждаем критерий степенного роста вдоль нормали положительной гармонической функции (теорема 15).

Теорема 15. *Пусть $\alpha \in (-1, n-1]$, а неотрицательные числа a, b таковы, что*

$$a = b\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\pi^{n/2}}.$$

Рассмотрим функцию $u(x,t)$, гармоническую в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$. Обозначим через μ ее граничную меру. Следуюшие утверждения эквивалентны:

1. *Предел $\lim\limits_{t\to+0} u(0,t)t^\alpha$ существует и равен a.*

2. *$\frac{\mu(B(r))}{r^{n-1}} r^\alpha \to b$, когда $r \to +0$.*

В частном случае $\alpha = 0$ эта теорема дает критерий существования предела вдоль нормали, изученный в работах Люмиса и Рудина. А случай $\alpha = n-1$ следует из принципа минимальности Берлинга, который обсуждается в конце третьей главы.

В разделе 3.2 мы доказываем теорему 15 с помощью тауберовой теоремы Винера. В разделе 3.3 мы формулируем несколько известных оценок функции Грина G_L и L-гармонической меры. Раздел 3.4 посвящен асимптотической оценке L-гармонической меры, когда расстояние между полюсом гармонической меры и точкой, где вычисляется плотность гармонической меры, стремится к нулю. Эта информация будет использована в разделах 3.5, 3.6, где теорема 15 будет обобщена на гладкие области и эллиптические операторы из класса $\mathrm{L}^+(\lambda, \alpha, \Omega)$. А также будет обобщен критерий Рэми–Ульриха существования некасательного предела на L-гармонические функций. В разделе 3.7 мы формулируем принцип минимальности Берлинга, а затем обобщаем его на некоторый класс эллиптических операторов второго порядка в недивергентной форме.

Заключение

Перечислим основные результаты диссертации. Доказана вещественная аналитичность частного гармонических функций, у которых нодальные множества совпадают. В размерности три для таких частных получены неравенство Гарнака, оценки градиента и старших производных. Доказано многомерное обобщение теоремы Левинсона о повторном логарифме для гармонических функций. Доказано несколько тауберовых теорем для положительных решений эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в недивергентной форме в гладких областях: обобщен критерий существования некасательного предела и принцип минимальности Берлинга, получен критерий степенного роста вдоль нормали.

Далее мы собрали несколько вопросов, которые мотивированы результатами диссертации.

Вопрос об односторонних оценках. Предположим, что z_0 есть точка в $Q = (-1,1) \times (-1,1)$, а M – положительная (убывающая и регулярная) функция на $(0,1)$. При каких условиях на M семейство F_M^+ всех функций f, голоморфных в Q и удовлетворяющих $Im(f(z)) \leq M(|Im(z)|)$, $f(z_0) = 0$, есть нормальное семейство в Q?

Вопрос о компактности семейства гармонических функций с фиксированным нулевым множеством. Общеизвестный факт состоит в том, что семейство положительных гармонических функций в B_1 со значением 1 в центре есть нормальное семейство. Пусть Z – это любое подмножество B_1. Рассмотрим множество F_Z всех гармонических в B_1 функций u, таких что $Z(u) = Z$, и $u(0) = 1$. Мы верим, что в любой размерности F_Z есть нормальное семейство функций в B_1. В размерности $n = 2, 3$ это следует из неравенства Гарнака для отношений гармонических функций. Мы уверены, что оно верно и в старших размерностях.

Константа в неравенстве Мангуби. Мы уверены в том, что константа C_Z в двумерной оценке Мангуби $|\nabla \log |f||$ может быть выбрана зависящей только от количества нодальных областей множества нулей Z. В размерности два Z локально можно представить в виде конечного объединения аналитических кривых, и мы считаем, что C_Z можно выбрать зависящим только от длины множества Z. Сложный вопрос возникает в старших размерностях. В размерности три неизвестно, верна ли аналогичная оценка в терминах площади множества Z.

Список публикаций

1. A. Logunov. On the higher-dimensional harmonic analog of the Levinson log log theorem // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2014. Vol. 352, no. 11. P. 889–893.

2. А. А. Логунов. О граничном поведении положительных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Алгебра и Анализ. 2015. Т. 27, № 1. С. 125–148.

3. A. Logunov, Eu. Malinnikova. On ratios of harmonic functions // Advances in Mathematics. 2015. Vol. 274. P. 241–262.

Цитированная литература

4. D. H. Armitage, S. J. Gardiner. Classical potential theory. Springer, 2001.

5. H. Aikawa. Potential analysis on nonsmooth domains, Martin boundary and boundary Harnack principle, in complex analysis and potential theory // CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence. 2012. Vol. 55. P. 235–253.

6. M. Cranston, E. Fabes, Z. Zhao. Conditional gauge and potential theory for the Schrödinger operator // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 307, no. 1. P. 171–194.

7. D. Mangoubi. A gradient estimate for harmonic functions sharing the same zero set // Electron. Res. Announc. Math. Sci. 2014. Vol. 21. P. 62–71.

8. J. Moser. On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14. P. 577–591.

9. E. Fabes, C. Kenig, R. Serapioni. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1982. Vol. 7, no. 1. P. 77–116.

10. B. Franchi, E. Lanconelli. An embedding theorem for Sobolev spaces related to nonsmooth vector fields and Harnack inequality // Comm. Partial Differential Equations. 1984. Vol. 9, no. 13. P. 1237–1264.

11. B. Franchi, R. Serapioni. Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 14. 1987. no. 4. P. 527–568.

12. T. Carleman. Extension d'un théorème de Liouville // Acta Math. 1926. Vol. 48. P. 363–366.

13. E. M. Dyn'kin. An asymptotic Cauchy problem for the Laplace equation // Ark. Mat. 1996. Vol. 34. P. 245–264.

14. S. J. Gardiner, D. Khavinson. Boundary behaviour of universal Taylor series // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2014. Vol. 352, no. 2. P. 99–103.

15. L. H. Loomis. The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 53. P. 239–250.

16. W. Rudin. Tauberian theorems for positive harmonic functions // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 1978. Vol. 40, no. 3. P. 376–384.

17. W. Ramey, D. Ullrich. On the behavior of harmonic functions near a boundary point // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 305. P. 207–220.