На правах рукописи

Столяров Дмитрий Михайлович

Дифференциальные операторы и анализ Фурье: теоремы вложения с предельным показателем и их приложения

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена в лаборатории математического анализа ФБГУН Санкт-Петербургского отделения математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук (ПОМИ РАН).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, директор ПОМИ РАН Кисляков Сергей Витальевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор университета Wisconsin–Madison Эйдерман Владимир Яковлевич

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВПО Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова Васин Андрей Васильевич

Ведущая организация: ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук (МИАН).

Защита состоится «____» ____________ 2014 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, 191023.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, д. ф.-м. н. Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Теоремы вложения с предельным показателем для переопределенных систем дифференциальных уравнений — активно развивающаяся в последнее десятилетие область, разработка которой началась с пионерской работы Бургейна и Брезиса. В эту область также внесли лепту такие всемирно известные математики как Стейн и В. Г. Мазья. Приложения полученных в диссертации теорем вложения к классификационным вопросам теории банаховых пространств завершают многолетние исследования С. В. Кислякова, Пелчинского и др. Все это показывает, что тема работы актуальна.

Цель диссертационной работы состоит в получении анизотропных теорем вложения для переопределенных систем дифференциальных уравнений, изучении связанных с ними билинейных неравенств типа теорем вложения, а также применении полученных результатов к вопросам теории банаховых пространств и геометрической теории меры.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер.

Методы исследований. Комплексный анализ, анализ Фурье, геометрическая теория меры.

Апробация работы. Результаты диссертации были доложены на петербургском семинаре по комплексному и линейному анализу в ПОМИ РАН (Санкт–Петербург), на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики МИАН (Москва), семинаре по функциональному анализу ИМ ПАН (Варшава) и семинаре по геометрии банаховых пространств факультета математики Ягеллонского университета (Краков).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в трех статьях автора в журналах из списка ВАК.

Основные результаты. Работа посвящена некоторым соболевским теоремам вложения и их приложениям к задачам функционального анализа и геометрической теории меры. Теоремы вложения данной работы отличаются от классических тем, что младшие производные функции или набора функций оцениваются в терминах линейных комбинации производных старших порядков. Эта особенность проявляется в основном только при предельных показателях суммируемости (некоторые случаи, когда наличие линейных комбинаций интересно для непредельных показателей, рассмотрены отдельно). Применяемые в нашей работе методы наиболее приспособлены к случаю двух переменных (тем не менее, иногда они допускают большее количество переменных). Кроме того, в основном речь пойдет о вложении в гильбертово пространство. Однако наши теоремы вложения анизотропно однородны. Для систем дифференциальных уравнений наш результат, по-видимому, первый обладает этим свойством (в последнее десятилетие другими авторами активно исследовались изотропно однородные теоремы вложения для переопределенных систем). Также нами рассмотрен класс билинейных неравенств, тоже по-видимому, новый. Основное приложение наших теорем вложения — решение некоторых вопросов о неизоморфности пространств гладких функций, порожденных дифференциальными операторами, пространству $C(K)$. Кроме того, мы даем приложение теорем вложения к задачам о сингулярности векторнозначных мер, подчиненных дифференциальным условиям.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии и приложения. Общий объем диссертации 200 страниц, из них 188 страниц текста. Библиография включает 66 наименований на 7 страницах.

Содержание работы

Основные результаты диссертации сформулированы в виде пяти теорем. За некоторыми из этих теорем кроются более общие утверждения, однако они требуют длительных пояснений; мы приглашаем заинтересованного читателя обратится к тексту диссертации для ознакомления с ними.

Теорема 1. *Пусть k, l, N — натуральные числа, а комплексные меры ограниченной вариации $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N$ с компактными носителями в пространстве $\mathbb{R}^2$ таковы, что*

$$\sum_{j=0}^{N} \partial_1^{jk} \partial_2^{(N-j)l} \mu_j = 0. \tag{1}$$

Тогда существуют функции $f_1, f_2, \ldots, f_N$ из пространства $W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l}, l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{R}^2)$, такие что

$$\begin{cases} \partial_1^k f_1 & = & \mu_0; \\ \partial_1^k f_2 - \partial_2^l f_1 & = & \mu_1; \\ \vdots & = & \vdots; \\ \partial_1^k f_j - \partial_2^l f_{j-1} & = & \mu_{j-1}; \\ \vdots & = & \vdots; \\ \partial_1^k f_N - \partial_2^l f_{N-1} & = & \mu_{N-1}; \\ -\partial_2^l f_N & = & \mu_N \end{cases} \tag{2}$$

и $\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l}, l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}} \lesssim \sum_{j=0}^{N} \mathrm{var}\, \mu_j$.

Поясним формулировку теоремы. Под мерой мы понимаем счетно-аддитивную функцию множества, мера не обязана быть положительной, может принимать комплексные значения. Символами ∂_1 и ∂_2 мы обозначили операторы дифференцирования по первой и второй координатам соответственно.

Пространство $W_2^{(\alpha,\beta)}$ есть пространство Соболева дробной гладкости, норма в нем задана формулой

$$\|f\|^2_{W_2^{(\alpha,\beta)}} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}|^2(\xi,\eta)(|\xi|^{2\alpha}+|\eta|^{2\beta})\,d\xi\,d\eta.$$

В случае $N = 2$, когда система (2) состоит из двух уравнений, теорема 1 превращается в неравенство

$$\|f\|_{W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}} \lesssim \|\partial_1^k f\|_{L_1} + \|\partial_2^l f\|_{L_1}.$$

Это неравенство является частным случаем теоремы вложения В. А. Солонникова из работы [1]. Теорема Солонникова есть обобщение классического вложения Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$ на случай анизотропной однородности, наиболее точный (по различным интерполяционным параметрам) результат в этом направлении принадлежит В. И. Коляде, см. работу [2]. Теорема 1 отличается от классических теорем вложения тем, что условие принадлежности пространству L_1 накладывается на линейные комбинации производных разных функций. Таким образом, это теорема вложения для *векторных полей*. Теоремы вложения такого типа активно исследуются в последнее десятилетие начиная с работы [3] Бургейна и Брезиса, см. обзор [4]. Однако до нашей работы все теоремы вложения такого типа были изотропно однородными. Теорема 1 является частным случаем теоремы ван Шафтингена из работы [5] в случае $k = l$ (когда однородность изотропна). Таким образом, теорема 1 обобщает и теорему Коляды, и теорему ван Шафтингена, и по-видимому, не может быть сведена к этим двум утверждениям.

Также в диссертации получен вариант теоремы 1 для функций на торе. Условие компактности носителя заменяется условием *правильности* функции. Обобщенную функцию на торе $\mathbb{T}^d$ мы называем правильной, если ее преобразование Фурье обнуляется на всех координатных плоскостях.

Доказательство теоремы 1 основано на одной билинейной оценке. Мы также изучали и другие билинейные неравенства типа теорем вложения.

Определение 1. Пусть k и l — натуральные числа, α и β — вещественные неотрицательные числа, а σ и τ — комплексные ненулевые числа. Символом $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ мы будем обозначать утверждение о том, что неравенство

$$\Big|\langle f,g\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)}\Big| \lesssim \big\|(\partial_1^k-\tau\partial_2^l)f\big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\,\big\|(\partial_1^k-\sigma\partial_2^l)g\big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \tag{3}$$

выполнено для всех функций f и g из класса Шварца.

Символом $\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}$ обозначено потенциальное пространство Бесселя, скалярное произведение в нем задано формулой

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi,\eta)\overline{\hat{g}(\xi,\eta)}|\xi|^{2\alpha}|\eta|^{2\beta}\,d\xi d\eta. \tag{4}$$

Оказалось, что истинность утверждения BE довольно сильно зависит от свойств чисел k, l, α, β, σ и τ. Важно разделять эллиптический и неэллиптический случаи.

Определение 2. Четверка чисел (k,l,σ,τ) называется эллиптичной, если многочлены $\xi^k-\sigma_1\eta^l$ и $\xi^k-\tau_1\eta^l$, $\tau_1=(2\pi i)^{l-k}\tau$, $\sigma_1=(-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$, не имеют вещественных корней, кроме 0.

В дальнейшем, τ_1 всегда обозначает $(2\pi i)^{l-k}\tau$, σ_1 всегда обозначает $(-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$, если не оговорено противное.

Теорема 2. *Пусть k и l — натуральные числа, а четверка (k,l,σ,τ) эллиптична. Утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ верно тогда и только тогда, когда одно из чисел k и l нечетно, $\alpha=\frac{k-1}{2}$, $\beta=\frac{l-1}{2}$, а числа σ_1 и τ_1 имеют ненулевые мнимые части одного знака.*

Таким образом, в предположении эллиптичности мы точно знаем, когда билинейные неравенства выполняются, а когда — нет. В неэллиптическом случае ситуация намного сложнее, имеются лишь частичные результаты.

Теорема 3. *Пусть числа k и l натуральны, одно из них нечетно, $k \neq l$. Предположим, что σ и τ — комплексные числа, такие что оба числа $\tau_1 = (2\pi i)^{l-k}\tau$ и $\sigma_1 = (-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$ вещественны. Тогда утверждение* $\mathrm{BE}(k, l, \frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}, \sigma, \tau)$ *верно.*

Отметим важное отличие результатов типа теоремы 1 от теорем 2 и 3. В двух последних теоремах слева в основном неравенстве фигурирует потенциальное пространство $\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}$, неформально принадлежность функции f этому пространству означает, что $\partial_1^{\alpha}\partial_2^{\beta} f$ есть квадратично-суммируемая функция. То есть, теоремы 2 и 3 устанавливают принадлежность некоторой одной смешанной производной пространству L_2 (на самом деле, все еще немного сложнее, так как речь идет о скалярном произведении двух функций). В теореме 1 же доказано вложение в пространство Соболева $W_2^{(k-\frac12-\frac{k}{2l}, l-\frac12-\frac{l}{2k})}$. Принадлежность функции f этому пространству неформально означает, что $\partial_1^{k-\frac12-\frac{k}{2l}} f$ и $\partial_2^{l-\frac12-\frac{l}{2k}} f$ суть квадратично-суммируемые функции. Нетрудно видеть, что отсюда следует, что при всяких α и β, таких что точка (α, β) — выпуклая комбинация точек $(k - \frac12 - \frac{k}{2l}, 0)$ и $(0, l - \frac12 - \frac{l}{2k})$, функция f принадлжит пространству $\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}$. Заключение теоремы 1 сильнее, чем заключения теорем 2 и 3 в том смысле, что принадлежность пространству L_2 утверждается про целый “отрезок из производных”, а не про одну производную (индекс которой, точка $(\frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2})$, безусловно, лежит на упомянутом отрезке). Все классические теоремы вложения (которые читатель может найти в книге [6] или работах [1, 2]) дают в результате вложение в пространство Соболева (или пространство Бесова), то есть, сразу “отрезок” (или “симплекс” в старших размерностях) производных. Билинейные оценки типа теорем 2 и 3 этим свойством принципиально не обладают, поэтому неясно, насколько их можно считать теоремами вложения.

Более похожи на теоремы вложения квадратичные неравенства, то есть неравенства вида

$$\|f\|^2_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \left\|(\partial_1^k - \tau\partial_2^l)f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \left\|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)g\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Для таких неравенств мы не смогли пока что получить аналог теоремы 2, однако в диссертации предъявлены серии параметров $(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$, для которых утверждение BE неверно, в то время как соответствующее квадратичное неравенство верно. Это показывает, что квадратичные неравенства представляют особый интерес.

Теперь перейдем к результатам о пространствах гладких функций. Для того, чтобы их сформулировать, нам понадобится несколько определений.

Определение 3. Пусть Λ — гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что гиперплоскость Λ положительна, если она пересекает все положительные координатные полуоси. В случае, если она не пересекает отрицательных полуосей, будем говорить, что гиперплоскость Λ неотрицательна.

Напомним читателю, что многогранником Ньютона полинома $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d} a_k\xi^k$ называется выпуклая оболочка точек $k \in \mathbb{Z}_+^d$ для которых $a_k \neq 0$. Многогранником Ньютона набора полиномов назовем выпуклую оболочку их многогранников Ньютона.

Определение 4. Пусть P — конечный набор полиномов в $\mathbb{R}^d$. Опорная гиперплоскость к выпуклому многограннику $\mathcal{N}(P)$ называется допустимой, если она положительна и не отделяет многогранник $\mathcal{N}(P)$ от начала координат.

Следующее определение обобщает понятие старшей однородного части полинома на случай анизотропной однородности.

Определение 5. Пусть $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_\ell\}$ — конечный набор полиномов в пространстве $\mathbb{R}^d$, Λ — допустимая гиперплоскость для этого набора. Многочлены, которые получаются из многочленов набора P выкидыванием мономов, степени которых не принадлежат Λ, называются Λ-старшими частями многочленов P_j.

Теорема 4. *Пусть $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_\ell\}$ — конечный набор полиномов в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что существует допустимая гиперплоскость Λ, такая что среди Λ-старших частей полиномов P_j, $j = 1, 2, \ldots, \ell$, есть две непропорциональных. Тогда пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$ не вкладывается дополняемо в пространство $C(K)$.*

Напомним читателю, что подпространство Y банахова пространства X называется дополняемым, если существует ограниченный линейный проектор из пространства X на пространство Y. В частности, из теоремы 4 следует, что пространство C^P не изоморфно пространству $C(K)$.

Эвристически, теорема утверждает, что если среди полиномов P_j в каком-то смысле нет старшего, то соответствующее пространство гладких функций не изоморфно пространству $C(K)$. В диссертации мы также получаем и утверждения противоположного толка: если старший полином есть и он в некотором смысле невырожден (эллиптичен), то пространство C^P изоморфно пространству $C(K)$. Теорема 4 имеет множество предшественников. В работах [7–9] доказывались частные случаи теоремы 4, когда полиномы P_j суть мономы (тогда пространство C^P можно трактовать как пространство функций определенной гладкости). Дальнейшее развитие темы привело к рассмотрению пространств C^P общего вида, в работах [10, 11] был доказан частный случай теоремы 4, когда допустимая плоскость ортогональна вектору $(1, 1, \ldots, 1)$, это как раз соответствует случаю изотропной однородности. В некотором смысле, теорема 4 завершает серию работ [7–11], придавая результату разумную общность.

Теорема 4 выводится из теоремы Гротендика об операторах из пространства типа $L_1(\mu)$ в гильбертово пространство и теоремы 1. На самом деле, обе упомянутые теоремы выводятся из некоторой абстрактной «теоремы вложения». Из нее есть другие интересные следствия, например, неравенство

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \big\|\partial_1 f\big\|_{L_1(\mathbb{R}^3)}\big\|(\partial_2^2 + \partial_3^2)f\big\|_{L_1(\mathbb{R}^3)},$$

имеющее простой вид, но, по-видимому, новое. Кроме того, упомянутое абстрактное обобщение позволяет доказывать вложения, когда производные функции (или их линейные комбинации) — не меры, а Фурье-следы мер старших размерностей на “двумерных поверхностях”. Поясним это на примере классического вложения Соболева с предельным показателем $W_1^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$. Зафиксируем некоторое измеримое отображение $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d-1}$. Пусть обобщенная функция $f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем такова, что

$$\xi_1\hat{f}(\xi_1,\xi_2) = \hat{\rho}_1(\xi_1,\Phi(\xi_2)); \quad \xi_2\hat{f}(\xi_1,\xi_2) = \hat{\rho}_2(\xi_1,\Phi(\xi_2)); \quad \rho_1,\rho_2\text{— меры на } \mathbb{R}^d.$$

В таком случае, $\|f\|_{L_2} \lesssim \operatorname{var}\rho_1 + \operatorname{var}\rho_2$.

Наконец, приведем наши результаты о гладкостях векторных мер. Гладкость меры мы будем измерять при помощи нижней размерности Хаусдорфа (в дальнейшем обозначаемой просто символом $\dim$).

Определение 6. Нижней размерностью Хаусдорфа меры μ на метрическом пространстве назовем инфимум чисел α, таких что существует борелевское множество F хаусдорфовой размерности не более α, удовлетворяющее условию $\mu(F) \ne 0$.

Теорема 5. *Пусть векторная мера $\mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d)$ на пространстве $\mathbb{R}^d$ такова, что для некоторой обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ и натуральных чисел m_j имеют место равенства $\partial_j^{m_j} f = \mu_j$, $j = 1,2,\ldots,d$. В таком случае,* $\dim\mu \geqslant d-1$.

Эту теорему можно рассматривать как проявление принципа неопределенности (см., например, книгу [12]). Классическая теорема братьев Рисс утверждает, что аналитическая мера ограниченной вариации на окружности (т.е. мера, у который коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю) абсолютно непрерывна по мере Лебега. Обобщить это утверждение на случай произвольной размерности позволяет знаменитая теорема Укиямы из работы [13]. Пусть $\theta : S^{d-1} \to \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ — бесконечно гладкое отображение. Предположим, что выполнено условие Укиямы: для всякого вектора $\xi \in S^{d-1}$ векторы $\theta(\xi)$ и $\theta(-\xi)$ не пропорциональны над $\mathbb{C}$. В таком случае, любая мера из класса $\mathcal{M}_\theta$, определяемого условием

$$\hat{\mu}(\xi) \parallel \theta\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big), \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^d$. Это утверждение по сути принадлежит Укияме (хотя он его не формулировал).

С другой стороны, из фольклора известно, что если $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$, то $\dim \nabla f \geqslant d-1$, например, см. лемму 3.76 в книге [14]. Переводя на наш язык, если $\mu \in \mathcal{M}_{i\,\mathrm{Id}}$, здесь Id — тождественное отображение на сфере, то $\dim \mu \geqslant d-1$. Войчеховский и М. М. Рогинская в работе [15] предложили следующую гипотезу.

Гипотеза 7. *Пусть $\theta : S^{d-1} \to \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ есть отображение класса C^∞. Если образ отображения θ содержит d линейно независимых векторов, то для всякой меры $\mu \in \mathcal{M}_\theta$ верно неравенство $\dim \mu \geqslant d-1$.*

В той же работе они показали, что если образ отображения θ содержит хотя бы два непропорциональных вектора, то $\dim \mu \geqslant 1$ для всех $\mu \in \mathcal{M}_\theta$. Их подход опирался на теорему братьев Рисс и некоторую оценку в пространстве L_2

Теорема 5 получена развитием метода Войчеховского и М. М. Рогинской.

Теорема братьев Рисс заменена усиленной леммой Фростмана, леммой 8, оценка же в L_2 — теоремой вложения. Отметим, что все утверждения о размерности, кроме теоремы 5, которые мы приводили — изотропно однородны, в то время как теорема 5 допускает анизотропную однородность. Остается открытым вопрос о необходимости однородности вообще в вопросах такого типа.

Усиленная лемма Фростмана представляет отдельный интерес. Это утверждение не попало в основные результаты диссертации, потому что оно выглядит уж очень естественным, и хоть автор и не нашел его в литературе, может быть неновым.

Лемма 8. *Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — неотрицательная гладкая функция с носителем в единичном шаре, зависящая только от евклидовой нормы аргумента и убывающая при его увеличении, такая что $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leqslant \frac{3}{4}$. Если борелевская комплекснозначная мера μ такова, что для любого набора $B_{r_j}(x_j)$ евклидовых шаров d-мерного пространства, таких что шары $B_{r_j}(x_j)$ попарно не пересекаются, для некоторых параметров α и β имеет место равномерная по набору шаров оценка*

$$\sum_j \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{r_j}(x_j + y)\, d\mu(y)\Big| \lesssim \big(\sum r_j^{\alpha}\big)^{\beta},$$

то $\dim \mu \geqslant \alpha$.

Символом φ_λ здесь обозначена функция $\varphi(\lambda^{-1}\cdot)$. Отличие нашей леммы от классической леммы Фростмана состоит в том, что наша версия позволяет работать с знакопеременными (или даже комплекснозначными) мерами.

Цитированная литература

1. Солонников В. А. *О некоторых неравенствах для функций из классов* $\vec{W}_p(R^n)$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 194–210.

2. Коляда В. И. *О вложении пространств Соболева* // Мат. зам. 1993. Т. 54, № 3. С. 48–71.

3. Bourgain J., Brezis H. *On the equation* $\operatorname{div} Y = f$ *and application to control of phases* // Journ. AMS. 2002. Vol. 16, no. 2. P. 393–426.

4. van Schaftingen J. *Limiting Bourgain–Brezis inequalities for systems of linear differential equations*: *Theme and variations* // Journ. fixed point th. appl. 2014. P. 1–25.

5. van Schaftingen J. *Limiting Sobolev inequalities for vector fields and canceling linear differential operators* // Journ. EMS. 2013. Vol. 15, no. 3. P. 877–921.

6. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* Москва: Наука, 1975.

7. Кисляков С. В., Сидоренко Н. Г. *Отсутствие локальной безусловной структуры в анизотропных пространствах гладких функций* // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 3. С. 64–77.

8. Kwapień S., Pełczyński A. *Absolutely summing operators and translation-invariant spaces of functions on compact abelian groups* // Math. Nachr. 1980. Vol. 94. P. 303–340.

9. Pełczyński A., Senator K. *On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical Banach spaces" and a Sobolev type embedding theorem* // Studia Math. 1986. Vol. 84. P. 169–215.

10. Кисляков С. В., Максимов Д. В. *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным набором дифференциальных операторов* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. Т. 327. С. 78–97.

11. Максимов Д. В. *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным набором дифференциальных операторов.* II // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2006. Т. 333. С. 62–65.

12. Havin V., Jöricke B. *The Uncertainty principle in harmonic analysis.* Springer, 1994.

13. Uchiyama A. *A constructive proof of the Fefferman–Stein decomposition of* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ // Acta Math. 1982. Vol. 148, no. 1. P. 215–241.

14. Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.* Oxford Math. Mon. 2000.

15. Roginskaya M., Wojciechowski M. *Singularity of vector valued measures in terms of Fourier transform* // Journ. Fourier Anal. Appl. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 213–223.

Список публикаций

- Кисляков С. В., Максимов Д. В., Столяров Д. М., *Пространства гладких функций, порожденные неоднородными дифференциальными выражениями*// Функц. ан. и его прил.. 2013. Т. 47, н. 2. Стр. 89–92.

- Столяров Д. М., *Билинейные теоремы вложения для дифференциальных операторов в* $\mathbb{R}^2$// Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 424. Стр. 210–235.

- Stolyarov D. M., Wojciechowski M., *Dimension of gradient measures*// C. R. Math. 2014. Vol. 352. Pp. 791–795.