На правах рукописи

Цыбышев Алексей Евгеньевич

Оснащенные соответствия Воеводского и их применения

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2020

Работа выполнена в лаборатории алгебры и теории чисел ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Панин Иван Александрович** доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ведущий научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук **Бондарко Михаил Владимирович** Санкт-Петербургский государственный университет, доцент
	доктор физико-математических наук **Горчинский Сергей Олегович** федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарский университет)

Защита состоится «_____» ________ ________г. в ________ на заседании диссертационного совета Д002.202.02 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru/ Автореферат разослан «_____» ________ 2020 г. Ученый секретарь диссертационного совета, д. ф.-м. н. А. В. Малютин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Вдохновленные идеями А.Гротендика и гипотезами А.Бейлинсона, В.Воеводский и А.Суслин развили в середине 90-х годов теорию мотивных когомологий. А Воеводский пошел дальше и построил триангулированную категорию мотивов $DM(k)$, и доказал все ее базовые свойства. В частности, каждому многообразию X был сопоставлен объект в этой категории, называемый мотивом X. Мотивом X оказался пучковый вариант его комплекса Суслина $C_*(X)$.

Построив триангулированную категорию мотивов $DM(k)$, Воеводский пошел еще дальше и стал строить нестабильную (совместно с Ф.Морелем) и стабильную мотивные гомотопические категории $H(k)$ и $SH(k)$ соответственно. Последние необходимы для многих целей. Во-первых, стабильная категория открывает путь к систематическому построению теорий когомологий на алгебраических многообразиях, теорий с заранее заданными свойствами. Например, Воеводский построил спектр алгебраических кобордизмов MGL, мотивный спектр Эйленберга-Маклейна и спектр алгебраической K-теории. Во-вторых, для определения и вычисления алгебры Стинрода для мотивных когомологий. Одной из главных целей Воеводского стало доказательство гипотезы Милнора, утверждающей, что канонический гомоморфизм $K_n^M(k)/2K_n^M(k) \to H^n(k, Z/2)$ является изоморфизмом. Эта программа была им успешно реализована, за что он был удостоен Филдсовской медали на ICM-конгрессе в Пекине.

В результате этой деятельности был создан новый математический язык и развиты методы, позволившие как атаковать многочисленные классические задачи, так и ставить естественные новые. Все это привело к тому, что целые школы математиков освоили предложенный язык и успешно применили его к решению ряда классических проблем, включая проблемы о проективных модулях, о квадратичных формах, о многообразиях Калаби-Яо. Возникла теория ориентированных когомологий на алгебраических многообразиях.

Отличительная черта триангулированной категории $SH(k)$ состоит в том, что в ней есть два функтора надстройки. Один — это функтор сдвига [1] (симплициальная надстройка), другой — смэш-произведение с «окружностью» Тейта $\mathbb{G}_m^{\wedge 1}$. Стоит отметить, что вычислять в стабильной мотивной гомотопические категории $SH(k)$ весьма трудно, поскольку она построена методом локализации по Бусфелду.

Поэтому Воеводский ввел в 2001 году категорию оснащенных (фрэйм) соответствий $\mathrm{Fr}_+(k)$, оснащенных предпучков и оснащенных пучков множеств.

Ввел с надеждой построить новую модель для $SH(k)$. Модель, более дружелюбную для вычислений.

Г.Гаркуша и И.Панин с помощью А.Ананьевского, А.Нешитова и А.Дружинина реализовали эту программу. В итоге первые два автора построили новую модель $SH^{fr}_{nis}(k)$ для $SH(k)$, полностью изгнав использование мотивных эквивалентностей из ее конструкции и сделав все вычисления в $SH^{fr}_{nis}(k)$ «локальными». Для этого в [GP] была развита теория фрэйм-мотивов. Ключевым объектом в их теории является введенный Воеводским симплициальный пунктированный оснащенный пучок $\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times -, X)$, где X — это гладкая схема или симплициальный объект в категории симлициальных схем. Один из фундаментальных результатов, полученных в [GP] — это мотивный вариант теоремы Сегала. А именно, канонический морфизм мотивных пространств

$$C_* \mathrm{Fr}(X) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)} \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X_+)$$

локально является групповым пополнением. Последняя теорема сводит вычисление $\mathbb{A}^1$-пучков стабильных гомотопических групп веса ноль для указанного X к вычислению пучков Нисневича обычных гомотопий симплициального пучка $\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times -, X)$. Это позволило А.Нешитову, в частности, передоказать чисто геометрическими методами теорему Ф.Мореля, утверждающую равенство $\pi^{\mathbb{A}^1}_{00}(k) = GW(k)$, где k – поле характеристики ноль.

Настоящая диссертация посвящена дальнейшему развитию и применению методов оснащенных соответствий. Таким образом тема диссертации актуальна.

В частности, мы далеко обобщаем указанный мотивный вариант теоремы Сегала из [GP] на пары. Для полноты картины отметим здесь одно следствие из этой нашей теоремы, не вошедшее в диссертацию, но очень хорошо указывающее на роль мотивных пространств $\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times -, X/U)$. Она вместе с одной теоремой М.Левина показывают равенство

$$\pi_r(\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X/U; \mathbb{Z}/n) = \pi_r^{stable}((X(\mathbb{C}), U(\mathbb{C})); \mathbb{Z}/n)$$

Здесь слева стоят обычные гомотопические группы с конечными коэффициентами симплициального множества $\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X/U)$, а справа — обычные стабильные гомотопии с теми же коэффициентами от пары топологических пространств $(X(\mathbb{C}), U(\mathbb{C}))$. Данная теорема является аналогом знаменитой теоремы Воеводского—Суслина для контекста мотивных стабильных гомотопий.

Цель работы

Сформулируем теперь основные результаты настоящей диссертации. Её первая глава посвящена изучению свойств фрейм-мотивов открытых пар гладких многообразий над бесконечным полем k. Вторая глава посвящена введению кобордизм-фрейм-соответствий и вычислениям с ними.

Основная цель в первой главе — доказательство мотивной теоремы Сегала в как можно большей общности. Гаркуша и Панин доказали такой результат для гладкой схемы X, которой в терминах пар соответствует $(X, \emptyset)$. Также из этого результата тривиальным образом получается результат для пар вида $(X \times \mathbb{A}^m, X \times (\mathbb{A}^m - 0))$, который имеет более простой вид. Соискатель рассматривал вначале случай пар, в которых дополнение к открытой подсхеме является гладким, что было мотивировано данным результатом, а также записками А. Мингазова [Min] по этой теме. В ходе исследования оказалось возможным доказать случай любой пары из открытой гладкой над полем схемы и ее всюду непустой открытой подсхемы. При этом характеристика поля предполагается отличной от 2.

Одной из задач на пути к основной цели первой главы являлось доказательство следующего промежуточного результата, представляющего самостоятельную ценность: теоремы о конусе для произвольных открытых пар гладких схем. Подобный результат доказан Гаркушей, Нешитовым и Паниным для пар вида $(X \times \mathbb{A}^m, X \times (\mathbb{A}^m - 0))$. Данное утверждение связывает в один выделенный треугольник мотивы гладкой схемы, ее открытой подсхемы и пары, которую они образуют, и позволяет вычислять инварианты одного из этих объектов через инварианты двух других.

Другая цель первой главы — доказательство локальной высшей связности фрейм-мотивов открытых пар в предположении, что сами пары обладают необходимой высшей связностью. Данная цель является логичным продолжением одной из задач на пути к основной цели, а именно, доказательства локальной 0-связности фрейм-мотивов связных открытых пар. В то же время, данное доказательство являет собой пример явного вычисления гомотопических инвариантов мотивов с использованием (по крайней мере, локально) явного геометрического вида фрейм-мотивов.

Основная цель во второй главе — вычисление нулевой группы гомологий комплекса линейных кобордизм-фрейм-соответствий из $\Delta^\bullet$ в ${\mathbb{G}_m}^{\wedge m}$. Данное вычисление мотивировано тем, что вычисляемый объект отождествлен с гомотопической группой $\pi_{m,m}^{\mathbb{A}^1}(MGL_\bullet)(pt)$ симметрического спектра кобордизмов. В работе Нешитова приведено подобное вычисление для обыкновенных фрейм-соответствий.

Методология и методы диссертационного исследования

В первой главе мы используем многие теоремы и технические утверждения о фрейм-мотивах и комплексах линейных фрейм-соответствий, разработанные в работах Ананьевского, Гаркуши, Нешитова и Панина. Кроме того, соискателем разработана оригинальная техника, позволяющая доказывать многочисленные леммы о сдвигах Именно эта новая техника и позволяет работать в общности произвольных пар.

Во второй главе мы используем метод доказательства, восходящий к вычислению мотивных когомологий точки Воеводским и Суслиным, с некоторыми содержательными особенностями. Для доказательства строится гомоморфизм сравнения из групп обыкновенных фрейм-соответствий в группы кобордизм-фрейм-соответствий (его можно понимать как гомоморфизм, индуцированный вложением сферического спектра $S_\bullet$ в $MGL_\bullet$).

$$H_0 - cob : H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m})) \to H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m})).$$

Используя геометрические методы, мы доказываем сюръективность этого гомоморфизма.

Так как левая группа это $K_m^{MW}(k)$, мы получаем сюръективный гомоморфизм

$$K_m^{MW}(k) \twoheadrightarrow H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m})).$$

Оказывается, что он пропускается через $K_m^M(k)$.

К индуцируемому сюръективному гомоморфизму

$$K_m^M(k) \twoheadrightarrow H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m}))$$

строится левый обратный. Корректность его определения проверяется при помощи закона взаимности Вейля. Наличие указанного левого обратного завершает наше доказательство.

Методология и методы диссертационного исследования

В первой главе мы используем многие теоремы технические утверждения о фрейм-мотивах и комплексах линейных фрейм-соответствий, разработанные в работах Ананьевского, Гаркуши, Нешитова и Панина. Кроме того, соискателем разработана оригинальная техника, позволяющая доказывать многочисленные леммы о сдвигах Именно эта новая техника и позволяет работать в общности произвольных пар.

Во второй главе мы используем метод доказательства, восходящий к вычислению мотивных когомологий точки Воеводским и Суслиным, с некоторыми содержательными особенностями. Для доказательства строится гомоморфизм сравнения из групп обыкновенных фрейм соответствий в группы кобордизм-фрейм-соответствий (его можно понимать как гомоморфизм, индуцированный вложением сферического спектра $S_\bullet$ в $MGL_\bullet$).

$$H_0 - cob : H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(pt, \mathbb{G}_m{}^{\wedge m})) \to H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m{}^{\wedge m})).$$

Используя геометрические методы, мы доказываем сюръективность этого гомоморфизма.

Так как левая группа это $K_m^{MW}(k)$, мы получаем сюръективный гомоморфизм

$$K_m^{MW}(k) \twoheadrightarrow H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m{}^{\wedge m})).$$

Оказывается, что он пропускается через $K_m^M(k)$.

К индуцируемому сюръективному гомоморфизму

$$K_m^M(k) \twoheadrightarrow H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m{}^{\wedge m}))$$

строится левый обратный. Корректность его определения проверяется при помощи закона взаимности Вейля. Наличие указанного левого обратного завершает наше доказательство.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказательство мотивной теоремы Сегала для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2, где U всюду непусто.

2. Доказательство теоремы о конусе для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2.

3. Доказательство локальной r-связности симплициального пучка $C_*Fr(-, (X, U))$для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2, где $X - U$ всюду имеет коразмерность более r.

4. Построение и обоснование изоморфизма между группой $H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m{}^{\wedge m}))$ и K-группой Милнора $K_m^M(k)$ над полем k характеристики 0.

Научная новизна

Все результаты настоящей диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть применены для явного вычисления гомотопических инвариантов открытых пар гладких схем, для перехода от гладких схем к открытым подсхемам или обратно, а также для вычислений, связанных со спектром кобордизмов. Материалы диссертации могут быть использованы для проведения спецкурсов и спецсеминаров по теме «Теория $\mathbb{A}^1$-гомотопий», «Алгебраическая K-теория», «Алгебраическая топология», «Алгебраическая геометрия».

Апробация работы

По результатам диссертационной работы были сделаны доклады на семинаре «Теория $\mathbb{A}^1$-гомотопий» в лаборатории Чебышева.

Публикации

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в печатных работах соискателя [an-pairs], [cob-Fr]. Все они вышли в журналах, входящих в список ВАК. Кроме того, некоторые результаты соискателя, не являющиеся основными результатами диссертации, включены в нее для полноты картины. Данные результаты опубликованы в препринтах [pairs], [MGL].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав (первая глава содержит 7 разделов, вторая — 5 разделов), и списка литературы, содержащего 29 наименований. Объем диссертации — 81 страница.

Содержание работы

Фрейм-мотивы пар

Пусть k — бесконечное совершенное поле характеристики, отличной от 2.

Следующее определение, данное в несколько большей общности, чем изначальное определение Воеводского и определение Гаркуши и Панина, является основополагающим в теории фрейм-соответствий.

Определение. (I) Пусть Y — схема, пусть $S \subset Y$ — замкнутое подмножество, и пусть U — схема. *Явное фрейм-соответствие уровня* $m \geqslant 0$ *из* U *в* $(Y, Y - S)$ состоит из наборов:

$$(Z, W, \varphi_1, \ldots, \varphi_m; g : W \to Y),$$

где Z это замкнутое подмножество в $U \times \mathbb{A}^m$, конечное над U (будучи понято как соответствующая приведенная схема), W это этальная окрестность Z в $U \times \mathbb{A}^m$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ это регулярные функции на W, g это регулярное отображение, такое, что $Z = Z(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \cap g^{-1}(S)$. Множество Z называется *носителем* явного фрейм-соответствия. Мы также используем четверки $c = (Z, W, \varphi; g)$ для обозначения явных фрейм-соответствий.

(II) Два явных фрейм-соответствия $(Z, W, \varphi; g)$ и $(Z', W', \varphi'; g')$ уровня m *эквивалентны*, если $Z = Z'$ и существует этальная окрестность W'' Z в $W \times_{\mathbb{A}^m_U} W'$, такая, что $\varphi \circ pr$ совпадает с $\varphi' \circ pr'$ и морфищм $g \circ pr$ совпадает с $g' \circ pr'$ на W''.

(III) *Фрейм-соответствие уровня* m *из* U *в* $(Y, Y - S)$ это класс эквивалентности явных фрейм-соответствий уровня m из U в $(Y, Y - S)$. Будем обозначать через $Fr_m(U, (Y, Y - S))$ множество фрейм-соответствий уровня m из U в $(Y, Y - S)$. Будем понимать его как пунктированное множество с отмеченной точкой $0_{(Y, Y-S), m}$ явного соответствия $(Z, W, \varphi; g)$ с $W = \emptyset$.

(IV) Если $S = Y$, то пунктированное множество $Fr_m(U, (Y, Y - S))$ совпадает с множеством $Fr_m(U, Y)$ фрейм-соответствий уровня m из U в Y.

(V) Обозначим при помощи $\sigma_{(Y,(Y-S))} : Fr_m(U, (Y, (Y - S))) \to Fr_{m+1}(U, (Y, (Y - S)))$ отображение, переводящее $c = (Z, W, \varphi; g)$ в $\sigma_{(Y,(Y-S))}(c) = (Z \times \{0\}, W \times \mathbb{A}^1, \varphi \circ pr_W, pr_{\mathbb{A}^1}; g)$. Положим $\sigma := \sigma_{(Y,(Y-S))}$ и назовем, подобно [GP, Определение 2.8], множество

$$Fr(U, (Y, (Y - S))) := \operatorname{colim}[Fr_0(U, (Y, (Y - S))) \xrightarrow{\sigma} Fr_1(U, (Y, (Y - S))) \xrightarrow{\sigma} \ldots]$$

множеством стабильных фрейм-соответствий из U *в* $(Y, (Y - S))$.

Определение. *Дав это определение, можно сразу же распространить [GP, Определения 8.3, 8.4, 8.5, и 8.7] на данную ситуацию, задавая линейные фрейм-соответствия* $\mathbb{Z}F_n(B, (X, U))$, *с внешним произведением на них, гомоморфизм надстройки* $\Sigma : \mathbb{Z}F_n(B, (X, U)) \to \mathbb{Z}F_{n+1}(B, (X, U))$, *стабильные линейные фрейм-соответствия* $\mathbb{Z}F(B, (X, U))$, *и линейный фрейм-мотив* $LM_{fr}((X, U))$.

Определение. *Для каждой пары* $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ *зададим* $(\mathbb{P}^1, \infty)$*-спектр* $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})$ *следующим образом*

$$M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}) = (C_*Fr(-, \mathbb{B}), C_*Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}), C_*Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge 2}) \cdots)$$

где структурные морфизмы –это $C_*(\sigma_n)$, *и где* σ_n *определены в [GP, Section 4].*

Имеется канонический морфизм $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектров

$$\varkappa: \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)} B \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}),$$

заданный тождественным морфизмом $\mathrm{id}_{\mathbb{B}} \in Fr_0(\mathbb{B},\mathbb{B})$. Возьмем фибрантную замену $C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n) \to C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n)_f$ каждого из мотивных пространств в соответствии с инъективной локальной модельной структурой. Мы тогда получим $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектр

$$M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f = (C_*Fr(-,\mathbb{B})_f, C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T})_f, C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^2)_f, ...).$$

Пусть

$$\varkappa_f: \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)} B \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}) \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$$

– это композиция морфизмов.

Чтобы сформулировать третий пункт нижеследующей теоремы, напомним еще одно определение.

Для $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектра E пусть $\mathcal{E}$ – это Ω-спектр мотивно стабильно эквивалентный E. Под $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(E)$ имеется ввиду мотивное пространство $\mathcal{E}_0$ (нулевое пространство $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектра $\mathcal{E}$). Если $E = \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\mathcal{X}$ – это $(\mathbb{P}^1,\infty)$-надстроечный спектр пунктированного мотивного пространства $\mathcal{X}$, то мы будем писать $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathcal{X})$, чтобы обозначить $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(E)$.

Соискателем доказано следующее обобщение данной теоремы [GP, Теорема 4.1] Гаркуши и Панина.

Теорема. *Пусть X — гладкая k-схема, S — замкнутая подсхема в X, не содержащая целиком компонент связности X. Рассмотрим пару $\mathbb{B} = (X, X-S) \in SmOp(Fr_0(k))$ и соответствующее ей мотивное пространство $B = X/(X-S) \in Shv_\bullet(Sm/k)$ Верно следующее:*

1. *Морфизм $\varkappa_f : \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(B) \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$ это стабильная мотивная эквивалентность $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектров.*

2. *$(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектр $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$ это мотивно фибрантный Ω-спектр. Это означает, что для каждого целого $n \geqslant 0$, каждое мотивное пространство $C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n))_f$ мотивно фибрантно в мотивной модельной категории Воеводского–Мореля [MV] симплициальных пучков Нисневича, и структурный морфизм*

$$C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n))_f \to \Omega_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}))_f)$$

это посхемная слабая эквивалентность.

3. Канонический морфизм симплициальных пучков Нисневича

$$C_*Fr(-,(X,X-S))_f \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X/(X-S))$$

является посхемной гомотопической эквивалентентностью . В частности, для любого расширения полей конечной степени трансцендентности K/k, канонический морфизм симплициальных множеств

$$C_*Fr(Spec(K),(X,X-S)) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X/(X-S))(Spec(K))$$

является слабой эквивалентностью.

Часть (1) Теоремы доказана в [GP, Подраздел 9.2], даже в большей общности. Часть (3) является прямым следствием частей (1) и (2). Часть (2) требует доказательства в нашем случае и является одним из основных результатов диссертации.

Напомним, что для открытой пары k-гладких схем (X,U) пучок S^1-спектров $M_{fr}(X,U)$ определяется как пучок спектров Сегала, соответствующий пучку Г-пространств $K \mapsto C_*\operatorname{Fr}(-,(X,U)\otimes K)$. Это определение распространяется и на симплициальные пары, тем самым, M_{fr} мы понимаем как функтор на категории симплициальных пар.

Следующая теорема, доказанная Гаркушей, Нешитовым и Паниным, является одним из решающих шагов к доказательству мотивной теоремы Сегала Гаркуши и Панина, а также является главным результатом их работы [GNP, Теорема 1.1]

Теорема. *(Гаркуша, Нешитов, Панин) Пусть k — бесконечное совершенное поле характеристики, отличной от 2. Для любой k-гладкой схемы $X \in Sm/k$ и любого $n \geqslant 1$, морфизм $\alpha^{\wedge n} : (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \to (\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_m)^{\wedge n}$ симплициальных объектов в $SmOp(Fr_0(k))$ индуцирует поуровневую Нисневич-локальную слабую эквивалентность S^1-спектров*

$$M_{fr}(id_X \times \alpha^{\wedge n}) : M_{fr}(X \times (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n}) \to M_{fr}(X \times T^n).$$

Более того, последовательность S^1-спектров

$$M_{fr}(X \times T^n \times \mathbb{G}_m) \to M_{fr}(X \times T^n \times \mathbb{A}^1) \to M_{fr}(X \times T^{n+1})$$

локально в топологии Нисневича является последовательностью кослоя.

Следующая теорема, доказанная соискателем, обобщает теорему Гаркуши, Нешитова и Панина, и является одним из решающих шагов в доказательстве мотивной теоремы Сегала для пар в формулировке, приведенной выше.

Благодаря переходу к произвольным парам, утверждение данной теоремы оказывается более геометрически содержательным, связывая k-гладкую схему с произвольной ее открытой подсхемой.

Теорема. *Пусть $char(k) \neq 2$. Пусть $S \subset X$ — замкнутая подсхема k-гладкой схемы. Положим $U = X - S$ и обозначим пару (X, U) через $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$, а пару $(\mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m)$ через $\mathbb{T}$. Рассмотрим канонические морфизмы $\alpha_{\mathbb{B}} : (X//U) \to \mathbb{B}$ и $\alpha_{\mathbb{T}} : (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m) \to \mathbb{T}$ в категории $\Delta^{op}Fr_0(k)$ Для любого $n \geqslant 0$ рассмотрим морфизм*

$$\alpha_{\mathbb{B}} \wedge \alpha_{\mathbb{T}}^{\wedge n} : (X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \to \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n},$$

определенный как в [GNP, Introduction]. Тогда индуцированный морфизм

$$M_{fr}(\alpha_{\mathbb{B}} \wedge \alpha_{\mathbb{T}}^{\wedge n}) : M_{fr}((X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n}) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})$$

является Nis-локально стабильной слабой эквивалентностью S^1-спектров.

Даже в случае $n = 0$, данная теорема является совершенно новым, и неочевидным утверждением. Ее можно переформулировать так: треугольник

$$M_{fr}(U) \to M_{fr}(X) \to M_{fr}((X, U))$$

Нисневич-локально выделен, то есть, имеет место вариант точной последовательности пары.

Следующее утверждение является примером приложения остальных результатов диссертации для явного вычисления мотивных гомотопических инвариантов открытых пар гладких схем.

Теорема. *Пусть $r > 0$, и $(X, U = X - S) \in SmOp(Fr_0(k))$ — такая пара, что $codim_{X_i}(S \cap X_i) > r$ в каждой связной (Или, что то же самое для k-гладкой схемы, неприводимой) компоненте $X_i \subseteq X$. Тогда симплициальный пучок $C_*Fr(-, (X, U))$ локально r-связен в топологии Нисневича.*

Кобордизм-фрейм-соответствия

В данной главе характеристика поля k предполагается равной 0.

Параллельно основному определению в теории фрейм-соответствий, данному в главе 1, приведем следующее определение, являющееся его модификацией.

Определение. *Пусть X — гладкое многообразие над полем k характеристики 0, а Y — предпучок на категории гладких многообразий над k. Явным кобордизм-фрейм соответствием уровня (n, N) из X в Y называется следующий набор данных:*

замкнутое подмножество $Z \subseteq \mathbb{A}^n_X$, конечное над X;

этальная окрестность $W \supset Z$ в $\mathbb{A}^n_X$;

регулярное отображение $\varphi\colon W \to \tau_{n,N}$, где $\tau_{n,N}$ — тотальное пространство тавтологического расслоения $\tau^{\mathrm{Sh}}_{n,N}$ над грассманианом $\mathrm{Gr}_{n,N}$. При этом требуется, чтобы подмножество $Z \subseteq W$ являлось прообразом нулевого сечения относительно φ;

морфизм $g\colon W \to Y$, или же $g \in \Gamma(W, Y)$.

Обозначим кратко такое соответствие набором (Z, W, φ, g), или одним символом c.

Два явных соответствия называются эквивалентными

$$(Z, W, \varphi, g) \sim (Z, W', \varphi', g'),$$

если они имеют общий носитель Z, и существует W'', являющаяся общим измельчением W и W' (что подразумевает морфизмы $i\colon W'' \to W$ и $i'\colon W'' \to W'$ над $\mathbb{A}^n_X$), такая, что $\varphi \circ i = \varphi' \circ i'$, $g \circ i = g' \circ i'$. Множество $Fr^{\mathrm{cob}}_{n,N}(X, Y)$ кобордизм-фрейм-соответствий уровня (n, N) из X в Y — множество классов эквивалентности по этому отношению эквивалентности.

Также дальнейшие построения, фундаментальные для теории фрейм-соответствий, переносятся на случай кобордизм-фрейм-соответствий.

Определение. *Множество стабильных кобордизм-фрейм-соответствий из X в Y $Fr^{\mathrm{cob}}(X, Y)$ — индуктивный предел $Fr^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X, Y)$ при $N \to \infty$ и $n \to \infty$ относительно следующих отображений:*

по N: $\tau_{n,n+N} \to \tau_{n,n+N+1}$, задаваемого на представленных функторах при помощи естественного преобразования

$$(\mathcal{O}^{n+N} \twoheadrightarrow E, s) \mapsto (\mathcal{O}^{n+N+1} \twoheadrightarrow E, s),$$

где последняя координата полученного эпиморфизма — ноль;

по n: $(Z, W, \varphi, g) \mapsto (Z', W', \varphi', g')$, где:

подмножество Z' задаётся как образ $Z \hookrightarrow \mathbb{A}^n \xhookrightarrow{i_2} \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^{1+n}$, где i_2 — вложение в качестве второго сомножителя, первая его координата — ноль;

окрестность W' задаётся как $\mathbb{A}^1 \times W$;

регулярное отображение φ', если φ задавалось $\mathcal{O}^{n+N} \twoheadrightarrow E$ и $s \in \Gamma(X, E)$, задаётся $\mathcal{O}^{1+n+N} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{n+N} \twoheadrightarrow \mathcal{O} \oplus E$ и сечением (x_{-n-1}, s), где x_{-n-1} — координатная функция $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{A}^1 \times W \to \mathbb{A}^1$;

морфизм g' — это $\mathbb{A}^1 \times W \to W \to Y$.

Определение. *Группа $\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X,Y)$ линейных кобордизм-фрейм-соответствий уровня $(n, n+N)$ из X в Y — абелева группа с образующими $Fr^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X,Y)$ и соотношениями*

$$[(Z, W, \varphi, g)] + [(Z', W', \varphi', g')] = [(Z \amalg Z', W \amalg W', \varphi \amalg \varphi', g \amalg g')] .$$

В частности, требуется, чтобы $Z \cap Z' = \varnothing$.

Замечание. *$\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X,Y)$ также является свободной абелевой группой, в которой в качестве базиса выступает множество тех соответствий, носитель которых связен.*

Определение. *Группа $\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y)$ линейных стабильных кобордизм-фрейм-соответствий из X в Y — индуктивный предел групп $\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X,Y)$ при $N \to \infty$ и $n \to \infty$.*

Подставляя в качестве X из предыдущего определения члены косимплициального объекта $\Delta^{\bullet}_{k} \times X$, получим комплекс $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y)$, который мы будем обозначать $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y)$.

Лемма. *Внутри группы $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X, \mathbb{G}_m{}^{\{1\ldots m\}})$ сумма подгрупп*

$$C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}\big(X, \mathbb{G}_m{}^{\{1\ldots\widehat{i}\ldots m\}}\big)$$

выделяется прямым слагаемым.

Определение. *Подобно [SV] и [Nes], прямое дополнение в*

$$C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}\big(X, \mathbb{G}_m{}^{\{1\ldots m\}}\big)$$

к сумме подгрупп

$$C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}\big(X, \mathbb{G}_m{}^{\{1\ldots\widehat{i}\ldots m\}}\big)$$

обозначается через $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X, \mathbb{G}_m{}^{\wedge m})$.

Чтобы сформулировать более полную форму основной теоремы, вводится ассоциативная структура внешнего произведения на группах $H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y))$, с помощью взятия прямой суммы расслоений. Эта конструкция аналогична [Nes, раздел 3].

Лемма. *Внешнее произведение явных кобордизм-фрейм-соответствий корректно задает ассоциативную операцию внешнего произведения*

$$H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y))\otimes H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X',Y')\big)\to H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X\times X',Y\times Y')\big).$$

А. Нешитов доказал теорему [Nes, Теорема 9.6], которая, опуская некоторые подробности, утверждает следующее.

Теорема. *(Нешитов) Пусть* $char(k)=0$. *Можно построить пару взаимно обратных изоморфизмов между кольцами* $K^{MW}_{*\geqslant 0}(k)$ *и* $H_0(C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(\Delta^\bullet_k,\mathbb{G}_m{}^{\wedge *}))$.

Следующая теорема, доказанная соискателем, является ее аналогом для кобордизм-фрейм-соответствий.

Теорема. *Пусть* $char(k)=0$. *Сопоставление символу* $\{g_1,\dots,g_m\}$ *соответствия уровня* 0, *то есть отображения*

$$\widetilde{\sigma}_m(g_1,\dots,g_m)\colon \mathrm{pt}\to\mathbb{G}_m^m,$$

задаваемого координатами $(g_1,\dots,g_m)$, *с последующим взятием класса этого соответствия в* $H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt},\mathbb{G}_m^{\wedge m}))$ *(сперва по стабилизации, потом по факторизации при переходе от* $\mathbb{G}^m$ *к* $\mathbb{G}^{\wedge m}$, *и, наконец, по отношению гомотопности), корректно задаёт гомоморфизм абелевых групп*

$$\sigma_m\colon K^M_m(k)\to H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt},\mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Вместе эти гомоморфизмы образуют гомоморфизм градуированных колец

$$\oplus\sigma_m\colon\ \bigoplus K^M_m(k)\to\bigoplus H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt},\mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Приведем для полноты картины один результат, не вошедший в основные результаты диссертации.

Теорема. *Пусть* $char(k)=0$. *Пусть* $MGL^{sym}_\bullet$ *— симметрический* T*-спектр алгебраических кобордизмов. Тогда*
$\pi_{-n,-n}(MGL^{sym}_\bullet)(pt)=K^M_n(k)$ *—* K*-группа Милнора.*

Этот результат, опирающийся на предыдущую теорему, можно сравнить со следствием из теоремы Нешитова. Теорема Нешитова, благодаря [GP, Следствие 11.3], порождает изоморфизм

$$\pi^{\mathbb{A}^1}_{-m,-m}(\Sigma^\infty_{S^1}\Sigma^\infty_{\mathbb{G}}(S^0))\simeq K^{MW}_m(k),$$

который является известным результатом, ранее полученным Ф. Морелем.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных изданиях

1. А. Цыбышев, «Кобордизм-фрейм-соответствия и K-теория Милнора», Алгебра и анализ, 32:1 (2020), 244–264.

2. Цыбышев А. «Мотивный аналог теоремы Сегала для пар (анонс)», Записки научных семинаров ПОМИ, Том 484, «Вопросы теории представлений алгебр и групп. 35», редакторы Н. А. Вавилов, А. И. Генералов, Б. Б. Лурье, стр.165.

Другие публикации автора по теме диссертации

1. Aleksei Tsybyshev, «A motivic Segal theorem for open pairs of smooth schemes over an infinite perfect field», arXiv:2003.06892 [math.AG].

2. А. Цыбышев, «Пучки гомотопий спектра $MGL_\bullet$ и кобордизм-фрейм-соответствия», Препринт ПОМИ 03/2020.

Список литературы

[Nes] *A. Neshitov*,2016, «FRAMED CORRESPONDENCES AND THE MILNOR–WITT K-THEORY», Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 1-30. doi:10.1017/S1474748016000190.

[SV] A. Suslin, V. Voevodsky, «Bloch–Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients», The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000), pp. 117-189.

[AGP] A. Ananyevskiy, G. Garkusha, I. Panin, 2016, «Cancellation theorem for framed motives of algebraic varieties», arXiv:1601.06642 [math.KT].

[GP] Garkusha, Panin, 2014, «Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky)», J. Amer. Math. Soc., to appear. DOI: 10.1090/jams/958, arXiv:1409.4372 [math.KT].

[GP2] Garkusha, Panin, 2015, «Homotopy invariant presheaves with framed transfers», Cambridge J. Math. 8(1) (2020), 1-94, arXiv:1504.00884 [math.AG].

[GNP] Garkusha, Neshitov, Panin, 2016, «Framed motives of relative motivic spheres», arXiv:1604.02732 [math.KT].

[MV] F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes, Publ. Math. IHES 90 (1999), 45-143.

[Min] A. A. Mingazov, «Some remarks on relative framed motives», 2019, arXiv:1911.04860.

[VoLec] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, «Lectures on motivic cohomology», 2006, Clay Mathematics Monographs, vol. 2.

[VoNotes] V. Voevodsky, «Notes on framed correspondences», unpublished, 2001.

[VoCongr] Voevodsky, V., «A^1-homotopy theory», Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), 1998.

[PSV] I. Panin, A. Stavrova, and N. Vavilov, «On Grothendieck-Serre's conjecture concerning principal G-bundles over reductive group schemes: I», *Compos. Math.*, 151(3):535–567, 2015.

[cob-Fr] А. Цыбышев, «Кобордизм-фрейм-соответствия и K-теория Милнора», Алгебра и анализ, 32:1 (2020), 244–264.

[an-pairs] Цыбышев А. «Мотивный аналог теоремы Сегала для пар (анонс)», Записки научных семинаров ПОМИ, Том 484, «Вопросы теории представлений алгебр и групп. 35», редакторы Н. А. Вавилов, А. И. Генералов, Б. Б. Лурье стр.165.

[pairs] Aleksei Tsybyshev, «A motivic Segal theorem for open pairs of smooth schemes over an infinite perfect field», arXiv:2003.06892 [math.AG].

[MGL] А. Цыбышев, «Пучки гомотопий спектра $MGL_\bullet$ и кобордизм-фрейм-соответствия», Препринт ПОМИ 03/2020.