На правах рукописи

ЦИЛЕВИЧ Наталия Владимировна

Асимптотическая теория унитарных представлений симметрических групп и ее приложения

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2015

Работа выполнена в лаборатории теории представлений и динамических систем Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

НЕРЕТИН Юрий Александрович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУ «Государственный научный центр Российской Федерации Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова»

РЕШЕТИХИН Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики», профессор Калифорнийского университета (Беркли, США)

ФЕЙГИН Борис Львович, доктор физико-математических наук, заведующий Международной лабораторией теории представлений и математической физики, профессор факультета математики НИУ «Высшая школа экономики»

Ведущая организация: ФГБУН Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук

Защита состоится «___»__________20__г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 на базе ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Автореферат разослан «___»___________2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физ.-мат. наук А. Ю. Зайцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена задачам асимптотической теории представлений, связанным, с одной стороны, с бесконечной симметрической группой $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, а с другой, с различными моделями и структурами фоковского пространства. Оба этих объекта играют ключевую роль как в самой теории представлений, так и в ее приложениях к математической физике. Группа $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ является простейшим примером «дикой» группы, и ее теория представлений во многом служит моделью для построения теорий представлений других таких групп. Классическая теория представлений конечных симметрических групп была инициирована работами Г. Фробениуса, И. Шура и А. Юнга и с самого начала играла важную роль для физики. Начало теории представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ положила работа Э. Тома, в которой найдены ее характеры. Идею систематического изучения представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ на основе индуктивного подхода выдвинул А. М. Вершик в рамках его общей программы асимптотической теории представлений; реализация этой идеи была начата в работах А. М. Вершика и С. В. Керова начала 1980-х гг.; в ее дальнейшем развитии активное участие принимали также Г. И. Ольшанский, А. Ю. Окуньков, А. М. Бородин, Ф. Биан и др.

Понятие фоковского пространства, введенное В. А. Фоком в контексте т. н. вторичного квантования еще в 1930-е гг. и играющее фундаментальную роль в физике, исходно было математически разработано в трудах Дж. фон Неймана, К. Фридрихса, Ф. А. Березина, И. Сигала, И. М. Гельфанда, В. Баргмана и др.; оно служит незаменимой основой для конструкций квантовой теории поля и теории представлений групп и алгебр (в частности, групп токов и алгебр Каца–Муди). Пространство Фока имеет много различных моделей и обладает богатством разнообразных структур, что превращает его в универсальный инструмент и позволяет применять для решения рассматриваемых задач широкое разнообразие методов, от чисто алгебраических до теоретико-вероятностных и квантовофизических.

Исследование связей между теорией представлений симметрических групп и теорией представлений групп и алгебр, играющих важную роль в физике, восходит к классическим работам, например, Г. Вейля. Одним из первых результатов в этом направлении является двойственность Шура–Вейля — фундаментальная теорема, связывающая неприводимые представления общей линейной группы $GL(l,\mathbb{C})$ и симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ в тензорной степени $(\mathbb{C}^l)^{\otimes N}$, где $\mathfrak{S}_N$ действует перестановками сомножителей, и играющая важную роль, например, в квантовой механике. В классическом варианте рассматривается только «статическая» двойственность Шура–Вейля, когда параметр N фиксирован. Однако в последнее время возник интерес к бесконечномерным версиям этой двойственности. Одна из таких версий рассмотрена в работе И. Пенкова и К. Стыркаса, где параметр N фиксируется, а n устремляется к бесконечности, что дает двойственность между представлениями алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ и группы $\mathfrak{S}_N$. С точки зрения асимптотической теории представлений бесконечной симметрической группы естественно, наоборот, фиксировать n и устремить N к бесконечности, получая двойственность между представлениями групп $SL(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$.

Что касается взаимосвязей теории представлений группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ с представлениями таких бесконечномерных алгебр, как алгебра Гейзенберга, алгебра Вирасоро, аффинные алгебры Ли, то ключевым фактом здесь является реализация фоковского пространства (в котором действуют канонические представления этих алгебр) в алгебре симметрических функций, впервые возникшая в работах киотской школы (М. Сато, М. Джимбо, Т. Мива и др.) по солитонным уравнениям. Различные аспекты таких взаимосвязей изучались, например, С. В. Керовым, А. Н. Кирилловым, Н. Ю. Решетихиным, И. Б. Френкелем, В. Вангом, А. Ласку, Б. Леклерком, Ж.-И. Тибоном; можно упомянуть также серию недавних работ Ю. Салёра, А. Гайнутдинова и др., содержащих гипотезы и результаты о связи представлений алгебры Вирасоро с представлениями алгебры Темперли–Либа (которые в рассматриваемых случаях по существу совпадают с представлениями симметрической группы).

Важным элементом асимптотической теории представлений является использование теории аппроксимативно-конечномерных алгебр, графов ветвления и канонической реализации групповой алгебры как скрещенного произведения. Графом ветвления неприводимых представлений симметрических групп является граф Юнга, а групповая алгебра бесконечной симметрической группы обладает естественной структурой скрещенного произведения, в которой роль коммутативной подалгебры играет алгебра Гельфанда–Цетлина — алгебра функций на пространстве $\mathbb{T}$ бесконечных таблиц Юнга. Таким образом, каждое неприводимое представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ с простым спектром задается эргодической квазиинвариантной мерой на $\mathbb{T}$ (которая называется спектральной мерой представления) и 1-коциклом на хвостовом отношении эквивалентности в этом пространстве со значениями в группе $\{\alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha\| = 1\}$. В исходных статьях А. М. Вершика и С. В. Керова и последующих работах относительно подробно были изучены лишь т. н. центральные меры, т. е. спектральные меры представлений с характерами, например мера Планшереля. Актуальной задачей является исследование спектральных мер других естественных классов представлений.

Еще одна важная структура фоковского пространства определяется его связью со случайными процессами Леви (процессами с независимыми значениями). Теория процессов Леви, беря начало в работах Б. де Финетти, А. Н. Колмогорова, П. Леви и А. Я. Хинчина по теории безгранично делимых распределений на прямой, оформилась в трудах И. М. Гельфанда и К. Ито, разработавших понятие обобщенного случайного процесса. Центральным примером процесса с независимыми значениями является винеровский процесс (гауссовский белый шум) α. Мера в пространстве реализаций этого процесса была описана Н. Винером в начале 1920-х гг. и в дальнейшем оставалась в центре внимания стохастического анализа и теории стохастических дифференциальных уравнений. В 1950-х годах стало ясно, что построение т. н. ортогональных разложений Винера–Ито–Камерона–Мартина в пространстве $L^2(\alpha)$ над белым шумом воспроизводит схему вторичного квантования и само пространство $L^2(\alpha)$ представляет собой реализацию пространства Фока. Более внимательный анализ показывает, что оба этих гильбертовых пространства имеют структуру т. н. факторизации, или непрерывного тензорного произведения, которая играет важную роль как в теории вероятностей, так и в теории представлений групп токов, моделях теории поля, алгебре и др. Понятие факторизации восходит к работам Дж. фон Неймана по тензорным произведениям и более подробно исследована в работе Х. Араки и Э. Дж. Вудса. Современный взгляд на теорию факторизаций развивается в работах А. М. Вершика и Б. С. Цирельсона. Простейший пример изоморфизма факторизаций, задаваемых процессами Леви, есть изометрия между пространствами L^2 над пуассоновским и гауссовским процессами. Аналогия между ортогональными структурами в этих пространствах отмечалась во многих работах, однако существование изометрии впервые было установлено А. М. Вершиком, И. М. Гельфандом и М. И. Граевым исходя из эквивалентности двух реализаций канонического представления групп токов; позже эта изометрия изучалась Ю. А. Неретиным в терминах голоморфной модели пространства Фока. Построению стохастических интегралов и аналогов разложения Винера–Ито для процессов Леви посвящено огромное множество работ начиная со статей Х. Огуры, А. Сегалла, Т. Кайлата, Д. Энгеля 1970-х гг. Комбинаторная сторона построения стохастических интегралов для широкого класса процессов рассмотрена в работе Дж. Роты и Т. Уоллстрома.

Одним из ключевых примеров процессов Леви является гамма-процесс. Он структурно связан с множеством других вероятностных объектов, таких как меры Пуассона–Дирихле, введенные Дж. Кингманом, возникающие в самых разнообразных задачах и изучавшиеся во многих десятках работ, и процессы Дирихле, введенные Т. Фергюсоном и играющие важную роль в непараметрической байесовской статистике. Ключевой факт квазиинвариантности гамма-процесса относительно бесконечномерной группы мультипликаторов был неявным образом установлен в той же серии статей А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева по представлениям групп токов и впоследствии получил развитие во множестве работ.

Третья глава диссертации посвящена применению теории представлений симметрических групп и тесно связанной с ней теории симметрических функций к исследованию некоторых физических моделей. Ключевую роль в наших рассмотрениях играет квантовый метод обратной задачи (КМОЗ), разработанный Л. Д. Фаддеевым и его школой (Л. А. Тахтаджян, П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, Н. Ю. Решетихин и др.), который представляет собой мощное средство исследования интегрируемых моделей. Рассматриваемые модели включают q-бозонную модель, введенную и решенную в работах Н. М. Боголюбова, Р. Буллоу и др., которая описывает систему сильно коррелированных бозонов на конечной одномерной решетке и играет важную роль в таких областях современной физики, как физика твердого тела и квантовая нелинейная оптика. Соответствующая q-бозонная (или q-осцилляторная) алгебра тесно связана с квантовой алгеброй $sl_q(2)$ и изучалась, например, П. П. Кулишом и Е. В. Дамаскинским. Лучше всего исследован частный случай $q = 0$ этой модели, который называется фазовой моделью и рассматривался, в частности, в работах Н. М. Боголюбова, А. Г. Изергина и Н. А. Китанина. Операторы, возникающих в КМОЗ для фазовой модели, связаны с формализмом вертексных операторов, применявшимся А. Окуньковым и Н. Решетихиным для вычисления корреляционных функций трехмерных диаграмм Юнга.

Изотропная цепочка (XXX-модель) Гейзенберга — одна из фундаментальных точно решаемых моделей квантовой механики, история которой насчитывает уже более 80 лет. С физической точки зрения интерес представляют собственные числа и собственные векторы ее гамильтониана в пределе при $N \to \infty$. Для ферромагнитной цепочки решение задачи дал Г. Бете. Для антиферромагнитной цепочки асимптотика $\frac{\lambda_N}{N} \to c_{\max} = 2\ln 2$ при $N \to \infty$ для энергии λ_N основного состояния цепочки с N узлами была впервые вычислена Л. Хюльтеном на основе эвристических соображений; строгое доказательство было получено Янгом и Янгом. Исследование этой модели с помощью КМОЗ (в более общем случае анизотропной цепочки) было осуществлено Л. Д. Фаддеевым и Л. А. Тахтаджяном. Подход к изучению гамильтониана изотропной цепочки Гейзенберга с использованием двойственности Шура–Вейля был одновременно с нами недавно применён Е. Мухиным, В. Тарасовым и А. Варченко.

Цель работы. Целью диссертации является решение на основе индуктивного подхода ряда задач теории представлений бесконечной симметрической группы и рассмотрение их приложений. Основными направлениями работы являются анализ некоторых классов представлений бесконечной симметрической группы и установление их связи с представлениями групп и алгебр, играющих важную роль в физике, таких как алгебра Вирасоро и аффинные алгебры Ли; применение теории представлений симметрических групп и тесно связанной с ней теории симметрических функций к изучению некоторых физических моделей; исследование фоковской структуры в пространствах квадратично интегрируемых функционалов от процессов с независимыми значениями и ее применение к теории представлений.

Основные результаты работы, выносимые на защиту, и научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Введен и изучен класс представлений Шура–Вейля бесконечной симметрической группы. Описана структура таких представлений, их спектральные меры относительно алгебры Гельфанда–Цетлина.

2. Доказано, что существует сохраняющий градуировку унитарный изоморфизм $\mathfrak{sl}_2$-модулей между т. н. серпантинным представлением бесконечной симметрической группы и базисным представлением аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Изучены свойства этого изоморфизма.

3. Введен класс марковских представлений бесконечной симметрической группы и доказано, что он совпадает с классом простых представлений (индуктивных пределов представлений конечных симметрических групп с простым спектром). Получена классификация и структурное описание представлений бесконечной симметрической группы, индуцированных с единичных представлений подгрупп Юнга. Изучены наиболее важные классы таких представлений, найдены их спектральные меры.

4. Доказано свойство квазиинвариантности гамма-процесса относительно большой группы мультипликаторов. Получены следствия этого результата для многочисленных объектов, структурно связанных с гамма-процессом (процессы Дирихле, меры Пуассона–Дирихле, бесконечномерная мера Лебега). Рассмотрены приложения к теории представлений групп токов.

5. Получены явные формулы (на уровне мультипликативных функционалов, ортогональных разложений, ядра) для изоморфизма гильбертовых фак-

торизаций, порождаемых гауссовским белым шумом и пуассоновским процессом на одном и том же базовом пространстве. Доказано, что гильбертова факторизация, порожденная произвольным процессом Леви, является фоковской. Получены явные формулы для соответствующих изометрий. Рассмотрены приложения к теории представлений групп токов.

6. Дана интерпретация квантового метода обратной задачи для q-бозонной модели в терминах алгебры симметрических функций. Доказано, что в случае фазовой модели ($q = 0$) оператор рождения совпадает (с точностью до скалярного множителя) с оператором умножения на производящую функцию полных симметрических функций, а волновые функции выражаются через функции Шура. В общем случае q-бозонной модели тот же результат имеет место с заменой функций Шура на симметрические функции Холла–Литтлвуда.

7. Исследованы асимптотические спектральные свойства оператора Кокстера–Лапласа — элемента групповой алгебры симметрической группы, тесно связанного с гамильтонианом изотропной цепочки Гейзенберга, — в естественных представлениях, в ферромагнитном и антиферромагнитном асимптотическом режиме.

Методы исследования. В работе применяются методы асимптотической теории представлений, основанные на систематическом использовании индуктивной структуры групп и алгебр. Важную роль играют связи теории представлений с математической физикой и теорией вероятностей, в том числе осуществляемые с помощью многочисленных структур в различных реализациях пространства Фока.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории представлений бесконечной симметрической группы; для дальнейшего исследования ее связей с теорией представлений аффинных алгебр Ли и алгебры Вирасоро, а также ее приложений к физическим моделям; для дальнейшего исследования свойств факторизаций, порожденных случайными процессами, и их приложений к теории представлений и теории вероятностей.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, представленные в диссертации, являются достоверными, математически строго доказанными фактами. Они докладывались и обсуждались, в частности, на следующих конференциях и семинарах: семинар исследовательской группы «Diskrete Strukturen in der Mathematik» (Билефельд, Германия, декабрь 2000 г.), семестр «Interaction and Growth in Complex Stochastic Systems» (Кембридж, Великобритания, октябрь 2003 г.), международная конференция «Geometry and Analysis on Random Structures» (Лилль, Франция, 25–28 мая 2004 г.), международная конференция «Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics» (С.-Петербург, 25–29 апреля 2005 г.), семинар «Geometry, Algebra, Singularities, Combinatorics» (Бостон, США, 26 марта 2010 г.), международная конференция «Dynamics, Combinatorics, Representations» (С.-Петербург, 31 августа–4 сентября 2015 г.), С.-Петербургский семинар по теории представлений и динамическим системам.

Публикации. Результаты исследований отражены в 14 работах [1]–[14], опубликованных в ведущих рецензируемых российских и международных изданиях и проиндексированных в международной реферативной базе данных MathSciNet.

Личный вклад автора. Все основные результаты, выносимые на защиту, принадлежат автору. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь материал, полученный автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 217 страниц, список литературы включает 185 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** приведен краткий исторический и библиографический обзор по тематике диссертации, представлены ее основные результаты, а также дана сводка часто используемых в тексте понятий и обозначений.

Первая глава диссертации посвящена изучению различных классов представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

В **§ 1.1** вводится и изучается т. н. класс *представлений Шура–Вейля.* Рассмотрим пространство $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ с естественным действием группы $\mathfrak{S}_N$ перестановками сомножителей и диагональным действием группы $SL(2,\mathbb{C})$, снабженное стандартным скалярным произведением, в котором оба представления унитарны. Изометрические вложения $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+2)}$, эквивариантные относительно обоих действий, назовем *вложениями Шура–Вейля.* Такие вложения при $N = 2n-1$ или $N = 2n$ параметризуются точками тора $(\mathbb{S}^1)^n$, где $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Рассмотрим *бесконечную* цепочку вложений Шура–Вейля $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 0} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes 4} \hookrightarrow \ldots$ или $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 1} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes 5} \hookrightarrow \ldots$ и соответствующий индуктивный предел Π представлений симметрических групп, который будем называть *представлением Шура–Вейля.*

Теорема 1.1. *Представление* Π *раскладывается в счетную прямую сумму примарных представлений* $\Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k \otimes M_{k+1}$, *где* Π_k *— индуктивный предел неприводимых представлений симметрических групп* $\mathfrak{S}_k, \mathfrak{S}_{k+2}, \ldots$, *соответствующих диаграммам Юнга* (k), $(k+1,1)$, $\ldots$, $(k+n,n)$, $\ldots$, *а* M_{k+1} *—* $(k+1)$*-мерное неприводимое представление группы* $SL(2,\mathbb{C})$, *и сумма берется по всем четным или нечетным* k. *Представление* Π_k *группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$

неприводимо (такие представления будем называть неприводимыми представлениями Шура–Вейля*).*

В **п. 1.1.2** находится спектральная мера неприводимых представлений Шура–Вейля Π_k. По последовательности $(h_0, h_1, \ldots) \in (\mathbb{S}^1)^\infty$, задающей такое представление, строится мера $\mu^{(k)}$ на пространстве бесконечных таблиц Юнга $\mathbb{T}$ как счетная сумма распределений некоторых случайных блужданий на $\mathbb{T}$.

Теорема 1.2. *Представление* Π_k *имеет простой спектр относительно алгебры Гельфанда–Цетлина, и* $\Pi_k(h) \simeq L^2(\mathbb{T}, \mu^{(k)})$.

Важный класс неприводимых представлений Шура–Вейля состоит из представлений, задаваемых однородными по N последовательностями вложений Шура–Вейля. Такое представление определяется числом $p \in [-1, 1]$.

Описанная схема имеет естественное обобщение: вместо обычных вложений Шура–Вейля следует рассматривать *обобщенные вложения Шура–Вейля*, т. е. изометрические вложения $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+2k)}$, $k \geq 1$, эквивариантные относительно действий групп $SL(2,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{S}_N$ (при стандартном вложении $\mathfrak{S}_N \hookrightarrow \mathfrak{S}_{N+2k}$).

В **§ 1.2** вводится *серпантинное представление* бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ — представление Шура–Вейля, построенное с помощью вложений $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+2)}$, индуцированных вложениями i_N таблиц Юнга, при которых образ $i_N(\tau)$ данной стандартной таблицы τ с N клетками (и не более чем двумя строками) есть стандартная таблица с $N+2$ клетками, полученная из τ добавлением элемента $N+1$ в первую строку и элемента $N+2$ во вторую строку. Бесконечные таблицы, являющиеся индуктивными пределами конечных таблиц относительно этих вложений (и образующие базис в пространстве H_Π серпантинного представления), назовем серпантинными.

Главным индексом конечной таблицы Юнга t называется величина $\mathrm{maj}(t) = \sum_{i \in \mathrm{des}(t)} i$, где $\mathrm{des}(t) = \{i \leq N-1 :$ элемент $i+1$ в t лежит ниже $i\}$

есть множество спуска таблицы $t \in T_N$. Для всех серпантинных таблиц τ определена величина $r(\tau) = \lim_{n\to\infty} r_{2n}([\tau]_{2n}) = \lim_{n\to\infty}(n^2 - \mathrm{maj}([\tau]_{2n}))$, которую будем называть *стабильным главным индексом.* Стабильный главный индекс задает градуировку $\deg_r$ на пространстве H_Π.

Рассмотрим аффинную алгебру Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, ее базисный модуль $L_{0,1}$ с однородной градуировкой $\deg_H$ и естественное вложение $\mathfrak{sl}_2 \subset \widehat{\mathfrak{sl}_2}$, задаваемое формулой $\mathfrak{sl}_2 \supset x \mapsto x \otimes 1 \in \widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Основным результатом § 1.2 является следующая теорема.

Теорема 1.3. *Существует сохраняющий градуировку унитарный изоморфизм $\mathfrak{sl}_2$-модулей между $(L_{0,1}, \deg_H)$ и $(H_\Pi, \deg_r)$.*

В **п. 1.2.3** более подробно исследуются свойства этого изоморфизма. В частности, следствие 1.2 показывает, что базис Гельфанда–Цетлина в серпантинном представлении является собственным базисом оператора Вирасоро L_0, а стабильные главные индексы таблиц Юнга суть его собственные значения. Упомянем также теорему 1.4, дающую явную формулу для соответствия между базисами в различных реализациях базисного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$.

В **§ 1.3** вводятся и рассматриваются *марковские представления* бесконечной симметрической группы. Меру M на пространстве бесконечных таблиц Юнга $\mathbb{T}$ назовем *марковской*, если случайная таблица $\tau = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, рассматриваемая как последовательность случайных величин λ_n, где λ_n принимает значения в множестве $\mathbb{Y}_n$ диаграмм Юнга с n клетками, является цепью Маркова в обычном смысле слова. Представление с простым спектром бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ называется *марковским*, если в пространстве представления существует циклический вектор, спектральная мера которого (относительно алгебры Гельфанда–Цетлина) является марковской. С другой стороны, *простым представлением* группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ называется индуктивный предел последовательности представлений конечных симметрических групп $\mathfrak{S}_n$, для каждого из которых разложение на неприводимые не имеет кратностей. Основной результат этого параграфа состоит в следующем.

Теорема 1.5. *Представление бесконечной симметрической группы является марковским тогда и только тогда, когда оно простое.*

В **§ 1.4** систематически рассматриваются представления бесконечной симметрической группы, *индуцированные с единичных представлений подгрупп Юнга.* Пусть $\Pi = (A_1, A_2, \ldots)$ — разбиение натурального ряда $\mathbb{N}$. Для $i = 1, 2, \ldots, \infty$ обозначим через $k_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ число таких j, что $|A_j| = i$. Мы говорим, что разбиение Π и соответствующая подгруппа Юнга $\mathfrak{S}_\Pi$ имеют *тип* $\mathbf{k} = (\infty^{k_\infty}, 1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots)$.

Пусть Π — разбиение с конечным числом конечных блоков, т. е. $N = k_1 + k_2 + \ldots < \infty$. Пусть конечные блоки — это $A_1, \ldots, A_n$, обозначим $\lambda = \lambda_{\mathrm{fin}}(\Pi) = 1^{k_1} 2^{k_2} \ldots$ диаграмму Юнга с N клетками, и пусть $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\Pi) = \mathfrak{S}_{A_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{A_n}$ — конечная подгруппа Юнга, соответствующая диаграмме λ. Положим $I_\Pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\Pi}^{\mathfrak{S}_\mathbb{N}} 1_{\mathfrak{S}_\Pi}$ и $I_{\mathrm{fin}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_N} 1_{\mathfrak{S}_\lambda}$. Обозначим через $\trianglerighteq$ естественное упорядочение на разбиениях: $\mu \trianglerighteq \lambda \iff \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i$ для всех $i \geq 1$.

Теорема 1.6. (а) *Представление* I_Π *имеет тип* I *и раскладывается в конечную сумму неприводимых;* (б) I_Π *неприводимо тогда и только тогда, когда* $k_1 + k_2 + \ldots \leq 1$*;* (в) $I_\Pi = \sum_{|\mu|=N,\, \mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \pi_\mu^{k_\infty}$*, где* $\pi_\mu^{k_\infty}$ *— неприводимое представление группы* $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$*, а* $K_{\mu,\lambda}$ *— числа Костки.*

Пусть теперь $I_\Pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\Pi}^{\mathfrak{S}_\mathbb{N}} 1_{\mathfrak{S}_\Pi}$, где Π таково, что $\sum_{j<\infty:\, k_j<\infty} k_j < \infty$ и $k_i = \infty$ хотя бы для одного $i \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\nu = \nu(\Pi)$ диаграмму Юнга, образованную размерами конечных блоков конечной кратности.

Теорема 1.7. (a) *Представление* I_Π *имеет тип* II. (b) I_Π *есть фактор-*

представление (типа II*) тогда и только тогда, когда диаграмма* $\nu(\Pi)$ *содержит не более одной строки.* (c) *Пусть* $N = |\nu(\Pi)|$. *Представление* I_Π *есть конечная сумма фактор-представлений типа* II*, параметризованных примарными компонентами представления* $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\nu(\Pi)}}^{\mathfrak{S}_N} 1$*, т. е. диаграммами Юнга* μ *с* $|\mu| = N$ *и* $\mu \trianglerighteq \nu(\Pi)$*.*

Оставшиеся два параграфа первой главы содержат результаты, относящиеся к другим важным классам представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$. **Параграф 1.5** посвящен исследованию представлений, индуцированных с двублочных подгрупп Юнга, а в **§ 1.6** дается явное описание изоморфизма между табличной и динамической моделью фактор-представлений группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$.

Вторая глава диссертации посвящена изучению свойств *обобщенных процессов Леви* — случайных процессов с независимыми значениями.

Обобщенный случайный процесс на вещественном топологическом векторном локально выпуклом пространстве $\mathcal{L}$ есть непрерывное линейное отображение $a \mapsto \langle a, \cdot \rangle$ из пространства $\mathcal{L}$ в пространство случайных величин на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Пусть (X, ν) — стандартное борелевское пространство с непрерывной конечной мерой ν и $\mathcal{F}$ — линейное пространство (классов $\mathrm{mod} 0$) ограниченных измеримых функций на X. Обобщенный случайный процесс на пространстве $\mathcal{F}$ называется *процессом с независимыми значениями*, если для любых функций $a_1, a_2 \in \mathcal{F}$, таких, что $a_1(x)a_2(x) = 0$ п. в., случайные величины $\langle a_1, \cdot \rangle$ и $\langle a_1, \cdot \rangle$ независимы. Процесс называется *однородным*, если он инвариантен относительно сохраняющих меру преобразований пространства (X, ν). Однородный случайный процесс с независимыми значениями будем называть *общим процессом Леви*.

Важный класс процессов Леви составляют обобщенные субординаторы. Рассмотрим класс мер Λ на полупрямой $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям

$\Lambda(0,\infty) = \infty$, $\Lambda(1,\infty) < \infty$, $\int_0^1 s d\Lambda(s) < \infty$, $\Lambda(\{0\}) = 0$. Пусть $\psi_\Lambda(t) = \exp\left(-\int_0^\infty (1-e^{-ts}) d\Lambda(s)\right)$ — преобразование Лапласа безгранично делимого распределения F_Λ с мерой Леви Λ. *Обобщенный субординатор* на пространстве (X,ν) с мерой Леви Λ есть обобщенный случайный процесс, распределение $P_\Lambda = P_\Lambda(\nu)$ которого имеет преобразование Лапласа $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\langle a,\eta\rangle\right)\right] = \exp\left(\int_X \log\psi_\Lambda(a(x)) d\nu(x)\right)$, где a — произвольная неотрицательная ограниченная борелевская функция на X. Распределение обобщенного субординатора сосредоточено на конусе $D^+ = \left\{\sum z_i\delta_{x_i} \in D :\ z_i > 0\right\}$ положительных конечных вещественных дискретных мер на X.

Гамма-процесс на пространстве (X,ν) с параметром $\theta > 0$ есть обобщенный субординатор на (X,ν) с мерой Леви Λ_θ, где $d\Lambda_\theta(z) = \theta z^{-1}e^{-z}dz$, $z > 0$.

Пусть $\mathcal{M}^+ = \left\{a : X \to \mathbb{R}_+ :\ \int_X |\log a(x)| d\nu(x) < \infty\right\}$. Функция $a \in \mathcal{M}^+$ задает мультипликатор $M_a : D_+ \to D_+$, где $M_a\eta = \sum a(x_i)z_i\delta_{x_i}$ при $\eta = \sum z_i\delta_{x_i}$.

Теорема 2.1. *Для любой функции $a \in \mathcal{M}^+$ гамма-мера $\mathcal{G}_\theta$ квазиинвариантна относительно мультипликатора M_a, и соответствующая плотность задается формулой*

$$\frac{d(M_a\mathcal{G}_\theta)}{d\mathcal{G}_\theta}(\gamma) = \exp\left(-\theta\int_X \log a(x) d\nu(x)\right)\cdot\exp\left(-\int_X\left(\frac{1}{a(x)}-1\right)d\gamma(x)\right).$$

Теорема 2.2. *Действие группы $\mathcal{M}^+$ на пространстве $(D^+,\mathcal{G}_\theta)$ эргодично.*

Далее в работе систематически рассматриваются различные объекты, связанные с гамма-процессом, и для них выводятся следствия указанных теорем. А именно, вводится семейство т. н. мультипликативных мер — σ-конечных мер $\mathcal{L}_\theta$, задаваемых экспоненциальной плотностью относительно распределений гамма-процессов и обладающих свойством проективной инвариантности, важным для теории представлений групп токов; вводится и изучается понятие конической и симплициальной части обобщенного субординатора и доказывается результат о квазиинвариантности распределений Пуассона–Дирихле относительно некоторого семейства марковских операторов; получается новое, исключительно простое и наглядное доказательство тождества Маркова–Крейна для распределения случайных средних от процессов Дирихле; разработанная теория применяется к построению удобной модели канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$.

Параграф 2.2 посвящен изучению структуры т. н. факторизации в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функционалов над общим процессом Леви.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ алгебру всех ограниченных линейных операторов на пространстве $\mathcal{H}$ и через $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ — решетку всех алгебр фон Неймана на $\mathcal{H}$.

Непрерывной гильбертовой факторизацией (типа I) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ называется отображение $\xi : \mathcal{A} \to \mathcal{R}(\mathcal{H})$, такое, что каждая алгебра операторов $\xi(A)$ является фактором типа I и при всех $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ выполняются следующие условия: $\xi(A_1 \wedge A_2) = \xi(A_1) \wedge \xi(A_2)$; $\xi(A_1 \vee A_2) = \xi(A_1) \vee \xi(A_2)$; $\xi(A') = \xi(A)'$; $\xi(0_\mathcal{A}) = \{\alpha \cdot \mathrm{Id}_\mathcal{H},\ \alpha \in \mathbb{C}\} = 1_\mathcal{H}$, где $\mathrm{Id}_\mathcal{H}$ — тождественный оператор в $\mathcal{H}$; $\xi(1_\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$; $\bigvee_{A \in S} \xi(A) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ для любого максимального идеала $S \subset \mathcal{A}$.

Если ξ — факторизация гильбертова пространства $\mathcal{H}$, то для каждого элемента $A \in \mathcal{A}$ существует подпространство $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$, такое, что для любого конечного разбиения $A_1, \ldots, A_n$ единичного элемента $1_\mathcal{A}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ выполняются равенства $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{A_n}$ и $\xi(A_k) = 1_{\mathcal{H}_{A_1}} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_{k-1}}} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_{A_k}) \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_{k+1}}} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_n}}$.

Факторизованные гильбертовы пространства $(\mathcal{H}_1, \xi_1)$ и $(\mathcal{H}_2, \xi_2)$ над булевыми алгебрами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ *изоморфны*, если существуют изоморфизм булевых алгебр $S : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ и изометрия гильбертовых пространств $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, такие, что $S \circ \xi_2 = \xi_1 \circ \bar{T}$, где $\bar{T} : \mathcal{R}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{R}(\mathcal{H}_2)$ — оператор в решетках алгебр фон Неймана, индуцированный изометрией T. Если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ и S — тождественный автоморфизм, то изоморфизм T называется *специальным*.

Пусть $(\mathcal{H}, \xi)$ — факторизованное гильбертово пространство над булевой алгеброй $\mathcal{A}$. Вектор $h \in \mathcal{H}$ называется *факторизуемым* (соответственно *аддитивным*), если для любого конечного разбиения $A_1, \ldots, A_n$ единичного элемента $1_{\mathcal{A}}$ существуют векторы $h_{A_i} \in H_{A_i}$, такие, что $h = h_{A_1} \otimes \ldots \otimes h_{A_n}$ (соответственно $h = h_{A_1} + \ldots + h_{A_n}$).

Пусть H — гильбертово пространство, и $\mathrm{EXP}\, H = S^0 H \oplus S^1 H \oplus \ldots \oplus S^n H \oplus \ldots$ — бозонное пространство Фока над H (здесь S — оператор симметризации). Пусть (X, ν) — пространство Лебега. Рассмотрим прямой интеграл гильбертовых пространств $\mathcal{K} = \int^{\oplus} K(x) d\nu(x)$, и пусть $\mathcal{H} = \mathrm{EXP}\, \mathcal{K}$. Для измеримого множества $A \subset X$ положим $H_A = \mathrm{EXP}\, \mathcal{K}(A)$, где $\mathcal{K}(A) = \int_A^{\oplus} K(x) d\nu(x)$, и $\xi(A) = \mathcal{B}(H_A) \otimes 1_{H_{A'}}$. Полученная гильбертова факторизация $(\mathcal{H}, \xi)$ (и любая факторизация, ей изоморфная) называется *фоковской факторизацией*. Если $\dim K(x) \equiv n$, то факторизация называется *однородной фоковской факторизацией размерности* n.

Пусть η — *общий процесс Леви* на стандартном борелевском пространстве $(X, \mathfrak{B})$ с непрерывной конечной мерой ν. Гильбертова факторизация ξ_η в пространстве $L^2(\eta)$ квадратично интегрируемых функционалов от процесса η задается формулой $\xi_\eta(A) = \mathcal{B}(H_A) \otimes 1_{H_{X \setminus A}} \subset L^2(\eta|_A)$, $A \in \mathfrak{B}$.

В частности, если α — *гауссовский белый шум* на пространстве Лебега (X, ν), т.е. обобщенный случайный процесс на $L^2(X, \nu)$ с характеристическим функционалом $\mathbb{E} e^{i\langle h, \cdot \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\|h\|^2}$, $h \in L^2(X, \nu)$, то пространство $L^2(\alpha)$ канонически изоморфно пространству Фока $\mathrm{EXP}\, H$, где $H = L^2(X, \nu)$, поэтому факторизация ξ_α является фоковской.

Пусть π — *точечный пуассоновский процесс* на (X, ν) (распределение которого сосредоточено на множестве $\mathcal{E}(X)$ точечных конфигураций на X) и ξ_π — соответствующая факторизация в пространстве $L^2(\pi)$.

Теорема 2.13. *Существует единственный сохраняющий единицу специальный вещественный*[1] *изоморфизм гильбертовых факторизаций ξ_α и ξ_π. Соответствующая изометрия $\Phi : L^2(\alpha) \to L^2(\pi)$ гильбертовых пространств задается следующей формулой на множестве мультипликативных функционалов: для произвольной функции $h \in L^2(X, \nu) \cup L^1(X, \nu)$*

$$\Phi : \quad e^{<h,\cdot> - \frac{\|h\|^2}{2}} \mapsto \prod_{x \in \omega} (1 + h(x)) \cdot e^{-\int h(x) d\nu(x)}, \qquad \omega \in \mathcal{E}(X).$$

В работе находится *ядро* этой изометрии, т. е. обобщенная функция $K(\omega, f)$ на $\mathcal{E} \times \hat{H}$, такая, что $(\Phi^{-1} F)(\cdot) = \int_{\mathcal{E}} K(\omega, \cdot) F(\omega) d\mathcal{P}(\omega)$ для каждого функционала $F \in L^2(\pi)$. Для простоты пусть $X = [0, 1]$ и ν есть мера Лебега (общий случай полностью аналогичен). Для $\omega \in \mathcal{E}(X)$ обозначим через $\Pi_{\leq 2}(\omega)$ множество разбиений множества ω на подмножества, состоящие не более чем из двух точек. Для $R \in \Pi_{\leq 2}$ обозначим через $C_k(R)$ множество k-точечных подмножеств в R, $k = 1, 2$, и положим $|R| = \# C_2(R)$.

Теорема 2.14. *Ядро канонического изоморфизма между $L^2(\alpha)$ и $L^2(\pi)$ задается следующей формулой*[2] *для п. в. ω, η:*

$$K(\omega, \eta) = e^{-\frac{1}{2} - \langle \eta, 1 \rangle} \sum_{R \in \Pi_{\leq 2}(\omega)} (-1)^{|R|} \prod_{z \in C_1(R)} (\eta + 2)(z) \prod_{\{x,y\} \in C_2(R)} \delta(x - y).$$

[1] Т. е. переводящий вещественное подпространство вещественнозначных функционалов от одного процесса в такое же подпространство для другого процесса.

[2] Здесь $\eta + 2$ есть обобщенная функция $\langle \eta + 2, h \rangle = \langle \eta, h \rangle + 2 \int h(t) dt$ и произведение есть прямое произведение обобщенных функций.

Кроме того, в работе получена явная формулировка канонического изоморфизма на уровне ортогональных разложений: доказано (следствие 2.6), что он переводит обобщенный функционал Эрмита в соответствующий обобщенный функционал Шарлье. В качестве следствия этот результат дает тождество для классических ортогональных многочленов.

Следствие 2.4. *Ортогональные многочлены Эрмита H_n^a и Шарлье C_n^a связаны тождеством*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x) C_n^a(k) a^n}{n!} = e^{-\frac{a}{2}-x} \frac{H_k^a(x+2a)}{a^k}.$$

В **п. 2.2.4** результаты о пуассон-гауссовском изоморфизме применяются к анализу факторизаций, порожденных общими процессами Леви η. Пусть Π — мера Леви–Хинчина процесса и $\alpha^{L^2(\mathbb{R},\Pi)}$ — $L^2(\mathbb{R},\Pi)$-значный белый шум на пространстве (X,ν).

Теорема 2.15. *Существует сохраняющая единицу изометрия (изоморфизм гильбертовых факторизаций) $\Phi : L^2(\alpha^{L^2(\mathbb{R},\Pi)}) \to L^2(\eta_\Pi)$. На множестве мультипликативных функционалов она задается следующей формулой: для любой функции $h \in L^2(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi) \cap L^1(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$*

$$\Phi : \quad e^{<h,\cdot>-\frac{\|h\|^2}{2}} \mapsto \prod_i (1 + h(x_i, t_i)) \cdot e^{-\iint h(x,t) d\nu(x) d\Pi(t)}.$$

Это единственный вещественный специальный сохраняющий вакуум изоморфизм гильбертовых факторизаций, тождественно[3] действующий на пространстве значений $L^2(\mathbb{R},\Pi)$.

[3]Под тождественным действием изоморфизма на пространстве значений имеется в виду, что он является изоморфизмом факторизаций над пространством $(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$.

Следствие 2.7. *Гильбертова факторизация, задаваемая процессом Леви* η, *является однородной фоковской факторизацией, причем ее размерность равна числу точек в носителе* $\operatorname{supp}\Pi$ *меры Леви–Хинчина.*

В работе приведены также явные формулы для леви-гауссовского изоморфизма в терминах ортогональных разложений (следствие 2.8).

Полученные результаты применяются для явного описания изоморфизма между моделями канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$ в фоковском пространстве и в пространстве L^2 над бесконечномерной мерой Лебега (теорема 2.16).

Третья глава диссертации посвящена применению теории представлений симметрических групп и тесно связанной с ней теории симметрических функций к исследованию некоторых моделей математической физики.

В **§ 3.1** изучается q-бозонная модель и ее частный случай фазовая модель. Рассмотрим бозонное пространство Фока $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H}$ — одномерное пространство, и будем обозначать вакуумный вектор в $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$ через $|0\rangle$, а нормированный n-частичный фоковский вектор через $|n\rangle$. Рассмотрим операторы $\phi, \phi^\dagger$ и N, которые действуют в $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$ как операторы фазы и оператор числа частиц соответственно: $\phi^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle$, $\phi|n\rangle = |n-1\rangle$, $\phi|0\rangle = 0$, $N|n\rangle = n|n\rangle$. Таким образом, ϕ есть односторонний сдвиг, и $\phi\phi^\dagger = 1$, $\phi^\dagger\phi = 1-\pi$, где π — вакуумный проектор: $\pi|0\rangle = |0\rangle$, $\pi|n\rangle = 0$ при $n \geq 1$.

Зафиксируем натуральное число M (число узлов решетки) и рассмотрим тензорное произведение $M+1$ копий $\mathcal{F}_i$, $i = 0, \dots, M$, пространства $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_M$. Обозначим через $\phi_i, \phi_i^\dagger, N_i$ операторы, которые действуют как $\phi, \phi^\dagger, N$ соответственно в $\mathcal{F}_i$ и тождественно на остальных пространствах.

Гамильтониан фазовой модели задается формулой

$$H_{\text{phase}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}(\phi_n^\dagger\phi_{n+1} + \phi_n\phi_{n+1}^\dagger - 2N_n)$$

с периодическими граничными условиями $M+1 \equiv 1$.

Следуя квантовому методу обратной задачи, рассмотрим L-матрицу $L_n(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & uI \end{pmatrix}$, $n = 0, 1, \ldots, M$, где u — скалярный параметр, а I — тождественный оператор в $\mathcal{F}$, и матрицу монодромии $T(u) = L_M(u)L_{M-1}(u)\ldots L_0(u)$ (матричное произведение); положим

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $|0\rangle_j$ вакуумный вектор в $\mathcal{F}_j$ и через $|0\rangle = \bigotimes_{j=0}^{M}|0\rangle_j$ глобальный вакуумный вектор в $\mathcal{F}$. Рассмотрим N-частичные векторы состояний вида $|\Psi_N(u_1,\ldots,u_N)\rangle = \prod_{j=1}^{N} B(u_j)|0\rangle$; согласно алгебраическому анзацу Бете, именно такой вид имеют собственные функции гамильтониана.

Базисные N-частичные векторы задаются формулой $\psi_{n_0,\ldots,n_M} = \bigotimes_{j=0}^{M}|n_j\rangle_j$, $n_0 + \ldots + n_M = N$; числа n_k называются *числами заполнения*. Сопоставим такому вектору диаграмму Юнга $\lambda = 1^{n_1}2^{n_2}\ldots$, имеющую n_j строк длины j, $j = 1,\ldots,M$, и соответствующую функцию Шура s_λ.

Пусть Λ_M (соответственно Λ_M^N) — подпространство алгебры симметрических функций Λ, порожденное функциями Шура s_λ с диаграммами, имеющими не более M столбцов (соответственно не более N строк и не более M столбцов). Оператор $B(u)$ переводит Λ_M^N в Λ_M^{N+1}. Положим $\mathcal{B}(u) := PB(u)P$, где P — проектор из $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_M$.

Основные результаты **п. 3.1.1** состоят в следующем.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathcal{B}(u) = u^{-M}\tilde{\mathcal{B}}(u)$. *Оператор* $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ *действует в* Λ_M *как оператор умножения на* $H_M(u^2)$, *где* $H_M(t) = \sum_{k=0}^{M} t^k h_k$ *— (усеченная) производящая функция полных симметрических функций* h_k.

Следствие 3.1. *Предел регуляризованных операторов рождения* $\tilde{\mathcal{B}}(u) = u^M\mathcal{B}(u)$ *на подпространстве положительной энергии* $\widehat{\mathcal{F}}$ *при* $M \to \infty$ *есть оператор умножения на* $H(u^2)$ *в алгебре симметрических функций* Λ.

Теорема 3.2. *Разложение волнового вектора* $|\Psi_N(u_1, \ldots, u_N)\rangle = \prod_{j=1}^{N} B(u_j)|0\rangle$ *по базисным векторам имеет вид*

$$|\Psi_N(u_1, \ldots, u_N)\rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda_M^N} s_\lambda(u_1^2, \ldots, u_N^2) \bigotimes_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j.$$

Лемма 3.1. *В пределе* $M \to \infty$ *оператор* $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ *представляется в виде вертексного оператора*

$$\tilde{\mathcal{B}}(u) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k}\alpha_{-k}\right),$$

где α_{-k}, $k = 1, 2, \ldots,$ *— операторы рождения свободных бозонов.*

Пусть теперь q — неотрицательный параметр. Рассмотрим *q-бозонную алгебру*, порожденную тремя операторами $B, B^\dagger, N$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям $[N, B] = -B$, $[N, B^\dagger] = B^\dagger$, $[B, B^\dagger] = q^{2N}$. Обозначим $[n] = \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}$, $[n]! = \prod_{j=1}^{n}[j]$. Рассмотрим пространство Фока $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$, где $\dim\mathfrak{H} = 1$. Будем использовать две различные реализации q-бозонной модели в $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$: в первой из них $B^\dagger|n\rangle = [n+1]|n+1\rangle$, $B|n\rangle = |n-1\rangle$, $B|0\rangle = 0$, $N|n\rangle = n|n\rangle$ и фоковские векторы нормированы таким образом, что $\langle n|n\rangle^2 = \frac{1}{[n]!}$. Во второй имеем $B^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle$, $B|n\rangle = [n]|n-1\rangle$, $B|0\rangle = 0$, $N|n\rangle = n|n\rangle$ и $\langle n|n\rangle^2 = [n]!$.

Теперь применим ту же схему, что и при рассмотрении фазовой модели:

рассмотрим пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_M$ и обозначим через $B_i, B_i^\dagger, N_i$ операторы, действующие как $B, B^\dagger, N$ соответственно в $\mathcal{F}_i$ и тождественно на остальных пространствах. При этом используется первая реализация q-бозонной алгебры при $i = 1, \ldots, M$ и вторая — при $i = 0$.

Гамильтониан q-бозонной модели имеет вид

$$H_{q\text{-boson}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{M} (B_n^\dagger B_{n+1} + B_n B_{n+1}^\dagger - 2N_n)$$

с периодическими граничными условиями $M + 1 \equiv 1$, а L-матрица задается формулами

$$L_0(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & B_0^\dagger \\ (1-q^2)B_0 & uI \end{pmatrix}, \qquad L_n(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & (1-q^2)B_n^\dagger \\ B_n & uI \end{pmatrix}, \ n > 0.$$

Базисному вектору с числами заполнения n_k сопоставим функцию Холла–Литлвуда $P_\lambda(x; q^2)$. Рассмотрим также функции $q_r(x; t) = (1-t)P_{(r)}(x; t)$, $r \geq 1$, $q_0(x, t) = 1$ и их производящую функцию $Q(u) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(x; t) u^r = \prod_i \frac{1 - x_i t u}{1 - x_i u} = \frac{H(u)}{H(tu)}$, где $H(u)$ — производящая функция полных симметрических функций. Положим $\mathcal{B}(u) = PB(u)P$, где P — проектор на подпространство положительной энергии. Пусть $\Lambda_M[q^2]$ — подпространство в $\Lambda[q^2]$, натянутое на функции $P_\lambda(x; q^2)$, диаграммы λ которых имеют не более M столбцов.

Основные результаты **п. 3.1.2**, описывающие КМОЗ для q-бозонной модели в терминах алгебры симметрических функций, представляют собой следующие утверждения.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{B}(u) = u^{-M} \tilde{\mathcal{B}}(u)$. Оператор $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ действует в $\Lambda_M[q^2]$ как оператор умножения на $Q_M(u^2)$, где $Q_M(t) = \sum_{k=0}^{M} t^k q_k(x; q^2)$.*

Следствие 3.2. *Имеется корректно определенный предел операторов $\tilde{\mathcal{B}}(u)$*

при $M \to \infty$. При реализации q-бозонной модели в алгебре симметрических функций он совпадает с оператором умножения на $Q(u^2) = \frac{H(u^2)}{H(q^2u^2)}$.

Теорема 3.4. *Пусть $|\Psi_N(u_1, \ldots, u_N)\rangle = \prod_{j=1}^N B(u_j)|0\rangle$ — волновая функция q-бозонной модели. Тогда*

$$|\Psi_N(u_1, \ldots, u_N)\rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda_M^N} Q_\lambda(u_1^2, \ldots, u_N^2; q^2) \bigotimes_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j.$$

В **§ 3.2** рассматриваются спектральные свойства *оператора Кокстера–Лапласа*, тесно связанного с гамильтонианом изотропной цепочки (XXX-модели) Гейзенберга. Этот гамильтониан действует в гильбертовом пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ и задается формулой

$$H = -J \sum_{n=1}^{N} \left[\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \right],$$

где оператор σ_n^a действует как матрица Паули σ^a в n-м пространстве $\mathbb{C}^2$ и как единичная матрица I в остальных сомножителях, а J — параметр ($J > 0$ соответствует т. н. ферромагнитной цепочке, а $J < 0$ — антиферромагнитной). Рассматриваются периодические граничные условия, т. е. $N + 1 \equiv 1$.

Обозначим через s_k кокстеровскую транспозицию $(k, k+1) \in \mathfrak{S}_N$ при $k = 1, \ldots, N-1$ и положим $s_N = (N, 1)$. *Оператор Кокстера–Лапласа* в симметрической группе $\mathfrak{S}_N$ есть оператор $L_N = Ne - (s_1 + \ldots + s_N)$, где e — тождественная перестановка.

Зафиксируем N, обозначим через π^{SW} представление группы $\mathfrak{S}_N$ в пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ и положим $L = \pi^{\mathrm{SW}}(L_N)$. Тогда $H = \frac{J}{4}(2L - N)$. Таким образом, операторы H и L имеют одни и те же собственные функции, и собственные значения E_j оператора H связаны с собственными значениями λ_j

оператора L формулой $E_j - E_0 = \frac{J}{2} \cdot \lambda_j$, где $E_0 = -JN/4$.

Под изучением оператора Кокстера–Лапласа в *ферромагнитном* асимптотическом режиме (**п. 3.2.1**) понимается анализ этого оператора в представлении $\varrho_N^r = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_{N-r}}^{\mathfrak{S}_N} 1$ при фиксированном r и $N \to \infty$; *антиферромагнитный* асимптотический режим (**п. 3.2.2**) соответствует рассмотрению представления $\varrho_{2n}^n = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{2n}}$ при $n \to \infty$.

Теорема 3.5. *Предельная плотность $p^{(k)}$ собственных значений оператора Кокстера–Лапласа в представлении ϱ_N^k при $N \to \infty$ есть свертка $p^{(k)}(u) = (\underbrace{p^{(1)} * \ldots * p^{(1)}}_{k})(u)$, $u \in [0, 4k]$, k копий функции $p^{(1)}$, где*

$$p^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}, \qquad x \in [0,4].$$

Пусть $A_N^{(k)}$ — матрица оператора Кокстера–Лапласа в представлении ϱ_N^k. Индуктивный предел этих представлений при $N \to \infty$ есть неприводимое представление $\rho^{(k)}$ бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, индуцированное с единичного представления подгруппы Юнга $\mathfrak{S}_{\{1,\ldots,k\}} \times \mathfrak{S}_{\{k+1,k+2,\ldots\}}$.

Предложение 3.2. *При $N \to \infty$ операторы $A_N^{(k)}$ слабо сходятся к некоторому оператору $A^{(k)}$ в пространстве представления $\rho^{(k)}$. В частности, $A^{(1)}$ есть бесконечная теплицева матрица с символом $a(p) = 2 - 2\cos p$.*

При рассмотрении антиферромагнитного асимптотического режима для простоты обозначений предполагается, что $N = 2n$ четно (случай нечетного N аналогичен).

Теорема 3.6. *Основное состояние антиферромагнитной цепочки Гейзенберга лежит в неприводимом представлении $\pi_{(n,n)}$ группы $\mathfrak{S}_N$ с диаграммой Юнга (n, n).*

Предложение 3.3, 3.4. *Предельное распределение собственных значений оператора* $\frac{1}{N}L_N$ *в представлении* $\pi_{(n,n)}$, *а также в индуцированном представлении* $\varrho_N^{N/2}$ *есть* $\delta_{1/2}$.

Следующая серия результатов представляет собой вычисление слабых пределов операторов Кокстера–Лапласа в естественных представлениях антиферромагнитного асимптотического режима. Индуктивный предел представлений $\varrho_N^{N/2}$ при $N \to \infty$ есть неприводимое «двублочное» *индуцированное* представление $\varrho^{\infty,\infty}$ бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ типа ∞^2, а именно представление, индуцированное с единичного представления подгруппы Юнга $\mathfrak{S}_{\{1,3,5,\dots\}} \times \mathfrak{S}_{\{2,4,6,\dots\}}$.

Предложение 3.5. *Слабый предел операторов* $\frac{1}{N}L_N$ *в индуцированных представлениях* $\varrho_N^{N/2}$ *при* $N \to \infty$ *есть тождественный оператор* E *в пространстве представления* $\varrho^{\infty,\infty}$.

Предложение 3.6. *Слабый предел операторов* $\frac{1}{N}L_N$ *в примарных представлениях* $\dim \pi_{(n,n)} \cdot \pi_{(n,n)}$ *при* $N \to \infty$ *есть скалярный оператор* $\frac{1}{2}E$ *в пространстве фактор-представления* $\rho_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2};0)}$ *группы* $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ *с параметрами Тома* $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\beta = 0$.

Замечание. Слабый предел операторов $\frac{1}{N}L_N$ в фактор-представлении с параметрами Тома $\alpha = (p, 1-p)$, $\beta = 0$ есть скалярный оператор с константой $1 - p^2 - (1-p)^2$.

Предложение 3.7. *Слабый предел операторов* $\frac{1}{N}L_N$ *в неприводимых представлениях* $\pi_{(n,n)}$ *при* $N \to \infty$ *есть скалярный оператор* $\frac{5}{4}E$ *в пространстве соответствующего элементарного представления* $\lim_{n\to\infty} \pi_{(n,n)}$.

Предложение 3.8. *Слабый предел операторов* $\frac{1}{N}L_N$ *в старшей компоненте* Π_1 *стационарного представления Шура–Вейля группы* $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ *с параметром* p

есть скалярный оператор $\phi(p)E$, где

$$\phi(p) = \frac{13}{12} + \frac{8}{6}p^4 - \frac{7}{6}p^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}p\sqrt{1-p^2}.$$

Максимально возможное значение $\phi(p)$ для рассматриваемого класса представлений соответствует $p = -0.95543\ldots$ и равно $c_{SW} = 1.3736684\ldots$

Известно, что максимальное собственное значение λ_N оператора $\pi_N(L_N)$ удовлетворяет соотношению $\frac{\lambda_N}{N} \to c_{\max} = 2\ln 2 = 1.38629436\ldots$. В следующей теореме показано, что, используя обобщенные вложения Шура–Вейля, можно построить представление с собственным числом, сколь угодно близким к $c_{\max}$.

Теорема 3.7. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$ и такая стационарная последовательность обобщенных вложений Шура–Вейля*

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_{1+2k} \subset \mathfrak{S}_{1+4k} \subset \ldots,$$

что слабый предел операторов $\frac{1}{N}L_N$ в старшей компоненте соответствующего обобщенного представления Шура–Вейля бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ есть скалярный оператор cE, где $c > c_{\max} - \varepsilon$.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Вершик А. М., Йор М., Цилевич Н. В.* О тождествах Маркова–Крейна и квазиинвариантности гамма-процесса // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2001. Т. 283. С. 21–36.

[2] *Вершик А. М., Цилевич Н. В.* Фоковские факторизации и разложения

пространств L^2 над общими процессами Леви // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, № 3(351). С. 3–50.

[3] *Вершик А. М., Цилевич Н. В.* Преобразование Фурье на бесконечной симметрической группе // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2005. Т. 325. С. 61–82.

[4] *Вершик А. М., Цилевич Н. В.* Марковские меры на таблицах Юнга и индуцированные представления бесконечной симметрической группы // Теор. вероятн. и примен. 2006. Т. 51, № 1. С. 47–63.

[5] *Вершик А. М., Цилевич Н. В.* Индуцированные представления бесконечной симметрической группы и их спектральная теория // Докл. Акад. наук. 2007. Т. 412, № 1. С. 7–10.

[6] *Цилевич Н. В.* Квантовый метод обратной задачи для q-бозонной модели и симметрические функции // Функц. анал. и прил. 2006. Т. 40, № 3. С. 53–65.

[7] *Tsilevich N. V.* Spectral properties of the periodic Coxeter Laplacian in the two-row ferromagnetic case // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2010. Т. 378. С. 111–132.

[8] *Tsilevich N. V.* On the behavior of the periodic Coxeter Laplacian in some representations related to the antiferromagnetic asymptotic mode and continual limits // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2011. Т. 390. С. 286–298.

[9] *Tsilevich N., Vershik A.* Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson–Dirichlet measures // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1999. Vol. 329. P. 163–168.

[10] *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* On different models of representations of the infinite symmetric group // Adv. Appl. Math. 2006. Vol. 37, no. 4. P. 526–540.

[11] *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* Induced representations of the infinite symmetric group // Pure Appl. Math. Q. 2007. Vol. 3, no. 4. P. 1005–1026.

[12] *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* Infinite-dimensional Schur–Weyl duality and the Coxeter–Laplace operator // Comm. Math. Phys. 2014. Vol. 327, no. 3. P. 873–885.

[13] *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* The serpentine representation of the infinite symmetric group and the basic representation of the affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ // Lett. Math. Phys. 2015. Vol. 105, no. 1. P. 11–25.

[14] *Tsilevich N., Vershik A., Yor M.* An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process // J. Funct. Anal. 2001. Vol. 185. P. 274–296.