На правах рукописи

Подпись

ЗАПОРОЖЕЦ Дмитрий Николаевич

Нули случайных полиномов, распределение алгебраических чисел и выпуклые оболочки случайных процессов

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена в ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук».

Официальные оппоненты:

БЕРНИК Василий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник «Института математики НАН Беларуси»;

БУФЕТОВ Александр Игоревич, доктор физико-математических наук, профессор РАН, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук»;

ТИХОМИРОВ Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Коми научный центр Уральского отделения Российской академии наук».

Ведущая организация: ФГБОУВПО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Защита состоится «____» ____________ 2017 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук», расположенном по адресу: наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук»: http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. *Подпись* Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертация относится к теории вероятностей, а именно к тем ее частям, в которых изучаются нули случайных полиномов, а также выпуклые оболочки случайных процессов, объединенных общей геометрической идеей, описанной во введении диссертации. Данный геометрический подход впервые изложен в работе Эдельмана и Костлана.

В диссертации решаются задачи асимптотического поведения вещественных и комплексных нулей случайных полиномов, а также случайных аналитических функций. Теория случайных полиномов и аналитических функций является бурно развивающимся разделом современной математики, связанным как с теорией вероятностей, так и с вещественным и комплексным анализом. Впервые данные задачи были рассмотрены такими известными математиками, как Блох, Пойа, Литтлвуд, Оффорд. Впоследствии, большой вклад в развитие теории внесли Ибрагимов, Маслова, Логан, Шепп и др. В частности, Шепп сформулировал гипотезу, которая была частична опровергнута автором диссертации.

Также большой интерес к данной тематике проявляют физики, так как, по их мнению, нули случайных полиномов близки по поведению к хаотическим квантовым системам. Так, Форрестер и Хоннер сформулировали гипотезу о том, что комплексные нули так называемых случайын полиномов Вейля асимптотически подчиняются круговому закону, широко известному в теории случайных матриц. Данная гипотеза получена в диссертаци как следствие более общего результата о предельном поведении нулей случайных аналитических функций.

Другой объект, изучаемый в диссертации, – выпуклая оболочка случайного процесса. В пионерских работах Судакова, Шеве и Цирельсона была найдена важная взаимосвязь между средним объемом выпуклой оболочки гауссовского процесса и геометрическими свойствами соответствующего выпуклого тела в гильбертовом пространстве. Данный подход был развит в диссертации для получения различных результатов как вероятностного, так и чисто геометрического характера. В частности, была найдена точная формула для среднего объема выпуклой оболочки многомерного броуновского моста, а также вычислены внутренние объемы различных бесконечномерных выпуклых компактов, включая единичные шары в полунормах соболевского типа и эллипсоиды в гильбертовом пространстве.

Хорошо известен классический результат Спарре Андерсена о том, что вероятность оставаться положительным для невырожденного симметричного одномерного блуждания за n шагов не зависит от распределения шага блуждания. В диссертации данный результат обобщается на многомерный случай, в терминах непоглощения выпуклой оболочкой блуждания начала координат.

Цель работы. Пусть даны вещественные числа $a < b$. Кривая моментов в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, заданная на интервале $[a, b]$, определяется параметрически следующим образом:

$$g(x) := (1, x, x^2, \dots, x^n).$$

Пусть дана линейная функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ вида $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$, где $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда значение функции f на кривой моментов g является полиномом степени n:

$$f(g(x)) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x^n.$$

Коническая оболочка кривой g

$$M := \{c \cdot g(x) : c \geq 0, x \in [a, b])$$

называется конусом моментов. Обозначим γ сферическую проекцию кривой моментов γ:

$$\gamma(x) := \frac{g(x)}{\|g(x)\|}.$$

Кривая моментов и конус моментов обладают множеством интересных геометрических свойств. Также существует следующая взаимосвязь данных объектов со случайными полиномами. Пусть даны стандартные гауссовские величины $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Рассмотрим случайный полином одной переменной

$$G_n(x) := \xi_0 + \xi_1 x + \cdots + \xi_{n-1} x^{n-1} + \xi_n x^n.$$

Пусть $\mu_{G_n}([a,b])$ обозначает среднее число вещественных нулей полинома G_n в интервале $[a,b]$. Эдельман и Костлан показали, что

$$\mathbb{E}\,\mu_{G_n}([a,b]) = \frac{1}{\pi}\lambda_1(\gamma(x) : x \in [a,b]),$$

где λ_1 обозначает длину кривой. Таким образом, среднее число вещественных нулей случайного полинома в фиксированном интервале совпадает с (нормированной) длиной соответствующего участка проекции кривой моментов на единичную сферу.

Далее, рассмотрим первый внутренний объем выпуклой оболочки кривой моментов

$$V_1(\mathrm{conv}(g(x) : x \in [a,b])),$$

который с точностью до нормировки совпадает со средней шириной. Из общего результата Судакова вытекает, что

$$\mathbb{E} \sup_{x\in[a,b]} G_n(x) = \sqrt{2\pi} V_1(\mathrm{conv}(g(x) : x \in [a,b])).$$

Тем самым, средний супремум случайного полинома G_n на фиксированном интервале совпадает (с точностью до нормировки) со средней шириной соответствующего участка кривой моментов.

Наконец, рассмотрим нулевой конический внутренний объем выпуклой оболочки кривой моментов $\upsilon_0(\mathrm{conv}(g([a,b]))$. В главе 4 диссертации получен конический аналог результата Судакова, из которого следует соотношение

$$\mathbb{P}[\inf_{x\in[a,b]} G_n(x) \geq 0] = \upsilon_0(\mathrm{conv}(g([a,b]))).$$

Из симметричности гауссовского распределения вытекает, что левая часть равна половине вероятности того, что у полинома G_n в интервале $[a,b]$ нет нулей.

Таким образом, данная вероятность определяется нулевым коническим внутренним объемом выпуклой оболочки соответствующего участка кривой моментов.

Вышеизложенные примеры показывают о наличии определенной связи между поведением нулей случайных полиномов (которые изучаются в главах 1 и 2) с гауссовскими коэффициентами и характеристиками определенных геометрических объектов. Данная связь в расширенной постановке, где вместо полиномов с гауссовскими коэффициентами рассматриваются общие гауссовские процессы, изучается в главе 4. Глава 3 посвящена одному интересному приложению теории случайных полиномов: в ней изучается предельное распределение алгебраических чисел фиксированной степени при стремлении высоты к бесконечности (данная задача была поставлена Малером).

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Наиболее значимые из них перечислены в следующем списке.

- Исследовано среднее число вещественных нулей случайных полиномов с независимыми одинаково распределенными коэффициентами без дополнительных ограничений на распределение коэффициентов. В частности, впервые получены универсальные оценки снизу и сверху.

- Изучено асимптотическое поведение комплексных нулей случайных полиномов с независимыми одинаково распределенными коэффициентами: получен критерий их равномерной концентрации около единичной окружности.

- Для широкого класса случайных аналитических функций найдено предельное распределение их нулей.

- Найдена предельная плотность распределения алгебраических чисел произвольной фиксированной степени.

- Вычислены первые внутренние объемы различных бесконечномерных выпуклых компактов, включая единичные шары в полунормах соболевского типа и эллипсоиды в гильбертовом пространстве.

- Получено многомерное обобщение формулы Спарре Андерсена.
- Найдено среднее число граней выпуклой оболочки многомерного случайного блуждания, зависящее только от размерности и числа шагов блуждания.

Апробация. Результаты диссертации неоднократно докладывались на международных конференциях: «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics» (Санкт-Петербург, 2005), «Workshop on conformal structures in Goettingen» (Геттинген, 2006), «8th German Open Conference on Probability and Statistics» (Аахен, 2008), «1st Northern Triangular Seminar» (Хельсинки, 2009), «Stochastic Analysis and Random Dynamical Systems» (Львов, 2009), «Free Probability and Related Random Structures» (Билефельд, 2010), «10th German Probability and Statistics Days» (Майнц, 2012), «Asymptotic Geometric Analysis II» (Санкт-Петербург, 2013), «Second International Conference Mathematics in Armenia. Advances and Perspectives» (Цахкадзор, 2013), «Stochastic Processes and High Dimensional Probability Distributions» (Санкт-Петербург, 2014), «11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics» (Вильнюс, 2014), «Persistence Probabilities and Related Fields» (Дармштадт, 2014), «Asymptotic Geometric Analysis III» (Санкт-Петербург, 2016), «Modern Problems in Theoretical and Applied Probability» (Новосибирск, 2016), «XII Belarusian Mathematical Conference BMC-2016» (Минск, 2016), а также на ряде семинаров по теории вероятностей и по анализу и теории функций: на городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А Стеклова РАН (2005-2017), на семинаре по комплексному анализу в Математическом институте им. В. А Стеклова РАН (2013), на большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ (2005, 2015), на заседании Санкт-Петербургского математического общества, а также в университетах Геттингена, Ульма, Билефельда, Мюнстера, Бохума, Оснабрюка.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 работах, список которых приведен в конце автореферата. Из этих работ статьи [1-16] опубликованы в журналах из списка ВАК (11 статей в российских журналах и 5 в ведущих зарубежных журналах).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из 4 глав. Общий объем работы – 393 страницы, библиография включает 224 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований.

Содержание первой главы. Пусть дан полином $g(x)$ одной вещественной переменной. Обозначим μ_g меру на $\mathbb{R}$, считающую нули g с учетом их кратности:

$$\mu_g := \sum_{x\in\mathbb{R}:g(x)=0} n_g(x)\delta_x.$$

Здесь $n_g(x)$ обозначает кратность нуля полинома в точке x, и δ_x обозначает единичную массу в точке x.

Пусть дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, принимающих значение в $\mathbb{R}$. Рассмотрим случайный полином одной переменной

$$G_n(x) := \xi_0 + \xi_1 x + \cdots + \xi_{n-1}x^{n-1} + \xi_n x^n.$$

Основной вопрос, который нас будет интересовать в данной главе, связан с оценкой величины $\mathbb{E}\,\mu_{G_n}(\mathbb{R})$: сколько вещественных нулей у случайного полинома G_n в среднем?

Первый содержательный ответ на данный вопрос получили Блох и Пойа. Они рассмотрели случай $\mathbb{P}[\xi_i = -1] = \mathbb{P}[\xi_i = 0] = \mathbb{P}[\xi_i = 1] = 1/3$, для которого показали, что для некоторой абсолютной постоянной C при всех n выполнено

$$\mathbb{E}\,\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \le C\sqrt{n}.$$

Далее Литтлвуд и Оффорд для нормально распределенных, равномерно распределенных на $[-1,1]$ и равномерно распределенных на $\{-1,1\}$ величин ξ_i показали, что для некоторой абсолютной постоянной C при всех n выполнено

$$\frac{C\log n}{(\log\log n)^2} \le \mathbb{E}\,\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \le 25(\log n)^2 + 12\log n.$$

Первый асимптотически точный результат был получен Кацем для нормальных и равномерно распределенных случайных величин:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mu_{G_n}(\mathbb{R})}{\log n} = \frac{2}{\pi}. \tag{1}$$

Впоследствии Ибрагимов и Маслова обобщили данную формулу на класс случайных величин, распределение которых принадлежит области притяжения нормального закона: для распределений с нулевым средним выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,[\mu_{G_n}(\mathbb{R})|G_n \not\equiv 0]}{\log n} = \frac{2}{\pi}.$$

Для распределений с ненулевым средним половина нулей “исчезает”:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,[\mu_{G_n}(\mathbb{R})|G_n \not\equiv 0]}{\log n} = \frac{1}{\pi}.$$

Примерно в это же время Логан и Шепп показали, что для случайных величин ξ_i с характеристической функцией распределения $e^{-|t|^\alpha}(0 < \alpha \le 2)$ справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mu_{G_n}(\mathbb{R})}{\log n} = c_\alpha,$$

где константа c_α была ими явно выписана. Эта оценка была распространена Ибрагимовым и Масловой на класс распределений, принадлежащих области притяжения устойчивого закона.

Шепп предложил следующую гипотезу: для любого невырожденного распределения ξ_0 существуют положительные числа c_1, c_2, такие что при всех n выполнено

$$c_1 \le \frac{\mathbb{E}\,\mu_{G_n}}{\log n} \le c_2.$$

Нижняя оценка была опровергнута в [4]: было построено невырожденное симметричное распределение коэффициентов, при котором среднее число вещественных нулей G_n ограничено равномерно по $n \in \mathbb{N}$ (а именно, $\mathbb{E}\,\mu_{G_n}(\mathbb{R}) < 9$). Возникает естественный вопрос: насколько можно улучшить оценку 9 в этом утверждении? Ответ на него дан в § 1.2 (также см. [7]).

Что касается верхней оценки из гипотезы Шеппа, то вопрос все еще остается открытым.[1] Однако в § 1.3 будет показано, что произвольный случайный полином не может иметь слишком много вещественных нулей с вероятностью единица (также см. [17]):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{G_n}(\mathbb{R})}{n} = 0 \quad \text{п.н.} \tag{2}$$

Для того, чтобы получить (1), Кац вывел явную формулу для среднего числа вещественных нулей случайного полинома с независимыми стандартными гауссовскими коэффициентами на интервале $[a, b]$:

$$\mathbb{E}\,\mu_{G_n}([a,b]) = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \left(1 - \left[\frac{nx^{n-1}(1-x^2)}{1-x^{2n}}\right]^2\right)(1-x^2)^{-1}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Подынтегральное выражение в правой части называется плотностью нулей случайного полинома. Данное понятие может быть обобщено следующим образом.

Распределение точечного процесса может быть описано с помощью его *корреляционных функций* (также известны как *совместные интенсивности*). Напомним, что случайная мера μ называется точечным процессом, если случайная величина $\mu(K)$ является целочисленной для любого компактного множества K,

[1] В январе 2016 г. вышел препринт работы группы авторов под псевдонимом Кен Сози, в котором доказана справедливость верхней оценки гипотезы Шеппа

что имеет место для считающей меры нулей μ_{G_n}. По определению, корреляционными функциями меры μ_{G_n} являются функции $\rho_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$, где $k = 1, \ldots, n$, такие что для любого набора попарно непересекающихся борелевских множеств $B_1, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} \mu_{G_n}(B_i)\right] = \int\limits_{B_1} \ldots \int\limits_{B_k} \rho_k(x_1, \ldots, x_k) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k.$$

Стандартным средством вычисления ρ_k является следующая расширенная формула Каца–Райса:

$$\rho_k(x_1, \ldots, x_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} |t_1 \ldots t_k| D_k(0, t_1, \ldots, t_k, x_1, \ldots, x_k) \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k, \tag{4}$$

где $D_k(\cdot, \cdot, x_1, \ldots, x_k)$ обозначает совместную плотность распределения случайных векторов

$$(G_n(x_1), \ldots, G_n(x_k)) \quad \text{и} \quad (G'_n(x_1), \ldots, G'_n(x_k)).$$

В § 1.4 мы выведем формулу для k-точечной корреляционной функции нулей случайного полинома, коэффициенты которого имеют произвольное абсолютно непрерывное распределение (также см. [8]). В § 1.5 мы обобщим (3) на гладкие гауссовские поля (также см. [5]).

Содержание второй главы. В данной главе нас будет интересовать поведение нулей случайных полиномов на всей комплексной плоскости. Пусть дан полином $g(z)$ одной комплексной переменной. Обозначим μ_g меру на $\mathbb{C}$, считающую нули g с учетом их кратности:

$$\mu_g := \sum_{z \in \mathbb{C}: g(z)=0} n_g(z) \delta(z).$$

Здесь $n_g(z)$ обозначает кратность нуля полинома в точке z, и $\delta(z)$ обозначает единичную массу в точке z.

Пусть дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, принимающих значения в $\mathbb{C}$. Рассмотрим случайный полином одной комплексной переменной

$$G_n(z) := \xi_0 + \xi_1 z + \cdots + \xi_{n-1} z^{n-1} + \xi_n z^n. \tag{5}$$

Как ведет себя случайная мера μ_{G_n} при $n \to \infty$? Для описания ее поведения нам понадобится понятие сходимости случайных вероятностных мер.

Борелевская мера μ на польском пространстве X называется локально конечной, если $\mu(A) < \infty$ для любого компактного подмножества $A \subset X$. Последовательность μ_n локально конечных мер на X грубо сходится к локально конечной мере μ, если для любой непрерывной функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ с компактным носителем выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi(z)\mu_n(\mathrm{d}z) = \int\limits_X \varphi(z)\mu(\mathrm{d}z). \tag{6}$$

Если μ_n и μ – вероятностные меры, грубая сходимость эквивалентна слабой сходимости, для которой (6) должно выполняться для всех непрерывных ограниченных φ. В дальнейшем под сходимостью локально конечных мер мы будем всегда понимать грубую (слабую для вероятностных мер) сходимость.

Последовательность случайных мер μ_n сходится к случайной мере μ *по вероятности* (соответственно, *п.н.*, по распределению), если (6) выполняется по вероятности (соответственно, п.н., по распределению) для всех непрерывных φ с компактным носителем.

Задача о распределении комплексных нулей случайного полинома возникла в работе Хаммерсли. Первый результат об асимптотическом поведении комплексных нулей G_n получили Шпаро и Шур. Для $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим функцию

$$f(t) := \Big[\underbrace{\log^+ \log^+ \dots \log^+ t}_{m+1}\Big]^{1+\varepsilon} \cdot \prod_{k=1}^{m} \underbrace{\log^+ \log^+ \dots \log^+ t}_{k},$$

где $\log^+ s := \max(0, \log s)$. Пусть $\mathbb{T}$ обозначает единичную окружность в $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Шпаро и Шур показали, что если для некоторых $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}^+$

$$\mathbb{E}\, f(|\xi_0|) < \infty,$$

то последовательность мер $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ слабо сходится по вероятности к равномерному вероятностному распределению на $\mathbb{T}$ при $n \to \infty$.

Данный результат будет усилен в § 2.2 (также см. [17]). Будет показана эквивалентность следующих утверждений:

(1) Последовательность мер $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ слабо сходится п.н. к равномерному вероятностному распределению на $\mathbb{T}$ при $n \to \infty$.

(2) $\mathbb{E}\,\log(1 + |\xi_0|) < \infty$.

Более того, будет показано, что для любого невырожденного распределения ξ_0 аргументы нулей распределены асимптотически равномерно с вероятностью единица.

Шепп и Вандербей рассмотрели случай вещественнозначных гауссовских стандартных коэффициентов и показали, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\,\mu_{G_n}\left(\left\{z \in \mathbb{C} : 1 - \frac{\delta}{n} \le |z| \le 1 + \frac{\delta}{n}\right\}\right) = \frac{1 + e^{-2\delta}}{1 - e^{-2\delta}} - \frac{1}{\delta}.$$

Ибрагимов и Зейтуни обобщили данный результат на случай произвольного распределения из области притяжения α-устойчивого закона:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\,\mu_{G_n}\left(\left\{z \in \mathbb{C} : 1 - \frac{\delta}{n} \le |z| \le 1 + \frac{\delta}{n}\right\}\right) = \frac{1 + e^{-\alpha\delta}}{1 - e^{-\alpha\delta}} - \frac{2}{\alpha\delta}. \qquad (7)$$

Интересно рассмотреть, что происходит при $\alpha \to 0$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1 + e^{-\alpha\delta}}{1 - e^{-\alpha\delta}} - \frac{2}{\alpha\delta}\right) = 0,$$

и естественным ограничением на распределение коэффициентов будет условие того, что хвост является медленно меняющейся функцией. В этом случае (7) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\,\mu_{G_n}\left(\left\{z \in \mathbb{C} : 1 - \frac{\delta}{n} \le |z| \le 1 + \frac{\delta}{n}\right\}\right) = 0.$$

Данный результат (в несколько более сильной форме) доказан в теореме 11 из § 2.3 (также см. [10]).

В отличие от концентрации вблизи единичной окружности, существуют случайные полиномы с совершенно иным асимптотическим поведением комплексных нулей. В [4] был приведен пример случайного полинома с независимыми одинаково распределенными коэффициентами, у которого в среднем $n/2+o(1)$ комплексных нулей концентрируется около начала координат и столько же нулей уходят на бесконечность при $n \to \infty$. Теорема 12 из § 2.3 (также см. [10]) обобщает данный результат: показано, что если распределение случайной величины $\log(1 + \log(1 + |\xi_0|))$ имеет медленно меняющийся хвост, то нули G_n асимптотически равномерно концентрируются около двух окружностей с центрами в начале координат. Окружности имеют радиусы $|\xi_0/\xi_\tau|^{1/\tau}$ и $|\xi_\tau/\xi_n|^{1/(n-\tau)}$, где ξ_τ обозначает максимальный по модулю коэффициент.

Как ведут себя нули, когда хвост распределения ξ_0 находится между двумя описанными выше случаями? В § 2.4 (также см. [13]) будет рассмотрен класс распределений, который в определенном смысле непрерывно соединяет эти два случая. Мы изучим переход от концентрации к деконцентрации нулей путем рассмотрения коэффициентов с хвостами вида $L(\log|t|)(\log|t|)^{-\alpha}$, где $\alpha \geq 0$ и L является медленно меняющейся функцией. Асимптотическая структура комплексных и вещественных нулей G_n будет описана в терминах наименьшей вогнутой мажоранты пуассоновского точечного процесса на $[0, 1] \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\alpha v^{-(\alpha+1)} \mathrm{d}u \mathrm{d}v$.

В § 2.5 (также см. [14]) рассматривается случайная аналитическая функция вида

$$G_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k f_{k,n} z^k,$$

где $f_{k,n}$ являются неслучайными комплексными коэффициентами. Предполагая, грубо говоря, что

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log f_{[tn],n} = u(t),$$

где $u(t)$ – некоторая функция, мы покажем, что мера $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ слабо сходится к некоторой неслучайной мере μ, описание которой будет дано в терминах преобразования Лежандра–Фенхеля функции u. Предельная мера универсальна, т.е. не зависит от распределения ξ_0. Данный результат будет применен к нескольким ансамблям случайных аналитических функций, включая ансамбли, соответствующие трем двумерным геометрическим моделям постоянной кривизны. Также мы выведем аналог матричного кругового закона для случайных полиномов.

Содержание третьей главы. Вещественное или комплексное число называется *алгебраическим*, если оно является нулем некоторого полинома с целочисленными коэффициентами.

Высота полинома

$$p(x) := a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

с целыми коэффициентами определяется как $H(p) := \max_{0 \le i \le n} |a_i|$.

Обозначим $\mathcal{P}(Q)$ класс всех полиномов с целочисленными коэффициентами степени не более n и высоты не более Q. Мощность данного класса равна $(2Q+1)^{n+1}$.

Полином с целочисленными коэффициентами называется *простым*, если он неприводим над $\mathbb{Q}$, примитивен (т.е. наибольший общий делитель коэффициентов равен единице) и его старший коэффициент положителен. Пусть $\mathcal{P}^*(Q)$ обозначает класс всех простых полиномов из $\mathcal{P}(Q)$.

Минимальным полиномом алгебраического числа α называется простой полином, нулем которого является α. При этом *степень* $\deg(\alpha)$ и *высота* $H(\alpha)$ числа α определяются как степень и высота этого минимального полинома.

Различные алгебраические числа называются сопряженными, если у них совпадает минимальный полином.

В данной главе мы всегда будем полагать степень n *фиксированной*, поэтому часто в обозначениях различных объектов мы не будем явно указывать зависимость от n (как, например, у классов $\mathcal{P}^*(Q), \mathcal{P}^*(Q)$). При этом нас будут интересовать различные асимптотические соотношения при $Q \to \infty$. Участвующие в них константы могут зависеть от n.

Мы будем использовать следующие обозначения: для неотрицательных функций f, g мы пишем $f \ll g$, если существует неотрицательная константа C_n (зависящая только от n), такая что $f \le C_n g$. Также мы обозначаем $f \asymp g$, если $f \ll g$ и $f \gg g$.

Одной из центральных задач теории диофантовых приближений является вопрос о том, насколько хорошо вещественное число x может быть приближено рациональными числами p/q. Так как $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, точность аппроксимации должна соотноситься со "сложностью" p/q, которая определяется как $|p| + |q|$. Первый общий результат в этой области принадлежит Дирихле: для любого *иррационального* x существует бесконечно много рациональных чисел p/q, таких что

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

С другой стороны, если $x = a/b$ рационально, то, как нетрудно видеть, для любого другого рационального числа $p/q \ne x$ выполнено

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \ge \frac{1}{bq}. \tag{8}$$

(Здесь и далее мы для определенности полагаем, что знаменатель рационального числа всегда положителен.) Таким образом, мы получили полезный критерий иррациональности: вещественное число, у которого бесконечно много хороших приближений рациональными числами, должно быть иррациональным. Это нас приводит к важному понятию: мы говорим, что положительное число M является *мерой иррациональности* вещественного числа x, если существует положительная постоянная $c(x, M)$, такая что для любого рационального числа $p/q \ne x$ выполнено

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \ge \frac{c(x, M)}{q^M}.$$

Таким образом, рациональными числами являются в точности те числа, для которых 1 является мерой иррациональности, а мера иррациональности любого иррационального числа больше либо равна 2.

Лиувилль обобщил (8), показав, что n является мерой иррациональности любого алгебраического числа степени n. Применив данный результат, он впервые доказал существование трансцендентных чисел (путем явного построения числа, у которого не существует конечной меры иррациональности).

Впоследствии было получено несколько улучшений теоремы Лиувилля. Окончательный результат в данном направлении принадлежит Роту, который показал, что любое число, большее 2, является мерой иррациональности любого алгебраического числа степени $n \geq 2$.

Диофантовы приближения обобщаются следующим естественным образом.

Рациональные числа являются алгебраическими числами степени 1. Зафиксируем некоторое n и рассмотрим задачу приближения вещественных чисел алгебраическими числами степени не более n. При этом опять аппроксимация должна соотноситься со "сложностью" алгебраического числа, которую мы будем измерять его высотой $H(\alpha)$.

Следуя Коксма, для данного вещественного числа x обозначим $\omega_n^*(x)$ супремум множества вещественных чисел ω, для которых существует бесконечно много вещественных алгебраических чисел α степени не больше n, таких что

$$|x-\alpha| \leq \frac{1}{H(\alpha)^{\omega+1}}.$$

Спринджук доказал, что почти все вещественные числа x (относительно меры Лебега) удовлетворяют $\omega_n^*(x) = n$ для любого натурального n. Бейкер и Шмидт в некотором смысле уточнили данный результат, показав, что алгебраические числа степени не более n образуют *регулярную систему*: существует постоянная c_n, зависящая только от n, такая что для любого интервала I для всех достаточно больших $Q \in \mathbb{N}$ существует не менее

$$c_n |I| \frac{Q^{n+1}}{(\ln Q)^{3n^2}}$$

алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ степени не более n и высоты не более Q, таких что

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geq \frac{(\ln Q)^{3n^2}}{Q^{n+1}}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Заметим, что количество алгебраических чисел степени не более n и высоты не более Q имеет порядок Q^{n+1} при $Q \to \infty$. Поэтому данный результат показывает, что для любого фиксированного n алгебраические числа распределены достаточно регулярно при большой высоте. Однако он описывает поведение только малой части из них. В связи с этим, Малер в своем письме к Спринджуку в 1985 году задал следующий вопрос: как распределены алгебраические числа фиксированной степени $n \geq 2$?

Один из возможных ответов на данный вопрос был дан Коледой. А именно, зафиксируем $n \geq 2$ и рассмотрим произвольный интервал $I \subset \mathbb{R}$. Пусть $\Phi_1(Q; I)$ обозначает количество алгебраических чисел $\alpha \in I$ степени не больше n и высоты не больше Q. Тогда

$$\Phi_1(Q; I) = \frac{(2Q)^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int\limits_I \rho_1(x) \mathrm{d}x + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \to \infty, \tag{9}$$

где $\zeta(\cdot)$ обозначает дзета-функцию Римана, а $l(n)$ определено как

$$l(n) := \begin{cases} 1, & n = 2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases} \tag{10}$$

Предельная плотность ρ_1 определяется формулой

$$\rho_1(x) := 2^{-n-1} \int\limits_{D_x} \left| \sum_{j=1}^{n} j t_j x^{j-1} \right| \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n, \tag{11}$$

где область интегрирования D_x определяется следующим образом:

$$D_x := \left\{ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \max_{1 \leq k \leq n} |t_k| \leq 1, \ |t_n x^n + \cdots + t_1 x| \leq 1 \right\}.$$

Если $x \in [-1 + 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2}]$, то (11) можно упростить следующим образом:

$$\rho_1(x) = \frac{1}{12} \left(3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 x^{2k} \right).$$

Функция ρ_1 совпадает с плотностью нулей случайного полинома

$$G(x) := \xi_0 + \xi_1 x + \cdots + \xi_{n-1} x^{n-1} + \xi_n x^n, \tag{12}$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на $[-1, 1]$ (см. раздел 1.4.2). Напомним, это означает, что для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{E}\, \mu_G(B) = \int\limits_B \rho_1(x) \mathrm{d}x,$$

где $\mu_G(B)$, как обычно, обозначает число нулей G, лежащих в B.

В § 3.3 (также см. [9]) будет получен аналог формулы (9) для *комплексных* алгебраических чисел. В § 3.4 (также см. [8]) мы обобщим (9) на наборы из k сопряженных алгебраических чисел, показав, что асимптотическое поведение числа данных наборов описывается с помощью k-точечной корреляционной функции вещественных нулей полинома (12), которая была найдена в разделе 1.4.2 (также см. [8]).

Пусть дан полином

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_n (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$$

степени n. Временно будем полагать, что его коэффициенты являются произвольными вещественными или комплексными числами.

Обозначим

$$\Delta(p) := \min_{1 \le i < j \le n} |\alpha_i - \alpha_j| \tag{13}$$

минимальное расстояние между нулями p.

В своей знаменитой работе Малер доказал, что

$$\Delta(p) \ge \sqrt{3} n^{-(n+2)/2} \frac{|\mathrm{D}(p)|^{1/2}}{(|a_n| + \cdots + |a_0|)^{n-1}}, \tag{14}$$

где

$$\mathrm{D}(p) := a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \tag{15}$$

обозначает дискриминант полинома $p(x)$. Эквивалентно $\mathrm{D}(p)$ можно определить как следующий определитель $(2n-1)\times(2n-1)$-матрицы:

$$\mathrm{D}(p) := (-1)^{n(n-1)/2}$$
$$\times \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Из (16) сразу следует, что

$$|\mathrm{D}(p)| \ll H(p)^{2n-2}. \tag{17}$$

Данная оценка верна для произвольных полиномов. Начиная с данного момента, мы опять будем рассматривать только полиномы с целочисленными коэффициентами.

В своей работе Малер отметил, что так как условие $\mathrm{D}(p) \neq 0$ влечет $|\mathrm{D}(p)| \geq 1$, то из (14) немедленно вытекает

$$\Delta(p) \gg H(p)^{-n+1} \tag{18}$$

при условии, что p не имеет кратных нулей. До сих пор оценка (18) является наилучшей из известных оценок снизу. Однако для $n \geq 4$ все еще неизвестно, насколько данная оценка отличается от оптимальной. Обозначим κ_n инфимум по таким κ, для которых

$$\Delta(p) > H(p)^{-\kappa}$$

выполняется для всех полиномов степени n с целочисленными коэффициентами, без кратных нулей и достаточно большой высоты $H(p)$. Легко видеть, что (18) эквивалентно $\kappa_n \leq n - 1$. Также довольно простым упражнением является проверка того, что $\kappa_2 = 1$. Эвертсе показал, что $\kappa_3 = 2$.

Для $n \geq 4$ известны только оценки κ_n. Сначала Мигнотте доказал, что $\kappa_n \geq n/4$ для $n \geq 2$. Позже Бюжо и Мигнотте показали, что $\kappa_n \geq n/2$ для четных $n \geq 4$ и $\kappa_n \geq (n+2)/4$ для нечетных $n \geq 5$. Вскоре после этого Бересневич, Берник и Гетце, используя совершенно иной подход, улучшили данный результат в случае нечетного n: они получили (в качестве следствия из более общего результата), что $\kappa_n \geq (n+1)/3$ для $n \geq 2$. Недавно Бюжо и Дюджелла достигли значительного прогресса, показав что $\kappa_n \geq (2n-1)/3$ при $n \geq 4$.

Вышеприведенные результаты отвечают на следующий вопрос: "Как близко друг к другу могут располагаться два сопряженных алгебраических числа степени n?" Грубо говоря, если мы рассмотрим полином p^*, минимизирующий $\Delta(p)$ среди всех полиномов с целочисленными коэффициентами степени n, одинаковой высоты и без кратных нулей, тогда $\Delta(p^*)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$H(p^*)^{-c_1 n} \ll \Delta(p^*) \ll H(p^*)^{-c_2 n}$$

для некоторых абсолютных констант $0 < c_2 \leq c_1$. В § 3.5 (также см. [11]) вместо рассмотрения экстремального полинома p^* мы изучим поведение $\Delta(p)$ для "типичного" полинома p с целочисленными коэффициентами. Мы докажем, что для "большинства" полиномов с целочисленными коэффициентами (точная формулировка дана в разделе 3.5.1) выполнено

$$\Delta(p) \asymp 1.$$

Мы также покажем, что данная оценка имеет место для "большинства" неприводимых (над $\mathbb{Q}$) полиномов с целочисленными коэффициентами.

Родственной задачей является изучение распределения дискриминантов полиномов с целочисленными коэффициентами. Чтобы ее сформулировать, удобно (хотя и не необходимо) воспользоваться вероятностной терминологией. Зафиксируем некоторое $Q \in \mathbb{N}$. Напомним, что $\mathcal{P}(Q)$ обозначает класс всех полиномов p с целочисленными коэффициентами, таких что $\deg(p) \leq n$ и $H(p) \leq Q$. Мощность этого класса равна $(2Q+1)^{n+1}$. Рассмотрим равномерное вероятностное распределение на данном классе, при этом вероятность каждого полинома равна $(2Q+1)^{-n-1}$. Таким образом, мы имеем случайный полином

$$G_Q(x) = \xi_{Q,n}x^n + \xi_{Q,n-1}x^{n-1} + \cdots + \xi_{Q,0} \tag{19}$$

с независимыми коэффициентами, равномерно распределенными на $2Q+1$ целой точке $\{-Q, \ldots, Q\}$. Нас интересует асимптотическое поведение $\mathrm{D}(G_Q)$ при фиксированном n и при $Q \to \infty$.

Берник, Гетце и Куксо показали, что при $\nu \in [0, 1/2]$

$$\mathbb{P}[|\mathrm{D}(G_Q)| < Q^{2n-2-2\nu}] \gg Q^{-2\nu}.$$

Отметим, что случай $\nu = 0$ согласуется с (17). Также Берник, Гетце и Куксо предположили, что данная оценка оптимальна с точностью до константы:

$$\mathbb{P}[|\mathrm{D}(G_Q)| < Q^{2n-2-2\nu}] \asymp Q^{-2\nu}. \tag{20}$$

Данная гипотеза оказалась верной при $n = 2$: Гетце, Коледа и Королев показали, что при $n = 2$ и $\nu \in (0, 3/4)$ выполнено

$$\mathbb{P}[|\mathrm{D}(G_Q)| < Q^{2-2\nu}] = 2(\log 2 + 1)Q^{-2\nu}\left(1 + O(Q^{-\nu}\log Q + Q^{2\nu-3/2}\log^{3/2} Q)\right).$$

Однако для $n = 3$ и $\nu \in [0, 3/5)$ Коледа, Гетце и Куксо получили асимптотическое соотношение

$$\mathbb{P}[|\mathrm{D}(G_Q)| < Q^{4-2\nu}] = \kappa Q^{-5\nu/3}\left(1 + O(Q^{-\nu/3}\log Q + Q^{5\nu/3-1})\right), \tag{21}$$

где абсолютная константа κ была явно вычислена. Тем самым, гипотеза была опровергнута.

Недавно Бересневич, Берник и Гетце показали, что для всех n и $0 \le \nu < n-1$ выполнено

$$\mathbb{P}[|\mathrm{D}(G_Q)| < Q^{2n-2-2\nu}] \gg Q^{-n+3-(n+2)\nu/n}.$$

Они также получили аналогичную оценку для результантов.

В § 3.5 (также см. [11]) мы докажем предельную теорему для $\mathrm{D}(G_Q)$. В качестве следствия, мы получим, что "с высокой вероятностью" (детали см. в разделе 3.5.1) выполняется следующее асимптотическое соотношение:

$$|\mathrm{D}(G_Q)| \asymp Q^{2n-2}.$$

Такая же оценка "с высокой вероятностью" имеет место и для неприводимых полиномов.

Содержание четвертой главы. Пусть дано ограниченное выпуклое множество $T \subset \mathbb{R}^n$. Определим его *внутренние объемы* $V_0(T), \dots, V_n(T)$ как коэффициенты в формуле Штейнера:

$$\lambda_n(T + rB_n) = \sum_{k=0}^{n} \kappa_{n-k} V_k(T) r^{n-k}, \quad r \ge 0, \tag{22}$$

где B_n обозначает n-мерный единичный шар, λ_n, как обычно, обозначает n-мерный объем и $\kappa_k := \pi^{k/2}/\Gamma(\frac{k}{2}+1)$ обозначает объем B_k. Обозначим W_k равномерно распределенное случайное k-мерное линейное подпространство $\mathbb{R}^n$. При $1 \le k \le n$ выполнено следующее соотношение, называемое формулой Крофтона:

$$V_k(T) = \binom{n}{k} \frac{\kappa_n}{\kappa_k \kappa_{n-k}} \mathbb{E}\, \lambda_k(T|W_k), \tag{23}$$

где $T|W_k$ обозначает проекцию T на W_k. В частности, $V_1(T)$ с точностью до константы совпадает со средней шириной.

Судаков (рассмотревший случай $k = 1$) и Шеве (рассмотревшая произвольное $k \in \mathbb{N}$) расширили понятие внутренних объемов на *бесконечномерные* выпуклые множества. Пусть дано сепарабельное гильбертово пространство H. Нормализация в (22) выбрана таким образом, что $V_k(T)$ зависит только от T

и не зависит от размерности пространства, в котором находится T. Поэтому определение $V_k(T)$ может быть расширено на любые конечномерные выпуклые множества из H (т.е. содержащиеся в каком-то конечномерном аффинном подпространстве H). Далее, для произвольного выпуклого множества $T \subset H$ определим

$$V_k(T) := \sup_{T'} V_k(T') \in [0, +\infty], \tag{24}$$

где супремум берется по всем конечномерным выпуклым подмножествам T' множества T.

Напомним, что *изонормальный процесс* над сепарабельным гильбертовым пространством H – это гауссовский процесс $\{\xi(t) \colon t \in H\}$ с ковариационной функцией

$$\mathrm{Cov}(\xi(s), \xi(s)) = \langle t, s \rangle.$$

Чтобы различные характеристики ξ были корректно определены, мы всегда имеем дело с сепарабельной модификацией процесса, которая существует в силу сепарабельности H.

Напомним, что выпуклое множество T называется GB-множеством, если существует версия изонормального процесса на T, имеющая ограниченные реализации. Известно, что GB-свойство равносильно $V_1(T) < \infty$, что также влечет $V_k(T) < \infty$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следующее предложение является прямым следствием из результата Цирельсона.

Предложение 1. *Для любого выпуклого компактного GB-множества $T \subset H$ существует модификация изонормального процесса ξ на H (так называемая* естественная *модификация), реализации которой линейны на линейной оболочке T.*

Отметим, что хотя процесс ξ линеен на T п.н., он необязательно непрерывен на T п.н. Для данного выпуклого компактного GB-множества $T \subset H$ мы будем всегда полагать, что ξ является естественной (следовательно, линейной п.н.) модификацией изонормального процесса на T.

Судаков установил связь между первым внутренним объемом и супремумом изонормального процесса.

Теорема 1 (Судаков). *Для произвольного выпуклого компактного GB-множества $T \subset H$ выполнено*

$$V_1(T) = \sqrt{2\pi}\mathbb{E} \sup_{t \in T} \xi(t). \tag{25}$$

Цирельсон обобщил данный результат на все внутренние объемы следующим образом. Рассмотрим k независимых копий $\{\xi_i(t)\colon t \in H\}$, $1 \le i \le k$, изонормального процесса $\xi(t)$. Назовем k-мерным спектром (необязательно выпуклого) компактного множества $T \subset H$ следующее случайное множество:

$$\operatorname{spec}_k T := \{(\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)) : t \in T\} = \boldsymbol{\xi}(T) \subset \mathbb{R}^k,$$

где мы обозначили $\boldsymbol{\xi}(t) := (\xi_1(t), \dots, \xi_k(t))$.

Теорема 2 (Цирельсон). *Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого выпуклого компактного GB-множества $T \subset H$ выполнено*

$$V_k(T) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbb{E}\, \lambda_k(\operatorname{spec}_k T). \tag{26}$$

Замечание 1. Теорема 2 действительно является обобщением теоремы 1. В самом деле, при $k = 1$ спектр $\operatorname{spec}_1 T$ является диапазоном процесса $\{\xi(t)\colon t \in T\}$, и по теореме 2 получаем

$$V_1(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{E}\left(\sup_{t \in T} \xi(t) - \inf_{t \in T} \xi(t)\right).$$

Так как процессы ξ и $-\xi$ имеют одинаковое распределение, приходим к

$$\mathbb{E} \inf_{t \in T} \xi(t) = -\mathbb{E} \sup_{t \in T} \xi(t),$$

что влечет (25).

Следующее предложение позволяет обобщить результаты Судакова и Цирельсона на *невыпуклые* множества.

Предложение 2. *Для любого компакта* $T \subset H$*, такого что* $V_1(\overline{\operatorname{conv} T}) < \infty$*,*

$$\operatorname{conv} \operatorname{spec}_k T = \operatorname{spec}_k \overline{\operatorname{conv} T} \quad \textit{п.н.},$$

где $\operatorname{conv} T$ *обозначает выпуклую оболочку* T*.*

Доказательство будет приведено в разделе 4.5.4. В качестве прямого следствия получаем следующий результат.

Предложение 3. *Спектр любого выпуклого компактного GB-множества с вероятностью единица выпуклый.*

Объединение предложения 2 с теоремами 1 и 2 влечет следующий результат.

Теорема 3 (Судаков–Цирельсон)**.** *Для любого компакта* $T \subset H$*, такого что* $V_1(\overline{\operatorname{conv} T}) < \infty$*,*

$$V_k(\overline{\operatorname{conv} T}) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbb{E} \ \operatorname{Vol}_k(\operatorname{conv} \operatorname{spec}_k T).$$

В частности,

$$V_1(\overline{\operatorname{conv} T}) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \sup_{t \in T} \xi(t).$$

Замечание 2. Из (24) следует, что $V_k(\overline{\operatorname{conv} T}) = V_k(\operatorname{conv} T)$.

Данный результат может быть интерпретирован как бесконечномерный аналог формулы Крофтона (23). Следующее соотношение, также полученное Цирельсоном, является бесконечномерным аналогом формулы Штейнера, см. (22).

Теорема 4 (Цирельсон)**.** *Для любого* $r > 0$ *и любого выпуклого компактного GB-множества* $T \subset H$

$$\mathbb{E} \exp\left(\sup_{t \in T}\left[r\xi(t) - \frac{r^2}{2}\operatorname{Var}\xi(t)\right]\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\sqrt{2\pi}}\right)^k V_k(T). \tag{27}$$

Теперь перейдем к *коническим* внутренним объемам, которые являются аналогами в сферической геометрии обычных (евклидовых) внутренних объемов.

Назовем множество $C \subset \mathbb{R}^n$ выпуклым конусом, если для любых $t, s \in C$ и $a, b \geq 0$[2] выполнено $at + bs \in C$. В сороковых годах предыдущего столетия был получен конический (также известный как сферический) аналог формулы Штейнера (22). В современной форме, данная формула выражает объем угловой окрестности выпуклого конуса C в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{P}[\mathrm{dist}^2(\theta, C) \leq \lambda] = \sum_{k=0}^{n} \beta_{k,n}(\lambda) \upsilon_k(C), \tag{28}$$

где θ является случайной величиной, равномерно распределенной на $\mathbb{S}^{n-1}$, и $\beta_{k,n}(\cdot)$ обозначает функцию распределения бета-распределения с параметрами $(n-j)/2$ и $n/2$. Так как функции $\beta_{1,n}, \ldots, \beta_{n,n}$ линейно независимы, данная формула однозначно определяет коэффициенты $\upsilon_k(C)$, которые называются *коническими внутренними объемами* конуса C. Нормализация выбрана таким образом, что они не зависят от размерности окружающего пространства.

Для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ определим k-й *полухвостовой функционал* следующим образом:

$$h_k(C) := \upsilon_k(C) + \upsilon_{k+2}(C) + \ldots, \tag{29}$$

где при $k > n$ мы полагаем $\upsilon_k(C) := 0$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \upsilon_k(C) &= h_k(C) - h_{k+2}(C), \quad k = 1, \ldots, n-2; \\ \upsilon_{n-1}(C) &= h_{n-1}(C), \quad \upsilon_n(C) = h_n(C). \end{aligned} \tag{30}$$

Конические объемы удовлетворяют аналогу формулы Гаусса–Бонне:

$$h_0(C) = \upsilon_0(C) + \upsilon_2(C) + \ldots = \frac{1}{2}, \quad h_1(C) = \upsilon_1(C) + \upsilon_3(C) + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{31}$$

[2] В оригинальном определении выпуклого конуса a, b строго положительны, но нам удобно предполагать, что все рассматриваемые конусы содержат начало координат.

В частности,

$$v_0(C) + v_1(C) + \ldots + v_n(C) = 1. \tag{32}$$

Коническая версия формулы Крофтона (23) утверждает, что при всех $0 \leq k \leq n-1$

$$h_{k+1}(C) = \frac{1}{2}\mathbb{P}[C \cap W_{n-k} \neq \{0\}]. \tag{33}$$

Также возможно сначала определить полухвостовые функционалы с помощью конической формулы Крофтона, а затем, используя (30), определить конические внутренние объемы. Мы последуем этому плану в § 4.5, когда будем определять конические внутренние объемы в бесконечномерном случае.

Также в данном параграфе мы обнаружим связь между коническими внутренними объемами и вероятностью поглощения спектром начала координат, тем самым получив конические версии формул Судакова и Цирельсона (25), (26) и (27): для любого $k \in \mathbb{N}$ и произвольного выпуклого компактного подмножества $T \subset H$ выполнено

$$\mathbb{P}\left[0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\left\{(\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)) \in \mathbb{R}^k : t \in T\right\}\right] = h_{k+1}(\operatorname{cone} T).$$

Данный результат можно интерпретировать как бесконечномерный аналог конической формулы Крофтона (33). При $k = 1$ она сводится к

$$\mathbb{P}\left[\inf_{t \in T} \xi(t) \geq 0\right] = v_0(\operatorname{cone} T).$$

Также мы покажем, что для любого $r > 0$ выполняется

$$\mathbb{E}\,\exp\left(\frac{1 - r^{-2}}{2} \sup_{t \in T} \frac{\xi_+^2(t)}{\operatorname{Var}\xi(t)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k v_k(\operatorname{cone} T),$$

что можно интерпретировать как бесконечномерный аналог конической формулы Штейнера (28).

Используя формулу Судакова (25), в § 4.2 (также см. [15]) мы вычислим первые внутренние объемы различных бесконечномерных выпуклых компактов, включая единичные шары в полунормах соболевского типа и эллипсоиды в гильбертовом пространстве. Мы свяжем распределения случайных одномерных проекций этих множеств с распределениями S_1, S_2, C_1, C_2, изученными в работах Питмана и Йора. Мы покажем, что k-й внутренний объем множества всех функций на $[0,1]$, с константой Липшица не более 1 и выходящих из 0 (соответственно, с нулевым средним), равен

$$\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}k+1\right)}, \text{ соответственно, } \frac{\pi^{(k+1)/2}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}k+\frac{3}{2}\right)}.$$

Это связано с исследованием Гао и Витале, которые рассмотрели аналогичную задачу для функций с ограничением на полную вариацию вместо константы Липшица. Используя их результаты, мы приведем новый вывод формулы для среднего объема выпуклой оболочки d-мерного броуновского движения, полученной Элданом. Также мы приведем аналог результата Элдана для броуновского моста. Мы покажем, что из результатов про внутренние объемы липшецевых шаров аналогичным образом могут быть выведены формулы средних объемов случайных зоноидов (в смысле интеграла Ауманна), порожденных броуновским движением и броуновским мостом. В доказательствах будут использованы результаты Судакова и Цирельсона.

Если применить формулу Цирельсона (26) к случаю, когда T является конечномерным эллипсоидом, справа будет стоять определитель матрицы, строки которой являются независимыми одинаково распределенными центрированными гауссовскими векторами с эллипсоидами рассеяния, совпадающими с T. В § 4.3 (также см. [6]) данный результат будет обобщен на случай разнораспределенных гауссовских векторов. При этом внутренний объем в левой части заменяется на *смешанный объем*. В качестве приложения мы дадим геометрическую интерпретацию интенсивности нулей случайного гауссовского поля в терминах смешанного объема эллипсоидов рассеяния его градиентов.

§ 4.4 посвящен следующему вопросу. Старая гипотеза утверждает, что среди всех симплексов, вписанных в единичную сферу, правильный симплекс имеет максимальную среднюю ширину. Используя формулу Судакова (25), легко получить следующую эквивалентную формулировку: для любого центрированного гауссовского вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, удовлетворяющего $\mathbb{E}\,\xi_1^2 = \cdots = \mathbb{E}\,\xi_n^2 = 1$, выполнено

$$\mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \le \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\mathbb{E}\max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\},$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots$ суть независимые стандартные гауссовские величины. Воспользовавшись данной вероятностной интерпретацией, мы получим *асимптотическую* версию гипотезы. Кроме того, мы покажем, что средняя ширина правильного симплекса с $2n$ вершинами удивительным образом близка к средней ширине правильного кросcполитопа с тем же числом вершин. На вероятностном языке, наш результат утверждает, что

$$1 \le \frac{\mathbb{E}\max\{|\eta_1|, \ldots, |\eta_n|\}}{\mathbb{E}\max\{\eta_1, \ldots, \eta_{2n}\}} \le \min\left\{\sqrt{\frac{2n}{2n-1}}, 1 + \frac{C}{n\log n}\right\},$$

где $C > 0$ является абсолютной константой. Также мы вычислим все моменты длин проекций правильного куба, симплекса и кросcполитопа на прямую со случайным направлением, тем самым доказав несколько гипотез Финча. В заключение, мы установим предельные теоремы для распределений этих длин проекций, когда размерность стремится к бесконечности. В случае n-мерного куба Q_n, мы докажем, что

$$W_{Q_n} - \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi - 3}{\pi}\right),$$

в то время как у симплекса и кросcполитопа предельные распределения связаны с распределением Гумбеля.

Список публикаций

1. Д. Н. Запорожец. О вычислении среднего объема случайных многообразий. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 311:133–146, 2004.
2. Д. Н. Запорожец. О распределении числа вещественных корней случайного полинома. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 320:69–79, 2004.

3. Д. Н. Запорожец. Случайные полиномы и геометрическая вероятность. *Докл. Акад. Наук*, 71:53–57, 2005.
4. Д. Н. Запорожец. Пример случайного полинома с необычным поведением корней. *Теория вероятн. и ее примен.*, 50:549—555, 2005.
5. Д. Н. Запорожец, И. А. Ибрагимов. О площади случайной поверхности. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 384:154–175, 2010.
6. Д. Н. Запорожец, З. Каблучко. Случайные определители, смешанные объемы эллипсоидов и нули гауссовских случайных полей. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 408:187–196, 2012.
7. Д. Н. Запорожец, А. И. Назаров. Как мало бывает корней у случайного полинома в среднем? *Теория вероятн. и ее примен.*, 53:40–58, 2008.
8. F. Götze, D. Kaliada, D. Zaporozhets. Correlations between real conjugate algebraic numbers. *Чебышевский сб.*, 16:90–99, 2015.
9. F. Götze, D. Kaliada, D. Zaporozhets. Distribution of complex algebraic numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145:61–67, 2017.
10. F. Götze, D. Zaporozhets. On the distribution of complex roots of random polynomials with heavy-tailed coefficients. *Теория вероятн. и ее примен.*, 56:812—818, 2011.
11. F. Götze, D. Zaporozhets. Discriminant and root separation of integral polynomials. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 441:144–153, 2015.
12. Z. Kabluchko, A. Litvak, D. Zaporozhets. Mean width of regular polytopes and expected maxima of correlated Gaussian variables. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 442:75–96, 2015.
13. Z. Kabluchko, D. Zaporozhets. Roots of random polynomials whose coefficients have logarithmic tails. *Ann. Probab.*, 41:3542–3581, 2013.
14. Z. Kabluchko, D. Zaporozhets. Asymptotic distribution of complex zeros of random analytic functions. *Ann. Probab.*, 42:1374–1395, 2014.
15. Z. Kabluchko, D. Zaporozhets. Intrinsic volumes of Sobolev balls with applications to Brownian convex hulls. *Trans. Amer. Math. Soc.*,

368:8873—8899, 2016.

16. M. Reitzner, E. Spodarev, D. Zaporozhets. Set reconstruction by Voronoi cells. *Adv. in Appl. Probab.*, 44:938–953, 2012.
17. I. Ibragimov, D. Zaporozhets. On distribution of zeros of random polynomials in complex plane. In *Prokhorov and Contemporary Probability Theory*, pages 303–323. Springer, 2013.