Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Целищев Антон Сергеевич

Два сюжета из гармонического анализа: квадратичные функции и задача об изоморфизме

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2021

Работа выполнена в лаборатории математического анализа ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Научный руководитель:

КИСЛЯКОВ Сергей Витальевич,
доктор физико–математических наук, академик РАН, заведующий лаборатории математического анализа ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

ПЛОТНИКОВ Михаил Геннадьевич,
доктор физико–математических наук, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»,

ЛЫСОВ Владимир Генрихович,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

Ведущая организация:
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Защита состоится ________ ______________________ в ________ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук:
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан ________ ______________________ 2021 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-
математических наук К. С. Рядовкин

Общая характеристика работы

Цели и задачи диссертационной работы

Данная диссертация посвящена решению нескольких задач гармонического и функционального анализа. В работе изучаются обобщения неравенства Литтлвуда–Пэли, а также свойства банаховых пространств гладких функций на торе.

В диссертации устанавливается очень общее описание пространства BMO в терминах, связанных с неравенством Литтлвуда–Пэли . Кроме того, исследуются аналоги одностороннего неравенства Литтлвуда–Пэли для различных нетригонометрических ортогональных систем, а именно, систем Уолша и Виленкина, а также их обобщения для функций, принимающих значения в некоторых банаховых пространствах.

Помимо этого, в диссертации доказывается отсутствие локально безусловной структуры в пространствах гладких функций от нескольких переменных с "sup"-нормой, порождённых произвольными наборами дифференциальных выражений с постоянными коэффициентами.

Подчеркнём, что в основе рассматриваемых задач лежит теория сингулярных интегральных операторов и родственная теория мартингальных преобразований.

Актуальность работы

Первая часть диссертации посвящена характеризации вида Литтлвуда–Пэли пространства BMO. Описание функциональных пространств в терминах проекторов Литтлвуда–Пэли — важное и актуальное направление в современном гармоническом анализе, см., например, работы [14, 18, 25], и результаты первой части диссертации являются частью этого направления.

Кроме того, в работе С. В. Бочкарёва [1] доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\{V_n\}$ — ядра Валле-Пуссена на окружности, $Q_0 = 1$, $Q_n = V_{2^n} - V_{2^{n-1}}$ при $n \geq 1$. Для $f \in L^1$ положим*

$$\|f\|_D = \sup_I \Big(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{2^{-n} \leq |I|} \Big| \int_0^1 f(t) Q_n(x-t)\,dt \Big|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Тогда эта норма эквивалентна величине $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

Напомним, что ядра Валле-Пуссена определяются формулой

$$V_n(x) = (1 + e^{2\pi i n x} + e^{-2\pi i n x}) K_n(x),$$

где K_n — ядра Фейера на окружности.

Отметим, что большая эффективность этой теоремы в различных тонких вопросах теории тригонометрических рядов была продемонстрирована С. В. Бочкарёвым в работе [2].

В связи с появлением приведённой выше теоремы, естественно возникает вопрос — нельзя ли заменить операторы свёртки с тригонометрическими полиномами Q_n, определёнными выше, на некоторые более общие мультипликаторы Фурье? Ответ на этот вопрос был получен автором настоящей диссертации совместно с И. Васильевым в работе [TV1] — основной результат этой работы обобщает результат более ранней статьи [3]. Таким образом, задача об описании вида Литтлвуда–Пэли пространства BMO представляется актуальной.

Пусть $\{I_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — набор попарно не пересекающихся отрезков в $\mathbb{Z}$, а f — функция, заданная на $\mathbb{T}$. Через P_j обозначим оператор, определяемый соотношением $(P_j f)\widehat{\ } = \chi_{I_j}\hat{f}$, где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f (то есть попросту последовательность коэффициентов Фурье). В своей работе [33] Рубио де Франсиа доказал, что при $p \geq 2$ выполняется следующее неравенство:

$$\Big\|\Big(\sum_j |P_j f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \lesssim \|f\|_p.$$

По двойственности, несложно видеть, что такое неравенство эквивалентно следующему:

$$\Big\|\sum_j f_j\Big\|_p \lesssim \Big\|\Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p, \qquad 1 < p \leq 2, \tag{1}$$

где функции f_j таковы, что $\operatorname{supp}\widehat{f_j} \subset I_j$.

После того, как доказательство этого неравенства в исходном виде впервые было опубликовано в статье [33], различные его обобщения изучались многими математиками, в том числе Ж. Бургейном, С. В. Кисляковым, М. Лэйси, Н. Осиповым — см. работы [7,13,27,29].

Также отметим, что во второй половине XX и в начале XXI века появилось множество работ, посвящённых развитию анализа Фурье на группах, отличных от тора и $\mathbb{R}^n$, в частности, неравенствам, связанным с разложением функции по системе Уолша и по общим системам Виленкина — ортогональным системам, играющим большую роль в нетригонометрическом анализе Фурье. Среди прочих, отметим работы [29,34–36], посвящённые в том числе подобного рода вопросам. В связи с этим, доказываемое в диссертации неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Виленкина является важной задачей гармонического анализа.

В недавнее время активное развитие получило направление гармонического анализа, связанное с переносом различных классических теорем анализа Фурье и теории вероятностей на случай функций (или мартингалов), принимающих значения в банаховых пространствах. Перечислить огромное количество посвящённых этому направлению работ не представляется возможным, поэтому упомянем здесь только совсем недавние книги [19,20,31]. В частности, упомянутое ранее неравенство Рубио де Франсиа для банаховозначных функций исследовалось в том числе в работах [12, 21, 32]. Это показывает, что результаты диссертации, связанные с обобщением неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для системы Уолша на случай банаховозначных функций, являются частью актуального направления современного гармонического анализа.

Заключительная часть диссертационной работы посвящена исследованию некоторых линейно-топологических свойств банаховых пространств гладких функций на торе. Эта тема активно изучалась в последней трети XX века, однако, многие относящиеся к ней задачи не решены до сих пор.

Хорошо известно, что при $n \geq 2$ пространство $C^k(\mathbb{T}^n)$, то есть пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на торе $\mathbb{T}^n$, не изоморфно пространству $C(\mathbb{T}^n)$. Этот факт был впервые анонсирован в работе [17], а позднее появилось множество его обобщений (см. работы [4–6, 8–11, 23, 26, 30]). Однако наиболее общий и естественный контекст был рассмотрен только в довольно недавней работе [24].

Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ символом D^α обозначим дифференциальный моном $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ (отметим, что $\partial z^l = 2\pi i l z^l$, $z \in \mathbb{T}$). Зафиксируем набор дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_J\}$, то есть каждый из этих операторов является линейной комбинацией различных дифференциальных мономов D^α. Число $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ называется порядком монома D^α, а порядком оператора T_j называется наибольший из порядков мономов, входящих в его состав.

Рассмотрим следующую полунорму на тригонометрических полиномах f:

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \max_{1 \leq j \leq J} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^n)}.$$

Пространство, порождаемое этой полунормой (то есть при помощи факторизации по ядру и пополнения) будем обозначать через $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$. Например, если $\mathcal{T}$ — это множество всех дифференциальных мономов порядка не более k, то определённое нами пространство совпадает с $C^k(\mathbb{T}^n)$.

Пространства $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ изучались уже в работах [5, 6]. В частности, там было доказано следующее утверждение. Предположим, что порядок каждого оператора T_j не превосходит k. Исключим из каждого из операторов T_j мономы, порядок которых строго меньше k. Если среди оставшихся старших частей операторов T_j есть хотя бы две линейно независимые, то пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не изоморфно дополняемому подпространству пространства $C(S)$. (Здесь S — произвольное несчётное компактное метрическое пространство. По теореме Милютина, все такие пространства $C(S)$ изоморфны друг другу.) Однако, в случае, если все старшие части отличаются друг от друга умножением на константу, ситуация оставалась неясной.

После этого, в статье [24] было доказано обобщение сформулированного выше утверждения об отсутствии изоморфизма на случай более общих наборов операторов $\mathcal{T}$. Отметим, что за некоторое время до этого, в работе [8], было установлено, что в случае, когда все операторы T_j являются мономами, если среди их старших частей есть две линейно независимые (поскольку все T_j — это мономы, старшая часть каждого из операторов T_j равна либо нулю, либо самому оператору T_j), то пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не имеет локальной безусловной структуры. Таким образом, полученное в диссертации утверждение об отсутствии локальной безусловной структуры для наборов операторов, которые рассматриваются в работе [24] — актуальный результат современной теории банаховых пространств.

Таким образом, задачи

- описания типа Литтлвуда–Пэли пространства BMO
- о неравенстве Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Виленкина
- о обобщении неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Уолша на случай функций, принимающих значения в банаховых пространствах
- об изучении геометрических свойств пространств гладких функций на торе

представляются актуальными.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации — новые.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при решении различных задач функционального и гармонического анализа, например, в различных вопросах гармонического анализа на группах Уолша и Виленкина, при описании функциональных пространств в духе теории Литтлвуда–Пэли, а также в исследовании свойств банаховых пространств гладких функций.

Методы исследования

В диссертационной работе используются различные методы современного гармонического анализа. Прежде всего, это методы теории сингулярных интегральных операторов, а также мартингальных преобразований. Кроме того, в последней главе используются также различные методы современной теории банаховых пространств — такие, как применение теоремы Гротендика.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Отметим также, что результаты были доложены на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций ПОМИ РАН, на семинаре по функциональному анализу института математики Польской академии наук и на Конференции международных математических центров мирового уровня в Сочи.

Публикации и личный вклад автора

Материалы диссертации опубликованы в статьях [TV1, T1–T3] в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК. Все результаты диссертации доказаны автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, и библиографии. Общий объём диссертации составляет 94 страницы. Библиография содержит 60 наименований, в число которых включены 4 работы автора по теме диссертации.

Содержание работы

Первая глава

В первой главе (она же введение) обосновывается актуальность диссертации, формулируются цели работы, аргументируется научная новизна проведённых исследований, обосновывается теоретическая значимость полученных результатов. Кроме того, приводятся формулировки основных теорем и положений, выносимых на защиту, снабжённые необходимыми для понимания определениями.

Вторая глава

Вторая глава диссертации посвящена описанию вида Литтлвуда–Пэли пространства BMO. Приведём точную формулировку полученной теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — набор равномерно ограниченных функций на $\mathbb{R}^d$, имеющих все обобщённые производные в смысле Соболева порядков не выше $a = [d/2]+1$. Наложим на эти функции следующие условия:*
1) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n(x) \equiv 1$ *для всех* $x \neq 0$*;*
2) $\operatorname{supp}\psi_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \leq |x| \leq 2^{n+1}\}$*;*
3) $(2^{-nd}\int |D^\alpha \psi_n(\xi)|^2 d\xi)^{1/2} \leq K2^{-n|\alpha|}$ *для* $0 \leq |\alpha| \leq a$*.*
Здесь K — константа, которая не зависит от n. Определим оператор $\widehat{\Delta_n f} := \psi_n \hat{f}$ и норму

$$\|f\|_D := \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leq l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}. \tag{2}$$

Здесь рассматривается супремум по всем кубам Q (с гранями, параллельными координатным плоскостям), а через $l(Q)$ обозначена длина ребра куба Q.

Тогда для всякой интегрируемой функции f выполняется соотношение $\|f\|_D \asymp \|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

Отметим, что похожее описание пространства BMO также доказывается в статье [18] — однако существенное отличие состоит в том, что в сформулированной теореме накладываются условия на функции ψ_n, а не на их преобразования Фурье. Кроме того, выражение, похожее на правую часть равенства (2), можно найти в книге [16] на странице 93.

Третья глава

В третьей главе диссертации доказывается неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Виленкина. Прежде чем перейти к формулировке основного результата третьей главы, приведём необходимые определения.

Пусть $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, каждое из которых не меньше, чем 2. Обозначим произведение $p_1 p_2 \dots p_l$ через m_l (и будем считать, что $m_0 = 1$). Разделим отрезок $[0, 1]$ на p_1 равных отрезков и через r_1 обозначим функцию, равную $e^{2\pi ik/p_1}$ на k-ом отрезке (мы считаем, что нумерация отрезков начинается с нуля). Далее, с каждым из полученных отрезков проделаем аналогичную операцию: разделим его на p_2 частей и через r_2 обозначим функцию, равную $e^{2\pi ik/p_2}$ на k-ой части. Повторяя эти операции, получаем последовательность функций r_i, являющихся аналогами классических функций Радемахера. Все функции из системы Виленкина являются произведениями построенных обобщённых функций Радемахера. А именно, всякое число $n \in \mathbb{N}_0$ (этот символ обозначает множество целых неотрицательных чисел) запишем в “(m)-ичной системе счисления”, то есть представим в виде $n = \alpha_1 + \alpha_2 m_1 + \dots \alpha_k m_{k-1}$, где $0 \le \alpha_i \le p_i - 1$. В таком случае, функция Виленкина w_n равна $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_k^{\alpha_k}$. Описанное представление и нумерация систем Виленкина содержится, например, в работе [35].

Приступим теперь к формулировке основного результата. Мы будем считать, что последовательность p_i ограничена: $p_i \le M$ для некоторого $M > 2$. Такие системы Виленкина называются ограниченными. Символом $\widehat{f}$ обозначим последовательность коэффициентов разложения f по системе Виленкина: $\widehat{f}(n) = (f, w_n) = \int f \bar{w}_n$. Ясно, что тогда $f = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \widehat{f}(n) w_n$ (в случае, если $f \in L^2$).

Теорема 2. *Пусть $\{I_s\}$ — набор попарно не пересекающихся конечных интервалов в $\mathbb{N}_0$, а функции f_s таковы, что $\operatorname{supp} \widehat{f_s} \subset I_s$ (таким образом, каждая функция f_s — полином Виленкина). Тогда при $1 < p \le 2$ справедливо следующее неравенство:*

$$\Big\| \sum_s f_s \Big\|_p \lesssim \Big\| \Big(\sum_s |f_s|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p.$$

Отметим, что соответствующее утверждение для функций Уолша (которые являются частным случаем функций Виленкина — когда все p_i равны 2) было доказано в работе [29]. Однако, оказалось, что основное комбинаторное построение из статьи [29] напрямую на случай систем Виленкина не обобщается, поэтому несколько лет теорема 2 оставалась открытым вопросом.

Кроме того, классическое неравенство Рубио де Франсиа (1) было позднее доказано и для $p = 1$ Бургейном в работе [13], а также для всех $p \in (0, 2]$ Кисляковым и Париловым в работе [7]. Некоторые замечания на этот счёт в контексте систем Виленкина также можно найти в конце третьей главы настоящей диссертации. А именно, там доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 для интервалов $I_s = [a_s, b_s)$ при $0 < p \leq 2$ выполняется неравенство*

$$\Big\| \sum_s f_s \Big\|_p \lesssim \|\{w_{a_s}^{-1} f_s\}_s\|_{\mathcal{H}^p(\ell^2)} + \|\{w_{b_s}^{-1} f_s\}_s\|_{\mathcal{H}^p(\ell^2)}.$$

В последнем параграфе третьей главы приведены также некоторые открытые вопросы, касающиеся данной темы.

Четвёртая глава

В четвёртой главе диссертации исследуется обобщение неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для функций Уолша, доказанное в работе [29], на случай функций, принимающих значения в некоторых банаховых пространствах. Приведём основные определения, а также формулировки утверждений, доказательству которых посвящена глава 4.

Для произвольного множества целых неотрицательных чисел $A \subset \mathbb{N}_0$ мы будем использовать обозначение

$$P_A f = \sum_{n \in A} (f, w_n) w_n = (\chi_A \widehat{f})^\vee.$$

Как мы уже упоминали выше, аналог неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для функций Уолша (напомним, что функции Уолша являются частным случаем функций Виленкина, определение которых приведено выше — достаточно подставить все $p_i = 2$) был доказан в работе [29]. Сформулируем его ещё раз, теперь для $p \geq 2$: если $\{I_s\}$ — набор попарно не пересекающихся отрезков в $\mathbb{N}_0$, то для всякой функции $f \in L^p[0, 1]$ выполняется неравенство:

$$\Big\| \Big(\sum_s |P_{I_s} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}. \tag{3}$$

Цель четвёртой главы диссертации — обобщить это неравенство на функции f, принимающие значения в некотором банаховом пространстве X.

Напомним, что система Уолша является частным случаем систем Виленкина, речь о которых идёт выше (достаточно подставить все p_i равными 2). Обозначим через ε_s последовательность функций Радемахера (мы считаем, что они определены на некотором вероятностном пространстве Ω). Если X — банахово пространство, а f — X-значная функция, то аналог неравенства (3) имеет следующий вид:

$$\Big\| \sum_s \varepsilon_s P_{I_s} f \Big\|_{L^p(\mathrm{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}. \tag{4}$$

Символом Rad$X$ обозначено замыкание в $L^p(\Omega; X)$ множества X-значных функций вида

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j(\omega) x_j, \quad x_j \in X.$$

Известно, что определение пространства Rad$X$ не зависит от p, если $1 \le p < \infty$. Кроме того, из неравенства Хинчина следует, что для $X = \mathbb{R}$ неравенства (3) и (4) равносильны.

Приведём теперь следующее определение (из работы [Т2]).

Определение. *Будем говорить, что банахово пространство X обладает свойством LPR_p^w, если неравенство (4) выполняется для всякой функции $f \in L^p(X)$.*

Это естественный аналог свойства LPR_p, которое было аксиоматизировано в работе [12], для контекста функций Уолша. Свойство LPR_p (которое естественно обобщает неравенство для стандартного преобразования Фурье из работы [33] на случай банаховозначных функций) изучалось в том числе в работах [21], [32]. В четвёртой главе диссертации доказываются аналоги результатов из работы [32] для функций Уолша. Перейдём теперь к конкретным формулировкам.

Теорема 4. *Если X — такая банахова решётка, что ассоциированная с ней 2-вогнутая решётка $X_{(2)}$ является банаховой решёткой со свойством UMD, то X обладает свойством LPR_p^w для $2 < p < \infty$.*

Напомним, что решётка $X_{(2)}$ задаётся следующей нормой:

$$\|x\|_{X_{(2)}} = \||x|^{1/2}\|^2.$$

Она действительно будет являться банаховой решёткой, если решётка X 2-выпукла. Более подробную информацию о банаховых решётках можно найти в книге [28], а все необходимые определения приведены в четвёртой главе диссертации.

Теорема 5. *Если X — банахово пространство, обладающее свойством LPR_p^w для некоторого $p \ge 2$, то X также обладает свойством LPR_q^w для всякого $q > p$.*

Отметим также, что, по всей видимости, аналогичные результаты можно получить и для более общих систем Виленкина вместо системы Уолша (используя более громоздкую комбинаторную конструкцию из работы [Т1]). Однако, этот вопрос оставлен за рамками диссертации — отчасти для того, чтобы сделать изложение более ясным, отчасти чтобы более явно продемонстрировать методы, позволяющие обобщать неравенства нетригонометрического гармонического анализа на функции со значениями в банаховых пространствах.

Пятая глава

В пятой главе диссертации исследуются некоторые свойства банаховых пространств гладких функций на многомерном торе.

Напомним, что для набора дифференциальных операторов $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_J\}$, пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ задаётся при помощи следующей полунормы на тригонометрических полиномах f:

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \max_{1 \le j \le J} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^n)}.$$

Зафиксируем некоторый *шаблон смешанной однородности*, то есть гиперплоскость Λ в $\mathbb{R}^n$, пересекающую положительные координатные полуоси. Уравнение такой гиперплоскости имеет вид $\langle x, \rho \rangle = 1$ для некоторого вектора ρ с положительными координатами. Будем называть такую гиперплоскость допустимой, если всякий мультииндекс α, такой что моном D^α участвует в одном из операторов T_j, лежит под Λ или на ней. Это равносильно тому, что выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^{N} \rho_j \alpha_j \le 1.$$

Теперь определим старшую часть оператора T_j как линейную комбинацию всех дифференциальных мономов, участвующих в T_j, чьи мультииндексы лежат на Λ, а младшую часть — как линейную комбинацию всех оставшихся мономов, входящих в состав T_j. Старшую часть обозначим через σ_j, а младшую — через τ_j. В статье [24] доказывается, что если среди старших частей есть хотя бы две линейно независимые, то пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не изоморфно дополняемому подпространству пространства $C(S)$.

Отметим, что в случае, когда все операторы, входящие в набор $\mathcal{T}$ — мономы, теорема о неизоморфности дополняемому подпространству пространства $C(S)$ — не самое общее известное утверждение. Приведём здесь некоторые определения из теории банаховых пространств. Говорят, что банахово пространство X имеет локальную безусловную структуру, если существует такая константа $C > 0$, что для всякого конечномерного подпространства $F \subset X$ найдутся банахово пространство E с 1-безусловным базисом и два линейных оператора $R : F \to E$ и $S : E \to X$, такие что $SRx = x$ для всякого $x \in F$ и $\|S\| \cdot \|R\| \le C$. Напомним также, что базис $\{e_n\}$ называется 1-безусловным, если для любых чисел ε_n, таких что $|\varepsilon_n| \le 1$, и всякой финитной последовательности (α_n) выполняется неравенство $\|\sum \varepsilon_n \alpha_n x_n\| \le \|\sum \alpha_n x_n\|$. Отметим, что, вообще говоря, существование локальной безусловной структуры не сохраняется при переходе к замкнутым подпространствам (однако, оно сохраняется, если подпространство дополняемо). Известно, что пространство X обладает локальной безусловной структурой тогда и только тогда, когда его второе сопряжённое вкладывается дополняемо в банахову решётку (см., например, [22]).

В работе [8], в случае, когда все операторы T_j — дифференциальные мономы, были доказаны следующие утверждения. Если, опять же, среди старших частей T_j найдутся хотя бы две линейно независимые (поскольку все T_j — это мономы, старшая часть каждого их операторов T_j равна либо нулю, либо самому оператору T_j), то пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не имеет локальной безусловной структуры. Кроме того, если пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)^*$ изоморфно подпространству пространству Y с локальной безусловной структурой, то Y равномерно содержит пространства ℓ_∞^k. Это означает, что существуют подпространства Y_k в Y, такие что $\dim Y_k = k$, и обратимые операторы $T_k : Y_k \to \ell_\infty^k$, обладающие свойством $\|T_k\| \cdot \|T_k^{-1}\| \le C$. Ввиду того, что пространство $C(S)^*$ имеет локальную безусловную структуру, но не содержит пространства ℓ_∞^k равномерно, из этих утверждений следует, что $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не изоморфно факторпространству пространства $C(S)$.

В пятой главе диссертации доказываются те же самые утверждения, но в описанном выше более общем контексте. Перейдём к формулировке теоремы, доказательству которой посвящена пятая глава.

Теорема 6. *Предположим, что набор дифференциальных операторов $\mathcal{T}$ таков, что среди старших частей этих операторов найдутся по крайней мере 2 линейно независимые (при некотором выборе допустимой гиперплоскости Λ). Тогда $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не имеет локальной безусловной структуры. Кроме того, если $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)^*$ изоморфно подпространству пространства Y с локальной безусловной структурой, то Y равномерно содержит пространства ℓ_∞^k.*

Положения, выносимые на защиту

Теорема 1, Теорема 2, Теорема 3, Теорема 4, Теорема 5, Теорема 6.

Заключение

В заключение перечислим ещё раз результаты настоящей диссертации.

1. Установлено наиболее общее описание вида Литтлвуда–Пэли пространства BMO.

2. Доказано неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина.

3. Получено обобщение неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для системы Уолша на случай функций, принимающих значения в некоторых банаховых решётках.

4. Установлены геометрические свойства пространств гладких функций на торе — в частности, доказано, что в таких пространствах нет локальной безусловной структуры.

Список публикаций автора по теме диссертации

[TV1] A. Tselishchev, I. Vasiliev, *Littlewood–Paley characterization of BMO and Triebel–Lizorkin spaces*, Mathematische Nachrichten **293** (2020), 2029–2043.

[T1] А. С. Целищев, *Неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина*, Матем. сб., **212**:10 (2021), 152–164.

[T2] А. С. Целищев, *О векторнозначном неравенстве Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для функций Уолша*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **503** (2021), 137–154.

[T3] A. Tselishchev, *Absence of local unconditional structure in spaces of smooth functions on the torus of arbitrary dimension*, Studia Mathematica **261** (2021), 207–225.

Список литературы

[1] С. В. Бочкарев, *Ряды Валле-Пуссена в пространствах* ВМО*,* L_1*, и* $H^1(D)$*, и мультипликативные неравенства*, Тр. МИАН, **210** (1995), 41–64.

[2] С. В. Бочкарёв, *Средние Валле Пуссена рядов Фурье для квадратичного спектра и спектров степенной плотности*, УМН **69**:1(415) (2014), 125–162.

[3] И. Васильев, А. Целищев, *Об эквивалентной норме в пространстве* ВМО, Зап. научн. сем. ПОМИ **456** (2017), 37–54.

[4] С. В. Кисляков, *Соболевские операторы вложения и неизоморфность некоторых банаховых пространств*, Функц. анализ и его прил., **9**:4 (1975), 22–27.

[5] С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным семейством дифференциальных операторов*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **327** (2005), 78–97.

[6] С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространств гладких функций, порождённых конечным семейством неоднородных дифференциальных операторов*, Препринт ПОМИ, 6/2009.

[7] С. В. Кисляков, Д. В. Парилов, *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **327** (2005), 98–114.

[8] С. В. Кисляков, Н. Г. Сидоренко, *Отсутствие локальной безусловной структуры в анизотропных пространствах гладких функций*, Сиб. матем. журн., **29**:3 (1988) 64–77.

[9] Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным набором дифференциальных операторов. II*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **333** (2006) 62–65.

[10] Н. Г. Сидоренко, *Неизоморфность некоторых банаховых пространств гладких функций пространству непрерывных функций*, Функц. анализ и его прил., **21**:4 (1987), 169–215.

[11] Г. М. Хенкин, *Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных ($n \geq 2$)*, Матем. сб., **74(116)**:4 (1967), 595–607.

[12] E. Berkson, T. A. Gillespie and J. L. Torrea, *Vector-valued transference,* Functional Space Theory and Its Applications, Proc. Int. Conf. 13th Academic Symp. Wuhan, 2003 (ed. P. Liu), pp. 1–27 (Burnham: Research Information, 2004).

[13] J. Bourgain, *On square functions on the trigonometric system*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B, **37**:1 (1985), 20–26

[14] A. El Baraka, *Littlewood–Paley characterization for Campanato spaces*, J. Funct. Spaces Appl. **4** (2006), 193–220.

[15] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis.* 3 edition. Springer (2014).

[16] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis.* 3 edition. Springer (2014).

[17] A. Grothendieck, *Erratum au mémoire: produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955–1956), 117–120.

[18] Yongsheng Han and Dachun Yang, *New characterization of* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *space*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **10** (2004), 95–103.

[19] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis, *Analysis in Banach Spaces. Vol. I. Martingales and Littlewood–Paley Theory*, volume 63 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Springer, Cham (2016).

[20] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis, *Analysis in Banach Spaces. Vol. II. Probabilistic methods and operator theory*, volume 67 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Springer, Cham (2017).

[21] T. P. Hytönen, J. L. Torrea, D. V. Yakubovich, *The Littlewood–Paley–Rubio de Francia property of a Banach space for the case of equal intervals*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **139** (2009), 819–832.

[22] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Basic concepts in the geometry of Banach spaces*, in *Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. I*, North-Holland, Amsterdam (2001), 1–84.

[23] S. V. Kislyakov, *There is no local unconditional structure in the space of continuously differentiable functions on the torus*, LOMI Preprint R-1-77, Leningrad, 1977.

[24] S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, and D. M. Stolyarov, *Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension*, J. Funct. Anal, **269**, 3220–3263 (2015).

[25] Pekka Koskela, Dachun Yang and Yuan Zhou, *Pointwise characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces and quasiconformal mappings*, Advances in Mathematics, **226**:4 (2011), 3579–3621.

[26] S. Kwapień, A. Pełczyński, *Absolutely summing operators and translation-invariant spaces of functions on compact abelian groups*, Math. Nachr. **94** (1980) 303–340.

[27] M. T. Lacey, *Issues related to Rubio de Francia's Littlewood–Paley inequality*, New York Journal of Mathematics. NYJM Monographs **2**, State University of New York, University at Albany, Albany, NY (2007), 36 pp.

[28] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function spaces.* Results in Mathematics and Related Areas, 97. Springer, Berlin-New York, 1979.

[29] N. N. Osipov, *Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the Walsh system*, Алгебра и анализ, **28**:5 (2016), 236–246.

[30] A. Pełczyński, K. Senator, *On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical" Banach spaces and Sobolev-type embedding theorem*, Studia Math. **84** (1986) 169–215.

[31] G. Pisier, *Martingales in Banach spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 155. Cambridge University Press, Cambridge (2016).

[32] D. Potapov, F. Sukochev, Q. Xu, *On the vector-valued Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality*, Rev. Mat. Iberoamericana **28(3)** (2012), 839–856.

[33] José L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals*, Rev. Mat. Iberoamericana **1**:2 (1985), 1–14.

[34] P. Simon, *Investigations with respect to the Vilenkin system*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., **27** (1984), 87–101.

[35] Chinami Watari, *On generalized Walsh Fourier series*, Tohoku Math. J. (2), **10** (1958), 211–241.

[36] Wo-Sang Young, *Littlewood–Paley and multiplier theorems for Vilenkin–Fourier series*, Canad. J. Math., **46**:3 (1994), 662–672.