На правах рукописи

**Гордеев Алексей Сергеевич**

# Приложения полиномиального метода в комбинаторике

Специальность 01.01.06 —
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2022

Работа выполнена в лаборатории теории представлений и динамических систем Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | **Петров Фёдор Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор |
| Официальные оппоненты: | **Карасёв Роман Николаевич,** доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (государственный университет)», профессор |
| | **Гравин Николай Вадимович,** кандидат физико-математических наук, Шанхайский университет финансов и экономики (Шанхай, Китай), профессор |
| Ведущая организация: | Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. В. А. Стеклова Российской академии наук |

Защита состоится ___ _______________ 2022 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, https://www.pdmi.ras.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.202.02.

Автореферат разослан ___ _______________ 2022 года.
Телефон для справок: +7 (812) 312-40-58.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.202.02,
доктор физико-математических наук — Пономаренко Илья Николаевич

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы и степень её разработанности.** Полиномиальным методом называют ряд алгебраических инструментов, нашедших в последнее время множество различных применений в задачах арифметической и перечислительной комбинаторики, геометрии инциденций и теории графов. В общих чертах, метод, как правило, заключается в том, чтобы некоторым образом описать исследуемый объект (свободное от арифметических прогрессий множество, конфигурацию точек и прямых, набор списков цветов вершин графа и т.п.) в терминах множества корней структурно не очень сложного многочлена от нескольких переменных. Ограничения на сложность многочлена чаще всего представляют собой ограничения на его степень или на вид его коэффициентов. После этого информация об алгебраической структуре множества корней многочлена используется для изучения комбинаторных свойств исходного объекта.

Полиномиальный метод сформировался сравнительно недавно, но активно развивается и уже привел к ряду замечательных достижений. Так, в 2009 году Двиром [10] была решена гипотеза Какея над конечными полями. В 2015 году Кароли, Надь, Волков и Петров [24] доказали гипотезу Форрестера. В 2015 году Гут и Кац [18] совершили прорыв в задаче Эрдёша о различных расстояниях на плоскости. В 2017 году Крут, Лев и Пах [9] показали, что любое свободное от арифметических прогрессий подмножество абелевой группы $\mathbb{Z}_4^n$ экспоненциально мало, а Гийсвейт и Элленберг [13] перенесли результат Крута, Льва и Паха на свободные от арифметических прогрессий подмножества векторного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_q^n$. Больше примеров можно найти в обзоре Тао [31].

Данная работа посвящена приложениям комбинаторной теоремы о нулях — одного из первых систематически описанных инструментов полиномиального метода. Кратко опишем историю появления и применения этой теоремы.

В 1999 году Алон переформулировал идеи, встречавшиеся на протяжении 1990-х годов в различных комбинаторных работах [3; 4; 6], в виде комбинаторной теоремы о нулях [5]. В той же работе он привёл ряд приложений, в том числе, простые и короткие доказательства классических результатов аддитивной комбинаторики — теоремы Коши – Девенпорта и гипотезы Эрдёша – Хейльброна, а также некоторых их обобщений. Сформулируем обобщение теоремы Алона, известное как явная форма комбинаторной теоремы о нулях, или как лемма о коэффициенте. Оно было независимо получено Карасёвым и Петровым, Ласоном и Шаузом.

**Теорема 1** (Карасёв – Петров [22], Ласон [26], Шауз [29])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *— набор независимых переменных,* $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ *— набор целых неотрицательных чисел,* $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$*, где* $A_i \subset \mathbb{F}$*,* $|A_i| = d_i + 1$ *для* $1 \leq i \leq n$*. Пусть* $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$ *— многочлен* *степени* $\deg f \le |\mathbf{d}|$. *Тогда коэффициент* $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f$ *при одночлене* $\mathbf{x}^{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i}$ *многочлена* $f(\mathbf{x})$ *равен*

$$[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f = \sum_{\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in A} \frac{f(\mathbf{a})}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{b\in A_i\setminus\{a_i\}}(a_i-b)}.$$

Перечислим некоторые результаты, полученные с помощью комбинаторной теоремы о нулях (в том числе в форме теоремы 1).

**Тождества для коэффициентов многочленов.** В фундаментальной работе Дайсона 1962 года [11] была сформулирована следующая гипотеза. Рассмотрим семейство многочленов Лорана

$$\mathcal{D}(\mathbf{x},\mathbf{a}) = \prod_{1\le i\ne j\le n}\left(1-\frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i},$$

где $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$ — набор независимых переменных, $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$ — набор целых неотрицательных чисел. Тогда свободный член любого многочлена семейства равен

$$\mathrm{CT}[\mathcal{D}(\mathbf{x},\mathbf{a})] = \frac{(a_1+\dots+a_n)!}{\prod_{i=1}^{n} a_i!}.$$

Гипотеза была доказана Гансоном (не опубликовано) и Уилсоном [33] в том же году. Изящное доказательство, основанное на интерполяции методом Лагранжа, было дано Гудом [17]. В 1975 году Эндрюс [7] выдвинул $q$-версию этой гипотезы. Она была доказана лишь в 1985 году Зильбергером и Брессу [34]. В том же году Брессу и Гулден [8] доказали ряд обобщений гипотезы.

В 2012 году Карасёв и Петров [22] предложили короткое доказательство гипотезы Дайсона с помощью теоремы 1, а Кароли и Надь вскоре обобщили его до $q$-версии [23]. Примечательно, что полученное доказательство $q$-версии гипотезы было в разы короче и проще известных до этого доказательств. В 2013 году Зильбергером [12] был получен ещё ряд обобщений $q$-версии гипотезы.

Подобные тождества для свободных членов многочленов Лорана часто возникают в квантовой электродинамике. Они также тесно связаны с интегральной формулой Сельберга, играющей важную роль в теории случайных матриц, статистической механике, теории специальных функций (см. обзор [16]). В 2015 году Кароли, Надь, Волков и Петров [24] доказали ряд тождеств с интегралами типа Сельберга, в том числе гипотезу Форрестера.

Глава 2 данной работы посвящена получению дальнейших обобщений гипотезы Дайсона и её $q$-версии при помощи теоремы 1. В частности, получены простые и короткие доказательства основного результата из работы Брессу и Гулдена [8] — мастер-теоремы и её транзитивного аналога.

Основной результат главы — это тождество на свободные коэффициенты некоторого класса многочленов Лорана, в качестве частных случаев включающее в себя $q$-версию гипотезы Дайсона, мастер-теорему Брессу и Гулдена и её транзитивный аналог, а также теорему 2.5 из той же работы [8].

**Списочное хроматическое число и число Алона – Тарси графа.** Пару $G = (V, E)$ из множества вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множества рёбер (неупорядоченных пар вершин) $E$ называют графом. Степенью вершины $\deg_G(v_i)$ называют число рёбер, концом которых она является. Граф называют $d$-регулярным, если степень любой его вершины равна $d$.

Пусть каждой вершине $v_i$ назначен свой список цветов $A_i$, в которые её можно красить. Правильной раскраской $G$ называют выбор цветов $a_i \in A_i$, при котором концы каждого ребра имеют разные цвета. Хроматическим числом $\chi(G)$ называют минимальное положительное целое $k$, для которого существует правильная раскраска $G$ согласно одинаковым спискам $A_i = \{1, \ldots, k\}$. Списочным хроматическим числом $\mathrm{ch}(G)$ называют минимальное положительное целое $k$, для которого существует правильная раскраска $G$ согласно произвольным спискам размера $|A_i| = k$.

Аналогично определяются рёберные раскраски, рёберное хроматическое $\chi'(G)$ и списочное хроматическое $\mathrm{ch}'(G)$ числа графа $G$: в этом случае список цветов есть у каждого ребра, а в правильной раскраске любые два ребра с общим концом должны иметь разные цвета. Одна из самых известных открытых гипотез в области раскрасок графов — гипотеза о списочных раскрасках рёбер, согласно которой $\chi'(G) = \mathrm{ch}'(G)$ для любого графа $G$.

В 1992 году Алон и Тарси [4] предложили новый алгебраический метод (позже переформулированный Алоном в виде комбинаторной теоремы о нулях) доказательства верхних оценок на списочные хроматические числа графов. Вкратце опишем метод: для графа $G = (V, E)$ рассмотрим графовый многочлен $F_G(\mathbf{x}) = \prod_{\{v_i, v_j\} \in E} (x_i - x_j)$, где переменные $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ соответствуют вершинам графа $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Правильные раскраски $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \subset A_1 \times \cdots \times A_n$ графа соответствуют точкам, в которых графовый многочлен не равен нулю: $F_G(\mathbf{a}) \neq 0$. Тогда, по комбинаторной теореме о нулях, любой ненулевой коэффициент $F_G$ даёт оценку на списочное хроматическое число $G$. Показывать, что коэффициент не равен нулю, Алон и Тарси предлагали с помощью комбинаторной интерпретации коэффициентов в терминах ориентаций (выборов направлений на каждом ребре) графа $G$. Сформулируем эту интерпретацию в случае двудольных (имеющих правильную раскраску в 2 цвета) графов, когда она имеет особенно простой вид.

**Теорема 2** (Алон – Тарси [4]). *Рассмотрим двудольный граф $G$. Если существует ориентация $G$ (выбор направления на каждом ребре), в которой из любой вершины наружу направлено меньше $k$ рёбер, то $\mathrm{ch}(G) \leq k$.*

В частности, пользуясь этой теоремой, Алон и Тарси показали, что списочное хроматическое число планарного (такого, что его можно нарисовать на плоскости так, чтобы рёбра без общих концов не пересекались) двудольного графа не превосходит 3.

При помощи метода Алона – Тарси вскоре было установлено множество новых результатов. В том же году Фляйшнер и Штибиц [15] доказали, что любой граф на $3n$ вершинах, являющийся объединением гамильтонова (проходящего через все вершины графа) цикла и $n$ попарно не пересекающихся по вершинам треугольников, имеет списочное хроматическое число 3. В 1996 году Эллингхам и Годдин [14] доказали гипотезу о списочных раскрасках рёбер в случае $d$-регулярных $d$-рёберно-раскрашиваемых планарных мультиграфов (графов, в которых между одной парой вершин может быть проведено несколько рёбер). В 1997 году Хеггквист и Янссен [19] доказали эту гипотезу в случае полных графов (графов, в которых есть ребро между каждой парой вершин) на нечётном числе вершин.

После появления теоремы 1 стало возможно вычислять коэффициенты графового многочлена напрямую с её помощью. Так, в 2014 году Шауз [30] при помощи теоремы 1 доказал гипотезу о списочных раскрасках рёбер для полных графов на $(p+1)$ вершине, где $p$ — простое.

Оценки, полученные методом Алона – Тарси, со временем стали называть числом Алона – Тарси (см. [21]). В 2019 году Каул и Мадрок [25] исследовали число Алона – Тарси прямых произведений графов, и, в частности, показали, что прямое произведение нечётного простого цикла и простого пути является 3-списочно-раскрашиваемым.

В главе 3 данной работы исследуется число Алона – Тарси (и списочное хроматическое число) прямого произведения двух циклов. При помощи теоремы 1 коэффициент графового многочлена интерпретируется как след степени некоторой матрицы, после чего доказательство того, что коэффициент не равен нулю, сводится к исследованию собственных чисел матрицы. В той же главе показано, как подобная интерпретация коэффициента как следа позволяет строить верхнюю оценку на число Алона – Тарси более широкого класса графов — прямых произведений чётного цикла и графа $G$ с чётными степенями вершин, в графовом многочлене $F_G$ которого есть ненулевой коэффициент при таком одночлене $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$, что $|d_i - \deg_G(v_i)/2| \leq 1$ для всех $i$. Наконец, приведены несколько приложений полученной оценки, в том числе верхняя оценка на число Алона – Тарси прямого произведения чётного цикла и произвольного графа.

**Списочное хроматическое число гиперграфа.** Гиперграфом $H = (V, E)$ называют пару из множества вершин $V$ и множества рёбер $E$, где ребро — уже не пара, а произвольное подмножество вершин размера больше 1. Гиперграф называют $s$-однородным, если каждое его ребро имеет размер $s$. Понятия хроматического и списочного хроматического числа обобщаются на гиперграфы: правильной раскраской гиперграфа называют такую раскраску вершин, в которой каждое ребро содержит две вершины разных цветов.

В 1988 году Алон и Брегман [2] доказали, что любой $k$-регулярный $k$-однородный гиперграф имеет хроматическое число 2 при $k \geq 8$, усилив тем самым фольклорную оценку, доказывающую тот же самый факт при $k \geq 9$ с помощью локальной леммы Ловаса. В той же работе они предположили, что утверждение верно для любого $k \geq 4$. Заметим, что при $k = 2, 3$ утверждение неверно: контрпример для $k = 2$ — это простой цикл нечётной длины, для $k = 3$ — плоскость Фано, то есть гиперграф на вершинах $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ с рёбрами $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_5\}$, $\{v_3, v_4, v_6\}$, $\{v_4, v_5, v_7\}$, $\{v_1, v_5, v_6\}$, $\{v_2, v_6, v_7\}$, $\{v_1, v_3, v_7\}$. В 1992 году Томассен [32] (см. также [20]) показал, что $k$-регулярные $k$-однородные гиперграфы имеет хроматическое число 2 при $k \geq 4$, тем самым ответив на вопрос Алона и Брегмана.

В 2005 году Рамамурти и Уэст [27] предложили обобщение метода Алона – Тарси на $p$-однородные гиперграфы для простого $p$. К сожалению, метод не получил широкого распространения, поскольку предложенные ими аналоги условий Алона и Тарси на ориентации графа оказалось слишком сложно проверять. В частности, не было получено простого аналога теоремы 2. Рамамурти и Уэст задались вопросом, существует ли такой аналог. В 2010 году Шауз [28] обобщил теорему 2 на $k$-дольные $k$-однородные гиперграфы, то есть гиперграфы, вершины которых можно разделить на $k$ долей так, чтобы каждое ребро содержало ровно по одной вершине из каждой доли. Отметим, что любой $k$-дольный $k$-однородный гиперграф красится в два цвета: например, можно покрасить одну из долей в первый цвет, а остальные доли — во второй.

В главе 4 приведено обобщение теоремы 2 (и результата Шауза для $k$-дольных $k$-однородных гиперграфов) на произвольные двудольные (имеющие хроматическое число 2) гиперграфы. В качестве следствия получено обобщение результата Томассена с обычных раскрасок на списочные: показано, что $k$-регулярные $k$-однородные гиперграфы имеют списочное хроматическое число 2 при $k \geq 4$. Также получены верхняя и нижняя вероятностные оценки списочного хроматического числа полного двудольного однородного гиперграфа, отличающиеся на субэкспоненциальный множитель.

**Целью** данной работы является приложение комбинаторной теоремы о нулях и её явной формы для получения, во-первых, новых обобщений $q$-версии гипотезы Дайсона; во-вторых, оценок на число Алона – Тарси (и списочное хроматическое число) прямых произведений двух циклов, а также прямых произведений графов, одним из множителей в которых является чётный цикл; в-третьих, оценок на списочное хроматическое число двудольных гиперграфов.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации — новые.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и идеи из них могут быть использованы для дальнейшего изучения тождеств с коэффициентами многочленов, а также списочных хроматических чисел (и чисел Алона – Тарси) графов и гиперграфов.

**Методология и методы исследования.** Большинство результатов используют полиномиальный метод в комбинаторике, а именно комбинаторную теорему о нулях Алона и её явную форму, а также её графовую интерпретацию — метод Алона – Тарси. Результаты главы 3 используют линейную алгебру. В главе 4 используются вероятностные методы в комбинаторике.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Получено простое и короткое доказательство мастер-теоремы и её транзитивного аналога из работы Брессу и Гулдена [8] (см. доказательство теоремы 2.2.2).
2. Получено новое обобщение $q$-версии гипотезы Дайсона, включающее в качестве частных случаев мастер-теорему, её транзитивный аналог, а также теорему 2.5 из работы Брессу и Гулдена [8] (теорема 2.2.4).
3. Доказана общая оценка на число Алона – Тарси (и списочное хроматическое число) прямого произведения чётного цикла и графа с чётными степенями вершин, в графовом многочлене которого есть ненулевой почти центральный коэффициент (теорема 3.2.5). Получен ряд приложений этой оценки (предложения 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8 и 3.2.10 и следствие 3.2.9).
4. Получено обобщение на случай двудольных гиперграфов результатов Алона и Тарси для двудольных графов (теоремы 4.2.3 и 4.2.4, следствие 4.2.5).
5. Получено обобщение теоремы Томассена [32] о 2-раскрашиваемости $k$-регулярных $k$-однородных гиперграфов при $k \geq 4$: показано, что такие гиперграфы являются и 2-списочно-раскрашиваемыми (теорема 4.2.6).
6. Получены оценки на списочное хроматическое число полного двудольного однородного гиперграфа (теоремы 4.2.10 и 4.2.11).

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается наличием строгих математических доказательств.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на финальном туре второго конкурса студенческих работ по теоретической информатике и дискретной математике им. Алана Тьюринга (Санкт-Петербург, 2017 год), в секции «Группы и графы» на Конференции международных математических центров мирового уровня (онлайн, 2021 год), а также на петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, 2022 год).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в четырёх работах [A1—A4]. Работы [A1; A2; A4] опубликованы в рецензируемых журналах. Работа [A3] принята к печати в рецензируемом журнале.

**Личный вклад.** Результаты работы [A2] получены автором самостоятельно. В работе [A3] Ли и Шао принадлежит постановка задачи, Петрову принадлежит интерпретация формулы для коэффициента графового многочлена как следа матрицы (лемма 3.2), автору принадлежит идея доказательства следствия 3.3 с помощью проверки (анти)эрмитовости матрицы; остальные результаты получены всеми авторами совместно. В работе [A4] Петрову принадлежит формулировка и исходное доказательство основного результата — теоремы 3, автором получены упрощённое доказательство теоремы 3, а также приложения: следствие 7 и предложение 8; остальные результаты получены соавторами совместно. В работе [A1] автором получено обобщение метода Алона – Тарси на случай двудольных гиперграфов (теоремы 5 и 6, а также следствие 1), Черкашиным получена верхняя вероятностная оценка на списочное хроматическое число (теорема 8); остальные результаты получены соавторами совместно.

**Благодарности.** Выражаю глубокую признательность моему научному руководителю Фёдору Владимировичу Петрову за постановки задач, многочисленные обсуждения, проявленные внимание и терпение. Также я благодарен Даниле Черкашину за его прямоту, за совместные занятия наукой и советы старшего коллеги. Я безумно благодарен любимой жене Анастасии Софроновой и нашему коту Локи, без поддержки которых я бы не справился.

## Содержание работы

В **первой главе** вводятся основные определения и обозначения, описываются методы, используемые в последующих главах. В **разделе 1.1** приведён список используемых обозначений. Перечислим некоторые из них: $\mathbb{F}$ — произвольное поле, если не сказано иного, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ — множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных (целых положительных) чисел.

- $[l,r] = \{l, l+1, \dots, r\}$ для $l, r \in \mathbb{Z}$, $l \leq r$.
- $[\![\dots]\!]$ равняется 1, если выражение в скобках истинно, и 0 иначе.
- Для $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$ обозначим $|\mathbf{d}| = d_1 + \dots + d_n$.
- Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$ обозначим

$$\mathbf{x}^{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i}.$$

- $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f$ — коэффициент при одночлене $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$ многочлена $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$.
- Для конечного $A \subset \mathbb{F}$ и $a \in A$ обозначим

$$\kappa(A, a) = \prod_{b \in A \setminus \{a\}} (a - b).$$

В **разделе 1.2** формулируется комбинаторная теорема о нулях Алона и её явная форма.

**Теорема 1.2.1** (Комбинаторная теорема о нулях, Алон [5])**.** *Пусть* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *— набор независимых переменных,* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *где* $A_i \subset \mathbb{F}$, $|A_i| = d_i + 1$ *для* $i \in [1, n]$. *Пусть* $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$ *— многочлен степени* $\deg f \leq |\mathbf{d}|$. *Если* $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f \neq 0$, *то найдётся такое* $\mathbf{a} \in A$, *что* $f(\mathbf{a}) \neq 0$.

**Теорема 1.2.2** (Карасёв – Петров [22], Ласон [26], Шауз [29])**.** *Пусть* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *— набор независимых переменных,* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *где* $A_i \subset \mathbb{F}$, $|A_i| = d_i + 1$ *для* $i \in [1, n]$. *Пусть* $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$ *— многочлен степени* $\deg f \leq |\mathbf{d}|$. *Тогда коэффициент* $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f$ *равен*

$$[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f = \sum_{\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A} \frac{f(\mathbf{a})}{\prod_{i=1}^n \kappa(A_i, a_i)}.$$

В **разделе 1.3** перечисляются понятия из теории графов и гиперграфов. *Гиперграф* — это пара конечных множеств $(V, E)$, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество *вершин*, $E \subset \mathcal{P}(V)$ — множество *рёбер* (здесь $\mathcal{P}(V)$ — это множество всех подмножеств $V$). В этой работе рассматриваются только гиперграфы, все рёбра которых имеют размер больше 1. *$n$-однородный* гиперграф, или *$n$-граф*, — это гиперграф, все рёбра которого имеют размер $n$. 2-граф обычно называют просто *графом*.

*Степень* $\deg_H(v_i)$ вершины $v_i$ гиперграфа $H = (V, E)$ — это число рёбер $H$, содержащих $v_i$. $\Delta(H)$ — максимальная степень вершины в гиперграфе $H$. Гиперграф $H$ — *$d$-регулярный*, если $\deg_H(v_i) = d$ для всех $v_i$.

*Ориентация* гиперграфа $H$ — это отображение $\phi : E \to V$, такое что $\phi(e) \in e$ для каждого ребра $e \in E$. *Степень относительно ориентации* $\deg_\phi(v_i)$ вершины $v_i$ — это число рёбер, на которых ориентация принимает значение $v_i$: $\deg_\phi(v_i) = |\phi^{-1}(v_i)|$.

В случае графов ориентацию удобно интерпретировать как выбор направления на каждом ребре: ориентация $D$ графа $G = (V, E)$ — это пара $D = (V, E')$ такая, что в $E'$ лежит ровно одна из упорядоченных пар $(v_i, v_j)$, $(v_j, v_i)$ для каждого ребра $\{v_i, v_j\} \in E$. *Входящая степень* $\deg^{\text{in}}_D(v_i)$ вершины $v_i$ — это число рёбер, направленных в вершину $v_i$, то есть рёбер вида $(v_j, v_i) \in E'$. *Исходящая степень* $\deg^{\text{out}}_D(v_i)$ — это число рёбер, направленных из вершины $v_i$, то есть рёбер вида $(v_i, v_j) \in E'$.

Пусть каждой вершине $v_i$ назначен свой *список цветов* $A_i \subset \mathbb{F}$, в которые её разрешается красить. *Раскраска $H$ (согласно спискам $A_i$)* — это выбор цвета $a_i \in A_i$ для каждой вершины $v_i$. Раскраска $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — *правильная*, если в каждом ребре $e \in E$ найдутся две вершины $v_i, v_j \in e$ разных цветов: $a_i \neq a_j$.

Гиперграф $H$ — *$k$-раскрашиваемый* для $k \in \mathbb{N}$, если существует его правильная раскраска согласно одинаковым спискам $A_i = [1, k]$. *Хроматическое число* $\chi(H)$ гиперграфа $H$ — это минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что $H$ — $k$-раскрашиваемый.

2-раскрашиваемый гиперграф $H$ также называют *двудольным*. *Полный двудольный гиперграф* $K^s_{n,m}$ — это двудольный $s$-граф с долями размеров $n$ и $m$ и всеми возможными рёбрами, пересекающими обе доли. Для полного двудольного графа будем опускать верхний индекс: $K_{n,m} = K^2_{n,m}$.

Пусть $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$. Гиперграф $H$ — **d**-*списочно-раскрашиваемый*, если для *любых* списков размеров $|A_i| = d_i$ найдётся правильная раскраска $H$ согласно этим спискам. Гиперграф $H$ — *$k$-списочно-раскрашиваемый*, если он **d**-списочно-раскрашиваемый для $\mathbf{d} = (k, \ldots, k)$. *Списочное хроматическое число* $\mathrm{ch}(H)$ гиперграфа $H$ — это минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что $H$ — $k$-списочно-раскрашиваемый.

В **разделе 1.4** описывается метод Алона – Тарси получения верхних оценок на списочные хроматические числа графов, а также перечисляются известные результаты, полученные этим методом.

Пусть $D$ — ориентация графа $G$. Подграф $H$ ориентации $D$ — *эйлеров*, если входящая степень любой вершины $v_i$ равна её исходящей степени: $\deg^{\mathrm{in}}_H(v_i) = \deg^{\mathrm{out}}_H(v_i)$. Эйлеров подграф $H$ — *чётный*, если число его рёбер чётно, и *нечётный* иначе. Отметим, что любая ориентация $D$ имеет пустой чётный эйлеров подграф. Обозначим за $\mathrm{EE}(D)$ и $\mathrm{EO}(D)$ число чётных и нечётных эйлеровых подграфов $D$, соответственно.

**Теорема 1.4.1** (Алон – Тарси [4])**.** *Пусть $D$ — ориентация графа $G$. Если $\mathrm{EE}(D) \neq \mathrm{EO}(D)$, то $G$ — $(\deg^{\mathrm{out}}_D + 1)$-списочно-раскрашиваемый.*

*Число Алона – Тарси* $\mathrm{AT}(G)$ графа $G$ — это минимальное $k \in \mathbb{N}$, для которого найдётся такая ориентация $D$ графа $G$, что $\mathrm{EE}(D) \neq \mathrm{EO}(D)$, а исходящая степень $\deg^{\mathrm{out}}_D(v_i)$ любой вершины $v_i$ не превосходит $k - 1$.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Определим *графовый многочлен* $F_G(\mathbf{x})$ от $n$ независимых переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ как

$$F_G(\mathbf{x}) = \prod_{\{i,j\} \in E} (x_j - x_i).$$

Каждое ребро соответствует одному линейному множителю $x_j - x_i$, а сам графовый многочлен $F_G$, таким образом, определён с точностью до знака.

Заметим, что раскраска $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ является правильной тогда и только тогда, когда $F_G(\mathbf{a}) \neq 0$. Сформулируем альтернативное определение числа Алона – Тарси: $\mathrm{AT}(G)$ — это минимальное $k$, для которого найдётся такой одночлен $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$, что $\max(d_1, \ldots, d_n) = k - 1$ и $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]F_G \neq 0$.

Во **второй главе** представлены результаты из работы автора [A2] — новое короткое доказательство мастер-теоремы (и её транзитивного аналога) из работы Брессу и Гулдена [8], а также общее тождество, обобщающее $q$-версию гипотезы Дайсона, мастер-теорему (и её транзитивный аналог) и теорему 2.5 из той же работы [8].

В **разделе 2.1** перечислены специфические для главы обозначения. Так, за $\mathrm{CT}[f]$ обозначается свободный член многочлена Лорана $f \in \mathbb{F}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}, q, q^{-1}]$ над полем рациональных функций $\mathbb{F}(q)$, а для $n \geq 0$ вводится обозначение $(x)_n = \prod_{t=0}^{n-1}(1 - q^t x)$. Кроме того, вводятся понятия *турнира*, *транзитивного турнира* и его *победной перестановки*.

В **разделе 2.2** приведён обзор известных обобщений гипотезы Дайсона. Сформулируем $q$-версию гипотезы, впервые доказанную в 1985 году Зильбергером и Брессу.

**Теорема 2.2.1** (Зильбергер – Брессу [34])**.** *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$*. Рассмотрим многочлен Лорана над полем* $\mathbb{F}$

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{q x_j}{x_i}\right)_{a_j}.$$

*Тогда*

$$\mathrm{CT}[f] = \frac{(q)_{|\mathbf{a}|}}{(q)_{a_1} \ldots (q)_{a_n}}.$$

Также приводятся обобщения гипотезы, доказанные в том же году Брессу и Гулденом; сформулируем одно из них.

**Теорема 2.2.2** (Брессу – Гулден [8], теоремы 1.3 и 2.2)**.** *Пусть $T$ — турнир на $n$ вершинах,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$*. Рассмотрим многочлен Лорана над полем* $\mathbb{F}$

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{(i,j) \in T} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{q x_j}{x_i}\right)_{a_j - 1}.$$

*Тогда* $\mathrm{CT}[f] = 0$*, если $T$ — не транзитивен. В случае, когда $T$ — транзитивный турнир с победной перестановкой $\sigma$,*

$$\mathrm{CT}[f] = \frac{(q)_{|\mathbf{a}|}}{(q)_{a_1} \ldots (q)_{a_n}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - q^{a_{\sigma_i}}}{1 - q^{a_{\sigma_1} + \cdots + a_{\sigma_i}}}.$$

В работе автора [A2] доказан следующий результат, обобщающий теоремы 2.2.1, 2.2.2 и теорему 2.5 из работы [8].

**Теорема 2.2.4.** *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $l_i, m_i, r_i \in \mathbb{N}$, $i \in [1, k]$ *— числа, удовлетворяющие* $1 \le l_1 \le m_1 \le r_1 < l_2 \le \dots \le r_{k-1} < l_k \le m_k \le r_k \le n$. *Пусть*

$$C_i = \bigcup_{j=m_i+1}^{r_i} [l_i, j-2] \times \{j\}, \quad B_i \subset C_i,$$

$$U_i = B_i \cup ([l_i, m_i - 1] \times \{m_i\}) \cup \bigcup_{j=m_i}^{r_i - 1} (j, j+1), \quad U = \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

*Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. *Рассмотрим многочлен Лорана над полем* $\mathbb{F}$

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left( \frac{x_i}{x_j} \right)_{a_i} \left( \frac{q x_j}{x_i} \right)_{a_j - [\![(i,j) \in U]\!]}.$$

*Тогда*

$$\mathrm{CT}[f] = \frac{(q)_{|\mathbf{a}|}}{(q)_{a_1} \dots (q)_{a_n}} \cdot \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=m_i}^{r_i} \frac{1 - q^{a_j}}{1 - q^{a_{l_i} + \dots + a_j}}.$$

Поясним идею за громоздкими формулировками приведённых теорем, а также связь между этими теоремами. Рассмотрим соответствие между многочленами Лорана над полем $\mathbb{F}$ вида

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left( \frac{x_i}{x_j} \right)_{a_{i,j}} \left( \frac{q x_j}{x_i} \right)_{a_{j,i}}$$

и квадратными матрицами с неотрицательными целыми коэффициентами и нулями на главной диагонали $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$. Так, многочлены из теоремы 2.2.1 и транзитивного случая теоремы 2.2.2 (для тождественной победной перестановки) соответствуют матрицам

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & 0 & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 - 1 & 0 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 - 1 & a_3 - 1 & 0 & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - 1 & a_n - 1 & \dots & a_n - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Многочлен из теоремы 2.2.4 с параметрами $n = 9$, $k = 1$, $l_1 = 2$, $m_1 = 5$, $r_1 = 8$, $B_1 = \{(2,6),(4,6),(3,7),(4,7),(2,8),(4,8)\}$ соответствует матрице

$$\begin{pmatrix}
0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\
a_2 & 0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 \\
a_3 & a_3 & 0 & a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & a_3 \\
a_4 & a_4 & a_4 & 0 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \\
a_5 & a_5-1 & a_5-1 & a_5-1 & 0 & a_5 & a_5 & a_5 & a_5 \\
a_6 & a_6-1 & a_6 & a_6-1 & a_6-1 & 0 & a_6 & a_6 & a_6 \\
a_7 & a_7 & a_7-1 & a_7-1 & a_7 & a_7-1 & 0 & a_7 & a_7 \\
a_8 & a_8-1 & a_8 & a_8-1 & a_8 & a_8 & a_8-1 & 0 & a_8 \\
a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & 0
\end{pmatrix}.$$

Как видим, эта матрица отличается от матрицы из теоремы 2.2.1 тем, что некоторые коэффициенты уменьшены на 1. Такие коэффициенты сгруппированы в $k$ блоков. Каждый блок состоит из подотрезка какой-то строки ($[l_i, m_i - 1] \times \{m_i\}$), подотрезка диагонали (той, что находится под главной диагональю, $\bigcup_{j=m_i}^{r_i-1}(j, j+1)$) и произвольного подмножества коэффициентов “под ними” ($B_i$ — произвольное подмножество $C_i$). Отметим, что:

- Теорема 2.2.1 получается из теоремы 2.2.4 при $k = 0$.
- Транзитивная часть теоремы 2.2.2 (для тождественной победной перестановки) получается из теоремы 2.2.4 при $k = 1$, $l_1 = m_1 = 1$, $r_1 = n$, $B_1 = C_1$.
- Теорема 2.5 из работы [8] получается из теоремы 2.2.4, если $B_i = C_i$ для всех $i$.

В **разделе 2.3** приводятся доказательства сформулированных утверждений. В **подразделе 2.3.1** приведено доказательство $q$-версии тождества Дайсона (теоремы 2.2.1) при помощи явной формы комбинаторной теоремы о нулях. В **подразделе 2.3.2** приведено короткое доказательство тем же методом теоремы 2.2.2. В **подразделе 2.3.3** приведено доказательство основного результата из работы автора [A2] — теоремы 2.2.4.

В **третьей главе** представлены результаты работ [A3; A4] — оценки числа Алона – Тарси (и списочного хроматического числа) прямого произведения двух циклов, а также более общего класса графов — прямого произведения чётного цикла и графа с ненулевым почти центральным коэффициентом в графовом многочлене.

В **разделе 3.1** вводятся специфические для третьей главы обозначения. *Прямое (декартово) произведение* $G_1 \square G_2$ графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — это граф на множестве вершин $V_1 \times V_2$, в котором две вершины $(v_1, v_2)$ и $(u_1, u_2)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда либо $v_1 = u_1$ и $\{v_2, u_2\} \in E_2$, либо $v_2 = u_2$ и $\{v_1, u_1\} \in E_1$. *Полный граф (клика)* $K_n$ на $n$ вершинах — это граф на $n$ вершинах, в котором есть ребро между каждой парой вершин. *(Простой) путь* $P_n$ на $n$ вершинах — это граф на множестве вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множестве рёбер $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in [1, n-1]\}$. Наконец, *(простой) цикл* $C_n$ на $n$

вершинах — это граф на множестве вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множестве рёбер $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in [1, n]\}$, где $v_{n+1} = v_1$. *Мультиграф* — это граф, рёбра которого образуют мультимножество. Другими словами, одна пара вершин в мультиграфе может быть соединена несколькими рёбрами, которые в таком случае называют *кратными*. Коэффициент $\left[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}\right] F_G$ графового многочлена $F_G(\mathbf{x})$ — *центральный*, если $d_i = \deg_G(v_i)/2$ для всех $i$, и *почти центральный*, если $|d_i - \deg_G(v_i)/2| \leq 1$ для всех $i$.

В **разделе 3.2** перечисляются известные оценки на число Алона – Тарси и списочное хроматическое число прямых произведений графов. Сформулируем основной результат работы [A3].

**Теорема 3.2.4.** *Для любых $n, k \geq 3$*

$$\mathrm{AT}(C_n \square C_k) = \begin{cases} 3, & \text{если } nk \text{ чётно,} \\ 4, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В работе [A4] другим методом показан следующий более общий результат.

**Теорема 3.2.5.** *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $G$ — граф, все вершины в котором имеют чётную степень. Предположим, что у графового многочлена $F_G$ есть хотя бы один ненулевой почти центральный коэффициент. Тогда центральный коэффициент графового многочлена $F_H$ графа $H = G \square C_{2k}$ не равен нулю. Как следствие, граф $H$ — $(\deg_H/2 + 1)$-списочно-раскрашиваемый и*

$$\mathrm{ch}(H) \leq \mathrm{AT}(H) \leq \frac{\Delta(H)}{2} + 1 = \frac{\Delta(G)}{2} + 2.$$

Перечислим также полученные в работе [A4] приложения теоремы 3.2.5.

**Предложение 3.2.6.** *Пусть $G = C_{2k_1+1} \square \cdots \square C_{2k_m+1} \square C_{2k_{m+1}} \square \cdots \square C_{2k_n}$, $0 \leq m < n$,*

$$\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_m} \leq 1.$$

*Тогда*

$$\mathrm{ch}(G) \leq \mathrm{AT}(G) = n + 1.$$

**Предложение 3.2.7.** *Пусть $C_n^p$ — это $p$-**я степень цикла** $C_n$, то есть граф на множестве вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$, в котором $v_i$ и $v_j$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $j \in \{i - p, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots i + p\}$ (все индексы по модулю $n$). Пусть $p + 1$ делит $n$, либо $n \geq p(p + 1)$. Тогда*

$$\mathrm{ch}(C_n^p \square C_{2k}) \leq \mathrm{AT}(C_n^p \square C_{2k}) \leq p + 2.$$

Теорему 3.2.5 можно применять и к мультиграфам. В частности, добавляя кратные рёбра к графам с большим списочным хроматическим числом, можно получать для них нетривиальные оценки. Примером такой оценки является следующее предложение.

**Предложение 3.2.8.** *Пусть $G = (V, E)$ — граф, все вершины максимальной степени в котором можно покрыть набором непересекающихся по вершинам циклов. Тогда*

$$\mathrm{AT}(G\square C_{2k}) \le \Delta(G) + 1 = \Delta(G\square C_{2k}) - 1.$$

**Следствие 3.2.9.**

$$\mathrm{ch}(K_n\square C_{2k}) = \mathrm{AT}(K_n\square C_{2k}) = n.$$

Наконец, следующее предложение представляет собой обобщение теоремы 3.2.5 на произвольные графы (не обязательно с чётными степенями вершин, не обязательно с ненулевым почти центральным коэффициентом). Нестрого говоря, оно оценивает списочное хроматическое число в терминах того, насколько близкий к центральному ненулевой коэффициент есть у графового многочлена. Также из этого предложения можно вывести следствие 3.2.9.

**Предложение 3.2.10.** *Рассмотрим граф $G = (V, E)$, пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Для любого $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ определим $l_G(\eta, i) = |\eta_i - \deg_G(v_i)/2|$. Пусть $[\mathbf{x}^\tau]F_G(\mathbf{x})$ — ненулевой коэффициент графового многочлена $F_G$. Разделим множество $[1, n]$ на части*

$$\begin{aligned}
N &= \{i \mid \tau_i = \deg_G(v_i)/2\},\\
A_1 &= \{i \mid \tau_i \le \deg_G(v_i)/2 - 1\},\\
A_2 &= \{i \mid \tau_i = \deg_G(v_i)/2 - 1/2\},\\
B_1 &= \{i \mid \tau_i \ge \deg_G(v_i)/2 + 1\},\\
B_2 &= \{i \mid \tau_i = \deg_G(v_i)/2 + 1/2\}.
\end{aligned}$$

*Также, пусть $A_3$ — произвольное подмножество $A_1$ размера $\max(0, |A_1| - |B_1|)$, $B_3$ — произвольное подмножество $B_1$ размера $\max(0, |B_1| - |A_1|)$. Тогда граф $G\square C_{2k}$ — $f$-списочно-раскрашиваемый, где*

$$f(v_i) = \begin{cases} \deg_G(v_i)/2 + 2, & \text{если } i \in N,\\ \deg_G(v_i)/2 + l_G(\tau, i) + 1, & \text{если } i \in A_1 \cup B_1 \setminus A_3 \setminus B_3,\\ \deg_G(v_i)/2 + l_G(\tau, i) + 2, & \text{если } i \in A_2 \cup B_2 \cup A_3 \cup B_3.\end{cases}$$

В **разделе 3.3** приведены доказательства сформулированных утверждений. **Подраздел 3.3.1** содержит доказательство теоремы 3.2.4. В

**подразделе 3.3.2** приведено доказательство теоремы 3.2.5. **Подразделы 3.3.3 – 3.3.5** посвящены доказательствам приложений теоремы 3.2.5.

В **четвёртой главе** представлены результаты работы [A1] — обобщение теорем Алона и Тарси со случая двудольных графов на случай двудольных гиперграфов, обобщение результата Томассена о $k$-регулярных $k$-графах с обычных раскрасок на списочные, а также отличающиеся субэкспоненциальным множителем верхняя и нижняя оценки на списочное хроматическое число полного двудольного однородного гиперграфа.

В **разделе 4.1** вводятся специфические для четвёртой главы обозначения. Для гиперграфа $H = (V, E)$ обозначим

$$\mathrm{L}(H) = \max_{\emptyset \neq E' \subset E} \frac{|E'|}{|\cup_{e \in E'} e|}.$$

*$k$-дольный $k$-граф* — это $k$-граф, чьё множество вершин можно разделить на $k$ множеств $V_1, \ldots, V_k$ так, чтобы каждое ребро пересекало каждое из $V_i$ ровно по одной вершине.

В **разделе 4.2** приводится обзор известных результатов и формулируются результаты работы [A1]. В **подразделе 4.2.1** речь идёт об обобщениях метода Алона – Тарси на гиперграфы. Заметим, что при применении теоремы 1.4.1 к двудольному графу $G$ любая ориентация $D$ удовлетворяет $\mathrm{EE}(D) \neq \mathrm{EO}(D)$, поскольку $\mathrm{EO}(D) = 0$, $\mathrm{EE}(D) > 0$. Это даёт следующие две теоремы.

**Теорема 4.2.1** (Алон – Тарси [4]). *Если двудольный граф $G = (V, E)$ имеет ориентацию $D$, то $G$ — $(\deg_D^{\mathrm{out}} + 1)$-списочно-раскрашиваемый.*

**Теорема 4.2.2** (Алон – Тарси [4], теорема 3.2). *Любой двудольный граф $G$ удовлетворяет*

$$\mathrm{ch}(G) \leq \lceil \mathrm{L}(G) \rceil + 1.$$

В 2010 году Шауз [28] обобщил теоремы 4.2.1 и 4.2.2 на случай $k$-дольных $k$-графов (двудольные графы соответствуют случаю $k = 2$).

В работе [A1] получены следующие обобщения тех же оценок на случай двудольных (2-раскрашиваемых) гиперграфов. Отметим, что любой $k$-дольный $k$-граф является 2-раскрашиваемым: например, можно покрасить первую долю в один цвет, а остальные доли — в другой.

**Теорема 4.2.3.** *Если двудольный гиперграф $H = (V, E)$ имеет ориентацию $\phi$, то $H$ — $(\deg_\phi + 1)$-списочно-раскрашиваемый.*

**Теорема 4.2.4.** *Любой двудольный гиперграф $H$ удовлетворяет*

$$\mathrm{ch}(H) \leq \lceil \mathrm{L}(H) \rceil + 1.$$

Поскольку точное значение $\mathrm{L}(H)$ часто бывает трудно явно вычислить, сформулируем также оценку списочного хроматического числа двудольного гиперграфа в более простых терминах. Обозначим за $s(H)$ минимальный размер ребра в $H$.

**Следствие 4.2.5.** *Пусть $H = (V, E)$ — двудольный гиперграф. Тогда*

$$\mathrm{ch}(H) \leq \left\lceil \frac{\Delta(H)}{s(H)} \right\rceil + 1.$$

В 1992 году Томассен [32] (см. также [20]) подтвердил предположение Алона и Брегмана [2], показав, что любой $k$-регулярный $k$-граф является 2-раскрашиваемым при $k \geq 4$. Применив следствие 4.2.5, мы немедленно получаем следующее усиление этого результата.

**Теорема 4.2.6.** *Любой $k$-регулярный $k$-граф является 2-списочно-раскрашиваемым при $k \geq 4$.*

Для произвольного (не обязательно двудольного) гиперграфа верна более слабая оценка с дополнительным множителем 2. Следующая теорема была фактически доказана Гравиным и Карповым [1], хотя они и не рассматривали свои результаты в контексте списочных раскрасок. Отметим, что в соответствующей теореме из [1] есть вторая часть, в которой слагаемое $+1$ пропадает из оценки при некоторых предположениях; эти рассуждения также можно обобщить на списочные раскраски.

**Теорема 4.2.7.** *Для любого гиперграфа $H = (V, E)$ выполняется оценка*

$$\mathrm{ch}(H) \leq \left\lceil \frac{2\Delta(H)}{s(H)} \right\rceil + 1.$$

В **подразделе 4.2.2** приводится краткий обзор известных вероятностных оценок на списочное хроматическое число гипеграфов. В работе [A1] получены следующие вероятностные оценки на списочное хроматическое число полного двудольного однородного гиперграфа.

**Теорема 4.2.10.** *Пусть $H$ — $s$-однородный двудольный гиперграф с $t$ вершинами, где*

$$t < \frac{(1 + s^{1/l})^l}{4}.$$

*Тогда*

$$\mathrm{ch}(H) \leq l.$$

**Теорема 4.2.11.** *Пусть*

$$t = \Omega\left((\log s + \log l) \cdot l^2 (1 + s^{1/l})^l\right).$$

*Тогда*

$$\mathrm{ch}(K^s_{t/2,t/2}) > l.$$

**Раздел 4.3** посвящён доказательствам сформулированных утверждений. В **подразделе 4.3.1** приведены доказательства теорем 4.2.3 и 4.2.4, следствия 4.2.5 и теоремы 4.2.7. В **подразделе 4.3.2** приведены доказательства теорем 4.2.10 и 4.2.11.

## Публикации автора по теме диссертации


A1. *Черкашин Д. Д., Гордеев А. С.* On list chromatic numbers of 2-colorable hypergraphs // Труды МФТИ. — 2022. — Т. 14, № 1. — С. 49—57.

A2. *Gordeev A.* Constant Terms of Near-Dyson Polynomials // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2018. — P4.11.

A3. *Li Z., Shao Z., Petrov F., Gordeev A.* The Alon–Tarsi Number of A Toroidal Grid // arXiv:1912.12466 [math]. — 2019. — принято к публикации в журнал European Journal of Combinatorics.

A4. *Petrov F., Gordeev A.* Alon–Tarsi Numbers of Direct Products // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2021. — Vol. 10, no. 4. — P. 271–279.


## Список литературы


1. *Гравин Н. В., Карпов Д. В.* О правильных раскрасках гиперграфов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2011. — Т. 391. — С. 79—89.
2. *Alon N., Bregman Z.* Every 8-Uniform 8-Regular Hypergraph Is 2-Colorable // Graphs and Combinatorics. — 1988. — Vol. 4, no. 1. — P. 303–306.
3. *Alon N., Tarsi M.* A Nowhere-Zero Point in Linear Mappings // Combinatorica. — 1989. — Vol. 9, no. 4. — P. 393–395.
4. *Alon N., Tarsi M.* Colorings and Orientations of Graphs // Combinatorica. — 1992. — Vol. 12, no. 2. — P. 125–134.
5. *Alon N.* Combinatorial Nullstellensatz // Combinatorics, Probability and Computing. — 1999. — Vol. 8, no. 1–2. — P. 7–29.
6. *Alon N., Nathanson M. B., Ruzsa I.* The Polynomial Method and Restricted Sums of Congruence Classes // Journal of Number Theory. — 1996. — Vol. 56, no. 2. — P. 404–417.
7. *Andrews G. E.* Problems and Prospects for Basic Hypergeometric Functions // Theory and Application of Special Functions. — Academic Press, 1975. — P. 191–224.
8. *Bressoud D. M., Goulden I. P.* Constant Term Identities Extending the $q$-Dyson Theorem // Transactions of the American Mathematical Society. — 1985. — Vol. 291, no. 1. — P. 203–228.

9. *Croot E.*, *Lev V.*, *Pach P.* Progression-Free Sets in $\mathbb{Z}_4^n$ Are Exponentially Small // Annals of Mathematics. — 2017. — Vol. 185, no. 1.

10. *Dvir Z.* On the Size of Kakeya Sets in Finite Fields // Journal of the American Mathematical Society. — 2009. — Vol. 22, no. 4. — P. 1093–1097.

11. *Dyson F. J.* Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I // Journal of Mathematical Physics. — 1962. — Vol. 3, no. 1. — P. 140–156.

12. *Ekhad S. B.*, *Zeilberger D.* How to Extend Karolyi and Nagy's BRILLIANT Proof of the Zeilberger–Bressoud $q$-Dyson Theorem in Order to Evaluate ANY Coefficient of the $q$-Dyson Product // Personal Journal of Shalosh B. Ekhad and Doron Zeilberger. See also arXiv:1308.2983. — 2013.

13. *Ellenberg J.*, *Gijswijt D.* On Large Subsets of $\mathbb{F}_q^n$ with No Three-Term Arithmetic Progression // Annals of Mathematics. — 2017. — Vol. 185, no. 1.

14. *Ellingham M.*, *Goddyn L.* List Edge Colourings of Some 1-Factorable Multigraphs. // Combinatorica. — 1996. — Vol. 16. — P. 343–352.

15. *Fleischner H.*, *Stiebitz M.* A Solution to a Colouring Problem of P. Erdős // Discrete Mathematics. — 1992. — Vol. 101, no. 1–3. — P. 39–48.

16. *Forrester P.*, *Warnaar S.* The Importance of the Selberg Integral // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2008. — Vol. 45, no. 4. — P. 489–534.

17. *Good I. J.* Short Proof of a Conjecture by Dyson // Journal of Mathematical Physics. — 1970. — Vol. 11, no. 6. — P. 1884–1884.

18. *Guth L.*, *Katz N.* On the Erdős Distinct Distances Problem in the Plane // Annals of Mathematics. — 2015. — Vol. 181, no. 1. — P. 155–190.

19. *Häggkvist R.*, *Janssen J.* New Bounds on the List-Chromatic Index of the Complete Graph and Other Simple Graphs // Combinatorics, Probability and Computing. — 1997. — Vol. 6, no. 3. — P. 295–313.

20. *Henning M. A.*, *Yeo A.* 2-Colorings in $k$-Regular $k$-Uniform Hypergraphs // European Journal of Combinatorics. — 2013. — Vol. 34, no. 7. — P. 1192–1202.

21. *Jensen T. R.*, *Toft B.* Graph Coloring Problems. — John Wiley & Sons, 2011.

22. *Karasev R. N.*, *Petrov F. V.* Partitions of Nonzero Elements of a Finite Field into Pairs // Israel Journal of Mathematics. — 2012. — Vol. 192, no. 1. — P. 143–156.

23. *Károlyi G.*, *Nagy Z.* A Simple Proof of the Zeilberger–Bressoud $q$-Dyson Theorem // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2014. — Vol. 142, no. 9. — P. 3007–3011.

24. *Károlyi G.*, *Nagy Z. L.*, *Petrov F. V.*, *Volkov V.* A New Approach to Constant Term Identities and Selberg-type Integrals // Advances in Mathematics. — 2015. — Vol. 277. — P. 252–282.

25. *Kaul H.*, *Mudrock J. A.* On the Alon–Tarsi Number and Chromatic-Choosability of Cartesian Products of Graphs // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2019. — Vol. 26, no. 1. — P1.3.

26. *Lasoń M.* A Generalization of Combinatorial Nullstellensatz // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2010. — Vol. 17, no. 1. — N32.

27. *Ramamurthi R.*, *West D. B.* Hypergraph Extension Of The Alon–Tarsi List Coloring Theorem // Combinatorica. — 2005. — Vol. 25, no. 3. — P. 355–366.

28. *Schauz U.* A Paintability Version of the Combinatorial Nullstellensatz, and List Colorings of $k$-Partite $k$-Uniform Hypergraphs // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2010. — R176.

29. *Schauz U.* Algebraically Solvable Problems: Describing Polynomials as Equivalent to Explicit Solutions // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2008. — Vol. 15. — R10.

30. *Schauz U.* Proof of the List Edge Coloring Conjecture for Complete Graphs of Prime Degree // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2014. — P3.43.

31. *Tao T.* Algebraic Combinatorial Geometry: The Polynomial Method in Arithmetic Combinatorics, Incidence Combinatorics, and Number Theory // EMS Surveys in Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 1, no. 1. — P. 1–46.

32. *Thomassen C.* The Even Cycle Problem for Directed Graphs // Journal of the American Mathematical Society. — 1992. — Vol. 5, no. 2. — P. 217–229.

33. *Wilson K. G.* Proof of a Conjecture by Dyson // Journal of Mathematical Physics. — 1962. — Vol. 3, no. 5. — P. 1040–1043.

34. *Zeilberger D.*, *Bressoud D. M.* A Proof of Andrews' $q$-Dyson Conjecture // Discrete Mathematics. — 1985. — Vol. 54, no. 2. — P. 201–224.