На правах рукописи

Бабушкин Максим Владимирович

Оценки приближения функции посредством модулей непрерывности различных порядков

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2020

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель:	**Виноградов Олег Леонидович** доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
Официальные оппоненты:	**Капустин Владимир Владимирович** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук
	Петров Андрей Николаевич кандидат физико-математических наук, доцент 12 кафедры (общенаучных и общетехнических дисциплин) ФГКВОУ ВПО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулева» Министерства обороны РФ
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

Защита состоится «___» ________________ 20___ г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «___» ________________ 20___ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук *А. Ю. Зайцев*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена вопросам влияния структурных свойств функции на точность её приближения. Аппаратом, посредством которого измеряются дифференциально-разностные свойства функции и производится их классификация, являются модули непрерывности. Основополагающие результаты о взаимоотношениях между модулем непрерывности и скоростью приближения функции принадлежат Д. Джексону, С. Н. Бернштейну, Ш. Валле-Пуссену, А. Лебегу. Их классические результаты относятся к классам функций с заданным модулем непрерывности первого порядка. С. Б. Стечкин установил прямые и обратные теоремы, используя более тонкий инструмент для характеризации гладкости функции — модули непрерывности высших порядков. В данной работе делается вклад в дальнейшее развитие прямых теорем теории аппроксимации, исследуются аппроксимативные характеристики различных линейных методов приближения.

Цели и задачи работы. В работе улучшаются оценки точной постоянной в неравенстве типа Джексона для дифференцируемых периодических функций. Усиливаются оценки остаточного члена в формулах типа Вороновской–Бернштейна для широкого круга положительных линейных методов приближения. Исследуется возможность распространения двусторонних оценок отклонения сумм Рисса на случай дробного модуля непрерывности.

Научная новизна. Предложена модификация ранее известного способа оценивания точной постоянной в неравенстве типа Джексона для периодических функций. Эта техника приводит к новым рекордным оценкам.

Вычислены нормы оператора, построенного на базе функций Стеклова и играющего ключевую роль при получении наилучших на данный момент оценок постоянной в неравенстве типа Джексона.

Предложен простой способ оценивания остаточного члена в формулах типа Вороновской–Бернштейна. Полученные неравенства усиливают и обобщают известные ранее.

Установлены двусторонние оценки отклонения сумм Рисса произвольного порядка на классе чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Возникающие при этом постоянные вычислены явно.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для получения более аккуратных оценок различных полуаддитивных функционалов, возникающих в теории аппроксимации и вычислительной математике.

Методы исследования. Использовались методы классического математического анализа, теории функций вещественной переменной, теории аппроксимации, гармонического анализа.

Положения, выносимые на защиту.

1. Новые оценки постоянной в неравенстве типа Джексона для периодических дифференцируемых функций, улучшающие известные ранее в случае достаточно высоких порядков модуля непрерывности.

2. Оценки «сильной формы» остаточного члена в формулах типа Вороновской–Бернштейна для широкого круга методов приближений.

3. Двусторонние оценки отклонений сумм Рисса посредством модулей непрерывности дробного порядка в классе чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались на международных конференциях «Воронежская зимняя математическая школа „Современные методы теории функций и смежные проблемы“» (Воронеж, 2017 г.) [6], «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII» (Ростов-на-Дону, 2017 г.) [7], «Mathematical challenge of quantum transport in nanosystems. Pierre Duclos workshop» (Санкт-Петербург, 2019 г.)[5], на городском семинаре по конструктивной теории функций под руководством проф. М. А. Скопиной.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в четырёх статьях [1—4], опубликованных в журналах, переводные версии которых входят в международную реферативную базу данных Scopus.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 90 страниц. Список литературы включает 47 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сделан обзор ранее известных результатов, сформулированы задачи и основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена улучшению оценок постоянной в неравенстве типа Джексона для периодических дифференцируемых функций. Результаты этой главы частично опубликованы в [2].

Неравенством типа Джексона в теории аппроксимации принято называть неравенство, в котором наилучшее приближение функции оценивается посредством модуля непрерывности этой функции или её производной. Для пространства непрерывных 2π-периодических функций оно имеет вид

$$E_n(f) \leqslant \frac{J(m,r,\tau)}{n^r}\omega_m(f^{(r)},\tau/n),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка меньше n, $\omega_m(f,h) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant h} \|\delta_t^m f\|$ — модуль непрерывности порядка m функции f с шагом h, $\delta_t^m f$ — центральная разность m-го порядка функции f с шагом t.

Имеется не так много случаев, когда найдена точная постоянная

$$J(m,r,\tau) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in C^r} \frac{n^r E_n(f)}{\omega_m(f^{(r)},\tau/n)}.$$

Первый результат, связанный с нахождением точной постоянной, был получен Н. П. Корнейчуком. Им установлено, что $J(1,0,\pi)=1$. Отметим ещё результат В. В. Жука (при $r=1$) и А. А. Лигуна (при нечётном r): $J(1,r,\pi)=\mathcal{K}_r/2$, где $\mathcal{K}_r$ — константа Фавара.

Вопрос о вычислении величины J является трудным. Поэтому актуальна задача получения оптимальных оценок для J. Различным частным случаям этой задачи посвящено большое количество исследований.

В первой главе диссертации устанавливаются оценки величины J, которые улучшают известные в случае $m \to \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\tau \geqslant \pi$. Вычисления показывают, что они являются наименьшими из известных и для некоторых малых значений m, r и τ. Наилучшие в указанном случае оценки до настоящего времени принадлежали О. Л. Виноградову и В. В. Жуку [8].

Техника получения оценок основана на работе [8]. При этом также ключевую роль играют модификации функций Стеклова $S_{h,2,m}f$. Приведём их определение. Пусть функция f задана на $\mathbb{R}$ и суммируема на любом конечном промежутке. При $h > 0$ полагаем

$$S_{h,2,m}f = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}C_{2m}^{m-j}S_{jh}^2 f = f + \frac{2(-1)^{m-1}}{C_{2m}^m}\int\limits_0^h \delta_t^{2m} f \cdot \frac{(1-t/h)}{h}\,dt,$$

где $S_h^2 f = \int\limits_{-h}^{h} f(x+t)(1-|t|/h)/h\,dt$ — функция Стеклова второго порядка.

Неравенство Джексона выводится из соотношений

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leqslant E_n(f - S_{h,2,m}^l f) + E_n(S_{h,2,m}^l f) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{l-1} E_n(S_{h,2,m}^k(f - S_{h,2,m}f)) + E_n(S_{h,2,m}^l f). \end{aligned}$$

Каждое слагаемое мажорируется модулем непрерывности производной функции f. Улучшение возникающей при этом постоянной достигается за счёт несколько иного, чем в [8], способа оценивания величины $E_n(S_{h,2,m}^k(f - S_{h,2,m}f))$.

Основной результат первой главы — следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $m, r, \frac{m+r}{2} \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$. *Тогда при* $\tau \leqslant 2$

$$J(m,r,\tau) \leqslant A(m,r,\tau),$$

а в случае $\tau > 2$

$$J(m,r,\tau) \leqslant \min_{t\in[2,\tau]} A\,(m,r,t)\,.$$

Здесь

$$A(m,r,\tau) = \frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} \sum_{k=0}^{\lceil m/2\rceil - 1} \eta\left(\frac{m+r}{2}, k, \tau\right) + \frac{\rho\left(\frac{m+r}{2}, r, \tau\right) D_{(m+r)/2}^{\lceil m/2\rceil}}{\tau^m},$$

$$g(r,\tau) = \begin{cases} 2^r \mathcal{K}_r \left(1 - \dfrac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+1)\tau} + \dfrac{4r\mathcal{K}_r^{2/r}}{(r+2)\tau^2}\right), & \text{если } r \in \mathbb{N},\ \tau > 2\mathcal{K}_r^{1/r}, \\ \dfrac{2\tau^r}{(r+1)(r+2)} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\eta(m,k,\tau) = \begin{cases} \dfrac{4^k \mathcal{K}_{2k} D_m^k}{\tau^{2k}}, & \text{если } k \in \mathbb{N},\ \tau > \dfrac{2\mathcal{K}_{2k}^{\frac{1}{2k}}\sqrt{D_m}}{\sqrt{\|S_{h,2,m}\|_{C\to C}}}, \\ \|S_{h,2,m}\|_{C\to C}^k & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\rho(m,r,\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\tau}, & \text{если } r \text{ нечётно}, \tau > \dfrac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\mathcal{K}_{2m}}, \\ \mathcal{K}_{2m} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$D_m = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечётно}}}^{m} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}.$$

В полученной оценке участвует норма оператора $S_{h,2,m}$. Она была вычислена в [2], и соответствующие выкладки приводятся в первой главе.

Теорема 2. *Пусть* $h > 0$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\|S_{h,2,m}\|_{C\to C} = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_{j-1,m}^2 + \mu_{j,m}^2}{\lambda_{j,m}} \leqslant \frac{2m}{m+1},$$

где

$$\lambda_{j,m} = \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-j} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}, \quad \mu_{j,m} = \sum_{k=j+1}^{m} (-1)^k \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}(k-j).$$

В диссертации установлены асимптотические соотношения для величины $A(m,r,\tau)$ в случаях $m\to\infty$, $r\to\infty$, $\tau\to+0$, $\tau\to\infty$. В следующей теореме приводятся только нужные для вывода о том, что величина A оценивает постоянную в неравенстве типа Джексона лучше других известных оценок.

Теорема 3. *Пусть $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при $m \to \infty$*

$$A(m,r,\pi) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{g(r,\pi)}{2^r} \frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right),$$

$$A(m,r,\tau) \leqslant \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1}\right) \frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right), \quad \textit{если } \tau > \pi.$$

В завершение первой главы для малых значений m и r в случаях $\tau = \pi$ и $\tau = 2\pi$ приводятся вычисленные приближённо оценки для $J(m,r,\tau)$, наилучшие среди известных автору.

Вторая глава относится к исследованию асимптотических формул типа Вороновской–Бернштейна. Результаты этой главы опубликованы в [3].

Хорошо известна следующая теорема, устанавливающая порядок приближения дважды дифференцируемых функций многочленами Бернштейна

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x),$$

где

$$p_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Теорема A (Е. В. Вороновская)**.** *Пусть f ограничена на $[0,1]$ и имеет вторую производную в точке $x \in [0,1]$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n f(x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Если $f \in C^2[0,1]$, то сходимость равномерная.

С. Н. Бернштейн обобщил результат Е. В. Вороновской следующим образом. Если функция f ограничена и имеет производную чётного порядка $2i$ в точке x, то справедлива асимптотическая формула

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{2i-1} \frac{S_{k,n}(x) f^{(k)}(x)}{k!} + \frac{f^{(2i)}(x)}{i!n^i} \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^i + o\left(\frac{1}{n^i}\right),$$

где

$$S_{r,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^r p_{n,k}(x).$$

В дальнейшем эта формула получила развитие в работах многих математиков. В частности, С. А. Теляковский распространил её на случай, когда функция имеет производную нечётного порядка, а В. С. Виденский указал оценку остаточного члена в формуле Е. В. Вороновской посредством модуля непрерывности второй производной функции.

В диссертационной работе устанавливаются оценки «сильной формы» остаточного члена в асимптотической формуле типа Вороновской–Бернштейна для широкого круга методов приближения. Приведём одну общую теорему второй главы.

Теорема 4. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, ω *— выпуклый модуль непрерывности,* E *— промежуток из* $\mathbb{R}$, *ограниченная функция* $f\colon E \to \mathbb{C}$ *имеет в точке* $x \in E$ *производную* r*-го порядка. Пусть, далее, при всех* t, *таких что* $x + t \in E$, *справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!} t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. *Для всех* $k \in Q$, *где* $Q \subset \mathbb{Z}$, *предполагаем* $x_k \in E$, $p_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k \in Q} p_k = 1$. *Положим*

$$L(f) = \sum_{k \in Q} f(x_k) p_k, \quad \alpha_s = \sum_{k \in Q} |x_k - x|^s \, p_k.$$

Тогда, если $0 < \alpha_{pr} \leqslant M$, $\alpha_{p(r+1)} < \infty$, *то*

$$\left| L(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k \in Q} (x_k - x)^l p_k \right| \leqslant \left(\sum_{k \in Q} \left| f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (x_k - x)^l \right|^p p_k \right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{\alpha_{pr}^{1/p}}{r!} \omega \left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{\alpha_{pr}} \right)^{1/p} \right) \leqslant \frac{M^{1/p}}{r!} \omega \left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{M} \right)^{1/p} \right).$$

Если $f \in C^r(E)$, то участвующий в теореме модуль непрерывности $\omega(t)$ мажорируется выпуклым модулем непрерывности $\omega^*(f^{(r)}, \frac{t}{r+1})$, который, в свою очередь, не превосходит $2\omega_1(f^{(r)}, \frac{t}{r+1})$.

Во второй главе устанавливаются аналогичные общие теоремы, применимые к положительным операторам вида

$$
\begin{aligned}
Lf(x) &= \sum_{k\in Q} f(x_k)p_k(x),\\
Uf(x) &= \sum_{k\in Q} \left(\int_E f(t)\varphi_k(t)\,dt\right)p_k(x),\\
Vf(x) &= \int_E f(x+t)\psi(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Особенность полученных оценок в том, что они установлены для некоторой большей величины, мажорирующей остаточный член. Кроме того, они имеют локальный характер: участвующий модуль непрерывности связан с конкретной точкой, а не со всей областью определения функции.

Применительно к многочленам Бернштейна из общих результатов следует, например, такое неравенство при $n-1\in\mathbb{N}$, $f\in C^2[0,1]$, $x\in[0,1]$:

$$
\begin{gathered}
\left|B_nf(x)-f(x)-\frac{x(1-x)}{2n}f''(x)\right| \\
\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{l=0}^{2}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}\left(\frac{k}{n}-x\right)^l\right|p_{n,k}(x)\leqslant \frac{x(1-x)}{n}\omega_1\left(f'',\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{n}}\right).
\end{gathered}
$$

В завершение главы приводятся примеры приложений результатов к конкретным методам приближения: многочленам Бернштейна, суммам Саса–Миракьяна, суммам Канторовича, суммам Бернштейна–Дюррмейер, функциям Стеклова 1-го и 2-го порядка, а также интегралу Валле-Пуссена.

Аналогичные результаты (также вытекающие из результатов второй главы диссертации), содержащие равномерный (а не локальный) модуль непрерывности функции, содержатся в [4].

Третья глава посвящена установлению двусторонних оценок отклонений сумм Рисса дробного порядка от чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Результаты этой главы опубликованы в [1].

С. Н. Бернштейн установил, что отклонение сумм Фейера $\sigma_nf=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}S_kf$

характеризует класс Липшица с показателем α при $0 < \alpha < 1$, а именно

$$\|f - \sigma_n f\| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \iff \quad f \in \operatorname{Lip}\alpha.$$

При $\alpha = 1$ это утверждение неверно. Справедливо неулучшаемое по порядку соотношение

$$\|f - \sigma_n f\| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Но такая же оценка справедлива и для функций из класса Зигмунда, более широкого, чем класс $\operatorname{Lip} 1$.

Тем не менее, как показал Г. Алексич, суммы Фейера можно использовать для характеризации класса $\operatorname{Lip} 1$, если перейти к тригонометрически сопряжённой функции:

$$\|f - \sigma_n f\| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \iff \quad \widetilde{f} \in \operatorname{Lip} 1.$$

Двусторонние оценки отклонения сумм Фейера посредством модулей непрерывности установил В. В. Жук [9]. Кроме самой функции f в них участвует $\widetilde{F}$ — сопряжённая к первообразной функции $f - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$:

$$C_1\left(\omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right) + n\omega_2\left(\widetilde{F}, \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \|f - \sigma_n f\| \leqslant C_2\left(\omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right) + n\omega_2\left(\widetilde{F}, \frac{1}{n}\right)\right).$$

Полученное неравенство было обобщено В. В. Жуком (см. [10, гл. VII, §1, теоремы 1, 2 и 8]) для сумм Рисса

$$R_{n,r} f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^r\right)\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right),$$

совпадающих с суммами Фейера при $r = 1$. Именно, при $f \in C$, $n \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{N}$

$$C_3(r)\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \|f - R_{n,r} f\| \leqslant C_4(r)\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \qquad (1)$$

Если же $(r+1)/2 \in \mathbb{N}$, то

$$C_5(r)\left(\omega_{r+1}\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + n\omega_{r+1}\left(\widetilde{F}, \frac{\pi}{n}\right)\right) \leqslant \|f - R_{n,r} f\|$$
$$\leqslant C_6(r)\left(\omega_{r+1}\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + n\omega_{r+1}\left(\widetilde{F}, \frac{\pi}{n}\right)\right). \qquad (2)$$

Отметим, что независимо от В. В. Жука случай чётного значения r рассматривал также Р. М. Тригуб.

Возникает вопрос: нельзя ли неравенства (1) и (2) распространить на любые положительные значения r? Третья глава диссертации частично отвечает на него. Указанные двусторонние оценки обобщаются на случай дробного модуля непрерывности, но не для всего пространства C, а для его подкласса: для чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье.

В третьей главе доказывается следующая теорема общего характера. Пусть θ — множество 2π-периодических суммируемых на периоде функций с неотрицательными коэффициентами Фурье, $H_\gamma f$ — преобразование Гильберта дробного порядка функции f, $f^{(\alpha)}$ — производная (при $\alpha \geqslant 0$) или первообразная (при $\alpha < 0$) в смысле Вейля. Положим

$$I(\beta, \rho, \sigma, x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x |\sin t|^\beta \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho - \sigma)\left\{\frac{t}{\pi}\right\}\right) dt.$$

Теорема 5. *Пусть $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, числа ρ и σ таковы, что*

$$\alpha - \gamma = 2l + \rho, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \rho \in (-1, 1),$$
$$\alpha + \beta - \gamma = 2m + \sigma, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \sigma \in (-1, 1].$$

Пусть, далее, $f \in \theta$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$, $h > 0$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k(f) \leqslant \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_k}{k^\alpha I\left(\beta, \rho, \sigma, \frac{kh}{2}\right)}\right) \frac{1}{2^\beta h} \int\limits_0^h \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, t\right) dt.$$

Эта теорема остаётся верной и в случае $\rho = -1$, если числа λ_k равны нулю при $k = \frac{2\pi m}{h}$, где $m \in \mathbb{N}$.

На этой теореме основаны следующие двусторонние оценки отклонения сумм Рисса, содержащие только одно слагаемое.

Теорема 6. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$; $\gamma \in [\alpha - 1/2, \alpha + 1/2]$ при $\alpha \in [0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ при $\alpha \geqslant 1$; $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in \theta \cap C$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$, $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда, если $\alpha+\beta-\gamma$ не нечётно, то

$$\frac{1}{\pi^{\alpha+\beta}}\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\mu f,\frac{\pi}{n}\right)\leqslant \|f-R_{n-1,\alpha+\beta}f\|$$
$$\leqslant \frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}n^{\alpha}}\left(\frac{1}{\left|\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\right|}+1\right)\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)},\frac{\pi}{n}\right),$$

если $\alpha+\beta-\gamma$ нечётно, то

$$\frac{1}{\pi^{\alpha+\beta}}\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\mu f,\frac{\pi}{n}\right)\leqslant \|f-R_{n-1,\alpha+\beta}f\|\leqslant \frac{3\pi^{5/2}(1+\sqrt{2})\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}n^{\alpha-1}}\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)},\frac{\pi}{n}\right).$$

Основным результатом третьей главы является следующая теорема, где оценка приближения суммами Рисса ведётся при помощи двух слагаемых: модуля непрерывности самой функции f и её преобразования $H_{-\alpha}f^{(-\alpha)}$.

Теорема 7. *Пусть $\beta>\alpha\geqslant 0$, число β представимо в виде $\beta=2m+\sigma$, где $m\in\mathbb{Z}$, $\sigma\in(-1,1]$; $f\in\theta\cap C$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi^{\beta}}\left(n^{\alpha}\omega_\beta\left(H_{-\alpha}f^{(-\alpha)},\frac{\pi}{n}\right)+\omega_\beta\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\right)\leqslant \|f-R_{n-1,\beta-\alpha}f\|$$
$$\leqslant \frac{\pi}{2^{\beta}}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\beta}t\cdot\cos\sigma t\,dt\right)^{-1}\left(\frac{n^{\alpha}}{\cos\frac{\pi\sigma(n-1)}{2n}}\omega_\beta\left(H_{-\alpha}f^{(-\alpha)},\frac{\pi}{n}\right)+\omega_\beta\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Данное утверждение обобщает неравенства (1) и (2) для чётных непрерывных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Неравенство (1) получается при $\alpha=0$ и $\beta=r$, а неравенство (2) — при $\alpha=1$ и $\beta=r+1$.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Бабушкин М. В.* Приближение чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье суммами Рисса дробного порядка // Пробл. мат. анализа. — 2019. — вып. 101. — с. 35—55.

2. *Бабушкин М. В., Додонов Н. Ю., Жук В. В.* Модифицированные функции Стеклова и формулы численного дифференцирования // Пробл. мат. анализа. — 2018. — вып. 94. — с. 21—34.

3. *Бабушкин М. В., Жук В. В.* О сильной форме асимптотических формул типа Вороновской–Бернштейна с поточечной оценкой остаточного члена // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — т. 449. — с. 32—59.

4. *Жук В. В.*, *Бабушкин М. В.*, *Пудовкин А. А.* О сильной форме асимптотических формул типа Вороновской–Бернштейна // Пробл. мат. анализа. — 2016. — вып. 84. — с. 89—105.

Тезисы конференций

5. *Babushkin M. V.* The rate of convergence of the Riesz sums of fractional order on the class of even functions with non-negative Fourier coefficients // Book of abstracts of the international conference «Mathematical challenge of quantum transport in nanosystems. Pierre Duclos workshop», St. Petersburg, 2019, p. 12. — ITMO University.

6. *Бабушкин М. В.*, *Жук В. В.* О сильной форме асимптотических формул типа Вороновской–Бернштейна с поточечной оценкой остаточного члена // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа „Современные методы теории функций и смежные проблемы“», Воронеж, 2017, с. 26. — Изд. дом ВГУ.

7. *Бабушкин М. В.*, *Жук В. В.* О сильной форме асимптотических формул типа Вороновской–Бернштейна с поточечной оценкой остаточного члена // Материалы международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VII», Ростов-на-Дону, с. 45. — Изд. центр ДГТУ.

Цитированная литература

8. *Виноградов О. Л.*, *Жук В. В.* Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности и поведение констант в неравенствах типа Джексона // Алгебра и анализ. — 2012. — т. 24, № 5. — с. 1—43.

9. *Жук В. В.* О приближении 2π-периодической функции значениями некоторого ограниченного полуаддитивного оператора. II // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1967. — т. 13. — с. 41—50.

10. *Жук В. В.* Аппроксимация периодических функций. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1982.