На правах рукописи

ЧЕРКАШИН ДАНИЛА ДМИТРИЕВИЧ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В РАСКРАСКАХ ГИПЕРГРАФОВ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2018

Работа выполнена в лаборатории теории представлений и динамических систем Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научные руководители	—	Петров Федор Владимирович, кандидат физико-математических наук
	—	Райгородский Андрей Михайлович, доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты	—	Шкредов Илья Дмитриевич, доктор физико-математических наук член-корреспондент РАН. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН главный научный сотрудник
	—	Пяткин Артем Валерьевич, доктор физико-математических наук доцент, заведующий лаборатории дискретной оптимизации в исследовании операций ФГБУН Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Ведущая организация	—	Хабаровское отделение ФГБУН Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита состоится "___" ____________ 2018 года в __ час. на заседании Диссертационного совета Д 002.202.02 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан "___" __________ 2018 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Малютин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Пара $H := (V, E)$ называется гиперграфом, если V конечно, а $E \subset 2^V$. При этом V называется множеством вершин, а E множеством ребер. Заметим, что обычный граф является гиперграфом. Гиперграф называется n-однородным, если мощность любого его ребра равна n. Соответственно, обычный граф является 2-однородным гиперграфом.

Правильной раскраской гиперграфа (V, E) в r цветов называется такое отображение $f : V \to \{1 \dots r\}$, что для любого ребра $e \in E$ существует пара вершин $v_1, v_2 \in e$, такие что $f(v_1) \neq f(v_2)$. Другими словами, правильная раскраска гиперграфа в r цветов означает, что его множество вершин можно разбить на r подмножеств $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots V_r$ так, что не существует ребра, являющегося подмножеством V_i. Хроматическое число гиперграфа — это минимальное $\chi(H)$, для которого существует правильная раскраска в $\chi(H)$ цветов.

Раскраски гиперграфов являются относительно молодой и очень бурно развивающейся областью комбинаторики. Задачи, поставленные в работах Эрдёша и Хайнала [14] и Эрдёша и Ловаса [15] получили дальнейшее развитие в работах Алона [3], Алона, Клейтмана, Померанке, Сакса и Сеймура [2], Бека [5, 6], Спенсера [26], Плухара [25], Франкла, Оты и Токушиге [16], Косточки [21, 20], Косточки и Вудалла [22] и других выдающихся математиков.

Отметим следующие результаты, полученные за последние 5 лет: Гебауэр построила [17] *явный* пример n-однородного гиперграфа с $(r + o(1))^n$ ребрами и хроматическим числом $r + 1$; автор и Козик (независимо) придумали [13], как объединить стандартные вероятностные методы и жадный подход Плухара [25], тем самым улучшив нижнюю оценку на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом $r + 1$. Затем Шабанов и Козик применили [23] эти идеи к раскраскам простых гиперграфов. Также Остегард (используя компьютерный перебор) показал [24], что наименьшее число ребер в 4-однородном гиперграфе с хроматическим числом 3 равняется 23.

Таким образом, тематика диссертации весьма актуальна.

Цели и задачи работы. Цель работы заключается в оценке минимального количества ребер в “нетривиальном” гиперграфе, лежащем в некотором классе гиперграфов. В большинстве случаев под “нетривиальным” имеется в виду гиперграф с большим хроматическим числом. Задачами работы являются различные вариации и обобщения задачи Эрдёша – Хайнала.

Основные результаты работы.

- Получено более простое доказательство нижней оценки Радхакришнана – Сринивасана на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом 3.

- Улучшена нижняя оценка на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом $r+1$.

- Улучшены оценки на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе без полноцветной раскраски (каждое ребро содержит вершину каждого цвета) в r цветов при условии $r(n) > r_0(n)$. В случае $\frac{n}{r} \leq c \ln n$ предложенные оценки являются первыми нетривиальными оценками.

- Предложены аналоги классических результатов Эрдёша и Ловаса о раскрасках пересекающихся семейств для накрест-пересекающихся семейств.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Основной результат работы уже широко цитируется [18, 7, 23], в том числе и в центральной монографии по теме диссертации [4].

Достоверность результатов и апробация работы. Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием строгих математическим доказательств. Результаты работы докладывались на семинарах:

- на семинаре по алгебраической комбинаторике Лаборатории имени П. Л. Чебышева СПбГУ;

- на семинаре ПОМИ РАН по теории представлений и динамическим системам;

- на семинаре “Алгебраические и вероятностное методы в комбинаторике” А. М. Райгородского механико-математического факультета МГУ;

- на семинаре Лаборатории теории игр и принятия решений НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге;

и международных конференциях:

- the Hajnal 80 conference, Будапешт, Венгрия, июнь 2011;
- the Summit 240 conference, Будапешт, Венгрия, июль 2014;
- the RuFiDiM-2014, Петрозаводск, сентябрь 2014;
- the First Russian-Hungarian Workshop on Discrete Mathematics, Москва, апрель 2017;
- the RuFiDiM-2017, Турку, Финляндия, май 2017.

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [12, 8, 13, 1, 10, 9] и опубликован препринт [11]. Статьи [8, 13, 1, 10, 9] опубликованы в рецензируемых журналах, удовлетворяющих рекомендациям ВАК. В работе [8] соискателю принадлежит лемма 2 и теорема 4, а в работе [1] — лемма 1 и теорема 2. Результаты статьи [13] получены соавторами независимо, о чем сообщается непосредственно в тексте статьи. В работе [11] диссертанту принадлежит сведение исходной задачи к вопросам геометрии чисел.

Методология и методы исследования. Большинство результатов первых двух глав диссертации получены вероятностным методом. Результаты третьей главы использую линейную алгебру; четвертая глава посвящена структурным комбинаторным теоремам.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из четырех глав и выполнена в стиле минимализма. Список литературы включает 52 названия.

Благодарности. Я люто бешено благодарен своему научному руководителю Ф. В. Петрову за проявленные терпение, великодушие и кротость. Выражаю огромную благодарность соруководителю А. М. Райгородскому за постановку

задач и внимание к работе. Без замечаний М. Баска, Н. Растегаева, Я. Теплицкой, А. Купавского, Р. Просанова и Н. Алона эта работа содержала бы куда больше существенных неточностей, чем сейчас. Усидчивости при написании текста диссертации я обязан стримам А. Корня.

Положения, выносимые на защиту.

- Получено более простое доказательство нижней оценки Радхакришнана – Сринивасана на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом 3.

- Улучшена нижняя оценка на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом $r+1$.

- Улучшены оценки на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе без полноцветной раскраски (каждое ребро содержит вершину каждого цвета) в r цветов при условии $r(n) > r_0(n)$. В случае $\frac{n}{r} \leq c \log n$ предложенные оценки являются первыми нетривиальными оценками.

- Предложены аналоги классических результатов Эрдёша и Ловаса о раскрасках пересекающихся семейств для накрест-пересекающихся семейств.

Содержание работы. Эрдёш и Хайнал в 1961 году сформулировали следующую проблему: найти наименьшее число ребер в n-однородном гиперграфе, не допускающем раскраски в 2 цвета. Они же ввели обозначение $m(n)$ для этой величины. В 1972 Херцог и Шёнхайм обобщили [19] задачу Эрдёша – Хайнала на случай r цветов. Обозначим искомую функцию за $m(n,r)$.

Первая глава содержит определения и основной результат: упрощение доказательства Радхакришнана – Сринивасана нижней оценки в задаче Эрдёша – Хайнала и улучшение нижней оценки Косточки на величину $m(n,r)$ в случае фиксированного r. В этой главе доказывается один из основных результатов диссертации.

Теорема 1 (Черкашин – Козик)**.** *Для любого фиксированного $r \geq 2$ верно*

$$m(n,r) \geq c \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{r-1}{r}} r^n. \tag{1}$$

Раскраска вершин гиперграфа называется полноцветной, если каждое ребро содержит вершину каждого цвета. Вторая глава посвящена задаче поиска наименьших гиперграфов, не обладающих полноцветной раскраской. В ней содержатся наилучшие на данный момент оценки на число ребер в n-однородном гиперграфе, не обладающем полноцветной r-раскраской в случае когда r достаточно велико относительно n. В случае $\frac{n}{r} \leq c \ln n$ ранее не было известно нетривиальных оценок.

Назовем *разбросом 2-раскраски* вершин гиперграфа максимум модуля разности между количествами вершин красного и синего цвета в ребре по всем ребрам. Назовем также *разбросом гиперграфа* наименьший разброс по всем раскраскам гиперграфа. Пусть $f(n)$ — наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с положительным разбросом. Третья глава посвящена минимальным гиперграфам с положительным разбросом. В ней улучшается верхняя оценка Алона, Клейтмана, Померанке, Сакса и Сеймура на минимальное количество ребер в n-однородном гиперграфе с положительным разбросом.

Теорема 2. *Пусть n — положительное натуральное число. Тогда*

$$f(n) \leq c \log \operatorname{snd}(n), \tag{2}$$

где $c > 0$ — константа, а $\operatorname{snd}(x)$ означает наименьшее натуральное число, не делящее x.

И, наконец, четвертая глава посвящена раскраскам специальных классов гиперграфов — пересекающихся и накрест-пересекающихся семейств. Накрест-пересекающееся семейство — это гиперграф $H = (V, E)$, снабженный (не обязательно непересекающимся) покрытием $E = A \cup B$ непустыми множествами ребер A и B, таким что любое $a \in A$ пересекает любое $b \in B$. Оказывается, что при дополнительных условиях накрест-пересекающееся семейство имеет либо хроматическое число 3 либо имеет очень конкретный вид.

Теорема 3. *Пусть $H = (V, A, B)$ — n-однородное накрест-пересекающееся семейство без пары ребер $e_1, e_2 \in A \cup B$ такой, что $e_1 \subset e_2$ (то есть (V, E) — система Шпернера). Тогда $\chi(H) \leq 3$ or $V := \{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots u_l\}$; $B := \{\{v_1, \ldots, v_m\}, \{u_1, \ldots u_l\}\}$; $A := \{\{v_i, u_j\}$ для всех $i, j\}$ (по модулю A-B симметрии), где m, $l \geq 2$.*

Также, выясняется, что в каком-то смысле “нетривиальное” накрест-пересекающееся семейство с максимальным размером ребра n не может иметь сколь угодно много ребер.

Определение 4. *Назовем накрест-пересекающееся семейство $H = (V, A, B)$ критическим если*

- *для любого ребра $a \in A$ и любой вершины $v \in a$ найдется $b \in B$, такое что $a \cap b = \{v\}$;*
- *для любого ребра $b \in B$ и любой вершины $v \in b$ найдется $a \in A$, такое что $a \cap b = \{v\}$.*

Заметим, что если n-однородное пересекающееся семейство $H = (V, E)$ имеет $\tau(H) = n$ то (V, E, E) является критическим накрест-пересекающимся семейством.

Теорема 5. *Пусть $H = (V, A, B)$ — критическое накрест-пересекающееся семейство. Обозначим*

$$n := \max_{e \in A \cup B} |e|.$$

Тогда

$$\max(|A|, |B|) \le n^n.$$

Выясняется также, что теорема 5 точна.

Список литературы

[1] Д. Д. Черкашин and А. Б. Куликов. О двухцветных раскрасках гиперграфов. *Доклады Академии наук*, 436(3):316–319, 2011.

[2] N. Alon, D. J. Kleitman, K. Pomerance, M. Saks, and P. Seymour. The smallest n-uniform hypergraph with positive discrepancy. *Combinatorica*, 7(2):151–160, 1987.

[3] Noga Alon. Hypergraphs with high chromatic number. *Graphs and Combinatorics*, 1(1):387–389, 1985.

[4] Noga Alon, Joel H. Spencer, and Paul Erdős. *The probabilistic method.* John Wiley & Sons, 2016.

[5] J. Beck. On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász. *Discrete Mathematics*, 17(2):127–131, 1977.

[6] J. Beck. On 3-chromatic hypergraphs. *Discrete mathematics*, 24(2):127–137, 1978.

[7] Marthe Bonamy and Ross J. Kang. List coloring with a bounded palette. *Journal of Graph Theory*, 84(1):93–103, 2017.

[8] D. D. Cherkashin, A. B. Kulikov, and A. M. Raigorodskii. On hypergraph cliques with chromatic number 3 and a given number of vertices. *Труды Московского физико-технического института*, 4(1):151–156, 2012.

[9] Danila Cherkashin. Coloring cross-intersecting families. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 25(1):#P1.47, 2018.

[10] Danila Cherkashin. A note on panchromatic colorings. *Discrete Mathematics*, 341(3):652–657, 2018.

[11] Danila Cherkashin and Fedor Petrov. On small n-uniform hypergraphs with positive discrepancy. *arXiv preprint arXiv:1706.05539*, 2017.

[12] Danila D. Cherkashin. About maximal number of edges in hypergraph-clique with chromatic number 3. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 1(3):3–11, 2011.

[13] Danila D. Cherkashin and Jakub Kozik. A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs. *Random Structures & Algorithms*, 47(3):407–413, 2015.

[14] Paul Erdős and András Hajnal. On a property of families of sets. *Acta Mathematica Hungarica*, 12(1-2):87–123, 1961.

[15] Paul Erdős and László Lovász. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Infinite and finite sets*, 10(2):609–627, 1975.

[16] Peter Frankl, Katsuhiro Ota, and Norihide Tokushige. Covers in uniform intersecting families and a counterexample to a conjecture of Lovász. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 74(1):33–42, 1996.

[17] Heidi Gebauer. On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120(7):1483–1490, 2013.

[18] David G. Harris and Aravind Srinivasan. Algorithmic and enumerative aspects of the Moser–Tardos distribution. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 13(3):33, 2017.

[19] M. Herzog and J. Schönheim. The B_r property and chromatic numbers of generalized graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 12(1):41–49, 1972.

[20] Alexandr Kostochka. On a theorem of Erdős, Rubin, and Taylor on choosability of complete bipartite graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 9(9):1, 2002.

[21] Alexandr Kostochka. Coloring uniform hypergraphs with few colors. *Random Structures & Algorithms*, 24(1):1–10, 2004.

[22] Alexandr V. Kostochka and Douglas R. Woodall. Density conditions for panchromatic colourings of hypergraphs. *Combinatorica*, 21(4):515–541, 2001.

[23] Jakub Kozik and Dmitry Shabanov. Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 116:312–332, 2016.

[24] Patric R. J. Östergård. On the minimum size of 4-uniform hypergraphs without property B. *Discrete Applied Mathematics*, 163:199–204, 2014.

[25] András Pluhár. Greedy colorings of uniform hypergraphs. *Random Structures & Algorithms*, 35(2):216–221, 2009.

[26] Joel Spencer. Coloring n-sets red and blue. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 30(1):112–113, 1981.