

На правах рукописи

Сергеев Василий Александрович

**Адиабатические задачи в квантовой механике
и теории распространения волн**

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2026

Работа выполнена в ФГБОУ ВО
«Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: **Федотов Александр Александрович,**
д. ф.-м. н., доцент, профессор кафедры высшей
математики и математической физики СПбГУ.

Официальные оппоненты: **Перескоков Александр Вадимович,**
д. ф.-м. н., доцент, профессор кафедры матема-
тического и компьютерного моделирования НИУ
МЭИ,

Толченников Антон Александрович,
к. ф.-м. н., старший научный сотрудник лабора-
тории механики природных катастроф ИПМех
им. А. Ю. Ишлинского РАН.

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы
народов им. Патриса Лумумбы».

Защита состоится «__» _____ 2026 г. в _____ часов на заседании
диссертационного совета 24.1.207.02 при ФГБУН «Санкт-Петербургское от-
деление Математического института им. В. А. Стеклова РАН» (ПОМИ РАН),
расположенном по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27,
к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ РАН и на сайте
<https://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-24.1.207.02/>

Автореферат разослан «__» _____ 2026 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печат-
ью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя учёного секретаря
диссертационного совета.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н.

Рядовкин К. С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Прежде чем обсудить актуальность темы исследования, мы сформулируем исследуемые в диссертации задачи — квантово-механическую и акустическую — и охарактеризуем изучаемые нами решения этих задач. Начнём с квантово-механической задачи. Мы рассматриваем при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения уравнения Шрёдингера

$$i\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + v(x, \tau)\Psi, \quad x > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \Psi \Big|_{x=0} = 0. \quad (1)$$

Говорят, что уравнение (1) описывает адиабатическую эволюцию, порождаемую в $L^2(\mathbb{R}_+)$ стационарным оператором Шрёдингера $H(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x, \tau)$ с условием Дирихле при $x = 0$. Оператор $H(\tau)$ зависит от времени τ как от параметра. Нас интересует случай, когда потенциал v представляет собой линейно сужающуюся со временем прямоугольную потенциальную яму: $v(x, \tau) = -1$ при $0 \leq x \leq 1 - \tau$, а иначе $v(x, \tau) = 0$.

Отметим, что с помощью замены переменной $\tau \mapsto t = \tau/\varepsilon$ уравнение (1) может быть записано в виде

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + v(x, \varepsilon t)\Psi. \quad (2)$$

В (2) потенциал медленно меняется с течением времени t . Подобное уравнение было введено М. А. Леонтовичем и В. А. Фоком для приближённого описания распространения электромагнитных волн в тропосфере [1, Chapter 11].

Как нетрудно установить, спектр $H(\tau)$ состоит из (абсолютно) непрерывного спектра, заполняющего полуось $[0, +\infty)$, и из конечного числа отрицательных собственных значений. С течением времени τ собственные значения $H(\tau)$ одно за другим приближаются к краю непрерывного спектра и, достигнув его, исчезают. При этом момент исчезновения n -го собственного значения $E_n(\tau)$ есть $\tau_n = 1 - \pi(n - 1/2)$, $n \in \mathbb{N}$.

В работе [2] А. А. Федотовым был построен при $\tau \leq 1$ набор таких решений $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ уравнения (1), что решение Ψ_n имеет внутри потенциальной ямы асимптотику вида

$$\Psi_n(x, \tau) \sim e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\tau_n}^{\tau} E_n(s) ds} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi_{n,m}(x, \tau), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

пока существует собственное значение $E_n(\tau)$. Здесь $\psi_{n,0}(\cdot, \tau)$ — собственная функция $H(\tau)$, соответствующая $E_n(\tau)$. Формальные асимптотические решения вида (3) часто используются в физике. В задачах акустики решения такого типа называют *адиабатическими нормальными волнами*, и мы используем этот термин

для решений Ψ_n . Вблизи момента τ_n исчезновения собственного значения $E_n(\tau)$ и после него решение Ψ_n имеет совершенно иное асимптотическое поведение. В работе [2] решения Ψ_n были асимптотически изучены внутри потенциальной ямы, при $0 \leq x \leq 1 - \tau$. Следуя работам [S1, S2], мы изучаем в диссертации асимптотическое поведение решений Ψ_n вблизи и после момента $\tau = \tau_n$ вне потенциальной ямы, при $x \geq 1 - \tau$. Помимо этого, следуя [S3, S4], мы строим и изучаем при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение Ψ_{cs} уравнения (1), являющееся аналогом адиабатической нормальной волны для непрерывного спектра оператора $H(\tau)$.

Перейдём к описанию акустической задачи. Мы рассматриваем двумерную модель для описания распространения звука в узком прибрежном водном клине. Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. На полуплоскости $P_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}$, см. рис. 1, мы рассматриваем уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + k^2(\varepsilon_1 x, y)U = 0, \quad (4)$$

где $\varepsilon_1 = \text{tg}(\varepsilon/2)$, а k — кусочно-постоянная функция: $k(x, y) = k_0 > 1$ при $0 \leq y \leq -\varepsilon_1 x$, а иначе $k(x, y) = 1$.

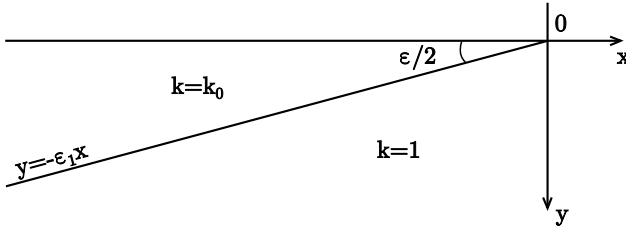


Рис. 1: Полуплоскость P_a .

Сектор $W_a = \{ (x, y) \in P_a \mid y \leq -\varepsilon_1 x \}$ изображает узкий прибрежный водный клин, а сектор $P_a \setminus W_a$ — океаническое дно и берег. Уравнение (4) мы дополняем граничным условием Дирихле при $y = 0$ (на «поверхности») и условием непрерывности решения U вместе с нормальной производной при $y = -\varepsilon_1 x$, $x < 0$ (на «границе раздела сред»).

При попытке разделения переменных в уравнении (4) возникает аналогичный оператору $H(\tau)$ из квантово-механической задачи «поперечный» оператор $H_a(x) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2(x, y)$ с граничным условием Дирихле при $y = 0$, зависящий от «медленной» переменной $x = \varepsilon_1 x$ как от параметра. Легко видеть, что спектр $H_a(x)$ имеет структуру, аналогичную таковой у оператора $H(\tau)$: непрерывный спектр $H_a(x)$ заполняет полуось $(-\infty, 1]$, и при каждом x имеется конечное количество собственных значений, причём все они лежат на интервале $(1, k_0^2)$. С ростом x эти собственные значения одно за другим приближаются к краю непрерывного спектра и, достигнув его, исчезают. При этом n -е собственное значение $E_{a,n}(x)$ исчезает в момент $x_n = -\pi(n - 1/2)/\sqrt{k_0^2 - 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

В работе [3] А. А. Федотовым были построены при $x \leq 0$ решения $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ уравнения (4), аналогичные решениям $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ уравнения (1). Пока существует собственное значение $E_{a,n}(\varkappa)$, решение U_n имеет в W_a асимптотику вида

$$U_n(x, y) \sim e^{-\frac{i}{\varepsilon_1} \int_{\varkappa_n}^{\varkappa} \sqrt{E_{a,n}(s)} ds} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \psi_{n,m}^{(a)}(\varkappa, y), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5)$$

где $\psi_{n,0}^{(a)}(\varkappa, \cdot)$ — n -я собственная функция оператора $H_a(\varkappa)$, ср. (5) и (3). Мы называем решения U_n адиабатическими нормальными волнами, как и решения Ψ_n . Решение U_n описывает звуковую волну, идущую из океана к берегу. Когда эта волна достигает достаточно мелкой воды — при $\varkappa = \varkappa_n$ — соответствующее собственное значение оператора $H_a(\varkappa)$ исчезает, и асимптотическое поведение решения U_n меняется. В диссертации мы изучаем, следуя [S5], асимптотическое поведение адиабатических нормальных волн U_n вблизи и после достижения критической глубины — как внутри водного клина W_a , так и в дне под ним.

Перейдём теперь к обсуждению именно актуальности темы исследования. Квантово-механическая задача, конечно, представляет интерес сама по себе — структура спектра оператора Шрёдингера в рассматриваемой модели не позволяет применить существующие адиабатические теоремы (о них см. ниже), и исследование модельной задачи является разумным первым шагом на пути к изучению адиабатической эволюции для класса операторов с аналогичной структурой спектра¹. Вместе с тем квантово-механическая задача важна и в силу своего родства с задачей акустической, которая считается сложной нерешённой задачей в теории распространения волн. Отметим, что рассматриваемый нами случай узкого водного клина W_a соответствует реально возникающим в акустике океана задачам — медианное по миру значение тангенса угла наклона океанического дна вблизи берега составляет 0,007, см. [4, Section 3.2].

Акустическая задача гораздо сложнее, чем квантово-механическая, поскольку акустическая задача является задачей рассеяния, а квантово-механическая — задачей Коши. В дальнейшем мы планируем построить глобальное решение акустической задачи во всей полуплоскости P_a , содержащей узкий водный клин W_a , поэтому можно сказать, что исследование акустической задачи нами только начато. Если бы водный слой имел вид не узкого сектора, а полосы постоянной ширины, то переменные в уравнении Гельмгольца (4) делились бы, и решение акустической задачи можно было бы разложить по собственным функциям и обобщённым собственным функциям непрерывного спектра «поперечного» оператора. В случае узкого водного клина W_a , который мы рассматриваем,

¹По-видимому, если полученные в диссертации результаты, верные для модельной квантово-механической задачи, записать в инвариантных терминах, то они останутся справедливыми и для более широкого круга задач (например, в случае, когда собственное значение приближается к краю непрерывного спектра с конечной скоростью). Такое обобщение, однако, выходит за рамки представленной к защите диссертации.

исследованная в диссертации адиабатическая нормальная волна U_n падает слева направо в «левом» квадранте $Q_L = \{(x, y) \in P_a \mid x \leq 0\}$, содержащем водный клин. Мы надеемся, что при малых $\varepsilon > 0$ нам удастся в дальнейшем разложить в Q_L акустическое поле, отражённое назад, налево, по адиабатическим нормальным волнам, идущим справа налево, и по их аналогам для непрерывного спектра «поперечного» оператора (т. е. по решениям типа Ψ_{cs}). Затем мы планируем сшить при малых ε решение в квадранте Q_L , представляющее собой сумму падающей адиабатической нормальной волны U_n и отражённых назад волн, с волновым полем в «правом» квадранте $Q_R = P_a \setminus Q_L$ — с линейной комбинацией плоских волн, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (4) с постоянным k . Тем самым будет построено решение уравнения (4) во всей полуплоскости P_a . Описанные этапы решения акустической задачи представляют собой наши планы на будущее, заделом для которых являются результаты диссертации.

Степень разработанности темы исследования. В квантовой механике адиабатические теоремы формулируют обычно следующим образом, см., напр., [5, Section 2]: при $\varepsilon \rightarrow 0$ рассматривается задача Коши для уравнения вида

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial s}(s) = H(s) \psi(s),$$

где $H(s)$ — самосопряжённый гамильтониан, достаточно гладко зависящий от медленного времени s , и предполагается существование подходящего семейства спектральных проекторов $P(s)$. Тогда, если начальное данное $\psi(0) \in \text{Range}(P(0))$, то для фиксированного $T > 0$ при $s \in [0, T]$ имеет место равномерная оценка вида $\text{dist}(\psi(s), \text{Range}(P(s))) = O(\varepsilon^\gamma)$, где число $\gamma > 0$ определяется конкретными предположениями об $H(s)$. В частности, роль играют структура спектра $H(s)$ и свойства $P(s)$.

Адиабатические теоремы в квантовой механике берут начало в работе М. Борна и В. А. Фока [6], рассмотревших случай чисто дискретного спектра оператора $H(s)$, и в работе Т. Като [7], рассмотревшего случай собственного значения, изолированного от существенного спектра. Читатель может ознакомиться с «панорамой» адиабатических теорем в обзоре [5, Section 3]. В упомянутой работе Дж. Аврона и А. Элгарта [5] доказана адиабатическая теорема без классического условия «зазора» между собственным значением и остальной частью спектра оператора $H(s)$. Эта теорема применима, в частности, для основного состояния атома в квантованном электромагнитном поле. При этом, насколько нам известно, случай, когда собственное значение поглощается непрерывным спектром и исчезает, не рассматривался до работ А. А. Федотова и соавтора [2, 8], в которых было начато рассмотрение описанной выше модельной квантово-механической задачи (1) с оператором Шрёдингера $H(\tau)$. В работах автора и А. А. Федотова [S1, S2] было продолжено исследование построенных в [2] решений Ψ_n , близких в некоторые моменты времени к собственным функциям оператора $H(\tau)$.

В работе Дж. Аврона и соавторов [9] рассматривалась адиабатическая эволюция в случае, когда упомянутый выше спектральный проектор $P(s)$ соответствует ограниченному участку спектра, отделённому лагунами от остальной части спектра. При этом рассматриваемый участок может содержать и существенный спектр. В [9] показано, что если начальное данное принадлежит $\text{Range}(P(0))$, то результат эволюции с точностью до асимптотически малой поправки принадлежит $\text{Range}(P(s))$. В работе В. В. Суханова [10] рассматривалась адиабатическая эволюция для оператора Дирака на вещественной оси с быстро убывающим потенциалом. Спектр этого оператора представляет собой двукратный непрерывный спектр, заполняющий всю ось, а начальное данное в [10] было выбрано из класса Шварца. Насколько нам известно, для оператора Шрёдингера с непрерывным спектром, заполняющим полуось, адиабатическая эволюция состояния, соответствующего непрерывному спектру, не рассматривалась до работ А. А. Федотова и автора [S3, S4].

Задачи о распространении звука в медленно меняющемся океане много исследовались как физиками (см., например, книгу [11] и литературные ссылки в ней), так и математиками (см. обзор [12] и литературные ссылки в нём). Акустическая задача о распространении звука в водном слое с медленно меняющейся глубиной рассматривалась многими физиками на эвристическом уровне. В частности, рассмотрение в этой задаче адиабатических нормальных волн было предложено А. Д. Пирсом [13]. Следует выделить работы А. Д. Пирса [14], Дж. М. Арнольда и Л. Б. Фелсена [15], А. Камела и Л. Б. Фелсена [16], в которых разными методами² было нестрого получено описание эффектов, возникающих при достижении адиабатической нормальной волной т. н. *критической глубины*, т. е. при исчезновении соответствующего собственного значения «поперечного» оператора. В этих работах на эвристическом уровне было показано, что при достижении критической глубины энергия адиабатической нормальной волны излучается из воды в дно в виде «луча прожектора». Этот результат был получен и численно, см., например, [17]. В работе А. Д. Пирса [18, Section V] было нестрого получено описание акустического поля после преодоления волной критической глубины. Это было проделано с помощью приближённого решения приближённого уравнения — уравнения Шрёдингера вида (2). Полученные А. Д. Пирсом формулы описывают поверхностную волну, распространяющуюся в дне вдоль границы раздела сред. Подчеркнём, что математически строгое обоснование описанных результатов в перечисленных работах отсутствует. Математически строгое изучение акустической задачи было начато А. А. Федотовым в [3] и продолжено автором в [S5].

Цели и задачи работы мы сформулируем в виде списка:

1. Получение при $x \geq 1 - \tau$ (т. е. вне потенциальной ямы) асимптотических формул при $\varepsilon \rightarrow 0$ для адиабатических нормальных волн Ψ_n — решений

²В частности, А. Д. Пирс использовал в работе [14] вариационные методы.

квантово-механической задачи, близких в некоторые моменты времени к собственным функциям оператора $H(\tau)$ с соответствующими номерами — как вблизи моментов τ_n исчезновения соответствующих собственных значений $H(\tau)$, так и после этих моментов.

2. Построение решения Ψ_{cs} квантово-механической задачи, являющегося аналогом адиабатических нормальных волн Ψ_n для непрерывного спектра оператора $H(\tau)$. Получение асимптотических формул для решения Ψ_{cs} внутри потенциальной ямы и вне её.
3. Получение асимптотических формул для адиабатических нормальных волн U_n — решений акустической задачи — вблизи моментов \varkappa_n исчезновения соответствующих собственных значений оператора $H_a(\varkappa)$ и после этих моментов (как внутри водного клина W_a , так и в дне под ним).

Научная новизна. Насколько нам известно, адиабатическая эволюция, порождённая оператором Шрёдингера, собственные значения которого со временем поглощаются непрерывным спектром и исчезают, ранее не рассматривалась. Не исследовался как процесс «разрушения» адиабатических нормальных волн, так и эволюция их аналогов, соответствующих непрерывному спектру, и результаты, полученные нами для этой задачи, являются полностью новыми. Для акустической задачи новый подход позволил как математически строго описать известные эффекты, так и обнаружить новые.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты исследования квантово-механической задачи представляют собой базу для дальнейшего изучения адиабатической эволюции, порождённой операторами с аналогичной структурой спектра. Акустическая задача активно обсуждалась физиками. Следует отметить, что обнаруженные в акустической задаче эффекты могут быть значимы для приложений. Разработанный новый подход может стать основой для исследования многих задач.

Методы научного исследования. Асимптотики решений Ψ_n и U_n мы получаем с помощью анализа их интегральных представлений. Эти представления были получены А. А. Федотовым в работах [2] и [3] соответственно, и их можно назвать родственными к интегралам, возникающим в методе Зоммерфельда–Малюжинца, см. [19]. Будем далее говорить о решении Ψ_n — для решения U_n подход к нахождению асимптотик оказывается аналогичным, хотя и технически более трудным. В подынтегральные выражения в интегральном представлении для Ψ_n входит новая спецфункция R , являющаяся решением разностного уравнения на комплексной плоскости и имеющая богатое семейство особенностей. Асимптотический анализ рассматриваемых интегралов нетривиален: при различных значениях переменных τ и x при вычислении асимптотик интегралов возникают разные эффекты, требующие применения известных или развития новых асимптотических методов. Например, вблизи момента τ_n исчезновения собственного значения $E_n(\tau)$ точка перевала приближается к периодической

цепочке близких друг к другу точек ветвления подынтегральной функции. В этом случае получение асимптотики Ψ_n удаётся после аккуратного анализа свести к применению удобного нам варианта классической теоремы Честера–Фридмана–Урселла [20], справедливой для случая двух сближающихся точек перевала. При значениях $\tau > \tau_n$ возникает необходимость в развитии оригинальной техники, в частности, развивающей идеи, предложенные А. А. Федотовым в [2].

Решение Ψ_{cs} мы строим в виде бесконечных рядов. По существу, построение Ψ_{cs} производится с помощью метода отражений. Оказывается удобным записать формулы для Ψ_{cs} с использованием упомянутой выше спецфункции R , входящей в формулы для Ψ_n . Использование асимптотик этой спецфункции при малых ε , применение формулы Пуассона для пересуммирования бесконечных рядов и асимптотическое исследование возникающих при пересуммировании интегралов позволяют в ряде случаев получить асимптотические формулы для Ψ_{cs} .

Положения, выносимые на защиту. Список положений, выносимых на защиту, вторит сформулированному выше списку целей и задач:

1. Получены асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ адиабатических нормальных волн Ψ_n — решений квантово-механической задачи — вне потенциальной ямы (вблизи и после моментов τ_n).
2. Построено решение Ψ_{cs} квантово-механической задачи, являющееся аналогом адиабатических нормальных волн Ψ_n для непрерывного спектра $H(\tau)$. Получены его асимптотики внутри и вне потенциальной ямы.
3. Получены асимптотики адиабатических нормальных волн U_n — решений акустической задачи — как в водном клине W_a , так и в дне (вблизи и после моментов \varkappa_n).

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность выносимых на защиту результатов обеспечивается их математически строгими формулировками и доказательствами, а также публикациями [S1–S5] в рецензируемых изданиях. Основные результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Санкт-Петербургская зимняя молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург (2020).
- Ежегодная международная конференция «Дни дифракции», ПОМИ РАН, Санкт-Петербург (2021, 2025).
- Ежегодная Санкт-Петербургская конференция по спектральной теории и математической физике, посвящённая памяти М. Ш. Бирмана, ММИ им. Эйлера, Санкт-Петербург (2021, 2023, 2025).
- Традиционная сессия МИАН-ПОМИ «Дифференциальные уравнения и динамические системы», ПОМИ РАН, Санкт-Петербург (2023).
- Всероссийская конференция с международным участием «Квазиклассический анализ и нелокальные эллиптические задачи», РУДН, Москва (2023).

- Научный семинар кафедры высшей математики и математической физики СПбГУ, СПбГУ, Санкт-Петербург (2023, 2024).
- Крымская осенняя математическая конференция Н. Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам, КФУ им. В. И. Вернадского, Севастополь (2025).
- Городской семинар по вопросам теории распространения волн, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург (2025).
- Научный семинар Математического института РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством проф. А. Л. Скубачевского, РУДН, Москва (2026).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации изложены в 5 работах [S1–S5], опубликованных в ведущих научных журналах, входящих в перечень ВАК и проиндексированных в библиографических базах РИНЦ и Scopus. Издания, в которых опубликованы работы [S1–S3, S5], проиндексированы также в библиографической базе Web of Science. Результаты работ [S4, S5] получены автором самостоятельно. В работах [S1–S3] А. А. Федотову принадлежат постановки задач и частично начальные идеи, а автору — обобщение и фактическая реализация этих идей.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из шести глав (включая введение), заключения, двух приложений и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 110 страниц. Список литературы содержит 45 наименований, в том числе 5 публикаций автора по теме диссертации, оформленных в виде отдельного списка.

Основное содержание работы

Первая глава диссертации — введение — в основном совпадает с разделом данного автореферата, посвящённым общей характеристике работы.

Вторая глава содержит подробное описание и обсуждение основных результатов диссертации как на качественном, так и на строгом математическом уровне. В разделах 2.1, 2.2 и 2.3 этой главы описаны результаты, соответствующие пунктам 1, 2 и 3 приведённого выше списка положений, выносимых на защиту. Здесь мы кратко, опуская подробности, сформулируем эти результаты.

Наиболее ярко и естественно описать асимптотическое поведение изучаемых решений уравнения Шрёдингера (1) позволяет использование терминологии теории распространения волн. Если в уравнении (2) воспринимать $t = \tau/\varepsilon$ и x как пространственные переменные, то можно сказать, что оно описывает распространение акустических волн в полуплоскости $P = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, содержащей узкий сектор $W = \{(t, x) \in P \mid x \leq 1 - \varepsilon t\}$ с полупрозрачной границей. Представляя ось x направленной вниз, можно воспринимать сектор W как узкий прибрежный водный клин, а сектор $P \setminus W$ — как океаническое

дно и берег, см. рис. 2, что позволяет использовать при обсуждении решений уравнения (1) удобную для нас акустическую терминологию.

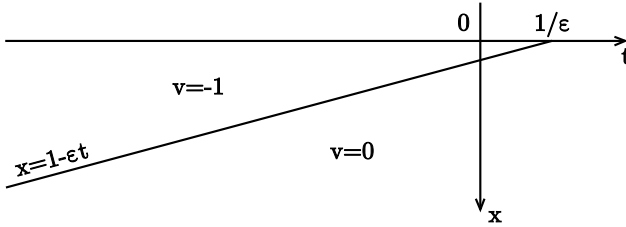


Рис. 2: Полуплоскость P . Потенциал v принимает значение -1 в секторе W и равен нулю в секторе $P \setminus W$.

Решение Ψ_n . Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и будем считать, что $0 < \varepsilon < 1$ и $\tau \leq 1$. Положим $\xi = \varepsilon(x - (1 - \tau))$. Сперва мы опишем, следуя работе [S1], асимптотическое поведение решения Ψ_n вне потенциальной ямы при $\tau \sim \tau_n$. В акустических терминах это поведение можно кратко охарактеризовать так: энергия «акустического поля» излучается из «водного клина» W в «дно» $P \setminus W$ преимущественно вдоль выделенного направления $\xi = C\varepsilon^{1/3}(\tau - \tau_n)$, где $C > 0$ — некоторая константа. Мы говорим, что при $\tau \sim \tau_n$ образуется «прожектор».

Перейдём к точным формулировкам. Положим $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \geq 1\}$ и определим аналитические в области \mathbb{C}_0 и непрерывные вплоть до её границы функции Q_0 и $p \mapsto \arcsin p$ формулами $Q_0(p) = \sqrt{p^2 - 1}$, $Q_0(0) = i$ и $\arcsin 0 = 0$. Введём также обозначение $\mathcal{Q}_1 = \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Im} p > 0\}$.

Фиксируем достаточно малые числа $\delta_1, \delta_2 > 0$ и будем предполагать, что $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$ и $0 \leq \xi \leq \delta_2$. Уравнения

$$(1 - \tau)p_n + \arcsin p_n + \frac{\xi p_n}{2Q_0(p_n)} = \pi n, \quad (1 - \tau)q_n - \arcsin q_n - \frac{\xi q_n}{2Q_0(q_n)} = \pi(n - 1)$$

однозначно определяют функции

$$p_n : \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau < 1, 0 < \xi < \delta_2\} \rightarrow \mathcal{Q}_1, \\ q_n : \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid |\tau - \tau_n| < \delta_1, 0 < \xi < \delta_2\} \rightarrow \mathcal{Q}_1,$$

аналитические в указанных областях³ и непрерывные вплоть до их границ, и

$$0 < p_n(\tau, 0) < 1 \quad \text{при} \quad \tau < \tau_n, \quad p_n(\tau, 0) = 1 \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_n, \\ q_n(\tau, 0) = 1 \quad \text{при} \quad \tau \leq \tau_n, \quad 0 < q_n(\tau, 0) < 1 \quad \text{при} \quad \tau > \tau_n.$$

Положим $E_n(\tau) = p_n^2(\tau, 0) - 1$ при $\tau \leq \tau_n$ и $E_n(\tau) = q_n^2(\tau, 0) - 1$ при $\tau > \tau_n$. Заметим, что при $\tau < \tau_n$ определённое таким образом $E_n(\tau)$ является в точности

³Под этим мы имеем в виду, что каждая из функций аналитична в некоторой \mathbb{C}^2 -окрестности каждой точки (τ, ξ) соответствующей области.

n -м собственным значением оператора $H(\tau)$. Когда $\tau \rightarrow \tau_n$ слева, собственное значение $E_n(\tau)$ стремится к краю непрерывного спектра $H(\tau)$. Наконец, положим

$$\begin{aligned} C_n &= (-1)^{n+1} \sqrt{\pi} e^{\frac{i}{\varepsilon}(2\tau_n-3) + \frac{i\pi}{4}}, \\ K_n^\pm(\tau, \xi) &= p_n \sqrt{\frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau}} \pm q_n \sqrt{-\frac{\partial \ln q_n}{\partial \tau}}, \\ \alpha_n(\tau, \xi) &= -\frac{1}{2} \int_{\tau_n}^{\tau} E_n d\tau' + \frac{1}{2} \int_0^{\xi} (Q_0(p_n) - Q_0(q_n)) d\xi', \\ \zeta_n(\tau, \xi) &= \frac{e^{i\pi/12}}{\varepsilon^{1/6}} \left(\frac{3}{4} \left| \int_{\tau_n}^{\tau} E_n d\tau' \right| - \frac{3}{4} \int_0^{\xi} (Q_0(p_n) + Q_0(q_n)) d\xi' \right)^{1/6}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аргументы квадратных корней в формуле (6) и аргумент корня шестой степени в формуле (7) не принимают значений в $i\mathbb{R}_+$, и мы фиксируем в $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$ однозначные аналитические ветви этих корней условиями $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt[6]{1} = 1$. Справедлива

Теорема 1. *Фиксируем достаточно малые $\delta_1, \delta_2 > 0$. Пусть $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$ и $0 \leq \xi \leq \delta_2$, тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, \tau) &= C_n e^{\frac{i}{\varepsilon}\alpha_n - \frac{i\xi}{2}} \left(K_n^- \zeta_n \text{Ai}(\zeta_n^4) - \frac{K_n^+}{\zeta_n} \text{Ai}'(\zeta_n^4) \right) + O(\Delta_1), \\ \Delta_1 &= \left(\frac{\varepsilon^{1/3} |Q_0(p_n)|}{1 + |\zeta_n|} + \frac{\varepsilon^{2/3}}{1 + \mu_n^{1/3}} \right) e^{-\mu_n}, \quad \varepsilon \mu_n = \text{Im} \int_0^{\xi} Q_0(p_n) d\xi' \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Оценка поправки равномерна по τ и ξ .

Как показано в диссертации, из равномерной асимптотической формулы (8) нетрудно получить более простую формулу в пограничном слое. Фиксируем некоторые $C_1, C_2 > 0$. При $|\tau - \tau_n| \leq C_1 \varepsilon^{1/3}$ и $0 \leq \xi \leq C_2 \varepsilon^{2/3}$ выполнено

$$\Psi_n(x, \tau) = a_n (4\varepsilon)^{1/6} F_{cd}(\nu, \omega) + O(\varepsilon^{1/2}), \quad a_n = (-1)^{n+1} e^{\frac{i}{\varepsilon}(2\tau_n-3) + \frac{i\pi}{4}}, \quad (9)$$

где $\nu = \frac{\tau - \tau_n}{(4\varepsilon)^{1/3}}$ и $\omega = \frac{2\xi}{(4\varepsilon)^{2/3}}$ — «погранслоиные» координаты, а

$$F_{cd}(\nu, \omega) = -\sqrt{\pi} e^{-\frac{i\pi}{12}} e^{\frac{2i}{3}\nu^3} e^{\nu\omega} \left\{ e^{\frac{i\pi}{6}} \nu \text{Ai}(Z) + \text{Ai}'(Z) \right\},$$

где $Z = e^{-\frac{i\pi}{6}} (\omega + i\nu^2)$. Функция F_{cd} была впервые введена А. Д. Пирсом в работе [14] при эвристическом исследовании акустической задачи. Из работы [14] мы заимствовали рис. 3, на котором показаны линии уровня функции $|F_{cd}|$. При переходе от самой верхней к самой нижней из изображённых линий $|F_{cd}|$ уменьшается, принимая значения от 1 до 0,2. Наиболее медленно $|F_{cd}|$ убывает вдоль выделенного направления $\omega = C\nu$ с некоторым $C > 0$. Из сказанного следует, что вблизи момента исчезновения n -го собственного значения волновая

функция, локализованная до этого в потенциальной яме, оказывается заметной на полуплоскости переменных (τ, ξ) в области, напоминающей луч прожектора. Отметим, что аналогичный прожектор возникает и в акустической задаче.

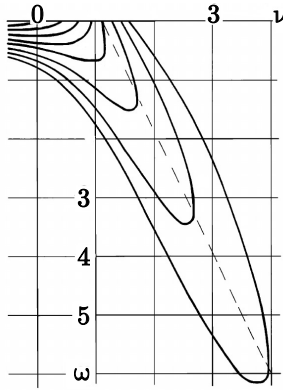


Рис. 3: Линии уровня функции $|F_{cd}|$.

Далее, следуя работе [S2], мы опишем асимптотики Ψ_n в $P \setminus W$ при $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$ и $0 \leq \xi \leq \delta_2$, где $\delta_1, \delta_2 > 0$. Оказывается, что при указанных значениях τ и ξ волновая функция Ψ_n на полуплоскости P асимптотически локализована в слое, где $\xi \sim \varepsilon^{1/3}$, имеет порядок $\varepsilon^{1/3}$ в этом слое и убывает экспоненциально быстро при $\xi/\varepsilon^{1/3} \rightarrow +\infty$. При $\tau \sim \tau_m$, $1 \leq m \leq n - 1$, волновая функция «заходит» из упомянутого слоя в потенциальную яму. Используя акустические термины, можно сказать, что в «дне» $P \setminus W$ вблизи «границы раздела сред» вдоль неё распространяется поверхностная волна, просачивающаяся в «водный клин» W при $\tau \sim \tau_m$, $1 \leq m \leq n - 1$. Асимптотическое поведение Ψ_n на полуплоскости переменных (τ, ξ) схематически изображено на рис. 4.

Перейдём к формулировке теорем. Фиксируем некоторое $\delta_1 > 0$ и некоторое достаточно малое $\delta_2 > 0$. Будем считать, что $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$ и $0 \leq \xi \leq \delta_2$. Напомним, что в (9) был определён коэффициент a_n . Справедлива

Теорема 2. *Фиксируем некоторые $C, \delta_1 > 0$ и достаточно малое $\delta_2 > 0$. Пусть $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$ и $C\varepsilon^{2/3} \leq \xi \leq \delta_2$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$\Psi_n(x, \tau) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\xi Q_0(p_n) d\xi'} \left(\mathcal{T}_0(x, \tau) + O\left(\varepsilon^{1/2} \xi + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{1/3} + \xi}\right) \right), \quad (10)$$

$$\mathcal{T}_0(x, \tau) = a_n p_n \sqrt{\frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau}} e^{-\frac{i\xi}{2}}. \quad (11)$$

В последней формуле ветвь квадратного корня выбрана так же, как в формуле (6). Оценка поправки равномерна по τ и ξ .

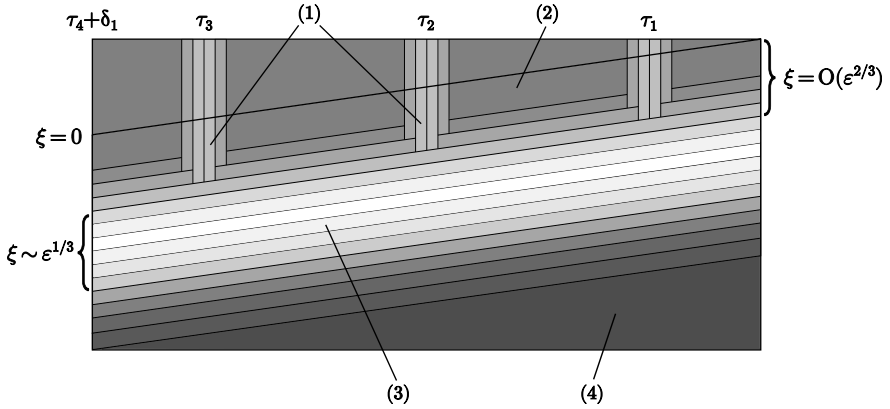


Рис. 4: Асимптотическое поведение решения Ψ_4 на плоскости переменных (τ, ξ) при $\tau_4 + \delta_1 \leq \tau \leq 1$, $\delta_1 > 0$. Порядки Ψ_4 по ε в отмеченных областях: (1) $\Psi_4 \sim \varepsilon^{2/3}$, (2) $\Psi_4 = O(\xi + \varepsilon)$, (3) $\Psi_4 \sim \varepsilon^{1/3}$, (4) $\Psi_4 = O(e^{-C\xi^3/\varepsilon})$, где $C > 0$ — некоторое число.

Как показано в диссертации, из этой теоремы следует, что при $\xi \gg \varepsilon^{2/3}$

$$\Psi_n(x, \tau) \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\xi Q_0(p_n) d\xi'} \mathcal{T}_0(x, \tau) \sim \frac{\varepsilon^{1/3}}{(\tau - \tau_n)^{3/2}} \cdot \frac{\xi}{\varepsilon^{1/3}} \exp\left(-\frac{\xi^3}{12\varepsilon} \frac{(1 + O(\xi))}{(\tau - \tau_n)^3}\right),$$

и, таким образом, Ψ_n экспоненциально убывает с ростом $\xi/\varepsilon^{1/3}$.

Оказывается, что при $\xi \sim \varepsilon^{2/3}$ старший член в (10) допускает такую же оценку, как и поправочный. Для того чтобы описать асимптотику Ψ_n при $0 \leq \xi \leq C\varepsilon^{2/3}$, т.е. при $0 \leq x - (1 - \tau) \leq C\varepsilon^{-1/3}$, мы распространим определение $\tau_n = 1 - \pi(n - 1/2)$ на все $n \in \mathbb{Z}$ и положим

$$\begin{aligned} \nu_m &= \frac{\tau_m - \tau}{(4\varepsilon)^{1/3}}, \quad m \in \mathbb{Z}, & \omega &= \frac{2\xi}{(4\varepsilon)^{2/3}}, \\ h_k &= \begin{cases} k^{-3/2}, & k \in \mathbb{N}, \\ i|k|^{-3/2}, & k \in -\mathbb{N}, \end{cases} & h_0 &= - \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^k h_k, \\ a(v, w) &= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}s^3 + ivs^2 + iws} s \, ds. \end{aligned}$$

Теорема 3. Фиксируем $\delta > 0$ и $C > 0$. Пусть $\tau_n + \delta \leq \tau \leq 1$ и $0 \leq \xi \leq C\varepsilon^{2/3}$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, \tau) &= \mathcal{T}_0(x, \tau) + \mathcal{R}_0(x, \tau) + O(\varepsilon), \\ \mathcal{R}_0(x, \tau) &= \frac{a_n}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2/3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k a(\nu_{n-k}, \omega), \end{aligned} \quad (12)$$

причём $\mathcal{T}_0(x, \tau)$ может быть описано упрощённой формулой

$$\mathcal{T}_0(x, \tau) = \frac{-ia_n \xi}{2(\tau - \tau_n)^{3/2}} + O(\xi^2).$$

Оценки поправок равномерны по τ и ξ .

Как показано в диссертации, при τ вне фиксированной окрестности множества $\{\tau_m\}_{1 \leq m \leq n-1}$ выполнено $\mathcal{R}_0(x, \tau) = O(\varepsilon)$, а при $|\nu_N| \leq C$, $1 \leq N \leq n-1$,

$$\mathcal{R}_0(x, \tau) = \frac{a_n}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2/3} h_{n-N} a(\nu_N, \omega) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, $\mathcal{R}_0(x, \tau)$ имеет асимптотически больший порядок вблизи моментов $\tau = \tau_m$, $1 \leq m \leq n-1$, т. е. вблизи моментов исчезновения собственных значений оператора $H(\tau)$ (моментов рождения резонансов). Из сказанного выше следует, что слагаемое \mathcal{T}_0 можно интерпретировать как «поверхностную волну», а слагаемое \mathcal{R}_0 отвечает за «просачивание» волновой функции в потенциальную яму. Эффект «просачивания» — новый эффект, не описанный ранее физиками. Аналогичные эффекты возникают и в акустической задаче.

Решение Ψ_{cs} . Как упоминалось выше, решение Ψ_{cs} является аналогом адиабатической нормальной волны Ψ_n для непрерывного спектра оператора $H(\tau)$. Здесь мы будем следовать работам [S3, S4] и выпишем формулы для этого решения, а также опишем его асимптотическое поведение.

Мотивировка конструкции решения Ψ_{cs} подробно описана в диссертации, и мы опишем её без подробностей. Если бы в уравнении (1) потенциал не зависел от времени, представляя собой потенциальную яму постоянной ширины, то, разделяя переменные в уравнении, легко можно было бы выписать его решение, являющееся при каждом фиксированном τ обобщённой собственной функцией непрерывного спектра для стационарного оператора Шрёдингера. То же самое (с точностью до множителя) решение можно построить и иначе, с помощью «геометро-оптических» соображений. При $E > 0$ мы можем интерпретировать решения $e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau - i \sqrt{E} x}$ и $e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau + i \sqrt{E} x}$ уравнения Шрёдингера вне потенциальной ямы (а также аналогичные решения внутри потенциальной ямы) как плоские волны на полуплоскости переменных (τ, x) . Решение рассматриваемого уравнения может быть построено в виде суммы плоских волн, преломляющихся и отражающихся так, как это изображено на рис. 5 слева. В интересующем нас случае сужающейся со временем потенциальной ямы переменные в уравнении (1) не делятся. При этом, однако, всё ещё возможно построить аналогичное решение уравнения Шрёдингера с помощью «геометро-оптического» подхода, см. рис. 5 справа. Это решение и есть интересующее нас решение Ψ_{cs} . Используя акустическую терминологию, можно сказать, что решение Ψ_{cs} — результат рассеяния плоской волны на узком секторе W , имеющем полупрозрачную границу.

Перейдём к формулам для Ψ_{cs} . Здесь мы предполагаем, что $0 < \varepsilon < 1$ и $\tau \leq 1$. Определим сперва несколько функций. Положим $Q(p) = Q_0(p \pm i0)$ при

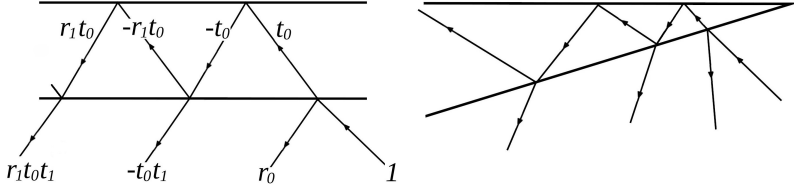


Рис. 5: Рисунок слева иллюстрирует на полуплоскости переменных (τ, x) рассеяние плоской волны $e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau - i\sqrt{E}x}$, падающей из бесконечности на слой, соответствующий потенциальной яме постоянной ширины. Плоские волны обозначены стрелками, рядом с которыми указаны коэффициенты при соответствующих экспонентах. Рисунок справа аналогичным образом иллюстрирует рассеяние плоской волны на секторе W для случая сужающейся со временем ямы.

$\pm p \geq 0$. Рассмотрим на вещественной оси разностное уравнение

$$R\left(p + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \rho(p) R\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \rho(p) = \frac{Q(p) - p}{Q(p) + p}, \quad (13)$$

и выберем быстро убывающее при $|p| \rightarrow \infty$ непрерывное решение $R(p)$ этого уравнения, определённое в разделе А.2 приложения А диссертации. Будем далее считать, что $p \geq 1 + \varepsilon/2$, и положим

$$\begin{aligned} p_1(p) &= -\frac{\varepsilon}{2} + Q\left(p + \frac{\varepsilon}{2}\right), & T(p) &= \frac{-ip e^{i/\varepsilon}}{Q(p) + p} \Big|_{p:=p+\varepsilon/2}, \\ p_2(p) &= \frac{\varepsilon}{2} + Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right), & p_3(p) &= p_2(p) - \varepsilon, & r(p) &= (\rho(p) e^{-2iQ(p)}) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2}, \\ t(p) &= \frac{e^{-\frac{i}{\varepsilon}p^2}}{R(p)} \left(\frac{-4iQ(p)}{Q(p) + p} e^{-i(Q(p) - p)} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2}. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть при $x \geq 1 - \tau$

$$\begin{aligned} \Psi_{cs}(x, \tau, p) &= e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_2^2(p)\tau - ip_2(p)x} + r(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_3^2(p)\tau + ip_3(p)x} \\ &+ t(p) \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon}p_1^2(k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x} T(k_m) R(k_m), \quad k_m = p + \varepsilon m, \end{aligned} \quad (14)$$

а при $0 \leq x \leq 1 - \tau$

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = t(p) e^{\frac{i}{\varepsilon}\tau} \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon}k_m^2(1-\tau)} \sin(k_m x) R(k_m), \quad k_m = p + \varepsilon m. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) описывают решение Ψ_{cs} уравнения (1). Это решение бесконечно дифференцируемо по τ и x при $0 < x < 1 - \tau$ и $x > 1 - \tau$, удовлетворяет граничному условию Дирихле при $x = 0$ и непрерывно вместе со своей производной по x при $x = 1 - \tau$.

Первое слагаемое в правой части формулы (14) можно рассматривать как плоскую волну, падающую из бесконечности на сектор W , второе — как уходящую на бесконечность волну, отражённую от границы сектора W , а бесконечную сумму — как сумму уходящих на бесконечность волн, вышедших из сектора W , см. рис. 5 справа. Формулы для функций p_1 , p_2 , p_3 , T , r , t , а также разностное уравнение для функции R , получаются из условий непрерывности Ψ_{cs} и $\partial\Psi_{cs}/\partial x$ при $x = 1 - \tau$. Как уже упоминалось, по существу, выписанные формулы для Ψ_{cs} получаются с помощью метода отражений, и функцию R здесь⁴ можно интерпретировать как регуляризованное произведение коэффициентов отражения, введённое для удобства дальнейшего анализа рядов. Параметр p , который мы для удобства используем в формулах (14) и (15), имеет следующий смысл. Первый член ряда в формуле (15) является линейной комбинацией плоских волн $e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau-ipx}$ и $e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau+ipx}$ — решений стационарного уравнения Шрёдингера, и p можно назвать импульсом этих плоских волн. Числа k_m в формуле (15), как и числа $p_2(p)$, $p_3(p)$ и $p_1(k_m)$ в формуле (14), также имеют смысл импульсов соответствующих плоских волн. Спектральный параметр E , имеющий смысл энергии, связан с параметром p формулой $E = (p_2(p) - \varepsilon/2)^2$. Краю непрерывного спектра соответствует значение $p = 1 + \varepsilon/2$.

Далее мы качественно опишем асимптотики решения Ψ_{cs} , отсылая читателя к тексту диссертации за строгими формулировками теорем. Рассмотрим сперва поведение Ψ_{cs} внутри потенциальной ямы. Как выясняется, при $p - 1 \gg \varepsilon^{2/3}$ старший член асимптотики Ψ_{cs} описывается через элементарные функции. При $p - 1 \geq b$, где $b > 0$ фиксировано, амплитуда старшего члена асимптотики решения Ψ_{cs} осциллирует, оставаясь везде порядка единицы и принимая наибольшие значения вблизи моментов $\tau = 1 - \pi(n - 1/2)/p$, $n \in \mathbb{N}$. Около края непрерывного спектра, при $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll 1$, «всплески» этой амплитуды происходят вблизи моментов $\tau_n = 1 - \pi(n - 1/2)$ исчезновения собственных значений оператора $H(\tau)$ — моментов рождения резонансов. В «тени» между моментами τ_n решение Ψ_{cs} оказывается асимптотически меньше, чем вблизи них. При этом при $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$ амплитуда старшего члена асимптотики Ψ_{cs} имеет порядок единицы в окрестностях порядка $\sqrt{p-1}$ моментов τ_n . Поведение старшего члена асимптотики Ψ_{cs} при таких p (внутри и вне потенциальной ямы) схематически изображено на полуплоскости переменных⁵ (τ, ξ) на рис. 6.

При $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll \varepsilon^{2/3}$ старший член асимптотики Ψ_{cs} описывается в терминах спецфункции, родственной функции Эйри, и его амплитуда имеет порядок $\varepsilon^{-1/3} \sqrt{p-1-\varepsilon/2} \ll 1$ в окрестностях порядка $\varepsilon^{1/3}$ моментов τ_n (и ещё меньший порядок вне этих окрестностей). Используя акустическую терминологию, можно сказать, что при $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll 1$ плоская волна, падающая

⁴Отметим ещё раз, что функция R входит и в интегральные представления для адиабатических нормальных волн Ψ_n , являясь существенным элементом их конструкции.

⁵Напомним, что $\xi = \varepsilon(x - (1 - \tau))$.

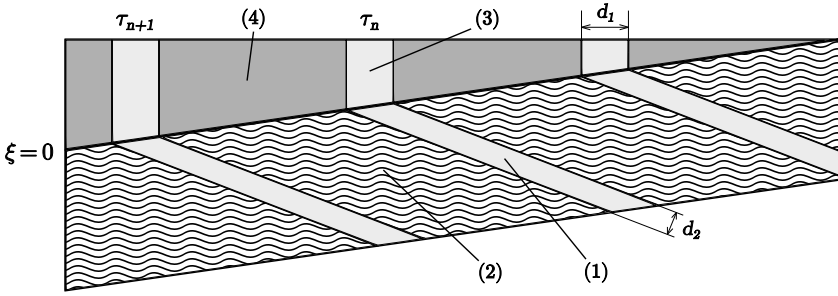


Рис. 6: Схематическое изображение поведения старшего члена асимптотики Ψ_{cs} на полуплоскости переменных (τ, ξ) при $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$. Здесь $d_1 \sim \sqrt{p - 1}$ и $d_2 \sim (p - 1)$. В области (1) $\Psi_{cs} \sim \cos(Q(p - \varepsilon/2) \xi/\varepsilon)$, в области (2) $\Psi_{cs} \sim \sin(Q(p - \varepsilon/2) \xi/\varepsilon)$, в области (3) Ψ_{cs} принимает значения порядка единицы, а в области (4) $\Psi_{cs} = O(\sqrt{p - 1})$.

на сектор W , «просачивается» в него преимущественно при $\tau \sim \tau_n$. При $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll \varepsilon^{2/3}$ это просачивание становится малым, хотя и по-прежнему остаётся более заметным при $\tau \sim \tau_n$. Можно сказать, что при таких значениях p падающая волна отражается от сектора W почти полностью.

Теперь обсудим поведение Ψ_{cs} вне потенциальной ямы. Как и внутри потенциальной ямы, здесь имеют место два асимптотических режима в зависимости от значений параметра p : один при $p - 1 \gg \varepsilon^{2/3}$ и другой при $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll \varepsilon^{2/3}$. В первом из указанных режимов старший член асимптотики Ψ_{cs} описывается везде через элементарные функции. Во втором режиме вблизи границы потенциальной ямы, в пограничном слое, где $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$, он описывается в терминах спецфункции, родственной функции Эйри.

Как и прежде, при $p - 1 \geq b > 0$ амплитуда старшего члена асимптотики Ψ_{cs} осциллирует, оставаясь порядка единицы. Опишем более подробно поведение Ψ_{cs} около края непрерывного спектра. Сперва рассмотрим случай $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$, см. рис 6. В этом случае на полуплоскости переменных (τ, ξ) вне окрестностей порядка $(p - 1)$ прямых $\xi = 2Q(p)(\tau - \tau_n)$, $n \in \mathbb{N}$, старший член асимптотики ведёт себя как $\sin(Q(p - \varepsilon/2) \xi/\varepsilon)$. При этом в старшем порядке решение Ψ_{cs} представляет собой только сумму падающей и отражённой волн, а сумма преломлённых волн оказывается малой. Вблизи же указанных прямых сумма преломлённых волн имеет один порядок с падающей и отражённой волнами, и старший член асимптотики Ψ_{cs} ведёт себя как $\cos(Q(p - \varepsilon/2) \xi/\varepsilon)$. Вблизи границы $\{x = 1 - \tau\}$ потенциальной ямы решение Ψ_{cs} имеет порядок единицы при $\tau \sim \tau_n$ и асимптотически мало между этими моментами, что согласуется со «всплесками» решения Ψ_{cs} внутри потенциальной ямы при $\tau \sim \tau_n$.

Во втором асимптотическом режиме, при $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll \varepsilon^{2/3}$, старший член

асимптотики Ψ_{cs} ведёт себя как $\sin(Q(p - \varepsilon/2)\xi/\varepsilon)$, если этот синус не является малым. Вблизи границы потенциальной ямы, при $0 \leq \xi = O(\varepsilon^{2/3})$, указанный синус уже не является настоящим старшим членом, оказываясь одного порядка или меньше по сравнению со следующим членом асимптотики, который описывается в терминах спецфункции. При этом решение Ψ_{cs} принимает значения порядка $\varepsilon^{-1/3}\sqrt{p-1} - \varepsilon/2$ в окрестностях порядка $\varepsilon^{1/3}$ моментов τ_n (где и появляется спецфункция, описывающая «просачивание» в потенциальную яму) и асимптотически меньшие значения между этими моментами. Этот результат также согласуется с поведением Ψ_{cs} в потенциальной яме.

Решение U_n . При $\varepsilon \rightarrow 0$ поведение решения U_n уравнения Гельмгольца (4) на полуплоскости P_a переменных (x, y) на качественном уровне имеет точно такой же характер, как поведение решения Ψ_n уравнения Шрёдингера (1) на полуплоскости P переменных (t, x) , $t = \tau/\varepsilon$. Акустическое поле, локализованное при $\varkappa < \varkappa_n$ внутри водного клина W_a , излучается при $\varkappa \sim \varkappa_n$ из клина W_a в дно в виде «луча прожектора», и далее в дне вдоль границы раздела сред распространяется поверхностная волна, из которой поле просачивается обратно в воду при $\varkappa \sim \varkappa_m$, $1 \leq m \leq n - 1$. Ввиду сказанного мы не будем здесь останавливаться на подробном описании полученных для U_n результатов, отсылая читателя к разделу 2.3 второй главы диссертации. Отметим только, что итоговые асимптотические формулы для Ψ_n и U_n аналогичны, но отличаются в деталях. Эти детали существенны, например, при использовании полученных формул для компьютерных расчётов.

Третья глава диссертации посвящена доказательству теоремы 1. Мы представляем решение Ψ_n в виде, удобном для дальнейшего анализа: в виде суммы функций \mathcal{T} и \mathcal{E} — двух интегралов по контурам в комплексной плоскости, см. предложение 3.1 в диссертации. Затем мы изучаем точки перевала и линии наискорейшего спуска возникающей в этих интегралах фазовой функции S . Как оказывается, при условиях теоремы 1 точка перевала приближается к бесконечной цепочке отстоящих друг от друга на ε точек ветвления функции R — решения разностного уравнения (13). После аккуратного анализа задача сводится к изучению интегралов с двумя близкими точками перевала. Используя удобный для нас вариант теоремы Честера–Фридмана–Урселла [20], мы исследуем \mathcal{T} и получаем старший член из (8). Наконец, мы оцениваем поправки.

Четвёртая глава содержит доказательства теорем 2 и 3. Мы вновь используем представление решения Ψ_n через функции \mathcal{T} и \mathcal{E} , полученное в предыдущей главе. Точка перевала и теперь подходит к бесконечной цепочке точек ветвления функции R , но в этот раз получение асимптотики Ψ_n удаётся свести к применению метода Перрона (варианта метода перевала), с помощью которого из \mathcal{T} выделяется старший член — «поверхностная волна» \mathcal{T}_0 , см. (11). Наконец, вдали от края потенциальной ямы мы (достаточно грубо) оцениваем слагаемое \mathcal{E} , а около края ямы аккуратно получаем из \mathcal{E} отвечающее за «просачивание»

слагаемое \mathcal{R}_0 , см. (12), выделяя из подынтегральной функции ε -периодическое слагаемое, содержащее бесконечную цепочку точек ветвления, и раскладывая его в ряд Фурье.

В пятой главе мы доказываем теоремы, относящиеся к решению Ψ_{cs} уравнения (1). С помощью метода отражений мы строим Ψ_{cs} в виде бесконечных рядов (14) и (15), для удобства дальнейшего анализа записывая их члены с использованием той же спецфункции R , что входит и в формулы для Ψ_n . Затем, используя асимптотики этой спецфункции при $\varepsilon \rightarrow 0$ и применяя формулу суммирования Пуассона, мы получаем асимптотические формулы для Ψ_{cs} , которые читатель может найти в разделах 2.2.4 и 2.2.5 главы 2 диссертации.

Шестая глава посвящена доказательствам асимптотических формул для решения U_n уравнения Гельмгольца (4). В ней мы ограничиваемся кратким описанием доказательств асимптотик U_n в дне, опуская аналогичные и более простые доказательства асимптотик в водном клине W_a . Мы сводим анализ к исследованию интегралов по контурам в комплексной плоскости, аналогичных интегралам, возникающим в главах 3 и 4 диссертации при исследовании решения Ψ_n . При таком «сведении задачи к предыдущей» нам приходится преодолеть технические трудности, связанные с более сложным глобальным поведением подынтегральных функций и контуров интегрирования в интегральном представлении для U_n .

В заключении мы кратко излагаем основные результаты диссертации.

Наконец, **приложение А** содержит, во-первых, краткое описание процедуры построения решения Ψ_n и свойства некоторых функций, входящих в формулы для Ψ_n , а во-вторых — интегральные формулы для решения U_n . В **приложении В** содержатся выкладки, относящиеся к обсуждению результатов, сформулированных в главе 2 диссертации.

Заключение

В представленной к защите диссертации были рассмотрены решения Ψ_n и Ψ_{cs} уравнения Шрёдингера (1) и решения U_n уравнения Гельмгольца (4). При малых значениях параметра $\varepsilon > 0$, входящего в уравнения (1) и (4), было изучено асимптотическое поведение этих решений, кратко описанное выше и подробно описанное в главе 2 диссертации. Напомним, что выше мы подробно обсуждали планы дальнейшей разработки темы исследования, см. стр. 5–6 автореферата.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю, А. А. Федотову, за постановку интересных задач, плодотворную совместную работу и подробное обсуждение полученных результатов. Также автор благодарит кафедру высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ за поддержание благоприятной учебной и рабочей атмосферы.

Публикации автора по теме диссертации

- S1. *Сергеев В. А., Федотов А. А.* О делокализации квантовой частицы при адиабатической эволюции, порожденной одномерным оператором Шрёдингера // Матем. заметки. — 2022. — Т. 112, № 5. — С. 752–769.
- S2. *Сергеев В. А., Федотов А. А.* О поверхностной волне, возникающей после делокализации квантовой частицы при адиабатической эволюции // Алгебра и анализ. — 2024. — Т. 36, № 1. — С. 204–233.
- S3. *Fedotov A. A., Sergeev V. A.* Adiabatic evolution generated by a Schrödinger operator with a continuous spectrum // Math. Notes. — 2025. — Vol. 118, no. 2. — P. 382–397.
- S4. *Сергеев В. А.* Адиабатическая эволюция, порожденная оператором Шрёдингера с непрерывным спектром. II // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2025. — Т. 541. — С. 145–173.
- S5. *Sergeev V. A.* On the upslope propagation of an adiabatic normal mode in a wedge-shaped sea // Russ. J. Math. Phys. — 2024. — Vol. 31, no. 2. — P. 308–314.

Список цитированной литературы

1. *Fock V. A.* Electromagnetic diffraction and propagation problems. — Pergamon Press, 1965. — P. 414.
2. *Fedotov A. A.* Adiabatic evolution generated by a one-dimensional Schrödinger operator with decreasing number of eigenvalues // Math. Notes. — 2024. — Vol. 116, no. 4. — P. 804–830.
3. *Федотов А. А.* Об адиабатических нормальных волнах в прибрежном клине // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2018. — Т. 471. — С. 261–285.
4. Global distribution of nearshore slopes with implications for coastal retreat / P. Athanasiou [et al.] // Earth Syst. Sci. Data. — 2019. — Vol. 11. — P. 1515–1529.
5. *Avron J., Elgart A.* Adiabatic theorem without a gap condition // Commun. Math. Phys. — 1999. — Vol. 203. — P. 445–463.
6. *Born M., Fock V.* Beweis des Adiabatenatzes // Z. Physik. — 1928. — Vol. 51. — P. 165–180.
7. *Kato T.* On the adiabatic theorem of quantum mechanics // J. Phys. Soc. Japan. — 1950. — Vol. 5. — P. 435–439.
8. *Смирнов А. Б., Федотов А. А.* Адиабатическая эволюция, порожденная оператором Шрёдингера с дискретным и непрерывным спектрами // Функци. анализ и его прил. — 2016. — Т. 50, № 1. — С. 90–93.

9. *Avron J. E., Seiler R., Yaffe L. G.* Adiabatic theorems and applications to the quantum Hall effect // *Commun. Math. Phys.* — 1987. — Vol. 110. — P. 33–49. — Erratum: Adiabatic theorems and applications to the quantum Hall effect // *Commun. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 156. — P. 649–650.
10. *Суханов В. В.* Асимптотическое поведение решений нестационарного уравнения Дирака с медленно зависящим от времени потенциалом // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2019. — Т. 483. — С. 189–198.
11. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. — М.: Наука, 2007. — С. 369.
12. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1981. — Т. 117. — С. 39–77.
13. *Pierce A. D.* Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1965. — Vol. 37, no. 1. — P. 19–27.
14. *Pierce A. D.* Guided mode disappearance during upslope propagation in variable depth shallow water overlying a fluid bottom // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1982. — Vol. 72, no. 2. — P. 523–531.
15. *Arnold J. M., Felsen L. B.* Rays and local modes in a wedge-shaped ocean // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1983. — Vol. 73, no. 4. — P. 1105–1119.
16. *Kamel A., Felsen L. B.* Spectral theory of sound propagation in an ocean channel with weakly sloping bottom // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1983. — Vol. 73, no. 4. — P. 1120–1130.
17. *Jensen F. B., Kuperman W. A.* Sound propagation in a wedge-shaped ocean with a penetrable bottom // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1980. — Vol. 67, no. 5. — P. 1564–1566.
18. *Pierce A. D.* Augmented adiabatic mode theory for upslope propagation from a point source in variable-depth shallow water overlying a fluid bottom // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1983. — Vol. 74, no. 6. — P. 1837–1847.
19. *Babich V. M., Lyalinov M. A., Grikurov V. E.* Diffraction theory: the Sommerfeld–Malyuzhinets technique. — Alpha Science International, 2008. — P. 215.
20. *Chester C., Friedman B., Ursell F.* An extension of the method of steepest descents // *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* — 1957. — Vol. 53, no. 3. — P. 599–611.