На правах рукописи

Алпеев Андрей Викторович

Инварианты энтропийного типа для сохраняющих меру действий счётных групп

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2017

Работа выполнена на кафедре математического анализа
математико–механического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: ВЕРШИК Анатолий Моисеевич,
доктор физико-математических наук профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет», главный научный сотрудник, заведующий лаборатории теории представлений и динамических систем ПОМИ РАН.

Официальные оппоненты:

ОСЕЛЕДЕЦ Валерий Иустинович,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

НИКИТИН Павел Павлович
кандидат физико-математических наук, начальник лаборатории, «Газпром ВНИИГАЗ» .

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)».

Защита состоится “___”__________ 2017 г. в ____ на заседании диссертационного совета Д002.202.01 в ФГБУН ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru/.

Автореферат разослан “___”__________ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д. ф.-м. н. А. Ю. Зайцев

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена изучению появившихся недавно инвариантов энтропийного типа для сохраняющих вероятностную меру действий счётных групп, обобщающих классическую энтропию действий аменабельных групп: софической и рохлинской энтропии. Вопросы, связанные с этропией, занимают одно из центральных мест в эргодической теории. Определённая А.Н. Колмогоровым в конце пятидесятых годов прошлого века в работах [13], [14] энтропия для сохраняющих меру автоморфизмов позволила, в числе прочего, решить проблему классификации бернуллиевских действий. В дальнейшем оказалось, что большинство основных результатов можно обобщить и на случай действия произвольной счётной аменабельной группы. Главным источником здесь служит работа Орнстина-Вейса [15]. В ней же был приведён пример, предполагавшийся аргументом в пользу невозможности построения энтропийной теории для действий неаменабельных групп: оказалось, что бернуллиевское действие с энтропией базы $\log 2$ факторизуется в бернуллиевское действие с энтропией базы $\log 4$, что нарушает свойство монотонности при факторизации (выполняющееся в аменабельном случае). Однако в недавней работе [2] Л. Боуэн определил энтропию для действий так называемых софических групп, широкого класса групп, включающего, в частности, все аменабельные и конечно-аппроксимируемые группы. Этот и последующие результаты позволили расширить классификацию Колмогорова-Орнстина бернуллиевских сдвигов на случай действий софических групп.

Для некоторых примеров софическая энтропия была посчитана: для бернуллиевских действий это было сделано в самой работе [2]. В статье [3] Боуэн получил формулу для софической энтропии некоторого класса так называемых *алгебраических действий*. Это результат был позже серьёзно обобщён Хэйсом [10] на некоторый класс алгебраических действий всех софических групп. Во всех этих результатах возникает очень интересное явление: софическая энтропия не зависит от софической аппроксимации. Однако в статье [5] Кардери привёл пример действия, имеющего положительную софическую энтропию по отношению к одной софической аппроксимации, и $-\infty$ — по отношению к другой (последнее, на самом деле, означает, что в определении произошло некоторого рода вырождение). Вычисление софической энтропии для новых примеров и доказательство того, что она не зависит от софической аппроксимации, представляется в этом контексте актуальной задачей.

Другое понятие энтропии, за которым закрепилось название энтропия по Рохлину или рохлинская энтропия, было определено в работе Сюарда [21], её исследование было продолжено в статьях [22], [24] и в готовящейся работе автора и Сюарда [1]. Происхождение названия связано со знаменитой теоремой В.А. Рохлина, утверждающей, что энтропия Колмогорова-Синая для апериодического эргодического действия группы $\mathbb{Z}$ есть инфимум шенновских энтропий порождающих разбиений. Задача подсчёта рохлинской энтропии для действий неаменабельных групп выглядит весьма сложной (для свободных действий аменабельных групп она совпадает с обычной динамической энтропией). Известно, что рохлинская энтропия ограничивает софическую сверху (см. [2], [12], и [1] для неэргодических действий). В действительности, этот факт обеспечивает единственную известную на данный момент нижнюю оценку для Рохлинской энтропии. До работы автора рохлинская энтропия в случае действия неаменабельной группы была вычислена лишь для бернуллиевских действий (по сути, в самой первой работе Боуэна по софической энтропии) и для некоторых классов действий нулевой энтропии.

Вычисление рохлинской энтропии для нового класса действий, исследование её свойств представляется интересной и актуальной задачей.

Цель диссертационной работы. Основная цель данной диссертации — изучение некоторых свойств рохлинской энтропии (доказательство существования аналога пинскеровского фактора и того, что исходная система является его слабо перемешивающим расширением), вычисление софической и рохлинской энтропии для некоторых систем, возникающих из соображений термодинамики.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Эргодические действия счётных групп обладают аналогом пинскеровского фактора для рохлинской энтропии — максимальным фактором нулевой рохлинской энтропии.

2. Эргодическая система является слабо перемешивающим расширением своего пинскеровского фактора.

3. Указаны достаточные условия для возможности вычисления в явном виде софической и рохлинской энтропии для сохраняющих меру действий софических групп, возникающих из гиббсовских мер. Приведены явные формулы.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В работе использовались комбинаторные методы, методы теории вероятностей, эргодической теории и статистической физики.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её методы могут быть использованы для получения дальнейших результатов в эргодической теории и статистической термодинамике.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты работы являются достоверными, математически строго доказанными фактами. Основные результаты докладывались на семинаре по теории представлений и динамическим системам ПОМИ РАН, на международной конференции «Dynamics, Combinatorics, Representations» в Санкт-Петербурге в 2015 году, на семинаре «Asymptotic invariants of discrete groups, sparse graphs and locally symmetric spaces» в Будапеште в 2015 году, на конференции «Topology and Groups» в IISER Mohali, Индия в 2016 году, на семинаре по эргодической теории и статистической физике МГУ в 2017 году.

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [26], [27] и [28] в рецензируемых журналах из перечня ВАК.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, включающих 11 разделов; изложена на 62 страницах, список литературы включает 38 наименований.

2. Содержание работы

Во **введении** обсуждается актуальность работы, даётся обзор известных результатов по энтропии для сохраняющих меру действий счётных групп. Даётся обзор работы. Формулируются результаты о софической и рохлинской энтропии мер, возникающих из гиббсовских систем:

***Теорема* 0.2.** *Пусть G — софическая группа, A — конечное множество. Пусть ν — единственная гиббсовская мера на A^G для потенциала φ и α — каноническое порождающее разбиение. Предположим, что получаемая гиббсовская структура удовлетворяет условию Добрушина. Пусть $\xi = (\xi_g)_{g \in G}$ — случайный процесс независимых одинаково распределённых величин такой, что у каждой распределение — мера Лебега на интервале $[0, 1]$. Положим*

$$L_\xi = \{g \in G | \xi_g < \xi_e\}.$$

Тогда софическая энтропия сдвигового действия, снабженного мерой ν, не зависит от софической аппроксимации. Её значение совпадает с рохлинской энтропией и выражается формулой

$$\mathbb{E}_\xi H(\alpha | \alpha^L).$$

***Теорема* 0.3.** *Пусть G — софическая группа, A — конечный алфавит. Пусть потенциал φ таков, что для всех $\beta \in [0, 1]$ потенциал $\beta\varphi$ обладает единственной инвариантной гиббсовской мерой. Тогда софическая энтропия сдвигового действия, снабжённого единственной инвариантной мерой ν_φ для по-*

тенциала φ, не зависит от софической аппроксимации и выражается формулой

$$h(\nu_\varphi) = \log|A| + \int_{A^G} \varphi(x) d\nu_\varphi - \int_0^1 d\beta \int_{A^G} \varphi(x) d\nu_{\beta\varphi}(x).$$

В **главе 1** даются необходимые определения из теории меры, эргодической теории. Определена софическая и рохлинская энтропия. Доказано также равенство обычной и так называемой горизонтальной софической энтропии для эргодических действий. В **разделе 1.1** вводятся необходимые сведения из теории меры. В **разделе 1.2** вводится метрика Канторовича, её мы будем использовать для доказательства равенства вертикальной и обычной софической энтропии эргодических действий в разделе 1.7.

В **разделе 1.3** приводится определение шенноновской энтропии и её основные свойства.

Пространство вероятностных мер $\mathcal{M}(X)$ на метрическом компакте X всегда будем снабжать $*$-слабой топологией. Пусть X — стандартное вероятностное или борелевское пространство. *Разбиением* будем называть не более чем счётный набор его дизъюнктных измеримых подмножеств, чьё объединение есть всё пространство. Иногда бывает полезно рассматривать разбиение как частный случай подалгебры. *Шенноновская энтропия* разбиения α на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) определяется формулой

$$H(\alpha) = -\sum_{B\in\alpha} \mu(B) \log(\mu(B))$$

с обычной договорённостью $0 \log 0 = 0$. Если μ — мера на не более чем счётном множестве, то её энтропия $H(\mu)$ будет определяться как энтропия (единственного, очевидно) разбиения на одноточечные подмножества.

Для двух разбиений α, β обозначим $\alpha \vee \beta = \{A \cap B | A \in \alpha, B \in \beta, A \cap B \neq \varnothing\}$. Мы будем обозначать

$$H(\alpha|\beta) = H(\alpha \vee \beta) - H(\beta)$$

— *относительную шенноновскую энтропию*. Для разбиения α и σ-подалгебры $\mathscr{A}$ определим

$$H(\alpha|\mathscr{A}) = \inf_\beta H(\alpha|\beta)$$

(инфимум берётся по всем $\mathscr{A}$-измеримым разбиениям β конечной шенноновской энтропии) — *шенноновскую энтропию относительно подалгебры*. Известно, что результат не изменится, если мы возьмём вместо этого инфимум по всем $\mathscr{A}$-измеримым конечным разбиениям.

В **разделе 1.4** приводятся краткие сведения про вероятностные (марковские) ядра.

В **разделе 1.5** обсуждаются базовые определения эргодической теории, даётся определение рохлинской энтропии.

Зафиксируем сохраняющее меру действие группы G на стандартном вероятностном пространстве (X, μ). Для разбиения α и элемента $g \in G$ будем обозначать $\alpha^g = \{g^{-1}(B) | B \in \alpha\}$. Для $F \subset G$ обозначим $\alpha^F = \bigvee_{g \in F} \alpha^g$. Имеет смысл рассматривать последнее как разбиение для конечных F и как подалгебру — иначе. Будем говорить, что разбиение α — *порождающее*, если подалгебра α^G μ-mod 0 эквивалентна подалгебре всех измеримых множеств. Известно, что α является порождающим разбиением, если существует такое подмножество полной меры X' пространства X, что точки $x, y \in X'$ не равны только при условии наличия такого $g \in G$, что $g(x)$ и $g(y)$ принадлежат различным элементам α.

Рохлинская энтропия определяется как инфимум шенноновских энтропий порождающих разбиений относительно подалгебры инвариантных множеств:

$$h_{Rok} = \inf\{H(\alpha|\mathscr{I}), \alpha \text{ — порождающее разбиение}\},$$

$\mathscr{I}$ обозначает подалгебру инвариантных множеств. Для эргодических систем это определение, очевидно, редуцируется до простого инфимума шенноновских энтропий порождающих разбиений.

В **разделе 1.6** приводится определение софических групп, софической энтропии, горизонтальной софической энтропии.

Для конечного множества R будем обозначать $\mathrm{Sym}(R)$ — группу всех его перестановок. Определим нормализованное расстояние Хэмминга d_H на $\mathrm{Sym}(R)$ формулой

$$d_H(g_1, g_2) = \frac{|\{r \in R, g_1(r) \neq g_2(r)\}|}{|R|}.$$

Пусть G — счётная группа. *Софическая аппроксимация* этой группы есть последовательность конечных множеств $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и последовательность отображений $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\sigma_i^{\cdot} : G \to \mathrm{Sym}(V_i)$, таких, что

1. для всех $g_1 \neq g_2$ из G имеет место $\lim_{i \to \infty} d_H(\sigma_i^{g_1}, \sigma_i^{g_2}) = 1$,

2. для всех g_1, g_2 из G имеет место $\lim_{i \to \infty} d_H(\sigma_i^{g_1} \circ \sigma_i^{g_2}, \sigma_i^{g_1 g_2}) = 0$.

Группа называется *софической*, если у неё есть софическая аппроксимация. С этого момента G — софическая группа с фиксированной софической аппроксимацией.

Пусть A — конечное множество. Определим отображения $\theta_{v,i} : A^{V_i} \to A^G$ формулой

$$(\theta_{v,i}(\tau))\,(g) = \tau(\sigma_i^g(v)).$$

для $\tau \in A_i^V$ (индекс $i \in \mathbb{N}$ будет обычно опускаться). Определим также отображения $\Theta_i : \mathcal{M}(A^{V_i}) \to \mathcal{M}(A^G))$ формулой

$$\Theta_i(\eta) = \frac{1}{|V_i|} \sum_{v \in V_i} \theta_v(\eta).$$

для $\eta \in \mathcal{M}(A^{V_i})$ (аналогично, индекс $i \in \mathbb{N}$ будет обычно опускаться). Пусть ν — инвариантная относительно сдвигового действия мера на A^G. Зафиксируем произвольную метрику l, задающую $\star$-слабую топологию на $\mathcal{M}(A^G)$. Для $\varepsilon > 0$ и $i \in \mathbb{N}$, обозначим $\mathrm{Hom}(i, \varepsilon)$ — множество всех таких $\tau \in A^{V_i}$, что

$$l\,(\Theta(\delta_\tau), \nu) < \varepsilon.$$

Тогда *софическая энтропия* сдвигового действия с мерой ν определяется формулой

$$h(\nu) = \inf_{\varepsilon > 0} \varlimsup_{i \to \infty} \frac{\log|\mathrm{Hom}(i, \varepsilon)|}{|V_i|}.$$

Софическая энтропия была введена Боуэном в [2]. Заметим, что в приведённом выше определении мы опирались на структуру сдвигового пространства. На самом же деле, эта величина зависит только от метрической структуры действия, что было показано им же (см. также [12]).

Дадим определение горизонтальной софической энтропии.

Для $\varepsilon > 0$ и $i \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathrm{Map}(i, \varepsilon)$ — множество всех таких $\eta \in \mathcal{M}(A^{V_i})$, что

$$l(\Theta(\eta), \nu) < \varepsilon.$$

Горизонтальная софическая энтропия определяется как

$$h_{hor}(\nu) = \inf_{\varepsilon > 0} \varlimsup \frac{\sup\{H(\eta) | \eta \in \mathrm{Map}(\nu, i, \varepsilon)\}}{|V_i|}.$$

Равенство обычной и горизонтальной софической энтропии использовалось для эргодических действий в работах [3] и [10]. В них не приводится отдельно данный результат — сразу применительно к специфической ситуации, доказательство приведено для полноты изложения в **разделе 1.7**.

В **главе 2** обсуждаются и доказываются результаты, касающиеся обобщения пинскеровского фактора на случай рохлинской энтропии. Доказывается, что пинскеровский фактор (максимальный фактор нулевой энтропии) существует; в случае его нетривиальности показывается, что исходная система является его слабо перемешивающим расширением. Доказательство существования пинскеровского фактора проводится с помощью леммы Цорна, результат же о слабом перемешивании получается применением дихотомии Фюрстенберга-Циммера, утверждающей, что если эргодическое расширение действия не является слабо перемешивающим расширением, то существует промежуточный, так называемый изометрический фактор.

Глава 3 полностью посвящена гиббсовским мерам и результатам, с ними связанным.

Под *гиббсовой структурой* $\mathcal{G}$ мы будем понимать тройку, состоящую из не более чем счётного множества V(вершин), набора конечных алфавитов $(A_v)_{v\in V}$ и потенциала $(\Phi_T)_{T\Subset V}$: такого набора функций $\Phi_T : \prod_{v\in T} A_v \to \mathbb{R}$, что для всякой $v \in V$ все Φ_T для $T \ni v$, кроме конечного числа, тождественно равны нулю. Допуская вольность, будем применять эти функции не только к соответствующим $\prod_{v\in T} A_v$, но и к $\prod_{v\in V} A_v$. Рассмотрим множество $\Omega = \prod_{v\in V} A_v$, снабжённое топологией произведения (полагая топологию на A_v дискретной). Для $W \subset V$ обозначим $\mathrm{pr}_W : \prod_{v\in V} A_v \to \prod_{v\in W} A_v$ — естественную проекцию, а $\mathscr{B}(W)$ — прообраз борелевской алгебры с $\prod_{v\in W} A_v$ при отображении pr_W.

Приступим теперь к определению множества гиббсовских мер для данной гиббсовой структуры $\mathcal{G}$. Введём набор отображений $(\pi_{\mathcal{G},\Lambda})_{\Lambda\Subset G}$, так что $\pi_{\mathcal{G},\Lambda}$ будет отображать точку $\omega \in \Omega$ в вероятностную меру $\pi_{\mathcal{G},\Lambda}(\omega)$, чей носитель — множество таких точек ω', для которых $\mathrm{pr}_{V\setminus\Lambda}(\omega) = \mathrm{pr}_{V\setminus\Lambda}(\omega')$, и такую, что вероятность точки ω' из носителя пропорциональна

$$e^{-\sum_{T\cap\Lambda\neq\varnothing}\Phi_T(\omega')}$$

(отметим, что эти условия однозначно задают отображения). Полученные функции, как несложно убедиться, будут непрерывными. Продолжим их затем до вероятностных ядер $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda} : \mathcal{M}(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$, $\Lambda \Subset V$. Несложно проверить, что для $\Lambda \subset \Lambda' \Subset V$ имеет место равенство

$$\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda} \circ \bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda'} = \bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda'} \circ \bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda} = \bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda'}.$$

Множество гиббсовых мер $\mathcal{MG}$ для данной гиббсовой структуры $\mathcal{G}$ определяется как множество всех таких мер ν на Ω, что $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\nu) = \nu$ для всех $\Lambda \Subset V$. Из компактности следует, что это множество всегда непусто. В случае конечного множества вершин, как нетрудно проверить, множество гиббсовских мер содержит единственную меру, однозначно определяемую тем, что вероятность точки $\omega \in \Omega$ пропорциональна

$$e^{-\sum_{T\subset V}\Phi_T(\omega)}.$$

Нам понадобятся дополнительные обозначения для того, чтобы сформулировать условие единственности Добрушина. Напомним, нормой $\|\mu\|$ полной вариации меры μ называется $\sup\{\mu(B) - \mu(C)\}$ (супремум берётся по всевозможным парам измеримых множеств). Обозначим

$$b_{v,u} = \sup_{\omega_1, \omega_2} \|pr_{\{v\}}(\pi_{\mathcal{G}, V \setminus \{v\}})(\omega_1) - pr_{\{v\}}(\pi_{\mathcal{G}, V \setminus \{v\}})(\omega_2)\|,$$

где супремум берётся по всем таким парам $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, что $\omega_1(w) = \omega_2(w)$ для всех $w \neq v$, $w \in \mathbb{N}$. Обозначим далее

$$b_v = \sum_{u \neq v} b_{v,u}.$$

И, наконец,

$$b^\star = \sup_{v \in V} b_v.$$

Будем говорить, что гиббсова структура удовлетворяет *условию Добрушина*, если

$$b^\star < 1.$$

***Теорема* 3.6** (Добрушин, [6])**.** *Если $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию Добрушина, то $\mathcal{MG}$ содержит единственную меру.*

Для подалгебры $\mathscr{A}$ на Ω определим её насыщение

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \bigcap_{F \Subset V} \mathscr{A} \vee \mathscr{B}(V \setminus F).$$

Условие Добрушина позволяет «выносить за скобки» подалгебру при счётном пересечении:

***Лемма* 3.8.** *Пусть $\mathcal{G}$ — гиббсовская структура, удовлетворяющая условию Добрушина. Тогда для любого $S \subset V$ подалгебры $\mathscr{B}(S)$ и $\widetilde{\mathscr{B}(S)}$ эквивалентны.*

Далее в этом разделе доказываются некоторые технические аппроксимативные леммы.

Раздел 3.2 посвящён доказательству теоремы 0.2.

Определим инвариантные относительно сдвига гиббсовы структуры над группой G. Положим множеством вершин G, алфавит будет одинаков для всех $g \in G$: A. Имеет смысл считать, что A содержит не менее двух элементов. Будем требовать, чтобы существовала функция $\varphi : A^D \to \mathbb{R}$ ($D \Subset G$) такая, что $\Phi_T(\tau) = \varphi(g(\tau))$, $\omega \in A^G$, если $T = Dg$ для некоторого $g \in G$ (в противном случае полагаем Φ_T тождественным нулём). В данной ситуации потенциалом мы будем называть саму функцию φ, а гиббсовскую структуру — *инвариантной относительно сдвига гиббсовской структурой*.

Пусть $\mathcal{G}$ — инвариантная относительно сдвига гиббсова структура над G, имеющая единственную меру. Несложно проверить, что эта мера будет инвариантна относительно сдвига, и таким образом порождает динамическую систему.

Следующая лемма потребуется для применения оценки Сюарда.

***Лемма* 3.13.** *Пусть ν — инвариантная гиббовская мера для инвариантной гиббсовской структуры $\mathcal{G}$ над счётной группой G. Тогда получаемое сдвиговое действие является существенно свободным.*

Нам также понадобится эргодичность:

***Лемма* 3.14.** *Единственная гиббсовская мера для некоторого потенциала с необходимостью эргодична.*

Основным инструментом подсчёта софической энтропии гиббсовских мер будет их имитация на софической аппроксимации.

Для софической группы G определена особо важная последовательность гиббсовых структур $\mathcal{G}^i$. Для $\mathcal{G}^i$ множество вершин будет V_i (из определения софической аппроксимации). Для каждой вершины алфавит будет одинаков: A.

Потенциал для $\mathcal{G}^i$ определён следующим образом:

$$\Phi_T(\tau) = \sum_{v \in V_i} \varphi(\theta_v(\tau))$$

для $\tau \in A^{V_i}$ и $T \subset V_i$, сумма берётся по всем таким $v \in V_i$, что $\sigma_i^D(v) = T$ (чаще всего количество слагаемых будет нуль или один). Обозначим η_i — единственную гиббсовскую меру для гиббсовой структуры $\mathcal{G}^i$.

***Теорема* 3.18.** *Пусть $\mathcal{G}$ — инвариантная относительно сдвига гиббсова структура над софической группой G с фиксированной софической аппроксимацией, ν — единственная инваринтная гиббсова мера для $\mathcal{G}$, а последовательность η_i определена как указано выше. Тогда софическую энтропию сдвигового действия G на A^G с мерой ν можно посчитать по формуле*

$$h(\nu) = \varlimsup_{i \to \infty} \frac{H(\eta_i)}{|V_i|}.$$

Один из основных результатов этого раздела — следующая теорема:

Теорема 3.22. *Пусть μ — единственная мера Гиббса для потенциала φ, и α — каноническое порождающее разбиение. Тогда*

$$h(\mu) \geqslant \mathbb{E}_\xi H(\alpha|\widetilde{\alpha^L})$$

(для любой софической аппроксимации).

В соединении с леммой 3.8, оценкой Сюарда на рохлинскую энтропию и тем, что рохлинская энтропия ограничивает сверху софическую, последняя теорема даёт доказательство теоремы 0.2.

В **разделе 3.3** мы, используя давление и его дифференциируемость, доказываем теорему 0.3.

Обозначим для гиббсовской системы $\mathcal{G}^{\varphi,i}$ и $\tau \in \Omega_i$ функцию

$$\mathcal{E}_{\varphi,i}(\tau) = \sum_{v \in V_i} \varphi(\theta_v(\tau)).$$

Обозначим

$$Z_{\varphi,i} = \sum_{\tau \in \Omega_i} e^{-\mathcal{E}_{\varphi,i}(\tau)}.$$

По определению, единственная гиббсовская мера η_i для $\mathcal{G}^{\varphi,i}$ задаётся соотношением

$$\eta_i(\{\tau\}) = \frac{e^{-\mathcal{E}_{\varphi,i}(\tau)}}{Z_{\varphi,i}}.$$

Для фиксированной гиббсовской системы $\mathcal{G}^\varphi$ с единственной инвариантной гиббсовской мерой и софической аппроксимации будем называть *давлением* величину

$$P_\varphi = \lim_{i\to\infty} \frac{\log Z_{\varphi,i}}{|V_i|}$$

в случае, если последний предел существует. В последнем случае будем говорить также что давление существует.

Список литературы

[1] A. Alpeev and B. Seward, *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups III*, in preparation

[2] L. Bowen, *Measure conjugacy invariants for actions of countable sofic groups*, Journal of the American Mathematical Society, 2010, 23, 217–245.

[3] L. Bowen, *Entropy for expansive algebraic actions of residually finite groups*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2011, 31.03, 703–718.

[4] L. Bowen, *Zero entropy is generic*, Entropy, 2016, 18.06, Paper no. 220, 20 pp.

[5] A. Carderi, *Ultraproducts, weak equivalence and sofic entropy*, 2015, arXiv preprint arXiv:1509.03189.

[6] Р. Л. Добрушин, *Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности*, Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13.02, 201–229.

[7] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, Journal d'Analyse Mathematique, 1977, 31, 204–256.

[8] H.-O. Georgii, *Gibbs measures and phase transitions*, De Gruyter studies in mathematics, De Gruyter, 2011, vol. 9, xiv+545 pp.

[9] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, 101. American Mathematical Society, 2003, vol. 101, xii+384 pp.

[10] B. Hayes, *Fuglede-kadison determinants and sofic entropy*, 2014, arXiv preprint arXiv:1402.1135.

[11] B. Hayes, *Mixing and spectral Gap Relative to Pinsker factors for sofic groups*, to appear in the Proceedings in honor of Vaughan F. R. Jones' 60th birthday conferences.

[12] D. Kerr, *Sofic measure entropy via finite partitions*, Groups, Geometry and Dynamics, 2013, 7, 617–632.

[13] А. Н. Колмогоров, *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега*, Доклады Академии Наук СССР, 1958, 119, 861–864.

[14] А. Н. Колмогоров, *Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов*, Доклады Академии Наук СССР, 1959, 124, 754–755.

[15] D. S. Ornstein and B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups*, Journal d'Analyse Mathématique, 1987, 48.1, 1–141.

[16] F. Rassoul-Agha and T. Seppäläinen, *A course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures*, American Mathematical Society, 2015, vol. 162.

[17] В.А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой*, Успехи математических наук, 1967, 22.05, 3–56.

[18] Я. Г. Синай, *О понятии энтропии динамической системы*, Доклады Академии Наук СССР, 1959, 124, 768–771.

[19] D. Ornstein, *Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic*, Advances in Mathematics, 1970, 4.3, 337–352.

[20] D. Ornstein, *Two bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic*, Advances in Mathematics, 1970, 5.3, 339–348.

[21] B. Seward, *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups I*, 2014, arXiv preprint arXiv:1405.3604.

[22] B. Seward, *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups II*, 2015 , arXiv preprint arXiv:150.03367.

[23] B. Seward, *Positive entropy actions of countable groups factor onto Bernoulli shifts*, in preparation.

[24] B. Seward, *Weak containment and Rokhlin entropy*, 2016, arXiv preprint arXiv:1602.06680.

[25] R. Zimmer, *Extensions of ergodic group actions*, Illinois Journal of Mathematics, 1976, 20.3, 373–409.

Публикации автора по теме диссертации:

[26] А. В. Алпеев, *Факторы Пинскера для рохлинской энтропии*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2015, 432, 30–35

[27] А. В. Алпеев, *Энтропия гиббсовских мер на софических группах*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2015, 436, 34–48

[28] А. В. Алпеев, *Анонс энтропийной формулы для некоторого класса гиббсовских мер*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2016, 448, 7–13