На правах рукописи

Близнец Иван Анатольевич

Алгоритмы и нижние оценки на вычислительную сложность задач модификации графов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2016

Работа выполнена в лаборатории математической логики ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:

Куликов Александр Сергеевич

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории математической логики ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:

Малышев Дмитрий Сергеевич

доктор физико-математических наук, доцент, профессор ФГАОУ ВПО "Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики"

Пяткин Артем Валерьевич

доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лаборатории дискретной оптимизации в исследовании операций ФГБУН Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО "Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н.Ельцина"

Защита состоится «13» апреля 2016 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д002.202.02 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «____» ____________________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д. ф.-м. н. Малютин А. В. Малютин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Задачи модификации графов играют важную роль в теоретической информатике и имеют множество приложений, включая молекулярную биологию, вычисления с разреженными матрицами, компьютерное зрение, реляционные базы данных и другие. В диссертации приведены доказательства условных нижних оценок, а также построены новые алгоритмы для таких задач.

В задачах модификации графов требуется в заданном графе произвести минимальное количество изменений с множеством вершин или рёбер, чтобы получить граф из заранее заданного класса Π. Бывает три типа таких задач: вершинные, рёберные и смешанные. В вершинных задачах разрешается производить изменения с множеством вершин. Наиболее часто рассматривают вершинные задачи со следующей формулировкой: требуется удалить минимальное количество вершин из заданного графа так, чтобы полученный граф принадлежал заданному классу графов Π. Классические примеры таких задач: задача о максимальной клике, задача о вершинном покрытии, задача о разрезании контуров. В случае максимальной клики класс Π — это класс всех полных графов. В задаче вершинного покрытия класс Π — это класс всех пустых (безрёберных) графов. В задаче разрезания контуров класс Π состоит из ациклических графов. В рёберных задачах модификации графов производятся операции над множеством рёбер. В зависимости от рассматриваемой задачи можно только удалять рёбра, только добавлять рёбра или же проделывать две операции одновременно. Другими словами, для заданного графа $G = (V, E)$ нашей целью является найти множество рёбер $F \subset V \times V$ минимального размера так, чтобы граф $G' = (V, E \Delta F)$ принадлежал классу Π, где $E \Delta F \equiv (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$. В задачах удаления дополнительно требуется, чтобы F было подмножеством E, в задачах дополнения — чтобы $F \cap E = \emptyset$, в задачах изменения нет ограничений на множество F, то есть можно как удалять, так и добавлять рёбра. Примером подобной задачи является задача хордального дополнения, где требуется найти минимальный хордальный суперграф, то есть добавить минимальное число рёбер, чтобы граф стал хордальным. В смешанных задачах разрешено изменять множество вершин и рёбер одновременно.

Задачи, связанные с модификацией графов, являются фундаментальными задачами теории графов. Уже в 1979 г. Гэри и Джонсон упомянули около двух десятков различных задач вершинной и рёберной модификации графов. Как уже было упомянуто, задачи модификации графов имеют приложения во многих областях: молекулярной биологии, численной алгебре, реляционных базах данных и других. Во многих областях граф представляет некоторые данные, полученные экспериментальным путём. В таких случаях добавление или удаление ребра является корректировкой допущенной ошибки, а удаление вершины может рассматриваться как устранение некоторых "выбросов" в данных, то есть тех случаев, когда предполагается, что почти все данные, полученные для данной вершины, имеют неверное значение.

Задача о максимальном индуцированном П-подграфе (подграфе, принадлежащему классу графов П) является вершинной задачей модификации. В этой задаче для заданного фиксированного класса П, в поданном на вход графе G требуется найти индуцированный подграф H из класса П с максимальным числом вершин. Льюис и Янакакис доказали следующую теорему, показывающую NP-трудность рассматриваемой задачи.

Теорема. Если класс графов П обладает свойством наследственности и является нетривиальным (существует бесконечное количество графов, принадлежащих классу П, и бесконечное число классов, непринадлежащих классу П), то задача поиска максимального индуцированного П-подграфа является NP-трудной.

В литературе встречается большое многообразие работ, рассматривающих задачу поиска максимального индуцированного П-подграфа для некоторых конкретных классов П. Данная задача рассматривается как с точки зрения экспоненциальных, параметризованных алгоритмов, так и с точки зрения приближенных алгоритмов. В диссертации рассматриваются только подходы, позволяющие получить точное решение.

Примеры изученных классов включают следующие графы: безрёберные, планарные, внешнепланарные, двудольные, полные двудольные, ациклические, с заданными ограничениями на степень и другие. С точки зрения точных алгоритмов, если принадлежность классу графов П может быть проверена за полиномиальное время, то задача тривиально решается полным перебором за время $2^n n^{O(1)} = O^*(2^n)$ (обозначение $O^*(\cdot)$ скрывает множители, полиномиально зависящие от размера входа) на графе, состоящем из n вершин. Однако для многих конкретных классов П задача может быть решена быстрее полного перебора. Известными примерами являются задачи, когда граф П — это класс безрёберных графов (задача о максимальном независимом множестве), класс ациклических графов (задача о максимальном индуцированном лесе), класс двудольных графов, планарных, d-вырождающихся, регулярных, графов кластеров или двудольных клик (см. таблицу 1).

Известно, что любой класс графов П, обладающий свойством наследственности, можно описать с помощью множества индуцированных запрещённых подграфов $\mathcal{F}$. Другими словами, $G \in \Pi$ тогда и только тогда, когда G не содержит в качестве индуцированного подграфа любой граф F из множества $\mathcal{F}$. Так, множество ациклических графов можно описать множеством $\mathcal{F}$, состоящим их всех циклов, в то время как множество хордальных графов — множеством всех циклов на четырёх и более вершинах. Множество графов кластеров характеризуется множеством запрещённых индуцированных подграфов, состоящим из одного графа P_3 (путь, состоящий из трёх вершин). В том случае, когда для класса графов Π множество запрещённых подграфов конечно, максимальный индуцированный Π-подграф может быть найден значительно быстрее 2^n с помощью простого алгоритма расщепления. В случае же, когда множество $\mathcal{F}$ бесконечно, задача становится нетривиальной и построение алгоритмов с временем работы c^n, где $c < 2$, становится весьма затруднительным, даже если множество $\mathcal{F}$ состоит из очень простых графов, например, циклов. Несмотря на нетривиальность построения таких алгоритмов, для многих естественных классов графов существуют алгоритмы со временем работы c^n, где $c < 2$. В работе [1] сформулирована гипотеза:

Гипотеза 1. Для любого полиномиально распознаваемого класса Π со свойством наследственности задача максимального индуцированного подграфа может быть решена за время c^n, где $c < 2$ — константа.

Таблица 1. Известные результаты для задачи о максимальном индуцированном Π-подграфе

Класс графов	Время	Авторы
Безреберные	$\mathcal{O}(1.2109^n)$	Робсон [4]
Ацикличные (леса)	$\mathcal{O}(1.7548^n)$	Фомин и др. [5]
Двудольные	$\mathcal{O}(1.62^n)$	Раман и др. [6]
Планарные	$\mathcal{O}(1.7347^n)$	Фомин и др. [7]
d-вырожденные	$\mathcal{O}((2-\epsilon_d)^n)$	Пилипчук и Пилипчук [8]
Кластер графы	$\mathcal{O}(1.6181^n)$	Фомин и др. [9]
Биклики	$\mathcal{O}(1.3642^n)$	Гасперс и др. [10]
С $o(n/\log n)$ древесной шириной	$\mathcal{O}(1.7347^n)$	Виллангер и Фомин [11]
r-регулярные	$\mathcal{O}((2-\epsilon_r)^n)$	Гупта и др. [12]
Паросочетания	$\mathcal{O}(1.6957^n)$	Гупта и др. [12]

Кратко опишем известные результаты с точки зрения параметризованных алгоритмов. Далее считаем, что n — это количество вершин в графе, m — количество рёбер, а k — количество разрешённых модификаций. Каи [13] показал, что если класс Π описывается конечным числом запрещённых индуцированных подграфов, то для задачи вершинной модификации до класса Π существует FPT-алгоритм, то есть алгоритм с временем работы $f(k)poly(n)$, где k — это количество рёбер, которые можно удалить, а f — произвольная вычислимая функция. Класс хордальных графов описывается бесконечным числом запрещённых графов и поэтому к нему не применима теорема Каи. Несмотря на это, для задачи вершинной модификации до хордальных графов существует FPT-алгоритм, данный результат был получен Марксом [14]. Другим подобным примером является задача вершинной модификации до интервального графа, для которой Као и Маркс построили алгоритм с временем работы $10^k n^{O(1)}$ [15]. В случае класса собственных интервальных графов Као привёл алгоритм с временем работы $6^k(n+m)$ [16]. С другой стороны, Пинар и др. [17] показали, что для случая, когда класс Π является классом совершенных графов или слабых хордальных графов, задача не допускает FPT-алгоритма (в предположении некоторых гипотез из области параметризованных алгоритмов).

В задачах рёберной модификации разрешено удалять или добавлять рёбра для получения графа из определённого класса. Опишем данное направление, представив здесь результаты лишь для одной наиболее хорошо изученной задачи — дополнения до хордального графа. Впервые данная задача была описана в книге Гэри и Джонсона [18] в списке из 12 открытых задач, чей статус принадлежности классу NP-трудных задач был неизвестен. Позднее Янакакис [19] доказал NP-трудность данной задачи. С точки зрения экспоненциальных алгоритмов задача изучена в работах Фомина и др.[20, 21], на данный момент самый быстрый известный алгоритм имеет время работы $O(1.8899^n)$. Для этой же задачи Натанзон, Шамир и Шаран построили приближенный алгоритм, выдающий решение, состоящее не более чем из $8 \cdot OPT^2$ рёбер [22], где OPT — это количество рёбер в оптимальном решении. С точки зрения параметризованных алгоритмов задача о дополнении до хордального графа первоначально была изучена в работе Каплана, Шамира и Тарьяна [23]. Они построили алгоритм с временем работы $O(m16^k)$, позднее данная оценка была улучшена до $O((n+m)\frac{4^k}{k+1})$ в работе Каи [13] и до $O(2.36^k + k^2mn)$ в работе Бодлайндера и др. Большим прорывом в области параметризованных алгоритмов было построение Виллангером и Фоминым алгоритма [24] со временем работы $(2^{O(\sqrt{k}\log k)} + k^2nm)$ для этой задачи. Позднее появились субэкспоненциальные алгоритмы для задач рёберного дополнения до порогового [25], тривиально совершенного [25], псевдоразделенного [25], интервального [26], собственно интервального графов [27]. Стоит отметить, что в предположении гипотезы об экспоненциальном времени (ETH) субэкспоненциальные алгоритмы существуют не для всех задач о рёберных дополнениях. Если класс графов Π характеризуется множеством запрещённых графов $\mathcal{F}$, где $\mathcal{F} \in \{\{2K_2\}, \{C_4\}, \{P_4\}, \{2K_2, P_4\}\}$, то, как показано в работе Пилипчука и др., задача рёберного дополнения до класса Π не допускает алгоритма со временем работы $2^{o(k)}n^{O(1)}$ [25].

Цели работы.

1. Разработать алгоритм поиска максимального индуцированного хордального подграфа в заданном графе с временем работы меньше 2^n. Построить аналогичный алгоритм для поиска максимального индуцированного интервального подграфа.

2. Получить максимально точные нижние оценки для задач о рёберном дополнении до класса графов Π. Рассмотреть случаи, когда класс графов Π является классом хордальных, интервальных, собственно интервальных, пороговых, тривиально совершенных графов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и ранее неизвестными.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы как для построения новых алгоритмов, так и для доказательства нижних оценок на вычислительную сложность различных задач.

Метод выделения клики может быть использован при построении алгоритмов для задач о вершинном удалении до класса графов Π при условии, что класс графов характеризуется с помощью множества запрещенных подграфов. Также идеи, аналогичные идеям, представленным в работе, могут быть применены в случае, когда класс Π содержит разделители малого размера.

Полученный метод конвертации свойства неприближаемости для одной задачи в нижнюю оценку на сложность для другой задачи может быть применён для доказательства новых нижних оценок. Метод замены клики на экспандер при построении сведения может помочь при получении более точных нижних оценок на вычислительную сложность.

Методы исследований. В первой части работы, рассматривающей построение алгоритмов, использован метод расщепления, также используются различные характеризации класса хордальных графов. Во второй части работы, посвящённой нижним оценкам на вычислительную сложность, использованы методы доказательства нижних оценок с помощью гипотезы ETH. Также был применён метод конвертации свойства неприближаемости одной задачи в нижнюю оценку на сложность вычисления для другой задачи.

Основные результаты.

1. Получен алгоритм поиска максимального индуцированного хордального и интервального подграфов за время быстрее полного перебора.

2. Получена нижняя оценка $2^{o(n/log^c n)}$ на сложность вычисления для зада-

чи об оптимальном линейном упорядочивании в предположении справедливости гипотезы ETH.

3. Получены нижние оценки для задач о дополнениях до хордального, интервального, собственно интервального, цепочного, тривиально совершенного и порогового графов в предположении гипотезы о сложности приближения задачи о минимальной бисекции за субэкспоненциальное время.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы были изложены на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция "21st European Symposium on Algorithms ESA 2013" (София Антиполис, Франция, ESA 2013).

2. Санкт-Петербургский городской семинар по дискретной математике (Санкт-Петербург, Россия, 2013).

3. Семинар алгоритмической группы университета Бергена (Берген, Норвегия, 2013).

4. Конференция "Satisfiability Lower Bounds and Tight Results for Parameterized and Exponential-Time Algorithms", Simons University (Беркли, США, 2015).

5. Конференция "Problems in Theoretical Computer Science" (Москва, Россия, 2015).

6. Международная конференция "Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms" (Арлингтон, США, SODA 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях — [1], [2], [3].

Работы [1], [2], [3] написаны в соавторстве. В работе [1] диссертанту принадлежит алгоритм построения решения в случае наличия в графе большой клики (Лемма 1), теоремы 1-2 получены в неразрывном сотрудничестве. В работе [3] диссертанту принадлежат: доказательство нижней оценки для задачи об оптимальном линейном упорядочивании в предположении справедливости гипотезы ETH (теоремы 3.8 и 1.5), а также доказательство нижних оценок для задач о хордальном, интервальном, собственно интервальном, цепочном, тривиально совершенном и пороговом дополнениях, основыванных на нижней оценке для задачи об оптимальном линейном упорядочивании (теоремы 1.1 и 1.3). Нижняя оценка для задачи об оптимальном линейном упорядочивании, в предположении гипотезы о сложности приближения задачи о минимальной бисекции, первоначально была получена диссертантом и впоследствии упрощена соавторами (теорема 1.6, леммы 4.1-4.4).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и списка литературы. Общий объём диссертации — 97 страниц. Список литературы включает 57 наименований на 7 страницах.

Содержание работы

Во введении обсуждаются рассматриваемые в диссертации задачи, приводится обзор состояния исследований в области, формулируются основные результаты диссертации, описывается структура диссертации.

В **первой главе** приведены основные определения и базовые теоремы, используемые в диссертации. В первом разделе даются определения и обозначения основных понятий из теории графов. В последующих разделах рассматриваются определения и используемые теоремы, связанные с выполнимостью формул, гипотезой об экспоненциальном времени. В заключительном разделе первой главы представлен список рассматриваемых задач.

В диссертации использованы стандартные обозначения из теории графов. *Граф* G — это пара $(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — множество *вершин*, а $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ — множество *рёбер*. Когда из контекста понятно, какой граф рассматривается, будут использоваться обозначения V и E для множества вершин и рёбер графа G. Граф H является *подграфом графа* G если $V(H) \subseteq V(G)$ and $E(H) \subseteq E(G)$. Граф H является *индуцированным подграфом* G, если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Индуцированный подграф G с множеством вершин X обозначим через $G[X]$. Через $G \setminus X$ обозначим подграф G, индуцированный множеством вершин $V(G) \setminus X$. Будем говорить, что подмножество вершин $W \subseteq V$ *связно*, если граф $G[W]$ связен.

Дополнение графа G — это граф с множеством вершин V и множеством рёбер $\binom{V}{2} \setminus E$, дополнение обозначается через $\overline{G}$. Для $X \subseteq V$, обозначим через $\delta_G(X)$ множество рёбер, исходящих из X (содержащих ровно одну вершину в X). Если $X, Y \subseteq V$ — не пересекающиеся множества, то $E_G(X, Y)$ обозначает множество рёбер, идущих из X в Y. Через $G[X, Y]$ обозначен *индуцированный двудольный подграф* G *с долями* X *и* Y. То есть множество вершин графа $G[X, Y]$ равняется $X \cup Y$, а множество рёбер — $E_G(X, Y)$. Определим *разрез* как множество рёбер $E_G(A, B)$ для некоторого разбиения (A, B) множества V. Размер разреза считаем равным $|E_G(A, B)|$.

Положим $n = |V|$ и $m = |E|$ соответственно. Для вершины v, $\deg_G(v)$ обозначает степень вершины v (число инцидентных рёбер). Граф *d-регулярный*, если степень каждой вершины равняется d. Максимальную степень графа G обозначим через Δ_G. Множество $N_G(v) = \{w : \{v, w\} \in V(G)\}$ — это множество соседей (открытая окрестность вершины) вершины v. Расширим данное обозначение на подмножества вершин X, положим $N_G(X) = \bigcup_{v \in X} N_G(v) \setminus X$. Замкнутую окрестность множества X обозначим через $N_G[X] = N_G(X) \cup X$. Значение нижних индексов будет опущено (будем писать просто $\deg(v), \Delta, N(X), \delta(X), E(U, V)$) тогда, когда из контекста ясно, какой граф рассматривается.

Класс графов Π — это просто семейство графов. Говоря Π-граф или Π-подграф, мы имеем в виду, что рассматриваемый граф или подграф принадлежат классу Π. Класс графов обладает свойством *наследственности*, если класс Π замкнут относительно взятия индуцированных подграфов. Любой класс графов со свойством наследственности может быть описан списком (возможно, бесконечным) минимальных запрещённых подграфов $\mathcal{F}_\Pi$: граф $G \in \Pi$ тогда и только тогда, когда он не содержит никакого индуцированного подграфа из множества $\mathcal{F}_\Pi$ и для каждого графа $H \in \mathcal{F}_\Pi$ любой его индуцированный подграф H, кроме самого H, принадлежит классу Π. Граф, не содержащий никакой индуцированный подграф из списка $\mathcal{F}$, будем называть *$\mathcal{F}$-свободными графом.*

Параметризованная задача Q — это подмножество $\Sigma^* \times \mathbb{N}$ для некоторого фиксированного конечного алфавита Σ. Экземпляр задачи Q — это элемент $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$, где число k называется параметром. Алгоритм дла параметризованной задачи называется *FPT-алгоритммом* (fixed parameter tractable), если для любого экземпляра задачи (x, k) время его работы не превосходит $f(k) \cdot \mathrm{poly}(|x|)$, где f — некоторая вычислимая функция. Для описания времени работы такого алгоритма, используется обозначение $\mathcal{O}^*$. При таком обозначении скрываются полиномиальные множители от размера входа, то есть просто пишется $\mathcal{O}^*(f(k))$.

Часть результатов получена в предположении гипотезы экспоненциального времени, предложенной Импальяцио, Патури и Зэйном, которая широко применяется при доказательстве условных нижних оценок в области параметризованных алгоритмов.

Гипотеза 1 (Гипотеза экспоненциального времени (ETH))**.** Не существует вероятностного алгоритма для задачи выполнимости булевых формул в 3-КНФ со временем работы $2^{o(n)}$, где n — число переменных в формуле.

В работе рассматриваются следующие задачи (в задачах с зазором требуется определить, к какому из двух случаев относится граф, поданный на вход):

Оптимальное линейное упорядочивание (ОЛУ)

Вход: Граф $G = (V, E)$, целое k.

Вопрос: Существует ли линейное упорядочивание π графа G стоимостью не больше k (то есть $\Sigma_{uv \in E} |\pi(v) - \pi(v)| \leq k$)?

Оптимальное линейное упорядочивание$_{\leq}(d)$ (ОЛУ$_{\leq}(d)$)

Вход: Граф $G = (V, E)$ с вершинами степени не больше d, целое k.

Вопрос: Существует ли линейное упорядочивание π графа G со стоимостью не более k?

Максимальный разрез

Вход: Граф $G = (V, E)$, целое k.

Вопрос: Существует ли разрез содержащий не менее k рёбер?

Максимальный разрез с зазором$_{[\alpha,\beta]}$

Вход: Граф $G = (V, E)$.

Случай 1: G содержит разрез, содержащий не менее βm рёбер.

Случай 2: Размер любого разреза графа G не превосходит αm.

Минимальная бисекция

Вход: Граф $G = (V, E)$ с чётным количеством вершин, целое k.

Вопрос: Существует ли разрез (A, B) с числом рёбер не более k, такой что $|A| = |B|$?

Минимальная бисекция с зазором$(d)_{[\alpha,\beta]}$

Вход: d-регулярный граф $G = (V, E)$ с чётным числом вершин.

Случай 1: G не допускает разрезов (A, B) с числом рёбер меньше βm и $|A| = |B|$.

Случай 2: G содержит разрез (A, B) размера меньше αm, где $|A| = |B|$.

В диссертации рассматриваются вариации задачи выполнимости.

Р3-ВЫП

Вход: 3-КНФ формула $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, где C_i — дизъюнкты длины ровно три.

Вопрос: Существует ли означивание переменных формулы ϕ, выполняющее формулу (значение формулы на заданном наборе равняется 1)?

Р4-НВ-ВЫП

Вход: 4-КНФ формула $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, где C_i — дизъюнкты длины ровно четыре.

Вопрос: Существует ли выполняющий набор для формулы такой, что в любом дизъюнкте не все литералы принимают одно и тоже значение?

Аналогично определяется задача Р3-НВ-ВЫП.

Р3-ВЫП$_{[\alpha,\beta]}$

Вход: 3-КНФ формула $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, где C_i — дизъюнкты длины ровно три.

Случай 1: В ϕ можно выполнить одновременно не менее βm клозов.

Случай 2: В ϕ невозможно выполнить более αm клозов.

Р4-НВ-ВЫП$_{[\alpha,\beta]}$

Вход: 4-КНФ формула $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, где C_i — дизъюнкты длины ровно четыре.

Случай 1: Существует такое означивание, что в ϕ можно найти не менее βm выполненных дизъюнктов и каждый из них содержит как минимум один невыполненный литерал.

Случай 2: В ϕ невозможно выполнить более αm клозов так, чтобы каждый из этих αm клозов содержал невыполненный литерал.

Следующая задача задаёт общий вид задач дополнения до определённого класса графов Π.

Π-Дополнение

Вход: Граф G, целое k.

Вопрос: Можно ли к графу G добавить k новых рёбер так, чтобы полученный граф принадлежал классу графов Π?

Вторая глава посвящена построению алгоритма для поиска максимального индуцированного хордального или интервального подграфов в заданном графе. Построен алгоритм, позволяющий найти максимальный индуцированный Π-подграф не только для случая, когда Π — класс хордальных или интервальных графов. Алгоритм верно работает, если класс Π удовлетворяет четырём свойствам:

Свойство (1.) Класс Π — подкласс хордальных графов со свойством наследственности.

Свойство (2.) Все графы в множестве $\mathcal{F}$ связны и не содержат клики размера $\aleph + 1$ для некоторой константы $\aleph$.

Свойство (3.) Принадлежность графа классу Π можно определить за полиномиальное время. Другими словами, класс Π полиномиально распознаваем.

Свойство (4.) Существует алгоритм $\mathcal{A}$, принимающий на вход граф G вместе с кликой $S \subset V(G)$. Алгоритм выдаёт «ДА» или «НЕТ», так что выполнены следующие условия:

- Пусть $\mathcal{A}$ выдаёт «ДА» на входах (G_1, S_1) и (G_2, S_2), где $|S_1| = |S_2|$. Тогда граф G', получающийся при склеивании графов G_1 и G_2, так что каждая вершина S_1 отождествляется ровно с одной вершиной из S_2, должен принадлежать классу Π.

- Если $G \in \Pi$, тогда существует разделитель-клика S, такая что $V(G) \setminus S$ можно разбить на два множества X_1, X_2, удовлетворяющих следующим свойствам: (i) $|X_1|, |X_2| \le \frac{2}{3}V(G)$, (ii) $E(X_1, X_2) = \emptyset$, (iii) алгоритм $\mathcal{A}$ выдаёт «ДА» на входах $(G[X_1 \cup S], S)$ и $(G[X_2 \cup S], S)$.

Построенный алгоритм является первым алгоритмом, работающим быстрее полного перебора для таких классов графов, как хордальные и интервальные. Главным результатом главы является следующая теорема:

Теорема. Пусть $\mathcal{F}$ — конечное множество графов и Π — класс графов, удовлетворяющий свойствам (1)–(4). Существует алгоритм, который в заданном графе G на n вершинах находит $\mathcal{F}$-свободный индуцированный Π-подграф за время $\mathcal{O}^*(2^{\lambda n})$ для некоторого $\lambda < 1$, где λ зависит только от $\aleph$ и $\mathcal{F}$.

Данную теорему можно рассматривать как частичный прогресс на пути к доказательству гипотезы 1.

В **третьей главе** приведены доказательства различных нижних оценок. Первый раздел посвящён доказательству нижней оценки для задачи об оптимальном линейном упорядочивании в предположении гипотезы ETH. Во втором разделе главы 3 построено разреженное сведение от задачи о минимальной бисекции к задаче об оптимальном линейном упорядочивании. В разделе три на основе сведения, представленного во втором разделе, построены нижние оценки для задач о дополнении до хордального, интервального, собственно интервального, порогового и тривиально совершенного графов. Отметим, что кроме разреженного сведения результат раздела три опирается на следующую гипотезу:

Гипотеза 2. Существуют такие вещественные $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ и натуральное $d \geq \frac{4}{\beta - \alpha}$, что задача о минимальной бисекции с зазором$(d)_{[\alpha,\beta]}$ не допускает алгоритма с временем работы $2^{o(n)}$.

Таким образом основными результатами третьей главы являются следующие теоремы:

Теорема 1. Если гипотеза экспоненциального времени верна, то существует такое $c > 1$, что задача оптимального линейного упорядочивания не допускает алгоритма с временем работы $2^{\mathcal{O}(n/\log^c n)}$.

Теорема 2. Если гипотеза 2 верна, то существует такое $d \in \mathbb{N}$, что задача об оптимальном линейном упорядочивании на мультиграфах со степенью не больше d не допускает алгоритма с временем работы $2^{o(n)}$.

Теорема 3. Если гипотеза экспоненциального времени верна, тогда существует такое целое $c \geq 1$, что задачи хордального, интервального, собственно интервального, порогового, тривиально совершенного, цепочного дополнений не допускают алгоритма со временем работы $2^{\mathcal{O}(\sqrt{n}/\log^c n)}$, а значит и со временем $2^{\mathcal{O}(k^{1/4}/\log^c k)} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

Теорема 4. Если гипотеза 2 верна, тогда не существует алгоритма для задачи цепочного дополнения с временем работы $2^{o(n+m)}$, а для задач хордального, интервального, собственно интервального, порогового, тривиально совершенного дополнений не существует алгоритма с временем работы $2^{o(n)}$. Таким образом ни одна их этих задач не может быть решена за время $2^{o(\sqrt{k})} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Bliznets Ivan, Fomin Fedor V., Pilipczuk Michał, Villanger Yngve. Largest Chordal and Interval Subgraphs Faster Than 2^n // Algorithmica. — 2015. — P. 1–26.

2. Bliznets Ivan, Fomin Fedor V., Pilipczuk Michał, Villanger Yngve. Largest Chordal and Interval Subgraphs Faster Than 2^n // Algorithms - ESA 2013 - 21st Annual European Symposium, Sophia Antipolis, France, September 2-4, 2013. — Springer, 2013. — Lecture Notes in Computer Science. — P. 193–204.

3. Bliznets Ivan, Cygan Marek, Komosa Pawel et al. Lower bounds for the parameterized complexity of Minimum Fill-In and other completion problems // Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. — SIAM, 2016. — P. 1132–1151.

Список литературы:

4. Robson John Michael. Algorithms for maximum independent sets // Journal of Algorithms. — 1986. — Vol. 7, no. 3. — P. 425–440.

5. Fomin Fedor, Gaspers Serge, Pyatkin Artem, Razgon Igor. On the Minimum Feedback Vertex Set problem: exact and enumeration algorithms // Algorithmica. — 2008. — Vol. 52, no. 2. — P. 293–307.

6. Raman Venkatesh, Saurabh Saket, Sikdar Somnath. Efficient exact algorithms through enumerating maximal independent sets and other techniques // Theory of Computing Systems. — 2007. — Vol. 41, no. 3. — P. 563–587.

7. Fomin Fedor, Todinca Ioan, Villanger Yngve. Exact Algorithm for the Maximum Induced Planar Subgraph Problem // Proceedings of the 19th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2011. — Vol. 6942 of Lecture Notes in Computer Science. — Springer, 2011. — P. 287–298.

8. Pilipczuk Marcin, Pilipczuk Michał. Finding a Maximum Induced Degenerate Subgraph Faster Than 2^n // Proceedings of the 7th International Symposium on Parameterized and Exact Computation, IPEC 2012. — Vol. 7535 of Lecture Notes in Computer Science. — Springer, 2012. — P. 3–12.

9. Fomin Fedor, Gaspers Serge, Kratsch Dieter et al. Iterative compression and exact algorithms // Theoretical Computer Science. — 2010. — Vol. 411, no. 7. — P. 1045–1053.

10. Gaspers Serge, Kratsch Dieter, Liedloff Mathieu. On independent sets and bicliques in graphs // Algorithmica. — 2012. — Vol. 62, no. 3-4. — P. 637–658.

11. Fomin Fedor, Villanger Yngve. Finding Induced Subgraphs via Minimal Triangulations // Proceedings of the 27th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2010. — Vol. 5 of LIPIcs. — Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2010. — P. 383–394.

12. Gupta Sushmita, Raman Venkatesh, Saurabh Saket. Maximum r-regular induced subgraph problem: Fast exponential algorithms and combinatorial bounds // SIAM Journal on Discrete Mathematics. — 2012. — Vol. 26, no. 4. — P. 1758–1780.

13. Cai Leizhen. Fixed-parameter tractability of graph modification problems for hereditary properties // Information Processing Letters. — 1996. — Vol. 58, no. 4. — P. 171–176.

14. Marx Dániel. Chordal deletion is fixed-parameter tractable // Algorithmica. — 2010. — Vol. 57, no. 4. — P. 747–768.

15. Cao Yixin, Marx Dániel. Interval deletion is fixed-parameter tractable // ACM Transactions on Algorithms (TALG). — 2015. — Vol. 11, no. 3. — P. 21.

16. Cao Yixin. Unit Interval Editing is Fixed-Parameter Tractable // Automata, Languages, and Programming / Ed. by Magnús M. Halldórsson, Kazuo Iwama, Naoki Kobayashi, Bettina Speckmann. — Springer Berlin Heidelberg, 2015. — Vol. 9134 of Lecture Notes in Computer Science. — P. 306–317.

17. Heggernes Pinar, van't Hof Pim, Jansen Bart et al. Parameterized Complexity of Vertex Deletion into Perfect Graph Classes // Fundamentals of Computation Theory / Ed. by Olaf Owe, Martin Steffen, JanArne Telle. — Springer Berlin Heidelberg, 2011. — Vol. 6914 of Lecture Notes in Computer Science. — P. 240–251.

18. Garey Michael R, Johnson David S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness. — 1979.

19. Yannakakis Mihalis. Computing the minimum fill-in is NP-complete // SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods. — 1981. — Vol. 2, no. 1. — P. 77–79.

20. Fomin Fedor, Kratsch Dieter, Todinca Ioan. Exact (exponential) algo-

rithms for treewidth and minimum fill-in // Automata, Languages and Programming. — Springer, 2004. — P. 568–580.

21. Fomin Fedor, Kratsch Dieter, Todinca Ioan, Villanger Yngve. Exact algorithms for treewidth and minimum fill-in // SIAM Journal on Computing. — 2008. — Vol. 38, no. 3. — P. 1058–1079.

22. Natanzon Assaf, Shamir Ron, Sharan Roded. A polynomial approximation algorithm for the minimum fill-in problem // SIAM Journal on Computing. — 2000. — Vol. 30, no. 4. — P. 1067–1079.

23. Kaplan Haim, Shamir Ron, Tarjan Robert E. Tractability of parameterized completion problems on chordal and interval graphs: Minimum fill-in and physical mapping // Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on / IEEE. — 1994. — P. 780–791.

24. Fomin Fedor, Villanger Yngve. Subexponential parameterized algorithm for minimum fill-in // SIAM Journal on Computing. — 2013. — Vol. 42, no. 6. — P. 2197–2216.

25. Drange Pål Grønås, Fomin Fedor, Pilipczuk Michał, Villanger Yngve. Exploring subexponential parameterized complexity of completion problems // arXiv preprint arXiv:1309.4022. — 2013.

26. Bliznets Ivan, Fomin Fedor, Pilipczuk Marcin, Pilipczuk Michał. A subexponential parameterized algorithm for Interval Completion // arXiv preprint arXiv:1402.3473. — 2014.

27. Bliznets Ivan, Fomin Fedor, Pilipczuk Marcin, Pilipczuk Michał. A subexponential parameterized algorithm for Proper Interval Completion // Algorithms-ESA 2014. — Springer, 2014. — P. 173–184.