На правах рукописи

ЕЛИСЕЕВА ЮЛИЯ СЕРГЕЕВНА

УСЛОВИЯ БЫСТРОГО УБЫВАНИЯ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ СВЕРТОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2014

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель:

Зайцев Андрей Юрьевич
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:

Бобков Сергей Германович,
доктор физико-математических наук,
профессор университета Миннесоты, США

Егоров Владимир Алексеевич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики № 2 ФГБОУ ВПО
«Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова»

Защита состоится «____» __________ 2014 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу:
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «____» __________ 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Функция концентрации является одним из основных объектов изучения в современной теории вероятностей. В частности, интересны оценки функций концентрации сумм независимых случайных величин. Классическими среди них являются неравенства Колмогорова–Рогозина [6] и Эссеена [10], полученные в 60-е годы прошлого века. Уточнения этих результатов можно найти в более поздних работах [2]–[5], [7], [12]. Наряду с этой задачей интенсивно изучался ее частный случай, а именно: оценивание функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Этот вопрос часто называют проблемой Литтлвуда–Оффорда, так как впервые рассмотрением этой проблемы занимались Литтлвуд и Оффорд при изучении случайных полиномов [13]. Первые результаты для функций концентраций взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин были получены Литтлвудом и Оффордом [13], а также Эрдёшем [8] для случая, когда случайные величины принимают значения ± 1 с вероятностями $1/2$, а целочисленные коэффициенты не равны нулю. Было показано, что тогда функция концентрации имеет порядок $O(n^{-1/2})$. Позднее было доказано, что если дополнительно предположить, что все коэффициенты различны, то оценка функции концентрации может быть значительно улучшена до порядка $O(n^{-3/2})$ (см. [9], [15]).

В последнее время интерес к вопросу оценивания функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в зависимости от арифметической структуры коэффициентов значительно возрос, так как такие оценки функций концентрации возникают при изучении распределений собственных чисел случайных матриц.

Цель работы. Диссертация посвящена исследованию зависимости между скоростью убывания функций концентрации сверток вероятностных распределений и арифметической структурой носителей распределений. Основная цель — это получение оценок для функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда.

Методы исследований. В диссертационной работе центральную роль в получении результатов играют методы, использованные в работе Эссеена [10]. Именно за счет их применения удается получить уточнения результатов Фридланда и Содина [11], Рудельсона и Вершинина [14] и Вершинина [16], а также упростить рассуждения в работах вышеперечисленных авторов. Кроме того используется техника доказательств из работы Арака [1].

Основные результаты.

1. В диссертации получены оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда. Эти оценки выражают скорость убывания функции концентрации в терминах арифметических свойств коэффициентов. В работе отдельно рассмотрены одномерный и многомерный варианты проблемы Литтлвуда–Оффорда. Доказаны уточнения результатов Фридланда и Содина [11], Рудельсона и Вершинина [14] и Вершинина [16].

2. Получены результаты, выявляющие связь между степенью малости функции концентрации суммы и арифметической структурой носителей распределений независимых случайных векторов для произвольных распределений слагаемых. Результаты обобщают на многомерный случай результаты Арака [1] (см. также [2]).

3. В диссертационной работе показано, что задача оценивания функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда может быть сведена к оцениванию функций концентрации некоторых симметричных безгранично делимых распределений.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут использоваться при изучении распределений собственных чисел случайных матриц.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на международной конференции «Асимптотические задачи теории вероятностей и математической статистики» (Санкт-Петербург, 7–9 сентября, 2012 г.), на Российско–китайском семинаре по асимптотическим методам в теории вероятностей и математической статистике (Санкт–Петербург, 10–14 июня, 2013 г.), на международной конференции «Стохастические процессы и вероятностные распределения высокой размерности» (Санкт–Петербург, 16–20 июня, 2014 г.). Кроме того был сделан доклад по теме диссертации в Санкт-Петербурге на городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика И. А. Ибрагимова (октябрь 2014 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в статьях [П1]–[П3], опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из шести параграфов, первый из которых – введение, и списка литературы, содержащего 37 наименований. Общий объем работы составляет 64 страницы.

Содержание работы

Во **введении** приводится постановка задачи об оценивании функций концентрации в одномерном и многомерном случаях, излагается история вопроса, описывается структура и содержание диссертации.

Пусть $X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общим распределением $F = \mathcal{L}(X)$. Функция концентрации Леви случайной величины X определяется равенством

$$Q(F, \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}} F\{[x, x+\lambda]\}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$. Нас будет интересовать поведение функции концентрации случайной величины $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$ в зависимости от арифметической структуры коэффициентов a_k.

Введем некоторые обозначения. В дальнейшем F_a – распределение суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$, а G – распределение случайной величины $\widetilde{X}$, где $\widetilde{X} = X_1 - X_2$ – симметризованная случайная величина. Обозначим

$$M(\tau) = \tau^{-2} \int\limits_{|x| \leqslant \tau} x^2 \, G\{dx\} + \int\limits_{|x| > \tau} G\{dx\} = \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{X}^2/\tau^2, 1\big\}, \quad \tau > 0. \quad (1)$$

Далее запись $A \ll B$ будет означать, что $|A| \leqslant cB$ и $B > 0$, где c – положительная абсолютная постоянная. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ мы будем обозначать $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ и $|x| = \max_j |x_j|$.

Рассмотрим теперь многомерную постановку задачи. Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ по-прежнему являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Под функцией концентрации случайного $\mathbf{R}^d$-значного вектора Y с распределением $F = \mathcal{L}(Y)$ будем понимать

$$Q(F, \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \mathbf{P}(Y \in x + \lambda B), \quad \lambda \geqslant 0,$$

где $B = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leqslant 1/2\}$. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где коэффициенты $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \ldots, n$. Будем называть величину a мультивектором. Мы будем изучать поведение функции концентрации суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$ в зависимости от арифметической структуры векторов a_k.

Введем некоторые обозначения. Будем писать $A \ll_d B$, если $|A| \leqslant c^d B$ и $B > 0$. Заметим, что $\ll_d$ допускает экспоненциальную зависимость констант от размерности d. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$ обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Произведение вектора $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbf{R}^d$ и мультивектора a будем обозначать $t \cdot a = (\langle t, a_1 \rangle, \ldots, \langle t, a_n \rangle) \in \mathbf{R}^n$.

В **параграфах 2–4** настоящей работы изучается проблема Литтлвуда–Оффорда. Получены оценки для функций концентрации в зависимости от арифметических свойств коэффициентов.

В **параграфе 2** получены оценки функций концентрации, которые являются уточнением результатов работы Фридланда и Содина [11]. В одномерном случае, когда коэффициенты $a_k \in \mathbf{R}$, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$. Если для некоторых $D \geqslant \dfrac{1}{2\,|a|}$ и $\alpha > 0$ выполняется условие*

$$\|\, ta - m\| \geqslant \alpha \ \text{для всех}\ m \in \mathbf{Z}^n \ \text{при}\ t \in \Big[\frac{1}{2\,|a|}, D\Big],$$

то для любого $\tau > 0$ справедливо соотношение

$$Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(\tau)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(\tau)), \tag{2}$$

где величина $M(\tau)$ определена в формуле (1).

Во втором параграфе содержится также обобщение результата теоремы 1 на случай, когда коэффициенты $a_k \in \mathbf{R}^d$.

Теорема 2. *Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_k \in \mathbf{R}^d$. Если для некоторых $0 < D < d$ и $\alpha > 0$ выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{n} (\langle t, a_k\rangle - m_k)^2 \geqslant \alpha^2 \ \text{для всех}\ m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z},\ t \in \mathbf{R}^d, \ \text{таких что}$$
$$\max_k |\,\langle t, a_k\rangle\,| \geqslant 1/2,\ \|t\| \leqslant D,$$

то для любого $\tau > 0$ справедливо соотношение

$$Q\Big(F_a, \frac{d\,\tau}{D}\Big) \ll_d \exp(-c\,\alpha^2 M(\tau)) + \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\sqrt{M(\tau)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}}, \tag{3}$$

где величина $M(\tau)$ определена в формуле (1), а матрица $\mathbb{N}$ определяется следующим образом:

$$\mathbb{N} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{N}_k, \quad \mathbb{N}_k = \begin{pmatrix} a_{k1}^2 & a_{k1}a_{k2} & \dots & a_{k1}a_{kd} \\ a_{k2}a_{k1} & a_{k2}^2 & \dots & a_{k2}a_{kd} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{kd}a_{k1} & \dots & \dots & a_{kd}^2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Результаты, полученные в **третьем параграфе**, являются уточнением результатов работы Рудельсона и Вершинина [14]. Приведем формулировку основного результата данного параграфа для случая одномерных коэффициентов a_k.

Теорема 3. *Предположим, что $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $\alpha, D > 0$, $\gamma \in (0,1)$ и $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$, причем*

$$\| ta - m\| \geqslant \min\{\gamma t \,\|a\|, \alpha\} \quad \text{при всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ и } t \in [0, D].$$

Тогда для любых $\tau > 0$ справедливо соотношение

$$Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\gamma\sqrt{M(\tau)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(\tau)), \tag{5}$$

где величина $M(\tau)$ определена в формуле (1)

При обобщении результатов теоремы 3 на случай многомерных коэффициентов $a_k \in \mathbf{R}^d$ получен следующий результат.

Теорема 4. *Предположим, что $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_k \in \mathbf{R}^d$, и для некоторых $\alpha, D > 0$ и $\gamma \in (0,1)$ выполнено*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} (\langle t, a_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma \|t \cdot a\|, \alpha\} \text{ для всех } m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z} \text{ и}$$

$$t \in \mathbf{R}^d, \|t\| \leqslant D.$$

Тогда для любого $\tau > 0$ выполнено соотношение

$$Q\Big(F_a, \frac{d\,\tau}{D}\Big) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\gamma\,\sqrt{M(\tau)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp\left(-c\,\alpha^2 M(\tau)\right), \tag{6}$$

где величина $M(\tau)$ определена в формуле (1)*, а матрица $\mathbb{N}$ – с помощью соотношений* (4)*.*

В **параграфе 4** доказаны уточнения результатов работы Вершинина [16].

Теорема 5. *Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\tau > 0$. Предположим, что выполнено следующее условие*

$$\| ta - m\| \geqslant f_L(t\|a\|) \quad \text{при всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ и } \; t \in \Big[\frac{1}{2\,|a|}, D\Big],$$

где функция $f_L(t)$ определяется следующим образом:

$$f_L(t) = \begin{cases} t/6 & \text{при } 0 < t < eL, \\ L\sqrt{\log(t/L)} & \text{при } t \geqslant eL. \end{cases}$$

Если $L^2 \geqslant 1/M(\tau)$, то

$$Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(\tau)}}, \tag{7}$$

где величина $M(\tau)$ определена в формуле (1).

В условиях теоремы 5 существует много возможностей выбрать фиксированное ε в виде $\varepsilon = \tau/D$ для применения неравенства (7). Поэтому для фиксированного $\varepsilon = \tau/D$ мы можем минимизировать правую часть неравенства (7), выбирая оптимальные τ и D. Это возможно, и оптимальная оценка содержится ниже в теореме 6.

Определим величину $D^*(a)$ по формуле

$$D^*(a) = D^*_L(a) = \inf\Big\{t > 0 : \operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) < f_L(t\|a\|)\Big\},$$

где

$$\operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) = \min_{m \in \mathbf{Z}^n} \|\, ta - m\|.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 *при $D \leqslant D^*(a)$ за исключением условия $L^2 \geqslant 1/M(\tau)$. Пусть $L^2 > 1/P$, где*

$$P = \mathbf{P}(\widetilde{X} \neq 0) = \lim_{\tau \to 0} M(\tau).$$

Тогда существует τ_0, такое что $L^2 = 1/M(\tau_0)$. При этом оценка

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{1}{\|a\| D^*(a)\sqrt{M(\varepsilon\, D^*(a))}}$$

справедлива для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \tau_0/D^*(a)$. Кроме того, при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ выполняется неравенство

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon L}{\varepsilon_0\, \|a\| D^*(a)}.$$

Заметим, что наиболее существенное отличие наших результатов от результатов Фридланда и Содина [11], Рудельсона и Вершинина [14] и Вершинина [16] состоит в присутствии в них величины $M(\tau)$. Уточнение результатов Фридланда и Содина [11], Рудельсона и Вершинина [14] и Вершинина [16] происходит в случае, когда первое слагаемое в соотношении (1) существенно больше второго.

Заметим также, что в формулировках теорем 1–5 рассматриваются сравнительно большие значения величины D. Таким образом, оцениваются функции концентрации в малых точках порядка $1/D$. Причем в правых частях неравенств (2), (3), (5)–(7) так же присутствует множитель $1/D$. То есть скорость убывания функции концентрации в некотором смысле пропорциональна малости аргумента этой функции.

В **пятом параграфе** диссертации рассматривается вопрос более общего типа по сравнению с проблемой Литтлвуда–Оффорда. В параграфе 5 получены многомерные обобщения результатов Арака [1] (см. также [2]), устанавливающие связь между скоростью убывания функций концентрации суммы и арифметической структурой носителей распределений независимых случайных величин для произвольных распределений слагаемых. Для формулировки этих результатов нам потребуются некоторые обозначения.

Для любых $r \in \mathbf{Z}_+$ и $u = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$, $u_j \in \mathbf{R}^d$, $j = 1, \dots, r$, определим множество

$$K_1(u) = \Big\{ \sum_{j=1}^{r} n_j u_j : n_j \in \{-1, 0, 1\} \text{ при } j = 1, \dots, r \Big\}. \tag{8}$$

Далее обозначим через $[B]_\tau$ замкнутую τ-окрестность множества B в смысле нормы $|\cdot|$.

Теорема 7. *Пусть $\tau \geqslant 0$, F_j – d-мерные вероятностные распределения, $j = 1, \dots, n$. Обозначим $\rho = Q\Big(\prod_{j=1}^{n} F_j, \tau\Big)$. Тогда существует $r \in \mathbf{Z}_+$ и векторы $u_1, \dots, u_r; x_1, \dots, x_r \in \mathbf{R}^d$, такие что*

$$r \ll_d |\log \rho| + 1$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} F_j\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau + x_j\} \ll_d \big(|\log \rho| + 1\big)^3,$$

где $u = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$, а множество $K_1(u)$ определено в формуле (8).

Теорема 8. *Пусть n – положительное целое, $\tau \geqslant 0$ и пусть F – d-мерное вероятностное распределение. Обозначим $\rho = Q\big(F^n, \tau\big)$. Тогда существуют такие $r \in \mathbf{Z}_+$ и векторы $u_1, \dots, u_r \in \mathbf{R}^d$, что*

$$r \ll_d |\log \rho| + 1$$

и

$$n\, F\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\} \ll_d \big(|\log \rho| + 1\big)^3,$$

где $u = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$.

Теорема 9. *Пусть D – d-мерное безгранично делимое распределение с характеристической функцией вида* $\exp\{\alpha(\widehat{M}(t)-1)\}$, $t \in \mathbf{R}^d$, *где* $\alpha > 0$ *и* M – *вероятностное распределение. Пусть* $\tau \geqslant 0$ *и* $\rho = Q(D,\tau)$. *Тогда существуют такие* $r \in \mathbf{Z}_+$ *и векторы* $u_1, \ldots, u_r \in \mathbf{R}^d$, *что*

$$r \ll_d |\log \rho| + 1$$

и

$$\alpha\, M\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\} \ll_d \big(|\log \rho| + 1\big)^3,$$

где $u = (u_1, \ldots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$.

В **шестом параграфе** диссертации формулируется и доказывается некоторая общая теорема, утверждение которой показывает, что задача оценивания функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда может быть сведена к оцениванию функций концентрации некоторых симметричных безгранично делимых распределений со спектральными мерами, определяемыми по мультивектору a.

Для $z \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$ введем бегранично делимое распределение $U_{z,\gamma}$ с характеристической функцией

$$\widehat{U}_{z,\gamma}(t) = \exp\Big(-\frac{\gamma}{2}\,\sum_{k=1}^{n}\big(1-\cos(\langle\, t, a_k\rangle\, z)\big)\Big), \quad t \in \mathbf{R}^d.$$

Теорема 10. *Пусть V – произвольная борелевская мера, такая что* $\lambda = V\{\mathbf{R}\} > 0$ *и* $V \leqslant G$, *то есть* $V\{B\} \leqslant G\{B\}$ *для любого борелевского множества* B. *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\tau > 0$ *справедливо неравенство*

$$Q(F_a,\tau) \ll_d Q(U_{1,\lambda},\varepsilon)\, \exp\bigg(d \int\limits_{z\in\mathbf{R}} \log\big(1 + \lfloor \tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\big)\, F\{dz\}\bigg),$$

где $F = \lambda^{-1}V$.

Заметим, что результаты параграфов 2–5 нельзя вывести с использованием теоремы 10. Однако из теоремы 10 с использованием теоремы 9 и результатов Арака [2] можно выводить содержательные оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда.

Список литературы

[1] Т. В. Арак, *О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами*, Теория вероятн. и ее примен., **25** (1980), №2, 225–246.

[2] Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I*, Теория вероятн. и ее примен., **26** (1981), №2, 225–245.

[3] Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Тр. МИАН СССР, **174** (1986), 214 С.

[4] А. Л. Мирошников, Б. А. Рогозин, *Неравенства для функций концентраций*, Теория вероятн. и ее примен., **25** (1980), 178–183.

[5] С. В. Нагаев, С. С. Ходжабагян, *Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин*, Теория вероятн. и ее примен., **41** (1996), 655–665.

[6] Б. А. Рогозин, *Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин*, Теория вероятн. и ее примен., **6** (1961), 106–108.

[7] J. Bretagnolle, *Sur l'inégalité de concentration de Doeblin–Lévy, Rogozin–Kesten. In: Parametric and semiparametric models with applications to reliability, survival analysis, and quality of life*, Stat. Ind. Technol., Boston: Birkhäuser, (2004), 533–551.

[8] P. Erdös, *On a lemma of Littlewood and Offord*, Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945), 898–902.

[9] P. Erdös, L. Moser, *Elementary problems and solutions*, Amer. Math. Monthly, **54** (1947), no. 4, 229–230.

[10] C.-G. Esséen, *On the concentration function of a sum of independent random variables*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., **9** (1968), 290–308.

[11] O. Friedland, S. Sodin, *Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **345** (2007), no. 9, 513–518.

[12] H. Kesten, *A sharper form of the Doeblin–Levy–Kolmogorov–Rogozin inequality for concentration functions*, Math. Scand., **25** (1969), 133–144.

[13] J. E. Littlewood, A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., **12** (1943), no. 3, 277–286.

[14] M. Rudelson, R. Vershynin, *Smallest singular value of a random rectangular matrix*, Comm. Pure Appl. Math., **62** (2009), no. 12, 1707–1739.

[15] A. Sárközy, E. Szemerédi, *Über ein Problem von Erdös und Moser*, Acta Arithmetica, **11** (1965), 205–208.

[16] R. Vershynin, *Invertibility of symmetric random matrices*, Random Structures and Algorithms, **44** (2014), 135–182.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[П1] Ю. С. Елисеева, *Многомерные оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **412** (2013), 127–137.

[П2] Ю. С. Елисеева, Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **420** (2013), 50–69.

[П3] Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин*, Теория вероятн. и ее примен., **57** (2012), 768–777.