На правах рукописи

Нешитов Александр Юрьевич

КЛАССИФИЦИРУЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП И ИХ ИНВАРИАНТЫ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2015

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН).

Научный руководитель: ПАНИН Иван Александрович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией алгебры и теории чисел ФГБУН ПОМИ РАН

Официальные оппоненты:

ПОПОВ Владимир Леонидович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук

СМИРНОВ Евгений Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Ведущая организация: Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена.

Защита состоится 23 декабря 2015 года в 17:00 на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 в ФГБУН ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к.311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru

Автореферат разослан «____» ____________ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, д.ф.-м.н.

Малютин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Классифицирующие многообразия являются мощным инструментом изучения топологических групп и позволяют определить большое число важных инвариантов топологических групп. В частности, топологическая теорема Атьи-Сегала о пополнении устанавливает изоморфизм между K_0-теорией классифицирующего пространства связной компактной группы Ли G и кольцом представлений G, пополненным в идеале аугментации.

Алгебраическая версия классифицирующего пространства для аффинных алгебраических групп рассматривалась такими авторами как Ф. Богомолов, Б. Тотаро. Построение В. Воеводским и Ф. Морелем категории мотивных пространств позволило им определить этальное классифицирующее пространство, являющееся естественным аналогом классифицирующего пространства для торсоров в этальной топологии. Алгебраическая K-теория является представимой в мотивной гомотопической категории Воеводского-Мореля, таким образом можно определить K-теорию произвольного мотивного пространства, причем полученное определение будет согласовано с классическим определением K-теории алгебраических многообразий, и полученная K-теория будет обладать необходимыми функториальными свойствами. Таким образом, в контексте мотивных пространств естественным образом определены аналоги всех объектов, участвующих в формулировке теоремы Атьи-Сегала, и естественным становится вопрос, выполнен ли аналог теоремы Атьи-Сегала в алгебраической геометрии.

Другим важным инструментом в изучении алгебраических групп, связанным с классифицирующим пространством, является теория когомологических инвариантов группы. Для базового поля F и алгебраической группы G над F под когомологическим инвариантом группы G степени d со значениями в модуле Галуа M понимается естественное преобразование функторов

$$H^1(-,G) \to H^d(-,M)$$

на категории расширений полей над F. Будем обозначать через $\mathrm{Inv}^d(G,M)$ группу когомологических инвариантов степени d со значениями в M. Понятие когомологического инварианта было введено Ж.-П. Серром и развито в работах М. Роста, А. Меркурьева, С. Гарибальди [6] и многих других. Когомологические инварианты могут быть отождествлены с классифицирующим пространством следующим образом. Для полупростой расщепимой алгебраической группы G рассмотрим V–представление G, обладающее открытым G-эквивариантным подмножеством $U \subseteq V$, таким что действие G на U свободно, и фактор U/G существует в категории схем. Тогда U/G можно рассматривать как аппроксимацию этального классифицирующего пространства $B_{et}G$. В случае, когда F – бесконечное поле, схема U/G обладает следующим классифицирующим свойством: для любого расширения полей L/F и торсора $E \to \operatorname{Spec} L$, в любой открытой подсхеме $W \subseteq U/G$ найдется L-точка $f\colon \operatorname{Spec} L \to W$, такая что обратный образ торсора $U \to U/G$ вдоль f изоморфен E:

$$f^*(U) \cong E.$$

В данном контексте слой торсора $U \to U/G$ над общей точкой $\operatorname{Spec} K = \operatorname{Spec} F(U/G)$ называется версальным торсором и обозначается $U^{gen} \to \operatorname{Spec} K$. Соответствующее многообразие флагов U^{gen}/B, где B – Борелевская подгруппа G, называется версальным многообразием флагов и обозначается X^{gen}. Отображение эвалюации, вычисляющее значение когомологического инварианта на версальном торсоре $\mathrm{Inv}^d(G,M) \to H^d(K,M), a \mapsto a(U^{gen})$ является вложением. Когомологический инвариант a называется нормализованным, если он принимает нулевое значение на тривиальном торсоре. Обозначим через $\mathrm{Inv}^d(G,M)_{norm}$ группу нормализованных инвариантов. Можно заметить, что для нормализованного инварианта $a \in \operatorname{Inv}^d(G, M)_{norm}$ значение на версальном торсоре $a(U^{gen})$ содержится в ядре отображения $H^d(K, M) \to H^d(K(X^{gen}), M)$. При этом, для произвольного скрученного многообразия флагов X над полем L работы А. Меркурьева [4] и Э. Пера [5] устанавливают существование точной последовательности

$$E^\times \to \ker(H^3(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(L(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to \mathrm{CH}^2(X)_{tors} \to 0,$$

где E–некоторая этальная алгебра над L, а $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ – модуль Галуа, такой что $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = \oplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)$, где сумма берется по всем простым числам p, и $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2) = \varinjlim_n \mu_{p^n}^{\otimes 2}$ при $p \neq \operatorname{char} F$, где μ_{p^n} – группа корней p^n степени из единицы. В дальнейшем будем обозначать $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ через 2.

Рассмотрение данной последовательности в случае $L = K$ и $X = X^{gen}$ дает гомоморфизм

$$\operatorname{Inv}^3(G, 2)_{norm} \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$$

Вызывает интерес вопрос о сюръективности данного отображения и описании его ядра, а также дальнейшее изучение взаимосвязи между когомологическими инвариантами степени 3 и циклами Чжоу коразмерности 2 версального флагового многообразия.

Таким образом, тематика диссертационной работы актуальна.

Цель диссертационной работы. Целью первой главы диссертационной работы является доказательство алгебраического аналога теоремы Атьи-Сегала для расщепимой связной редуктивной алгебраической группы G. Целью второй главы диссертационной работы является построение изоморфизма между подгруппой кручения группы Чжоу циклов коразмерности 2 версального флагового многообразия и фактор-группой нормализованных когомологических инвариантов степени 3 по модулю подгруппы полуразложимых инвариантов полупростой расщепимой группы G над полем, а также доказательство факта, что группа полуразложимых инвариантов совпадает с ранее хорошо изученной группой разложимых инвариантов в случае простой расщепимой алгебраической группы G.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть применены для решения различных вопросов, связанных с теорией представлений, когомологическими инвариантами полупростых расщепимых групп, а также для вычисления кручения в группах Чжоу версальных многообразий флагов.

Методы диссертационного исследования. Для исследования K-теории этального классифицирующего пространства $B_{et}G$ связной расщепимой редуктивной группы G используется метод приближения гладкими многообразиями и мотивная точная последовательность Милнора, а также метод редукции к Борелевской подгруппе группы G.

Для исследования группы когомологических инвариантов полупростой расщепимой группы G используется техника мотивных когомологий, характеры Черна и комбинаторика решеток корней и весов полупростой расщепимой группы G.

Положения диссертации, выносимые на защиту:

- Доказано существование естественного изоморфизма

$$K_n^G(\operatorname{Spec} k)^{\wedge}_{I_G} \to K_n(B_{et}G)$$

  между пополнением в идеале аугментации I_G кольца представлений $Rep_k(G)$ эквивариантной K-теории Томасона поля k и K-теорией этального классифицирующего пространства Воеводского-Мореля для связной расщепимой редуктивной группы G над базовым полем k.

- Для полупростой расщепимой группы G над базовым полем k доказано существование изоморфизма

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec} \cong \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$$

  Между фактор-группой группы нормализованных инвариантов 3 степени $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}$ по модулю полгруппы полуразложимых инвариантов $Inv^3(G,2)_{sdec}$ и подгруппой кручения группы Чжоу циклов коразмерности 2 на версальном многообразии флагов X^{gen}.

- Получено комбинаторное описание фактор-группы $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ группы полуразложимых инвариантов степени 3 по модулю хорошо изученной подгруппы разложимых инвариантов степени 3, $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ в терминах формального класса Черна и решеток весов Λ и характеров расщепимого тора T^* и группы Вейля W полупростой расщепимой группы G:

$$\frac{\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}}{\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}} \cong \frac{c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])}{c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)}$$

- Доказано совпадение групп полуразложимых и разложимых инвариантов для всех простых расщепимых групп G.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная конференция "Structures of algebraic groups"(Лион, 2014)

- Семинар по $\mathbb{A}^1$-топологии и K-теории, Лаборатория им. П.Л. Чебышева СПбГУ (Санкт-Петербург, 2014)

- Алгебраический семинар университета Оттавы (Оттава, 2012)

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в двух печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах[1, 2], входящих в список ВАК. Работы [1, 2] написаны в соавторстве. В работе [1] диссертанту принадлежат результаты параграфов 2 и 3: доказательства теорем 3.1, 3.2 и 3.3. В работе [2] диссертанту принадлежат результаты параграфа 2: доказательство теоремы 2.10, а также результаты пунктов 3.2, 3.3, 3.4 и 3.5 в параграфе 3.

Личный вклад автора Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все основные результаты, представленные в диссертации, получены лично автором. Приложения в пунктах 2.7.2, 2.7.3, вычисления пункта 2.5.2, а также подход, использующий формальный класс Черна в пункте 2.4.1, получены совместно с соавторами. Пример в §2.6 был предложен В. Черноусовым.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 45 наименований. Первая глава состоит из 5 параграфов, вторая глава состоит из 7 параграфов. Объем диссертации – 71 страница.

Содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность работы, формулируются цели и задачи исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе рассматривается K-теория этального классифицирующего пространства связной расщепимой редуктивной группы G над базовым полем k. Основной результат главы – следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть k– поле, G– связная расщепимая редуктивная группа над k. Тогда существует изоморфизм*

$$K_n(G;k)^{\wedge}_{I_G} \cong K_n(B_{et}G)$$

где $B_{et}G$ – этальное классифицирующее пространство Воеводского-Мореля определенное в §1.1, $K_n(B_{et}G)$ – K-теория мотивного пространства $B_{et}G$, определенная в §1.3.

В дальнейшем B обозначает фиксированную Борелевскую подгруппу G и $T \subseteq B$ – максимальный расщепимый тор в B.

В параграфе 1.1 дается определение этального классифицирующего пространства $B_{et}G$ алгебраической группы G,а также фиксируется система гладких многообразий EG_i и $BG_i = EG_i/G$, аппроксимирующая пространство $B_{et}G$.

В параграфе 1.2 напоминаются основные определения в эквивариантной K-теории Томасона $K_*(G;-)$.

В параграфе 1.3 определяется K-теория мотивных пространств, используя представимость K-теории в стабильной мотивной гомотопической категории над полем k.

В параграфе 1.4 формулируется основной результат главы – теорема 1.

В параграфе 1.5 приводится доказательство основного теоремы 1.

В пункте 1.5.1 определяется отображение $\phi_{n,j}\colon K_n(G;k) \to K_n(BG_j)$ для $n, j \geqslant 0$ и отображение $\phi_n\colon K_n(G;k) \to \varprojlim_j K_n(BG_j)$ как предел отображений $\phi_{n,j}$.

В пункте 1.5.2 приводится доказательство основного результата методом редукции к Борелевской подгруппе. В частности, доказывается

Лемма. 2 *Пусть $X, Y \in \mathbf{Sm}_k$ – гладкие многообразия с G-действием, причем Y проективно и $h^0(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$ и $h^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ при $i > 0$. Тогда компо-*

зиция

$$K_n(G;X) \xrightarrow{p^*} K_n(G;X\times Y) \xrightarrow{p_*} K_n(G;X),$$

где $p\colon X\times Y \to X$*–проекция, равна тождественному отображению на* $K_n(G;X)$.

После вспомогательных лемм $2-9$ строится система отображений $EG_i/T \to (\mathbb{P}^{i+d_W-1})^r$ где d_W-некоторая константа, а r – ранг тора T и доказывается

Лемма. 10 *Для любого* $n>0$ $\varprojlim^1 K_n(EG_i/T)=0$*, а построенная система отображений индуцирует изоморфизм* $\varprojlim_i K_n((\mathbb{P}^i)^r)\cong\varprojlim_i K_n(EG_i/T)$.

Вместе с существованием короткой точной последовательности Милнора

$$0\to\varprojlim^1 K_{n+1}(BG_i)\to K_n(B_{et}G)\to\varprojlim K_n(BG_i)\to 0$$

и тем фактом(вытекающим из леммы 2), что $K_{n+1}(BG_i)=K_{n+1}(G;EG_i)$ является прямым слагаемым в

$$K_{n+1}(G;EG_i\times G/B)\cong K_{n+1}(G;EG_i\times G/T)\cong K_{n+1}(EG_i/T)$$

получим

Предложение. 1 *Естественное отображение* $K_n(B_{et}G)\to\varprojlim K_n(BG_i)$ *является изоморфизмом.*

В кольце представлений $R(T)$ тора T рассмотрим идеал аугментации I_T, где I_T является ядром гомоморфизма размерности $d\colon R(T)\to\mathbb{Z}$, сопоставляющий каждому виртуальному представлению его размерность. Лемма 11 показывает, что $\varprojlim K_n(T;EG_i)$ полон I_T-адической топологии, как модуль над $R(T)=K_0(T;\operatorname{Spec}k)$

Согласно теореме Стейнберга кольцо представлений $R(G)$ является подкольцом в $R(T)$. Лемма 12 показывает, что I_T-адическая топология на $R(T)$ совпадает с $I_G \cdot R(T)$-адической топологией.

С помощью редукции к Борелевской подгруппе доказывается лемма 13, утверждающая, что $\varprojlim_i K_n(BG_i)$ полон в I_G-адической топологии как модуль над $R(G)$. Тогда отображение ϕ_n индуцирует отображение из пополнения $\phi_n\colon K_n(G; \operatorname{Spec} k)^{\wedge}_{I_G} \to \varprojlim K_n(BG_i)$.

Лемма. 14 *Отображение $\phi_n\colon K_n(G; \operatorname{Spec} k)^{\wedge}_{I_G} \to \varprojlim K_n(BG_i)$ является изоморфизмом.*

Доказательство этой леммы состоит в проверке того, что отображение ϕ_n является ретракцией отображения для тора $K_n(T; \operatorname{Spec} k)^{\wedge}_{I_T} \to \varprojlim K_n(EG_i/T)$, которое является изоморфизмом в силу леммы 10 и явного вычисления $\varprojlim K_n((\mathbb{P}^i)^r)$.

Лемма 14 вместе с Предложением 1 составляют основную Теорему 1.

Во второй главе исследуется связь между нормализованными инвариантами степени 3 полупростой расщепимой группы G над базовым полем F и кручением в группе Чжоу $\mathrm{CH}^2(X^{gen})$ циклов коразмерности 2 версального многообразия флагов X^{gen}. Пусть $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{norm}$ обозначает группу нормализованных когомологических инвариантов степени 3 со значениями в Галуа-модуле $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$, группа $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{dec}$ – группа разложимых инвариантов степени 3, а фактор-группа $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{ind} = \mathrm{Inv}^3(G,2)_{norm}/\mathrm{Inv}^3(G,2)_{dec}$ называется группой неразложимых инвариантов. Данные объекты являются классическим в теории когомологических инвариантов, их определения даны в параграфе 2.1. Также в параграфе 2.1 вводится в рассмотрение группа т.н. полуразложимых инвариантов $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{sdec}$, ранее не встречавшаяся в литературе.

Основным результатом главы является следующая теорема, сформулированная в параграфе 2.4:

Теорема. 2 *Пусть G – полупростая расщепимая алгебраическая группа над базовым полем F, X^{gen} – версальное многообразие флагов. Тогда существует короткая точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind} \to \operatorname{CH}^2(X^{gen})_{tors} \to 0.$$

При этом фактор-группа $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ тривиальна в случае, когда G-простая расщепимая алгебраическая группа.

В параграфе 2.1 дается определение для $d>0$ Галуа-модуля $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1) = \oplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(d-1)$ где сумма берется по всем простым числам p, и $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(d-1) = \varinjlim_m (\mu_{p^m})^{\otimes d}$ в случае $p \neq \operatorname{char} F$. Определяется группа когомологических инвариантов $\operatorname{Inv}^d(G,(d-1))$ степени d как группа естественных преобразований функторов на категории всех расширений полей над F

$$H^1(-,G) \to H^d(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))$$

Подгруппа нормализованных инвариантов $\operatorname{Inv}^d(G,(d-1))_{norm}$ определяется как подгруппа, состоящая из инвариантов, принимающих нулевое значение на тривиальном торсоре. Для $d=3$ определяется группа разложимых инвариантов $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ как группа, порожденная инвариантами вида $E \mapsto (\alpha) \cup b(E)$, E–торсор над расширением полей, α – фиксированный элемент $F^\times$, а $b \in \operatorname{Inv}^2(G,1)_{norm}$.

Группа полуразложимых инвариантов $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}$ определяется как подгруппа, состоящая из элементов $a \in \operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}$, для которых существует набор $b_i \in \operatorname{Inv}^2(G,1)_{norm}$, такой что для любого торсора $E \to \operatorname{Spec} L$ $a(E) = \sum(\alpha_i) \cup b_i(E)$ для каких-то элементов $\alpha_i \in L^\times$ (возможно, зависящих от торсора E.)

В параграфе 2.2 определяется фиксируется некоторое представление V группы G вместе с открытым подмножеством $U \subseteq V$, на котором действие G свободно, а фактор U/G существует в категории схем. Версальный торсор U^{gen} определяется как слой торсора $U \to U/G$ над общей точкой $\operatorname{Spec} F(U/G)$, а версальное многообразие флагов определяется как U^{gen}/B, где B-фиксированная Борелевская подгруппа G.

В параграфе 2.3 определяется абстрактный класс Черна $c_i \colon \mathbb{Z}[T^*] \to \operatorname{Sym}^i(T^*)$, где T – фиксированный максимальный расщепимый тор в G, T^* – группа характеров T, $\mathbb{Z}[T^*]$ – групповое кольцо, а $Sym^i(T^*)$ – i симметрическая степень $\mathbb{Z}$-модуля T^*. Пусть Λ – решетка весов группы G, тогда имеем естественное вложение $\mathbb{Z}[T^*] \subseteq \mathbb{Z}[\Lambda]$. Тогда через $\widetilde{I}$ будем обозначать идеал аугментации в групповом кольце $\mathbb{Z}[\Lambda]$, т.е. ядро отображения $\mathbb{Z}[\Lambda] \to \mathbb{Z}, e^\lambda \to 1, \lambda \in \Lambda$. Пусть $W = N_G(T)/T$ – группа Вейля, соответствующая T. Через $\widetilde{I}_W$ будем обозначать идеал, порожденный W-инвариантными элементами $\widetilde{I}$. Через $\mathbb{Z}[T^*]^W$ будем обозначать подкольцо W-инвариантных элементов $\mathbb{Z}[T^*]$.

В параграфе 2.4 дается формулировка основной Теоремы 2 вместе с комбинаторным описанием фактор-группы $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ в терминах абстрактного класса Черна:

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \cong c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])/c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)).$$

В пункте 2.4.1 описывается группа $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$. Основным методом доказательства является сведение к K-теории: $\mathrm{CH}^2(X^{gen}) = \tau^2(X^{gen})/\tau^3(X^{gen})$, где $\tau^i(X^{gen})$ – члены топологической фильтрации на $K_0(X^{gen})$. При этом отображение расширения скаляров для поля расщепления L версального торсора $K_0(X^{gen}) \to K_0(X^{gen}_L)$ является инъективным, а теорема Стейнберга описывает ядро отображения $\mathbb{Z}[\Lambda] \to K_0(G/B)$ как $\widetilde{I}_W$. Комбинация данных аргументов в леммах $16, 17, 18$ позволяет доказать основную лемму данного пункта:

Лемма. 19 *Существует следующее описание* $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$ *в терминах решетки характеров* T^**:* $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \cong \mathrm{Sym}^2(T^*)^W / c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])$

В пункте 2.4.2 Группа $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{norm}$ отождествляется с подгруппой в $H^3(F(U/G),2)$ с помощью гомоморфизма эвалюации

$$\Theta\colon\ \mathrm{Inv}^3(G,2) \to H^3(F(U/G),2), a \mapsto a(U^{gen})$$

и доказывается первая часть Теоремы 2, а именно устанавливается точность последовательности

$$0 \to \mathrm{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\,\mathrm{Inv}^3(G,2)_{dec} \to \mathrm{Inv}^3(G,2)_{ind} \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \to 0.$$

Ключевым моментом является использование точной последовательности, ранее изучавшейся в работах Э. Пера [5], А. Меркурьева [4]:

$$H^1(X_L^{gen}, K_2)^\Gamma \xrightarrow{\rho} \ker(H^3(F(U/G),2) \to H^3(F(X^{gen}),2)) \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$$

где $H^1(X_L^{gen}, K_2)$ – первые когомологии Зарисского пучка, ассоциированного с предпучком $K_2(-)$. Лемма 22 позволяет отождествить образ ρ с $\Theta(\mathrm{Inv}^3(G,2)_{sdec})$. Таким образом, для доказательства точности последовательности в теореме 2 остается проверить сюръективность отображения $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{norm} \ker(H^3(F(U/G),2) \to H^3(F(X^{gen}),2)) \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$. Для этого используется описание группы $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{ind} \cong \mathrm{Sym}^2(T^*)^W / c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)$, полученное в работе [3]. Отсюда же вытекает изоморфизм $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\,\mathrm{Inv}^3(G,2)_{dec} \cong c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])/c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)$.

В параграфе 2.5 используется полученное выше описание фактор-группы $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\,\mathrm{Inv}^3(G,2)_{dec}$ для доказательства ее тривиальности в случае, когда G – простая группа. При этом даны разные доказательства для разных типов. Отметим, что в случае односвязной группы G группа $\mathrm{Inv}^2(G,1)_{norm} = 0$, и следовательно $\mathrm{Inv}^3(G,2)_{sdec} = 0$.

В пункте 2.5.1 разобран случай присоединенных групп типов $A_n(n \geqslant 1)$, $B_n(n \geqslant 2)$, $C_n(n \geqslant 3, 4 \nmid n)$, $D_n(n \geqslant 5, 4 \nmid n)$, E_6, E_7 и специальных ортогональных групп типа $D_n(n \geqslant 4)$.

В пункте 2.5.2 разобран случай неприсоединенных групп типа A_n

В пункте 2.5.3 разобран случай присоединенных групп типа C_{4m}

В пункте 2.5.4 разобран случай полуспинорных групп типа $D_{4m}(m \geqslant 1)$ и присоединенных групп типа $D_{4m}(m > 1)$

Особую сложность представляет случай $G = \mathbf{PGO}_8$, явные вычисления для которого были проделаны в пункте 2.5.5

В параграфе 2.6 приводится пример полуразложимого инварианта группы $G = \mathbf{SO}_4$, не являющегося разложимым. Таким образом, если G – не простая группа, фактор $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ может быть нетривиальным.

В параграфе 2.7 приведены некоторые приложения полученных результатов.

В Заключении подводятся итоги выполненного исследования и обсуждаются перспективы дальнейшей работы в данной области.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Knizel A., Neshitov A. Algebraic analogue of the Atiyah completion theorem // Homology, Homotopy, Appl. – 2014. – Vol. 16, no. 2 – P. 289–306.

[2] Merkurjev A., Neshitov A., Zainoulline K. Invariants of degree 3 and torsion in the Chow group of a versal flag // Compositio Mathematica. – Vol. 151, no. 8. – P. 1416–1432.

Цитированная литература

[3] Merkurjev A. Degree three cohomological invariants of semisimple groups // to appear in J. Eur. Math. Soc.

[4] Меркурьев А.С. Группа $H^1(X, K_2)$ для проективных однородных многообразий //Алгебра и Анализ.–1995.–Vol. 7(3).–P.136–164.

[5] Peyre E. Galois cohomology in degree three and homogeneous varieties //K-Theory.–1998.–Vol. 15(2).–P. 99–145.

[6] Garibaldi S., Merkurjev A., Serre J.-P. Cohomological invariants in Galois cohomology.–2003.–Vol. 28 of University Lecture series.