

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
имени В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

МАЛЫШЕВ Кирилл Леонидович

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ
НЕОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ И ИХ АСИМПТОТИКИ**

Специальность 01.01.03 – математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2014

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
1 КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ХХZ МАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА (НУЛЕВАЯ И БЕСКОНЕЧНАЯ АНИЗОТРОПИЯ) И КОМБИНАТОРИКА	18
1.1 ХХZ Магнетик Гейзенберга, плоские разбиения и решеточные пути	18
1.1.1 Гамильтониан ХХZ модели при нулевой и бесконечной анизотропии, векторы состояния и функции Шура	18
1.1.2 Форм-факторы и корреляционные функции типа выживания ферромагнитной струны и доменной стенки при нулевой анизотропии	27
1.1.3 Форм-факторы и корреляционная функция типа выживания ферромагнитной струны при бесконечной анизотропии	37
1.1.4 Плоские разбиения, q -биномиальные определители и производящие функции плоских разбиений и самоизбегающих путей . .	44
1.1.5 Асимптотики корреляционных функций при убывающей температуре	60
1.2 ХХ магнетик Гейзенберга и случайные блуждания недружественных пешеходов	63
1.3 ХУ магнетик Гейзенберга и производящие функции корреляторов третьих компонент спинов	70

2	СЛАБОНЕОДНОРОДНЫЕ БОЗЕ-ГАЗ В ГАРМОНИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ И А-ФАЗА ГЕЛИЯ-3	82
2.1	Сверхтекучий одномерный бозе-газ в гармоническом потенциале. Эффективное действие	82
2.2	Корреляционные функции бозе-газа и их асимптотики	89
2.2.1	Вариационный принцип В. Н. Попова	89
2.2.2	Пространственно-однородный бозе-газ	93
2.2.3	Бозе-газ в гармоническом потенциале при $k_B T \gg \hbar v / R_c$	97
2.2.4	Бозе-газ в гармоническом потенциале при $k_B T \ll \hbar v / R_c$	99
2.2.5	Многоточечная корреляционная функция неоднородного газа	103
2.3	Сверхтекучая А-фаза гелия-3 и ток частиц	105
2.3.1	Представления для тока частиц в виде сумм и интеграла	107
2.3.2	Предельные случаи и вычисления для конкретных текстур параметра порядка	111
2.4	Спектр возбуждений в антиферромагнитной фазе трехзонной двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием	118
3	КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ НЕСИНГУЛЯРНЫХ ДИСЛОКАЦИЙ И ПЕРЕНОРМИРОВКА УПРУГИХ МОДУЛЕЙ	124
3.1	Калибровочный подход и геометрические соотношения теории дислокаций	124
3.2	Модифицированная винтовая дислокация и квадратичные поправки к тензору напряжений	127

3.3 Перенормировка упругих модулей и влияние ядер дислокаций 136

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	155
ПРИЛОЖЕНИЕ I	159
ПРИЛОЖЕНИЕ II	164
ПРИЛОЖЕНИЕ III	165
ПРИЛОЖЕНИЕ IV	167
ЛИТЕРАТУРА	170

ВВЕДЕНИЕ

В современной теоретической и математической физике особое место занимают исследования низкоразмерных моделей статистической физики. В частности, точно-решаемые низкоразмерные модели вызывают интерес благодаря их связи как с задачами перечислительной комбинаторики, так и с экспериментальной реализацией маломерных систем конечного размера (например при моделировании направленного протекания жидкостей и огрубления (плавления) кристаллов). Прогресс в квантовой оптике, нано-приборостроении и в приготовлении структур с заданными свойствами стимулирует интерес к пространственно неоднородным системам. При этом неоднородность может обуславливаться либо конечностью объема или внешним потенциалом, либо дефектами (дислокациями, вихрями, доменными стенками). Неоднородные системы связаны, в частности, с газами щелочных металлов в магнито-оптических ловушках, а также могут описывать электронные и механические свойства нанотрубок и графеновых пленок.

Источником теоретической информации о соответствующих моделях служат как точные корреляционные функции (функции Грина), так и их асимптотические оценки. Вычисление корреляционных функций точнорешаемых моделей является актуальной задачей теории интегрируемых систем. Квантовый метод обратной задачи [1, 2] оказывается одним из основных подходов к точнорешаемым моделям статистической физики, на основе которого возможно находить корреляционные функции в конечном объеме и при различных граничных условиях [3, 4]. Известно, что представления корреляционных функций моделей, решаемых с помощью анзаца Бете [5], связаны в термодинамическом пределе с определителями Фредгольма линейных интегральных операторов [4]. Представления корреляционных функций некоторых решеточных моделей в виде определителей в случае конечного числа узлов позволяют

установить связь интегрируемых моделей с перечислительной комбинаторикой [6, 7].

Функциональное интегрирование (интегрирование по путям), восходящее к Р. Фейнману [8, 9], предоставляет возможность вычислять и исследовать корреляционные функции систем, не допускающих точного решения. Привлекательность подхода связана с возможностью интегрировать по частям, заменять переменные и применять метод стационарной фазы. Функциональное интегрирование, в сочетании с техникой температурных функций Грина [10], позволяет вычислять как статистические суммы, так и корреляционные функции. Подход плодотворен во многих разделах теоретической физики, включая статистическую физику, квантовую теорию поля и теорию суперструн. С формулировкой функционального интегрирования по коммутирующим и по антикоммутирующим переменным, а также с многочисленными современными приложениями подхода можно ознакомиться, например, по монографиям В. Н. Попова [11–13], А. А. Славнова и Л. Д. Фаддеева [14], А. Н. Васильева [15], К. Ициксона и Ж.-Б. Зюбера [16], П. Рамона [17], Ф. А. Березина [18], Х. Кляйнерта [19], Ж. Зин-Жюстена [20]. Необходимые для данного изложения технические сведения, касающиеся определения функциональных интегралов и их вычисления, будут приведены в соответствующих главах, а с общими конструкциями и примерами использования можно ознакомиться по процитированным монографиям.

Целью работы является вычисление температурных корреляционных функций и получение асимптотических оценок для некоторых моделей статистической физики, которые либо заданы на конечной решетке, либо пространственно неоднородны благодаря конечности занимаемого объема и наличию внешнего потенциала или характеризуются неоднородным параметром порядка (при учете, например, дефектов).

Переходя к конкретным моделям, рассматриваемым в представленной работе, выделим следующие проблемы и подходы к их решению.

Начнем с того, что в настоящее время широко обсуждаются связи между перчислительной комбинаторикой [6, 7] и разбиениями [21], с одной стороны, и статистической физикой и интегрируемыми моделями, с другой. Одной из основных задач статистической физики является исследование переходов из данного начального состояния в заданное конечное. Квантовый метод обратной задачи [1–4, 22] дает эффективное решение указанной задачи для интегрируемых моделей. Например, шестивершинная модель на квадратной решетке с различными граничными условиями играет важную роль, связывая статистическую физику с комбинаторикой. В частности, имеется связь между шестивершинной моделью с граничными условиями типа доменной стенки [23, 24] и проблемами перечисления знакопеременных матриц [25, 26] и укладок домино [27]. В работах [28, 29] была установлена связь между плоскими разбиениями в ящике [21, 26], симметрическими функциями [30] и определенными корреляционными функциями точно решаемой бозонной модели. Благодаря связям как с решеточными самоизбегающими путями [21, 26, 30], так и с плоскими разбиениями, поддерживается интерес к XXZ -модели Гейзенберга и к вычислению для нее температурных корреляционных функций специального вида [31–33].

Напомним, что спиновая XXZ -модель Гейзенберга, представляет собой цепочку атомов спина $1/2$ с обменным взаимодействием между атомами на ближайших узлах. Квантовые спиновые цепочки реализуются в квази-одномерных магнитных соединениях. Эти соединения являются кристаллическими материалами, в которых магнитные ионы с обменным взаимодействием располагаются в цепочках, отделенных друг от друга немагнитными ионами. Цепочка XXZ характеризуется параметром анизотропии Δ . В термодинамическом пределе, когда число узлов растет, $M \rightarrow \infty$, и при нулевом внешнем магнитном поле имеются следующие режимы: при $\Delta < -1$ основное состояние ферромагнитное, при $-1 < \Delta$ намагниченность нулевая. При этом, при

$-1 < \Delta \leq 1$ – спектр возбуждений безмассовый, при $1 < \Delta$ – спектр двукратно вырожденный массивный. Специальными случаями являются $\Delta = 0$ ($XX0$ магнетик), $\Delta = 1$ (XXX магнетик), $\Delta \rightarrow -\infty$ (изинговский предел). Гамильтониан XXZ магнетика был диагонализирован методом координатного анзаца Бете в работах [34–36]. В работе [1] для решения XXZ модели был использован алгебраический анзац Бете. Спиновая XXZ цепочка продолжает привлекать значительное внимание, а задача вычисления ее корреляционных функций в формализме алгебраического анзаца Бете потребовала серьезных усилий: [3, 4, 22, 23, 37–42].

Замечательный факт состоит в том, что симметрические функции Шура [30] позволяют выразить бетевские векторы состояния XXZ -модели при $\Delta \rightarrow 0$ или $\Delta \rightarrow -\infty$. В результате, форм-факторы определенных операторов, вычисленные в так называемом q -представлении, оказываются связанными с q -биномиальными определителями [43], что приводит к производящим функциям как плоских разбиений в ящике, так и самоизбегающих путей на решетке [21, 26, 30]. Низкотемпературные асимптотики некоторых корреляторов в случае длинных, но конечных цепочек связаны [33] с матричными интегралами гауссовых ансамблей [44, 45].

Корреляционные функции $XX0$ цепочки Гейзенберга [40, 46–49], которую можно рассматривать как специальный предел свободных фермионов для случая XU -магнетика [50–52], представляют значительный интерес. Модель $XX0$ связана с теорией плоских разбиений (трехмерных диаграмм Юнга) [21, 26, 30] и с теорией симметрических функций [30]. Плоские разбиения интенсивно изучаются в перечислительной комбинаторике [6, 7], в теории вероятностей [53, 54], в теории ограниченных кристаллов [55, 56], в теории направленного протекания [57], в теории топологических струн [58], и в теории случайных блужданий на решетке [26, 28, 29, 59].

В предлагаемой работе развивается подход, основанный на представлении бетев-

ских N -частичных состояний XXZ -модели при $\Delta \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow -\infty$ в терминах симметрических функций Шура. Преимущество указанного представления связано с возможностью применить к вычислению форм-факторов и температурных корреляционных функций хорошо развитую теорию симметрических функций. Вычисляются как форм-факторы, так и температурные корреляционные функции типа *ферромагнитной струны* и *доменной стенки*. *Ферромагнитная струна* отвечает состояниям, не содержащим возбуждений (“квазичастиц”) на n последовательных узлах цепочки; коррелятор *доменной стенки* отвечает состояниям, связанным с рождением n возбуждений на множестве последовательных узлов цепочки. В вычислениях возникают такие комбинаторные объекты, как q -биномиальные определители, и, как следствие, производящие функции плоских разбиений и случайных блужданий. Большинство вычислений существенно опирается на соотношение, которое удается получить для определителя специального вида и которое устанавливает связь с q -биномиальными и биномиальными определителями, а также с перечислительными формулами для случайных самоизбегающих блужданий на двумерных решетках. Удастся получить асимптотические представления, которые также демонстрируют возникновение комбинаторных объектов. Устанавливается связь асимптотик корреляторов с комбинаторикой плоских разбиений и перечислением самоизбегающих решеточных путей.

Заметим, что корреляционные функции $XX0$ магнетика интенсивно изучались в термодинамическом пределе [40, 46–49]. Мы же будем изучать асимптотическое поведение корреляционных функций при низкой температуре и для достаточно длинной цепочки, хотя число переворачиваемых спинов N будет считаться большим, но умеренным. Именно в этом пределе корреляционные функции связаны, [28], с матричными моделями. Эта связь позволяет установить соответствие, [60], между корреляционными функциями $XX0$ магнетика и низкоэнергетическим сектором двумерной

квантовой хромодинамики [61].

Случайные блуждания *недружественных пешеходов* на одномерной решетке [62] и проблема перечисления их путей также вызывают интерес как в комбинаторике, так и в статистической физике. При этом для $XX0$ магнетика на периодической цепочке можно построить корреляционные функции, играющие роль производящих функций путей недружественных пешеходов [28, 29]. Корреляционные функции $XX0$ магнетика играют роль производящих функций числа путей недружественных пешеходов, блуждающих по одномерной периодической решетке, что интересно при изучении плавления и направленного протекания. Использование функционального интегрирования позволяет сформулировать подход к корреляторам спиновых XX и XU -цепочек Гейзенберга, допускающим выражение через производящие функции [63–67]. В качестве приложения рассматривается задача перечисления траекторий случайных блужданий недружественных пешеходов [68, 69].

Бозе-эйнштейновская конденсация в разреженных газах щелочных металлов, удерживаемых магнито-оптическими ловушками, привлекает значительное внимание: [70–72]. В отличие от сверхтекучести в гелии, эффекты неоднородности проявляются на масштабах превышающих межатомные расстояния. Атомные газы – почти макроскопические объекты, доступные наблюдению оптическими средствами. В частности, теоретический и экспериментальный интерес вызывают системы эффективно одномерные, для описания которых применяется $|\psi|^4$ -модель бозе-поля с отталкиванием ($g > 0$) во внешнем (например, гармоническом) потенциале. Бозе-конденсация происходит не только в импульсном пространстве, но и в координатном. Несмотря на разреженность, большую роль играет двухчастичное взаимодействие. Недавний прогресс в создании квази-одномерных систем атомных газов стимулировал интерес к исследованию корреляционных функций и их асимптотик в одномерном случае.

Ситуация становится одномерной при редукции радиальных движений к вакуумным колебаниям. Одномерная система характеризуется двумя основными режимами: Гросса–Питаевского (высокая плотность, или слабая связь, $l_c \gg \frac{1}{\rho}$; $l_c = \frac{\hbar}{\sqrt{m\rho g}}$ – корреляционная длина межчастичного взаимодействия, ρ – межчастичное расстояние) и Тонкса–Жирандо (низкая плотность, или большая константа связи, $l_c \ll \frac{1}{\rho}$; в этом режиме система проявляет фермионные свойства). Анзац Бете позволяет решить одномерную модель однородного бозе-газа, для которой удается продемонстрировать отсутствие фазового перехода. При этом бозе-кондесат отсутствует при $T \geq 0$, а при $T = 0$ возможен *квази-кондесат*, проявляющийся в сверхтекучести. Квантовый метод обратной задачи рассеяния позволяет вычислять и исследовать температурные корреляционные функции однородного пространственно одномерного бозе-газа [3, 4]. При наличии внешнего удерживающего потенциала (ловушки) есть квази-кондесат при достаточно низкой температуре T , когда фаза флуктуирует ($l_c \ll l_\phi$, l_ϕ – фазовая длина когерентности), а флуктуации плотности подавлены (возникновение такого состояния подтверждено экспериментально для сильно вытянутых ловушек). При дальнейшем понижении температуры наличие ловушки приводит к подавлению флуктуаций фазы и возникает конденсат, характеризуемый профилем Томаса–Ферми [73, 74]. Точного решения при наличии внешнего потенциала нет, в связи с чем возникает интерес к построению приближенного описания, основанного на функциональном интегрировании. При этом для оценки корреляторов можно использовать вариационный принцип В. Н. Попова [75]. Подход функционального интегрирования, развитый в работах [76–82] для режима Гросса–Питаевского, позволяет получить однопетлевое эффективное действие и исследовать, с применением [75], асимптотику двухточечной и многоточечных температурных корреляционных функций в приближении Томаса–Ферми. В одномерном случае и для внешнего гармонического потен-

циала обобщаются результаты, известные для квантового нелинейного уравнения Шредингера.

Сверхтекучие фазы гелия-3 привлекают внимание благодаря богатой физической картине, включающей топологические вихри, текстуры, калибровочные симметрии, а также аналогии с физикой элементарных частиц [13, 83–85]. Причина этого состоит в том, что куперовский параметр порядка не скаляр, а комплексная матрица размера 3×3 . Именно матричный характер параметра порядка приводит к тому, что сверхтекучий гелий-3 обладает богатым спектром коллективных возбуждений. В монографии [13] представлен единообразный подход основанный на континуальном интегрировании, который позволяет исследовать систему как в области Гинзбурга–Ландау (вблизи точки фазового перехода), так и вблизи нулевой температуры, а также получать и классифицировать спектры коллективных возбуждений в сверхтекучих фазах гелия-3.

Одна из сверхтекучих фаз, а именно A -фаза (${}^3\text{He}-A$), как пример спин-триплетного p -спаривания, демонстрирует необычные свойства благодаря обращению сверхпроводящей щели в нуль в полюсах сферы Ферми. Нестандартность A -фазы, связанная с ее анизотропией, проявляется в подходе функционального интегрирования при вычислении устойчивости соответствующего коллективного спектра [13]. Она также проявляется в том, что ток частиц (первой степени по производным параметра порядка) содержит кроме ожидаемых сверхтекучего и орбитальных вкладов, так называемый аномальный вклад. Аномальный вклад связан с обращением параметра порядка в нуль в двух точках на сфере Ферми. В окрестности этих точек (полюсов) происходит диссоциация куперовских пар и в результате сосуществуют как нормальная, так и сверхтекучая компоненты жидкого гелия. Возникновение неспаренных фермионов приводит к существованию аномального вклада в ток частиц (среднее оператора

импульса) в поле параметра порядка [85]. Более того, в работах [86–89] обсуждается возможность того, что ток частиц не исчерпывается членами первого порядка по частным производным параметра порядка, а имеются поправочные члены, более высоких степеней по градиентам. При этом в [86, 88, 89] и [87] были высказаны противоположные утверждения относительно наличия старших поправок. Для слабореоднородной A -фазы удается [90–93] получить в лондоновском пределе старшие по частным производным параметра порядка вклады в вакуумное среднее оператора импульса (плотности потока частиц). Удастся также объяснить ошибочность вывода работы [87], подтверждая таким образом [86, 88, 89]. Подход, связанный с наискорейшим спуском, используется для асимптотической оценки коррелятора в [90–93] единообразно с подходом к функциям Грина неоднородного одномерного бозе-газа в работах [76–82]. При вычислении нормальной функции Грина ${}^3\text{He} - A$ удается получить, в качестве следствия, интегральное представление для произведения двух функций параболического цилиндра [94]. Развитый подход к вычислению тока может найти применение при вычислении более сложных корреляционных функций как для самой A -фазы, так и в случае экзотических сверхпроводников, для которых параметр порядка (щель) обладает топологически неустранимыми нулями на сфере Ферми.

Топологически нетривиальные конфигурации в упорядоченных состояниях (вихри, дислокации) имеют значение для фазовых переходов в двумерных системах. Дислокации, как нарушения кристаллического порядка, существенны для понимания структурных, транспортных и электронных свойств твердых тел. Дислокации вызывают интерес в связи с физикой нанотрубок и графеновых пленок [95, 96]. Например, многослойные нанотрубки могут содержать внутри стенок винтовые дислокации [97]. Внешний диаметр нанотрубок меняется от нанометров до десятков нанометров. Тол-

щина стенок меняется от одного до нескольких десятков атомных слоев. Так как размеры ядер дислокаций сравнимы с толщиной слоев нанотрубок, соответствующие поправки в распределение упругих полей могут оказаться заметными и заслуживают изучения. Электронные и механические свойства графеновых пленок, содержащих дислокации, также интересны, [98–100].

Известно, что дислокационные решения для одиночных дефектов, получаемые в рамках теории упругости с несовместностью, характеризуются сингулярным поведением компонент напряжений на линии дефекта [101]. Решения вольтерровского типа удовлетворительно описывают распределения напряжений в реальных кристаллических твердых телах. При этом сингулярности в распределении напряжений не возникают, так как формируются компактные ядра дефектов, внутри которых большие смещения атомов приводят к разупорядочению и снятию напряжений. В рамках классической упругости не удается учесть ядро дислокаций и требуются дополнительные соображения. Начиная с работ [102, 103], известны следующие подходы, приводящие к сглаженным континуальным решениям: квази-континуальный подход [104, 105], нелокальная упругость [106], градиентная упругость [107, 108], лагранжев трансляционно-калибровочный подход (калибровочная группа $T(3) \approx \mathbb{R}^3$) [109–115]. Введение калибровочного лагранжиана в работах [109–115] означает, что происходит эффективный учет собственной энергии ядер дефектов. Полученные решения, в частности, для винтовой дислокации представляют собой суперпозицию дальнедействующего (классического) и короткодействующего (калибровочного) вкладов (давая в сумме несингулярную, так называемую, *модифицированную дислокацию*). Нелинейные (квадратичные) поправки в распределение напряжений, диктуемые теорией упругости, также важны [116–120]. В работе [121] подход, предложенный в [113], используется для получения квадратичных вкладов в поле напряжений, создаваемое

модифицированной винтовой дислокацией. Помимо обычных квадратичных поправок, в подходе [121] удается получить короткодействующие квадратичные поправки, которые существенны в слое, представляющем собой условную границу (“переходную” область) ядра. Внутри “переходной” области смещения атомов не малы и ситуация существенно нелинейная. Как результат, в квадратичном приближении поле напряжений модифицированной дислокации также несингулярно и можно считать, что оно продолжается внутрь ядра, [121]. Для сравнения, в стандартных (классических) подходах [117, 118] приходится искусственно постулировать круговую границу дискообразной области ядра дислокации и задавать на ней, например, (не слишком естественное) условие свободной границы.

В случае наличия в твердом теле большого числа дефектов невозможно рассматривать каждую дислокацию отдельно, и требуется описывать распределение дислокаций в терминах термодинамического ансамбля. При этом упругие постоянные, определенные для идеального кристалла, перенормируются. В свою очередь, теория Березинского–Костерлица–Таулеса–Попова [122–127] имеет дело с фазовыми переходами в двумерных системах, в которых существенную роль играют дефекты. В частности, дислокации и дисклинации существенны для понимания плавления двумерных кристаллов [128–132]. Перенормировка упругих постоянных для двумерных систем исследовалась в [128–131, 133]. В работе [134] с использованием функционального интегрирования развит теоретико-полевой подход к вычислению корреляционных функций компонент напряжений модифицированной винтовой дислокации. Корреляционные функции напряжений используются для вычисления перенормировки упругих модулей. Развитый подход позволяет получать поправки в перенормировку упругих констант, обусловленные конечным размером ядер дислокаций.

В работе используются соотношения квантового метода обратной задачи и Бете-

анзаца, применяется метод функционального интегрирования. Применяется оценка интегралов с помощью (функциональной) стационарной фазы. Распределения дислокаций в твердых телах обсуждается в терминах геометрии Римана-Картана, применяются специальные функции (включая функции Шура) и их асимптотические оценки.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. В каждой главе даны краткое введение в обсуждаемую проблему и формулировка задачи, представлен подход к решению и перечислены результаты. Первая глава посвящена XXZ магнетику Гейзенберга в предельных случаях $\Delta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow -\infty$, форм-факторы и специальные корреляционные функции вычисляются с применением соотношений Бете-анзаца. Для $XX0$ модели Гейзенберга на периодической цепочке рассматриваются корреляционные функции, связанные с перечислением случайных блужданий недружественных пешеходов. Получены асимптотические оценки для числа путей пешехода, перемещающегося между двумя достаточно удаленными узлами решетки. Кроме того, для $XX0$ модели рассматривается вычисление производящей функции корреляторов третьих компонент спинов в представлении функционального интегрирования по фермионным полям, подчиненным условию квази-периодичности по мнимому времени. Во второй главе подход функционального интегрирования применяется к вычислению температурных корреляционных функций одномерного бозе-газа в гармоническом потенциале, и вакуумного тока частиц при нулевой температуре для сверхтекучей A -фазы гелия-3. Кроме того, с помощью функционального интегрирования получено эффективное действие для антиферромагнитной фазы трехзонной двумерной модели Хаббарда с отталкиванием и получен спектр коллективных бозе-возбуждений в антиферромагнитной фазе. В третьей главе развит подход к описанию дислокаций в твердом теле. Особенностью подхода является то, что в отличие от

классических решений возникают модифицированные дислокации с несингулярным ядром конечного размера. Для ансамбля несингулярных дислокаций развито термодинамическое описание и продемонстрирован вклад в перенормировку упругих модулей за счет конечности ядер дефектов.

Результаты, представленные в Диссертации, докладывались на семинарах ПОМИ, С.-Петербургского Политехнического Университета, Международного центра теоретической физики в Варшаве, Лаборатории низких температур Хельсинкского Технологического Университета, а также на конференциях и школах: *School on Geometry, Topology, and Gauging* (Яблонна, Польша, 1989), *Symposium on Vortices, Interfaces and Mesoscopic Phenomena* (Юваскуля, Финляндия, 1994), Школы по физике конденсированного состояния в ICTP (Триест, Италия, 1994, 1995) и ISI (Турин, Италия, 1995), 3 *Междунар. семинар ПОМИ–Флоренция* (С.-Петербург, 2001), 6 *Междунар. конференция “Path Integrals from peV to TeV ”* (Флоренция, Италия, 1998), 8 *Междунар. конференция “Path Integrals from Quantum Information to Cosmology”* (Прага, Чехия, 2005), 9 *Междунар. конференция “Path Integrals – New Trends and Perspectives”* (Дрезден, Германия, 2007), *Междунар. школы “Классические и квантовые интегрируемые системы”* CQIS-08 (ИФВЭ, Протвино, 2008), CQIS-11 (ИФВЭ, Протвино, 2011), CQIS-12 (ОИЯИ, Дубна, 2012); *Междунар. конференция “Конформная теория поля, интегрируемые системы и лиувиллевская гравитация”* (ИТФ, Черногловка, 2009), III, IV *Междунар. конференции “Модели квантовой теории поля”* (физ. факультет СПбГУ, 2010, 2012), Конференции “Marcel Grossmann Meeting MG13” (Стокгольмский Университет, 2012) и “Квантовый и классический методы обратной задачи” (МИАН–ПОМИ, 2012).

ГЛАВА 1. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ XXZ МАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА (НУЛЕВАЯ И БЕСКОНЕЧНАЯ АНИЗОТРОПИЯ) И КОМБИНАТОРИКА

1.1 XXZ Магнетик Гейзенберга, плоские разбиения и решеточные пути

1.1.1 Гамильтониан XXZ модели при нулевой и бесконечной анизотропии, векторы состояния и функции Шура

Система атомов, размещенных на узлах одномерной решетки и имеющих спин $1/2$, которая широко известна как квантовая XYZ цепочка Гейзенберга [135], привлекла к себе значительное внимание как в теоретической, так и в математической физике [5, 34–36, 136–138]. Квантовый метод обратной задачи рассеяния, развитый для решения интегрируемых моделей квантовой теории поля и статистической физики, был успешно применен в [1, 2] к исследованию XYZ цепочки Гейзенберга. Важный частный случай XYZ модели, так называемая спиновая XXZ цепочка Гейзенберга, также привлекает значительное внимание [23, 37–42]. Гамильтониан XXZ магнетика был диагонализирован методом координатного анзаца Бете в работах [34–36]. В работе [1] для решения XXZ модели был использован алгебраический анзац Бете. Вычисление корреляционных функций рассматриваемой модели в формализме алгебраического анзаца Бете потребовало серьезных усилий: [3, 4, 23, 37, 42].

Гамильтониан XXZ модели на одномерной решетке, которая состоит из $M + 1$

узла, $M + 1 = 0 \pmod{2}$, пронумерованного элементами множества $\tilde{\mathcal{M}} \equiv \{0 \leq k \leq M, k \in \mathbb{Z}\}$, имеет вид:

$$\hat{H}_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M (\sigma_{k+1}^- \sigma_k^+ + \sigma_{k+1}^+ \sigma_k^- + \frac{\Delta}{2} (\sigma_{k+1}^z \sigma_k^z - 1) + h \sigma_k^z), \quad (1)$$

где $\Delta \in \mathbb{R}$ – внутренняя анизотропия, $h \in \mathbb{R}$ – магнитное поле. Например, $\Delta = \pm 1$ соответствует, так называемой, изотропной XXZ спиновой цепочке, решение для которой построено в работе [5]. Локальные спиновые операторы $\sigma_k^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_k^x \pm i\sigma_k^y)$ и σ_k^z , зависящие от решеточного аргумента $k \in \tilde{\mathcal{M}}$, определены как $(M + 1)$ -кратные тензорные произведения:

$$\sigma_k^\# = \sigma^0 \otimes \cdots \otimes \sigma^0 \otimes \underbrace{\sigma_k^\#}_k \otimes \sigma^0 \otimes \cdots \otimes \sigma^0, \quad (2)$$

где σ^0 означает единичную матрицу размера 2×2 , а $\sigma^\#$ на k -ом месте означает матрицу Паули, $\sigma^\# \in \mathfrak{su}(2)$ (индекс $\#$ означает либо x, y, z , либо \pm):

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перестановочные соотношения для спиновых операторов (2) имеют вид:

$$[\sigma_k^+, \sigma_l^-] = \delta_{k,l} \sigma_l^z, \quad [\sigma_k^z, \sigma_l^\pm] = \pm 2 \delta_{k,l} \sigma_l^\pm.$$

Спиновые операторы действуют над пространством состояний $\mathfrak{H}_{M+1} = \bigotimes_{k=0}^M \mathfrak{h}_k$, представляющим собой тензорное произведение $M + 1$ экземпляров линейных пространств $\mathfrak{h}_k \equiv \mathbb{C}^2$. Пространство \mathfrak{H}_{M+1} натянуто на векторы состояния $\bigotimes_{k=0}^M |s\rangle_k$, где $|s\rangle_k$ означает состояния со спином либо “вверх”, $|\uparrow\rangle$, либо “вниз”, $|\downarrow\rangle$, на k -ом узле. Состояния $|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $|\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют естественный базис линейного пространства \mathbb{C}^2 . Цепочка считается периодической и наложены периодические граничные условия: $\sigma_{k+(M+1)}^\# = \sigma_k^\#$. Гамильтониан (1) перестановочен с оператором третьей компоненты

полного спина \hat{S}^z :

$$[\hat{H}_{\text{XXZ}}, \hat{S}^z] = 0, \quad \hat{S}^z \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \sigma_k^z. \quad (3)$$

Введем некоторые соглашения. Будем считать, что жирными буквами обозначаются любые наборы чисел следующего вида: например, \mathbf{u} означает набор из N произвольных (комплексных) параметров (u_1, u_2, \dots, u_N) , и т.д.. Далее, пусть N – число состояний со спином “вниз” (“частиц”), занимающих на цепочке узлы с номерами μ_i , $1 \leq i \leq N$. Пусть координаты “частиц” образуют строго убывающее разбиение $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, где $M \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N \geq 0$. Будем также рассматривать разбиение $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, являющееся N -элементной последовательностью нестрого убывающих положительных целых чисел: $L \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Элементы λ_j называются *частями* $\boldsymbol{\lambda}$. Длина разбиения $l(\boldsymbol{\lambda})$ равна количеству его частей. Сумма всех частей называется *весом* разбиения, $|\boldsymbol{\lambda}| = \sum_{i=1}^N \lambda_i$ [30]. Любое строгое разбиение $\boldsymbol{\mu}$ связано с нестрогим разбиением $\boldsymbol{\lambda}$, $M+1-N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ с помощью соотношения $\lambda_j = \mu_j - N + j$, где $1 \leq j \leq N$. Иными словами, соотношение имеет вид $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}_N$, где $\boldsymbol{\delta}_N$ – строго убывающее разбиение $(N-1, N-2, \dots, 1, 0)$.

С каждым разбиением $\boldsymbol{\lambda}$ свяжем множество $\mathfrak{G}(\boldsymbol{\lambda})$ N -наборов следующего вида [139]:

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{\lambda}) = \left\{ \lambda_j - j + \frac{1}{2} \mid 1 \leq j \leq N \right\} \subset \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

Каждое нестрогое разбиение $\boldsymbol{\lambda}$ можно изобразить прямоугольной таблицей (таблицей Юнга), состоящей из N таких колонок, что $\lambda_i, \forall i$, есть высота i -ой колонки (Рис. 1). Сдвинем каждый элемент множества $\mathfrak{G}(\boldsymbol{\lambda})$ на $N - \frac{1}{2}$ и присвоим полученные значения проекциям “вершин” столбцов вдоль вертикальных пунктирных линий на горизонтальную ось. На горизонтальной оси возникают элементы строго разбиения $\boldsymbol{\mu}$, соответствующего нестрогому разбиению $\boldsymbol{\lambda}$. Например, диаграмма на Рис. 1 отвечает $M = 8$ and $N = 4$: $\boldsymbol{\lambda} = (5, 3, 2, 2)$ и $\boldsymbol{\mu} = (8, 5, 3, 2)$ ($\lambda_i \leq \mathcal{M} = M - N + 1$).

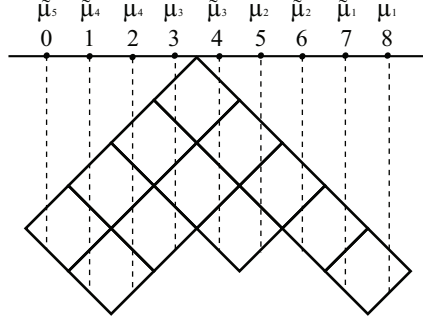


Рис. 1: Таблица Юнга для разбиения $\lambda = (5, 3, 2, 2)$ при $M = 8$ и $N = 4$, которая дает способ графического нахождения частей строгого разбиения μ , отвечающего λ .

Пусть $|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle$ – N -частичный вектор состояния, отвечающий спинам “вниз” на узлах с координатами μ_i , $1 \leq i \leq N$, образующими строгое разбиение μ . Гамильтониан (1) диагоналізується с помощью подстановки:

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \sum_{\mu} \chi_{\mu}^{XXZ}(\mathbf{u}) \left(\prod_{k=1}^N \sigma_{\mu_k}^- \right) |\uparrow\rangle, \quad (4)$$

где суммирование идет по множеству из $C_M^N \equiv \frac{M!}{N!(M-N)!}$ разбиений μ . Обозначение $|\uparrow\rangle$ в (4) соответствует полностью поляризованному состоянию, для которого спины на всех узлах направлены “вверх”: $|\uparrow\rangle \equiv \bigotimes_{n=0}^M |\uparrow\rangle_n$. Волновая функция $\chi_{\mu}^{XXZ}(\mathbf{u})$ в (4) имеет вид:

$$\chi_{\mu}^{XXZ}(\mathbf{u}) = \sum_{S_{p_1, p_2, \dots, p_N}} \mathcal{A}_S(\mathbf{u}) u_{p_1}^{2\mu_1} u_{p_2}^{2\mu_2} \dots u_{p_N}^{2\mu_N}, \quad (5)$$

где суммирование распространяется на все элементы симметрической группы перестановок $S_{p_1, p_2, \dots, p_N} \equiv S \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & N \\ p_1, & p_2, & \dots, & p_N \end{pmatrix}$. Амплитуда $\mathcal{A}_S(\mathbf{u})$ (5) имеет вид:

$$\mathcal{A}_S(\mathbf{u}) \equiv \prod_{1 \leq j < i \leq N} \frac{1 - 2\Delta u_{p_i}^2 + u_{p_i}^2 u_{p_j}^2}{u_{p_i}^2 - u_{p_j}^2}, \quad (6)$$

где Δ – анизотропия. Векторы состояния (4) являются собственными состояниями гамильтониана (1),

$$\hat{H}_{XXZ} |\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = E_N(\mathbf{u}) |\Psi_N(\mathbf{u})\rangle,$$

если и только если параметры u_l ($1 \leq l \leq N$) удовлетворяют *уравнениям Бете*:

$$u_l^{2(M+1)} = (-1)^{N-1} \prod_{k=1}^N \frac{1 - 2\Delta u_l^2 + u_l^2 u_k^2}{1 - 2\Delta u_k^2 + u_l^2 u_k^2}. \quad (7)$$

Соответствующие собственные значения энергии имеют вид:

$$E_N(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (u_i^2 + u_i^{-2} - 2\Delta - 2h). \quad (8)$$

Будем следовать работам [31–33] и рассмотрим XXZ модель для двух пределов анизотропии: $\Delta \rightarrow 0$ ($XX0$ магнетик, эквивалентный свободным фермионам) и $\Delta \rightarrow -\infty$ (изинговский предел). Гамильтониан XX ($\equiv XX0$) модели описывает взаимодействие состояний со спинами, направленными “вверх” $|\uparrow\rangle$ и “вниз” $|\downarrow\rangle$, которые размещены на ближайших узлах периодической цепочки и в нулевом магнитном поле имеет вид:

$$\hat{H}_{XX} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \hat{h}_{k+1,k}, \quad \hat{h}_{k+1,k} \equiv \sigma_{k+1}^- \sigma_k^+ + \sigma_{k+1}^+ \sigma_k^-. \quad (9)$$

Система, описываемая (9), эквивалентна системе свободных фермионов [50] и может быть также получена из бозонной модели Хаббарда в результате предельного перехода к случаю бесконечного отталкивания на узле (бозоны с “твердой сердцевиной”) [31]. Таким образом, XX модель интересна как для исследования (квантовой) фазовой диаграммы модели Хаббарда, так и для описания экситонов Френкеля [48]. В последние несколько лет XX модель привлекла к себе внимание в связи с изучением теории квантовой информации и квантовых вычислений [49, 140].

Для получения вектора состояния $|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle$ и уравнений Бете XX модели выполняется переход $\Delta \rightarrow 0$ в соотношениях (6) и (7). В результате получаем, что гамильтониан (9) диагонализуеться на векторах состояния (4), где волновая функция, с точностью до несущественного общего множителя, выглядит как

$$\chi_{\mu}^{XX}(\mathbf{u}) = \det(u_j^{2\mu_k})_{1 \leq j,k \leq N} \prod_{1 \leq n < l \leq N} (u_l^2 - u_n^2)^{-1}, \quad (10)$$

а уравнения Бете имеют вид [46]:

$$u_j^{2(M+1)} = (-1)^{N-1}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (11)$$

Замена $u_j^2 = e^{i\theta_j}$ переводит эти уравнения в экспоненциальную форму,

$$e^{i(M+1)\theta_j} = (-1)^{N-1}, \quad (12)$$

приводящую к решениям:

$$\theta_j = \frac{2\pi}{M+1} \left(I_j - \frac{N-1}{2} \right), \quad (13)$$

где I_j – целые или полуцелые числа в зависимости от того, является N четным или нечетным. Достаточно рассматривать N различных чисел I_j , удовлетворяющих условию: $M \geq I_1 > I_2 > \dots > I_N \geq 0$. Обозначение $\boldsymbol{\theta}$ для N -элементной совокупности $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ решений (13) будет активно использоваться в дальнейшем, чтобы подчеркнуть использование решения уравнения Бете. В противном случае уместно сохранять $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_N)$ или $\mathbf{u}^2 \equiv (u_1^2, u_2^2, \dots, u_N^2)$ как указание на то, что имеется ввиду набор произвольных параметров. Из (8) следует, что собственные значения энергии XX модели имеют вид:

$$E_N^{XX}(\boldsymbol{\theta}) = - \sum_{j=1}^N \cos \theta_j = - \sum_{j=1}^N \cos \left(\frac{2\pi}{M+1} \left(I_j - \frac{N-1}{2} \right) \right). \quad (14)$$

Основное состояние модели характеризуется энергией *основного состояния* $E_N^{XX}(\boldsymbol{\theta}^g)$, которое отвечает параметрам (13) при $I_j = N - j$:

$$E_N^{XX}(\boldsymbol{\theta}^g) = - \frac{\sin \frac{\pi N}{M+1}}{\sin \frac{\pi}{M+1}}, \quad \theta_j^g \equiv \frac{2\pi}{M+1} \left(\frac{N+1}{2} - j \right), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (15)$$

Менее изученным случаем XXZ модели оказывается предел *сильной анизотропии* $\Delta \rightarrow -\infty$ (аббревиатура *SA*) [35, 138, 141, 142]. Этот предел называется *изинговским* так как простейший гамильтониан в этом пределе оказывается гамильтонианом

одномерной модели Изинга [138]:

$$\lim_{\Delta \rightarrow -\infty} \frac{1}{\Delta} \hat{H}_{\text{XXZ}} = \hat{H}_{\text{IZ}} \equiv -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^M (\sigma_{k+1}^z \sigma_k^z - 1). \quad (16)$$

Как предложено в [32], будем изучать предел сильной анизотропии с помощью эффективного гамильтониана \hat{H}_{SA} , который формально эквивалентен XX гамильтониану (9), снабженному требованием, запрещающим двум состояниям со спинами “вниз” занимать любую пару ближайших узлов [141, 142]:

$$\hat{H}_{\text{SA}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \mathcal{P} (\hat{h}_{k+1,k} + h \sigma_k^z) \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} \equiv \prod_{k=0}^M (\mathbb{I} - \hat{q}_{k+1} \hat{q}_k). \quad (17)$$

Проекторы \mathcal{P} “вырезают” состояния со спинами “вниз” для любой пары ближайших узлов. Локальные проекторы на состояния со спинами “вниз” и “вверх” имеют вид:

$$\hat{q}_k \equiv \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \sigma_k^z), \quad \check{q}_k \equiv \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \sigma_k^z), \quad \check{q}_k + \hat{q}_k = \mathbb{I}, \quad k \in \tilde{\mathcal{M}}, \quad (18)$$

где \mathbb{I} есть единичный оператор в пространстве гильбертовом пространстве \mathfrak{H}_{M+1} . Гамильтонианы (16) и (17) перестановочны. Действительно, с помощью (18) можно представить гамильтониан (16) в следующем виде:

$$\hat{H}_{\text{IZ}} = \hat{N} - \sum_{k=0}^M \hat{q}_{k+1} \hat{q}_k, \quad \hat{N} \equiv \sum_{k=0}^M \hat{q}_k, \quad (19)$$

где \hat{N} есть оператор числа частиц, перестановочный с гамильтонианами \hat{H}_{XX} и \hat{H}_{SA} .

С другой стороны, в силу определения проектора \mathcal{P} , мы имеем:

$$\mathcal{P} \sum_{k=0}^M \hat{q}_{k+1} \hat{q}_k = \sum_{k=0}^M \hat{q}_{k+1} \hat{q}_k \mathcal{P} = 0.$$

Следовательно, гамильтонианы (16), (17) также перестановочны, $[\hat{H}_{\text{SA}}, \hat{H}_{\text{IZ}}] = 0$, и поэтому обладают общей системой собственных функций. К вопросу о полноте соответствующих собственных функций мы вернемся ниже.

Волновая функция (5) в пределе $\Delta \rightarrow -\infty$ принимает вид:

$$\chi_{\boldsymbol{\mu}}^{\text{SA}}(\mathbf{u}) = \det(u_j^{2(\mu_k - N + k)})_{1 \leq j, k \leq N} \prod_{1 \leq n < l \leq N} (u_l^2 - u_n^2)^{-1}, \quad (20)$$

где координаты состояний со спинами “вниз” образуют строго убывающее разбиение $\boldsymbol{\mu}$ (как в (5) и (10)), то есть, $M \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N \geq 0$. Из (20) следует, что волновая функция отличается от нуля, если и только если элементы μ_i , $1 \leq i \leq N$, удовлетворяют *условию исключения*: $\mu_i > \mu_{i+1} + 1$. В рассматриваемом пределе заполнение ближайших узлов запрещено, и можно говорить о возникновении *диаметра твердого ядра*, равного удвоенному межузельному расстоянию. Уравнения Бете принимают вид:

$$e^{i(M+1-N)\theta_k} = (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^N e^{-i\theta_j}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (21)$$

и имеют решения

$$\theta_j = \frac{2\pi}{M+1-N} \left(I_j - \frac{N-1}{2} - P \right), \quad (22)$$

где $P \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \theta_j$. Числа I_j являются целыми или полуцелыми в зависимости от того, N нечетно или четно, а также $M - N \geq I_1 > I_2 > \dots > I_N \geq 0$. Основное состояние определяется решениями

$$\theta_j^g = \frac{2\pi}{M+1-N} \left(N - j - \frac{N-1}{2} \right), \quad (23)$$

причем соблюдено $P = 0$. Собственные значения энергии имеют вид:

$$E_N^{\text{SA}}(\boldsymbol{\theta}) = - \sum_{j=1}^N \cos \left(\frac{2\pi}{M+1-N} \left(I_j - \frac{N-1}{2} - P \right) \right). \quad (24)$$

Собственная энергия основного состояния, вычисленная с помощью (8) и (23), такова:

$$E_N^{\text{SA}}(\boldsymbol{\theta}^g) = hN - \operatorname{cosec} \frac{\pi}{M+1-N} \sin \frac{\pi N}{M+1-N}. \quad (25)$$

Собственная энергия изинговского гамильтониана (16) имеет вид: $E_{\text{IZ}} = N$.

Решающим обстоятельством, объединяющим оба случая, которые описываются гамильтонианами (9) и (17), является то, что N -частичные бетевские состояния

$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle$, $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_N)$, допускают представление в терминах функций Шура [31–33]. А именно, для обеих предельных форм (10) и (20) волновой функции (5) вектор состояния (4) принимает следующий вид:

*) в случае XX модели имеем:

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^N\}} S_\lambda(\mathbf{u}^2) \left(\prod_{k=1}^N \sigma_{\mu_k}^- \right) |\uparrow\rangle, \quad S_\lambda(\mathbf{u}^2) \equiv \frac{\det(u_j^{2(\lambda_k + N - k)})_{1 \leq j, k \leq N}}{\mathcal{V}_N(\mathbf{u}^2)}, \quad (26)$$

где $|\uparrow\rangle \equiv \bigotimes_{n=0}^M |\uparrow\rangle_n$ – состояние со всеми спинами “вверх”, функции Шура $S_\lambda(\mathbf{u}^2)$ играют роль коэффициентов, и $\mathcal{V}_N(\mathbf{u}^2) = \prod_{1 \leq i < k \leq N} (u_k^2 - u_i^2)$ – определитель Вандермонда. В качестве “индекса” суммирования в (26) указаны нестрогие разбиения $\lambda = \mu - \delta_N$, $\delta_N = (N - 1, N - 2, \dots, 1, 0)$, части которых удовлетворяют $\mathcal{M} \equiv M + 1 - N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$.

*) В случае сильной анизотропии элементы строгих разбиений $\tilde{\mu}$ удовлетворяют условию $\mu_i > \mu_{i+1} + 1$, и они эквивалентны нестрогим разбиениям $\tilde{\lambda}$ при соблюдении соотношения $\tilde{\lambda} = \mu - 2\delta$ и $M + 2(1 - N) \geq \tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_N \geq 0$. Тогда вектор состояния определяется формулой аналогичной (26):

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \sum_{\tilde{\lambda} \subseteq \{(M - 2(N - 1))^N\}} S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{u}^2) \left(\prod_{k=1}^N \sigma_{\tilde{\mu}_k}^- \right) |\uparrow\rangle, \quad (27)$$

где $S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{u}^2)$ также определяется в (26), и суммирование указано по нестрогим разбиениям.

Нам еще понадобится выражение для вектора состояния $\langle \Psi(\mathbf{v}_N) |$ сопряженного векторам $|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle$ (26) и (27):

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | = \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^N\}} \langle \uparrow | \left(\prod_{k=1}^N \sigma_{\mu_k}^+ \right) S_\lambda(\mathbf{v}_N^{-2}). \quad (28)$$

Представления (26), (27) и (28) позволяют вычислять форм-факторы и температурные корреляционные функции, пользуясь соотношениями теории симметрических функций [30].

1.1.2 Форм-факторы и корреляционные функции типа выживания ферромагнитной струны и доменной стенки при нулевой анизотропии

Основной целью является вычисление температурных корреляционных функций, которые будем называть *выживанием ферромагнитной струны* и *выживанием доменной стенки*. Выживание ферромагнитной струны связано с оператором $\bar{\Pi}_n$, обеспечивающим отсутствие частиц на n последовательных узлах цепочки:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) \equiv \frac{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) | e^{-\beta \mathcal{H}} | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}, \quad \bar{\Pi}_n \equiv \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\sigma_j^0 + \sigma_j^z}{2}, \quad (29)$$

где β – обратная температура и $\boldsymbol{\theta}^g = (\theta_1^g, \theta_2^g, \dots, \theta_N^g)$ отвечает N -частичному основному состоянию. Здесь и далее (в пределах разделов 1.1 и 1.2) будем использовать \mathcal{H} для обозначения предельного гамильтониана $\hat{H}_{\text{ХХ}}$ в случае нулевой анизотропии. Выживание доменной стенки связано с оператором \bar{F}_n , порождающим n последовательных спинов “вниз”:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) \equiv \frac{\langle \Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g) | \bar{F}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{F}_n | \Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}{\langle \Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g) | e^{-\beta \mathcal{H}} | \Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}, \quad \bar{F}_n \equiv \prod_{j=0}^{n-1} \sigma_j^-, \quad (30)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^g \equiv (\tilde{\theta}_1^g, \tilde{\theta}_2^g, \dots, \tilde{\theta}_{N-n}^g)$ – отвечает $(N - n)$ -частичному основному состоянию для уравнений Бете (12):

$$\tilde{\theta}_j^g \equiv \frac{2\pi}{M+1} \left(\frac{N-n+1}{2} - j \right), \quad 1 \leq j \leq N-n. \quad (31)$$

При этом считаем $\bar{\Pi}_0$ и \bar{F}_0 тождественными операторами, т.е. $\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, 0, \beta) = 1$ и $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g, 0, \beta) = 1$.

Ключевую роль в проводимых вычислениях будет играть формула Бине–Коши [143], записанная в терминах функций Шура:

$$\mathcal{P}_{L/n}(\mathbf{y}_N, \mathbf{x}_N) \equiv \sum_{\lambda \subseteq \{(L/n)^N\}} S_\lambda(\mathbf{y}_N) S_\lambda(\mathbf{x}_N) = \left(\prod_{l=1}^N y_l^n x_l^n \right) \frac{\det(T_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{y}_N) \mathcal{V}(\mathbf{x}_N)}, \quad (32)$$

где $\sum_{\lambda \subseteq \{(L/n)^N\}}$ означает суммирование по всем нестрогим разбиениям λ удовлетворяющим: $L \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq n$. В (32) используются определители Вандермонда \mathcal{V}_N (26) и матричные элементы T_{kj} имеют вид:

$$T_{kj} = \frac{1 - (x_k y_j)^{N+L-n}}{1 - x_k y_j}. \quad (33)$$

Начнем с вычисления форм-факторов.

В $XX0$ случае, описываемом гамильтонианом (9), использование (26), (28), (32) и (33) позволяет получить форм-фактор:

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{P}_n | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle = \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{v}_N^{-2}, \mathbf{u}_N^2) = \left(\prod_{l=1}^N \frac{u_l^{2n}}{v_l^{2n}} \right) \frac{\det(T_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_N^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_N^{-2})}, \quad (34)$$

где матричные элементы имеют вид:

$$T_{kj} = \frac{1 - (u_k^2/v_j^2)^{M+1-n}}{1 - u_k^2/v_j^2}. \quad (35)$$

Соотношение (34) превращается при $n = 0$ в представление для скалярного произведения:

$$\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle = \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^N\}} S_\lambda(\mathbf{v}^{-2}) S_\lambda(\mathbf{u}^2) = \frac{\det(T_{kj}^o)_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}_N(\mathbf{u}^2) \mathcal{V}_N(\mathbf{v}^{-2})}, \quad (36)$$

где

$$T_{kj}^o = \frac{1 - (u_k^2/v_j^2)^{M+1}}{1 - u_k^2/v_j^2}. \quad (37)$$

Для $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, это скалярное произведение равно “квадрату длины” состояний (26): $\mathcal{N}^2(\mathbf{u}) \equiv \langle \Psi_N(\mathbf{u}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$. На решениях $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = e^{i\theta_N}$ (13) уравнений Бете (12) имеем матричные элементы (37),

$$T_{kj}^o = \frac{\sin \pi(I_k - I_j)}{\sin \frac{\pi}{M+1}(I_k - I_j)} e^{i \frac{\pi M}{M+1}(I_k - I_j)} = (M+1) \delta_{jk}, \quad (38)$$

и квадрат нормы:

$$\mathcal{N}^2(\theta) = \frac{(M+1)^N}{|\mathcal{V}_N(e^{i\theta})|^2} = \frac{(M+1)^N}{\prod_{1 \leq m < l \leq N} 2(1 - \cos \frac{2\pi}{M+1}(I_l - I_m))}. \quad (39)$$

Если $\boldsymbol{\theta}_N$ и $\boldsymbol{\theta}'_N$ соответствуют двум независимым наборам решений уравнений Бете, то соответствующие собственные векторы ортогональны [42]: $\langle \Psi(e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}) | \Psi(e^{i\boldsymbol{\theta}'_N/2}) \rangle = 0$. Образуя полный и ортогональный набор состояний, эти собственные векторы позволяют построить разложение единицы [3, 4]:

$$\mathbb{I} = \sum_{\{\boldsymbol{\theta}_N\}} \mathcal{N}^{-2}(\boldsymbol{\theta}_N) | \Psi(e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}) \rangle \langle \Psi(e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}) |, \quad (40)$$

где суммирование идет по всем наборам независимых бетевских решений (13).

Рассмотрим отношение:

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, n) \equiv \frac{\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle}{\mathcal{N}(\mathbf{v})\mathcal{N}(\mathbf{u})}, \quad (41)$$

где $\bar{\Pi}_n$ – проектор (29). На бетевских решениях (13) форм-фактор (34) принимает вид

$$\langle \Psi(e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}) | \bar{\Pi}_n | \Psi(e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}) \rangle = \frac{(M+1)^N}{|\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N})|^2} \det(\delta_{kj} - K_n(\theta_k, \theta_j))_{1 \leq k, j \leq N}, \quad (42)$$

где матричные элементы $K_n(\theta_k, \theta_j)$ равны

$$K_n(\theta_k, \theta_j) \equiv \frac{e^{i(n-1)(\theta_k - \theta_j)/2} \sin \frac{n(\theta_k - \theta_j)}{2}}{M+1 \sin \frac{\theta_k - \theta_j}{2}}. \quad (43)$$

В результате, нормированное среднее (41) принимает вид

$$\mathcal{T}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}, e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}, n) = \det(\delta_{lm} - K_n(\theta_l, \theta_m))_{1 \leq l, m \leq N}.$$

В этом виде оно известно как *вероятность образования пустоты*, то есть вероятность образования цепочки из n последовательных спинов “вверх” [38, 41, 42, 144].

Другой коррелятор связан с оператором рождения доменной стенки \bar{F}_n (30):

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_{N-n}, n) \equiv \frac{\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle}{\mathcal{N}(\mathbf{v}_N)\mathcal{N}(\mathbf{u}_{N-n})} \quad (44)$$

где $\mathbf{v}_N \equiv (v_1, v_2, \dots, v_N)$, $\mathbf{u}_{N-n} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_{N-n})$ и подразумевается, что приняты сокращенные обозначения: $| \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle \equiv | \Psi_{N-n}(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle$, $\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \equiv \langle \Psi_N(\mathbf{v}_N) |$. Для его

вычисления, введем во первых вспомогательный оператор $D^n(\mathbf{u})$, действующий на ожидание $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{u}}$, которое рассматривается как функция \mathbf{u} :

$$D^n(\mathbf{u}) \langle \cdot \rangle_{\mathbf{u}} \equiv D_{u_{N-n+1}, u_{N-n+2}, \dots, u_N} \left(\frac{\mathcal{V}(\mathbf{u}_N^2)}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_{N-n}^2)} \times \langle \cdot \rangle_{\mathbf{u}} \right), \quad (45)$$

Здесь $D_{u_{N-n+1}, u_{N-n+2}, \dots, u_N}$ означает последовательное n -кратное применение операторов дифференцирования $D_{u_{N-j}}^j$,

$$D_{u_{N-n+1}, u_{N-n+2}, \dots, u_N} \equiv D_{u_{N-n+1}}^{n-1} \circ D_{u_{N-n+2}}^{n-2} \circ \dots \circ D_{u_N}^0, \quad (46)$$

где

$$D_{u_{N-j}}^j \equiv \lim_{u_{N-j}^2 \rightarrow 0} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d(u_{N-j}^2)^j}, \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (47)$$

Определение (45) означает, что ожидание $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{u}}$ сначала умножается на отношение определителей Вандермонда, а потом дифференцируется n раз. С учетом определений, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 Действие оператора $D^n(\mathbf{u})$, выражаемого соотношениями (45), (46), (47), на скалярное произведение $\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle$ дает форм-фактор оператора рождения доменной стенки \bar{F}_n (30):

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle = D^n(\mathbf{u}) \langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle. \quad (48)$$

Значения u_{N-n+1}, \dots, u_N являются вспомогательными и используются в правой части (48) формально, чтобы выразить $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$.

Доказательство Из определений векторов состояния (26), (28) и оператора \bar{F}_n (30) получаем форм-фактор в виде суммы [33]:

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle = \left(\prod_{l=1}^{N-n} u_l^{2n} \right) \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^{N-n}\}} S_{\hat{\lambda}}(\mathbf{v}_N^{-2}) S_{\lambda}(\mathbf{u}_{N-n}^2), \quad (49)$$

где разбиения λ имеют длину $N-n$: $\mathcal{M} \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-n} \geq 0$. Обозначение $\hat{\lambda}$ в (49) означает разбиение длины N содержащее лишние нули: $\hat{\lambda}_p = \lambda_p$ при $1 \leq$

$p \leq N - n$, и $\hat{\lambda}_{N-n+1} = \hat{\lambda}_{N-n+2} = \dots = \hat{\lambda}_N = 0$. Соответствующие строгие разбиения даны формулами $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{\delta}_N$ и $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\delta}_{N-n}$. Чтобы вывести (49), действуем оператором \bar{F}_n на состояние $|\Psi(\mathbf{u}_{N-n})\rangle$ (26), где область суммирования имеет вид: $\boldsymbol{\lambda} \subseteq \{(\mathcal{M} + n)^{N-n}\}$. Оператор \bar{F}_n действует нетривиально только на те векторы в сумме $|\Psi(\mathbf{u}_{N-n})\rangle$, которые не содержат состояний со спином “вниз” на первых n узлах цепочки:

$$\begin{aligned} \bar{F}_n |\Psi(\mathbf{u}_{N-n})\rangle &= \sum_{\boldsymbol{\lambda} \subseteq \{(\mathcal{M}+n)/n\}^{N-n}} S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}_{N-n}^2) \left(\prod_{l=0}^{n-1} \sigma_l^- \right) \left(\prod_{k=1}^{N-n} \sigma_{\mu_k}^- \right) |\uparrow\rangle \\ &= \left(\prod_{l=1}^{N-n} u_l^{2n} \right) \sum_{\boldsymbol{\lambda} \subseteq \{\mathcal{M}^{N-n}\}} S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}_{N-n}^2) \left(\prod_{l=0}^{n-1} \sigma_l^- \right) \left(\prod_{k=1}^{N-n} \sigma_{\mu_k}^- \right) |\uparrow\rangle, \end{aligned} \quad (50)$$

где используется определение функций Шура в (26). Применяя определение сопряженного состояния (28) и пользуясь ортогональностью состояний (26) и (28), получаем, что правая часть соотношения (49) имеет место. Вычисляя правую часть (48) прямым дифференцированием форм-фактора (34), взятого в виде ряда и при $n = 0$, получаем соотношение в правой части формулы (49). \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 позволяет получить два правила суммирования для функций Шура, которые играют роль в получении комбинаторных результатов. Таким образом, возникает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 *Имеют место суммы произведений функций Шура:*

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \subseteq \{\mathcal{M}^{N-n}\}} S_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}(\mathbf{v}_N^{-2}) S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}_{N-n}^2) = \left(\prod_{l=1}^{N-n} u_l^{-2n} \right) \frac{\det(\bar{T}_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_{N-n}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_N^{-2})}, \quad (51)$$

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \subseteq \{\mathcal{M}^{N-n}\}} S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}_{N-n}^{-2}) S_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}(\mathbf{u}_N^2) = \left(\prod_{l=1}^{N-n} v_l^{2n} \right) \frac{\det(\tilde{T}_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{v}_{N-n}^{-2}) \mathcal{V}(\mathbf{u}_N^2)}, \quad (52)$$

где матричные элементы $(\bar{T}_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}$ и $(\tilde{T}_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}$ задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{kj} &= T_{kj}^o, & 1 \leq k \leq N-n, & & 1 \leq j \leq N, \\ \bar{T}_{kj} &= v_j^{-2(N-k)}, & N-n+1 \leq k \leq N, & & 1 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (53)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{kj} &= T_{kj}^o, & 1 \leq k \leq N, & & 1 \leq j \leq N-n, \\ \tilde{T}_{kj} &= u_j^{2(N-k)}, & 1 \leq k \leq N, & & N-n+1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Доказательство Вычислим правую часть соотношения (48), используя представление для (36) в виде определителя:

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle = \mathbf{D}^n(\mathbf{u}) \left(\frac{\det(T_{kj}^o)_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_N^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_N^{-2})} \right). \quad (54)$$

Учитывая явную форму T_{kj}^o (37), получаем:

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle = \frac{\det(\bar{T}_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_{N-n}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_N^{-2})}, \quad (55)$$

где \bar{T} задается (53). Так как правые части (49) and (55) совпадают, соотношение для функций Шура (51) (которое, в принципе, того же типа, что и (32)) имеет место.

Действуя аналогично, можно установить соотношение (52). \square

Перейдем к корреляционным функциям. Коррелятор выживания ферромагнитной струны имеет связь с проблемой блуждания *недружественных пешеходов* в модели блуждания со случайными поворотами [62]. Случайные блуждания на одномерной периодической решетке связаны с корреляционными функциями ХХ0-магнетика [28, 29, 69].

С учетом векторов состояния (26) и (28), получаем следующую амплитуду перехода [31]:

$$\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle = \sum_{\lambda^L, \lambda^R \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} S_{\lambda^L}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\lambda^R}(\mathbf{u}^2) F_{\mu^L; \mu^R}(\beta), \quad (56)$$

параметризованную произвольными \mathbf{u} и \mathbf{v} . Область суммирований по $\boldsymbol{\lambda}^L$ и $\boldsymbol{\lambda}^R$ определена в (32), и $\boldsymbol{\mu}^{L,R} = \boldsymbol{\lambda}^{L,R} + \boldsymbol{\delta}_N$ означает соответствующие строгие разбиения.

Амплитуда перехода

$$F_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R}(\beta) \equiv \langle \uparrow | \left(\prod_{l=1}^N \sigma_{\mu_l^L}^+ \right) e^{-\beta \mathcal{H}} \left(\prod_{p=1}^N \sigma_{\mu_p^R}^- \right) | \uparrow \rangle, \quad (57)$$

является $2N$ -точечной корреляционной функцией над ферромагнитным состоянием, связанной с перечислением допустимых траекторий, которые описываются N недружественными пешеходами, перемещающимся по узлам одномерной цепочки [28, 29, 69]. Представление (56) переходит в (34) при $\beta = 0$, так как (57) превращается

в соотношение ортогональности равно $\prod_{n=1}^N \delta_{\mu_n \nu_n}$.

В самом деле, пусть $|P_K(\mu_1^R, \dots, \mu_N^R \rightarrow \mu_1^L, \dots, \mu_N^L)|$ обозначает количество траекторий, состоящих из K звеньев, которые описаны N недружественными пешеходами в модели со случайными поворотами. Здесь начальное и конечное положения пешеходов на узлах задаются соответственно элементами строгих убывающих разбиений $\mu_1^R > \mu_2^R > \dots > \mu_N^R$ и $\mu_1^L > \mu_2^L > \dots > \mu_N^L$. Пусть \mathcal{D}_ℓ^K – оператор дифференцирования K -го порядка по ℓ в точке $\ell = 0$ [63]. Применение $\mathcal{D}_{\beta/2}^K$ к коррелятору (57) приводит к среднему следующего вида:

$$\langle \uparrow | \sigma_{\mu_1^L}^+ \sigma_{\mu_2^L}^+ \dots \sigma_{\mu_N^L}^+ (-2\mathcal{H})^K \sigma_{\mu_1^R}^- \sigma_{\mu_2^R}^- \dots \sigma_{\mu_N^R}^- | \uparrow \rangle,$$

которое, как установлено в [29] с помощью перестановочного соотношения

$$[\mathcal{H}, \sigma_{\mu_1^R}^- \sigma_{\mu_2^R}^- \dots \sigma_{\mu_N^R}^-] = \sum_{k=1}^N \sigma_{\mu_1^R}^- \dots \sigma_{\mu_{k-1}^R}^- [\mathcal{H}, \sigma_{\mu_k^R}^-] \sigma_{\mu_{k+1}^R}^- \dots \sigma_{\mu_N^R}^-, \quad (58)$$

дает числа $|P_K(\mu_1^R, \dots, \mu_N^R \rightarrow \mu_1^L, \dots, \mu_N^L)|$. Условие непересечения траекторий пешеходов проявляется в исчезновении функции (57) для любой пары совпадающих индексов μ_k^R или μ_p^L . Таким образом, среднее (56) есть производящая функция мно-

гочленов от $2N$ переменных $u_1^2, u_2^2, \dots, u_N^2, v_1^{-2}, v_2^{-2}, \dots, v_N^{-2}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\beta/2}^K \left[\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle \right] &= \\ &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}^L, \boldsymbol{\lambda}^R \subseteq \{(M-N-n)^N\}} |P_K(\boldsymbol{\mu}^R \rightarrow \boldsymbol{\mu}^L)| S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(\mathbf{u}^2) \end{aligned} \quad (59)$$

(напомним, что $\boldsymbol{\mu}^{L,R} = \boldsymbol{\lambda}^{L,R} + \boldsymbol{\delta}$). Как показано в [63], количество траекторий, состоящих из K звеньев, и которые описаны N недружественными пешеходами на оси, то есть число $|P_K(\boldsymbol{\mu}^R \rightarrow \boldsymbol{\mu}^L)|$, выражается через количество траекторий той же самой “длины” K , но которые принадлежат одиночному пешеходу, который перемещается по узлам N -мерной решетки бесконечной протяженности.

Коррелятор (57) удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} F_{\mu_1^L, \mu_2^L, \dots, \mu_N^L; \mu_1^R, \mu_2^R, \dots, \mu_N^R}(\beta) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(F_{\mu_1^L, \mu_2^L, \dots, \mu_N^L; \mu_1^R, \mu_2^R, \dots, \mu_k^R+1, \dots, \mu_N^R}(\beta) + F_{\mu_1^L, \mu_2^L, \dots, \mu_N^L; \mu_1^R, \mu_2^R, \dots, \mu_k^R-1, \dots, \mu_N^R}(\beta) \right), \end{aligned} \quad (60)$$

которое было рассмотрено в [29] для периодического граничного условия по решеточному аргументу и для “начального” условия: $F_{\mu_1^L, \mu_2^L, \dots, \mu_N^L; \mu_1^R, \mu_2^R, \dots, \mu_N^R}(0) = \prod_{k=1}^N \delta_{\mu_k^L, \mu_k^R}$.

Коррелятор (57), как решение уравнения (60), записывается в виде определителя:

$$F_{\mu_1^L, \mu_2^L, \dots, \mu_N^L; \mu_1^R, \mu_2^R, \dots, \mu_N^R}(\beta) = \det \left(F_{\mu_k^L; \mu_l^R}(\beta) \right)_{1 \leq k, l \leq N}, \quad (61)$$

где матричные элементы

$$F_{k;l}(\beta) \equiv \frac{1}{M+1} \sum_{s=0}^M e^{\beta \cos \phi_s} e^{i\phi_s(k-l)}, \quad \phi_s = \frac{2\pi}{M+1} \left(s - \frac{M}{2} \right), \quad (62)$$

являются амплитудами перехода $F_{k;l}(\beta) = \langle \uparrow | \sigma_k^+ e^{-\beta \mathcal{H}} \sigma_l^- | \uparrow \rangle$, то есть совпадают с (57) при $N = 1$ (см. также (143)). Они могут рассматриваться как производящие функции блужданий единичного пешехода, перемещающегося между l -ым и k -ым узлами периодической цепочки. Подстановка (62) в (61) позволяет выразить амплитуду (57)

через функции Шура и определители Вандермонда, введенные в (26) [28]:

$$F_{\mu^L; \mu^R}(\beta) = \frac{1}{(M+1)^N} \sum_{\{\phi_N\}} e^{-\beta E_N(\phi_N)} |\mathcal{V}(e^{i\phi_N})|^2 S_{\lambda^L}(e^{i\phi_N}) S_{\lambda^R}(e^{-i\phi_N}), \quad (63)$$

где суммирование идет по N -наборам $\phi_N \equiv (\phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N})$, параметризованным целыми числами k_i , $1 \leq i \leq N$, удовлетворяющими $M \geq k_1 > k_2 > \dots > k_N \geq 0$. Энергия $E_N(\phi_N)$ определена в (14). Подставляя (63) в (56) и применяя формулу Бине–Коши (32), получаем [31, 33]:

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle = \\ & = \frac{1}{(M+1)^N} \sum_{\{\phi_N\}} e^{-\beta E_N(\phi_N)} |\mathcal{V}(e^{i\phi_N})|^2 \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{v}_N^{-2}, e^{i\phi_N}) \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{-i\phi_N}, \mathbf{u}_N^2) \end{aligned} \quad (64)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_N^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_N^{-2})} \det \left(\sum_{k,l=n}^M F_{k;l}(\beta) \frac{u_i^{2l}}{v_j^{2k}} \right)_{1 \leq i,j \leq N}, \quad (65)$$

где $\mathcal{P}_{L/n}(\mathbf{y}_N, \mathbf{x}_N)$ и $F_{k;l}(\beta)$ определены в (32) и (62), соответственно. При $\beta = 0$, выражение (65) переходит в (34). При $n = 0$ имеем $\bar{\Pi}_n = 1$ и соотношение (65) дает ответ для $\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | e^{-\beta \mathcal{H}} | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle$. Принимая во внимание

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | e^{-\beta \mathcal{H}} | \Psi(e^{i\theta_N/2}) \rangle = \langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \Psi(e^{i\theta_N/2}) \rangle e^{-\beta E_N(\theta_N)}, \quad (66)$$

где $E_N(\theta_N)$ даны в (14), получаем из (65) ответ для выживания ферромагнитной струны (29),

$$\mathcal{T}(\theta_N^g, n, \beta) = \frac{e^{\beta E_N(\theta_N^g)}}{(M+1)^N} \det \left(\sum_{k,l=n}^M F_{k;l}(\beta) e^{i(\theta_i^g - k\theta_j^g)} \right)_{1 \leq i,j \leq N}, \quad (67)$$

где энергия основного состояния $E_N(\theta_N^g)$ дана соотношением (15). Из выражения (64) следует представление корреляционной функции, которое удобно при изучении асимптотического поведения:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\theta_N^g, n, \beta) &= \frac{1}{\mathcal{N}^2(\theta_N^g) (M+1)^N} \sum_{\{\theta_N\}} e^{-\beta(E_N(\theta_N) - E_N(\theta_N^g))} \\ &\quad \times |\mathcal{V}(e^{i\theta_N}) \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{-i\theta_N}, e^{i\theta_N^g})|^2, \end{aligned} \quad (68)$$

где $\mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}_N^g)$ – норма (39) основного состояния (15), и имеем $\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{-i\boldsymbol{\theta}_N}, e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g})$ (32) на решениях уравнения Бете (12). Продемонстрированное вычисление выживания ферромагнитной струны показывает ее связь с перечислением блужданий недружественных пешеходов.

Перейдем к выводу замкнутого выражения для выживания доменной стенки $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta)$ (30), аналогичного (67) [31, 33]. Чтобы вычислить $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta)$, вставим разложение единицы (40) в числитель выражения (30), взятого в произвольной параметризации:

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_{N-n}) | \bar{F}_n^+ e^{-\beta\mathcal{H}} \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle = \quad (69)$$

$$= \sum_{\{\boldsymbol{\theta}_N\}} \langle \Psi(\mathbf{v}_{N-n}) | \bar{F}_n^+ | \Psi(e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}) \rangle \langle \Psi(e^{i\boldsymbol{\theta}_N/2}) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle \frac{e^{-\beta E_N(\boldsymbol{\theta}_N)}}{\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}_N)} \quad (70)$$

$$= D^n(\mathbf{u}) D^n(\mathbf{v}^{-1}) \langle \Psi(\mathbf{v}_N) | e^{-\beta\mathcal{H}} | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle, \quad (71)$$

где \bar{F}_n^+ – оператор эрмитово сопряженный с оператором \bar{F}_n (30) и действующий на сопряженный вектор состояния (28). Из разложения (70) получаем (71) при условии, что (48) используется для каждого из форм-факторов в (70). Подстановка соотношения (65), взятого при $n = 0$, в (71) приводит к ответу:

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\mathbf{v}_{N-n}) | \bar{F}_n^+ e^{-\beta\mathcal{H}} \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle &= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_{N-n}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_{N-n}^{-2})} \\ &\times D_{v_{N-n+1}^{-1}, v_{N-n+2}^{-1}, \dots, v_N^{-1}} \circ D_{u_{N-n+1}, u_{N-n+2}, \dots, u_N} \det \left(\sum_{k,l=0}^M F_{k;l}(\beta) \frac{u_i^{2l}}{v_j^{2k}} \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \end{aligned} \quad (72)$$

где $D_{u_{N-n+1}, u_{N-n+2}, \dots, u_N}$ задается (46), а $D_{v_{N-n+1}^{-1}, v_{N-n+2}^{-1}, \dots, v_N^{-1}}$ определяется аналогично.

После дифференцирований представление (72) принимает вид:

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_{N-n}) | \bar{F}_n^+ e^{-\beta\mathcal{H}} \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_{N-n}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_{N-n}^{-2})} \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

где матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} определены следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{ij} &\equiv \sum_{k,l=0}^M F_{k;l}(\beta) \frac{u_i^{2l}}{v_j^{2k}}, \quad 1 \leq i, j \leq N-n, \\ B_{ij} &\equiv \sum_{l=0}^M F_{n-j;l}(\beta) u_i^{2l}, \quad 1 \leq i \leq N-n, 1 \leq j \leq n, \\ C_{ij} &\equiv \sum_{l=0}^M F_{l;n-i}(\beta) v_j^{-2l}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N-n, \\ D_{ij} &\equiv F_{n-i;n-j}(\beta), \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Окончательно, получаем ответ для выживания доменной стенки 30):

$$\mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}^g, n, \beta) = \frac{e^{\beta E_{N-n}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}^g)}}{(M+1)^{N-n}} \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}|_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^g} & \mathbf{B}|_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^g} \\ \mathbf{C}|_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^g} & \mathbf{D}|_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^g} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A}|_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^g} \equiv \lim_{\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \rightarrow \exp(i\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}^g)} \mathbf{A}$ (аналогично для \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D}).

Использование в соотношении (70) явной формулы для форм-фактора (49) позволяет выразить выживание доменной стенки в терминах функций Шура:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}^g, n, \beta) &= \frac{1}{\mathcal{N}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}^g)(M+1)^{N-n}} \sum_{\{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}\}} e^{-\beta(E_{N-n}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}) - E_{N-n}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}^g))} \\ &\quad \times \left| \mathcal{V}(e^{i\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}}) \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^{N-n}\}} S_{\lambda}(e^{-i\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}}) S_{\lambda}(e^{i\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}^g}) \right|^2. \end{aligned} \quad (73)$$

где суммирование идет по всем решениям уравнений Бете (12), и $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-n}^g$ соответствует решению для основного состояния $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^g$ (31) для системы из $N-n$ частицы.

1.1.3 Форм-факторы и корреляционная функция типа выживания ферромагнитной струны при бесконечной анизотропии

Перейдем к пределу сильной анизотропии $\Delta \rightarrow -\infty$, который описывается гамильтонианом \hat{H}_{SA} (17). Будем вычислять корреляционную функцию выживания ферромагнитной струны, которую, следуя [32], рассмотрим для состояний, не имеющих

спинов “вниз” на последних $n + 1$ узлах решетки:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) \equiv \frac{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \hat{H}_{SA}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) | e^{-\beta \hat{H}_{SA}} | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}, \quad \bar{\Pi}_n \equiv \prod_{j=M-n}^M \check{q}_j, \quad (74)$$

где \hat{H}_{SA} , \check{q}_j и $\boldsymbol{\theta}^g$ определены, соответственно, соотношениями (17), (18) и (23). Вектор состояния определен соотношением (27). Скалярное произведение вектора (27) на сопряженный (соответствующее определение аналогично (28)) задается соотношением, выглядящим аналогично (36):

$$\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle = \sum_{\tilde{\lambda} \subseteq \{(M-2(N-1))^N\}} S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{u}^2) = \frac{\det(T_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{u}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}^{-2})}, \quad (75)$$

где матричные элементы T_{kj} имеют вид:

$$T_{kj} = \frac{1 - (u_k^2/v_j^2)^{M-N+2}}{1 - u_k^2/v_j^2}. \quad (76)$$

При совпадении параметров \mathbf{v} и \mathbf{u} в левой части (75), уравнения Бете (21) позволяют выразить матричные элементы (76): $T_{jk} = 1 + (M - N + 1)\delta_{jk}$. Тогда квадрат нормы собственных векторов $\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}) \equiv \langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}) | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}) \rangle$ выражается соотношением

$$\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{(M+1)(M+1-N)^{N-1}}{\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{V}(e^{-i\boldsymbol{\theta}})} = \frac{(M+1)(M+1-N)^{N-1}}{\prod_{1 \leq m < l \leq N} 2(1 - \cos(\theta_l - \theta_m))}. \quad (77)$$

В (77) используется решение (22), отвечающее экспоненциальной параметризации. Скалярное произведение $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ (75) исчезает, если параметры \mathbf{u} и \mathbf{v} заменяются на независимые бетевские решения.

Числитель отношения (41) вычисляется с помощью формулы Бине-Коши:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle &= \sum_{\tilde{\lambda} \subseteq \{(M-2N-n+1)^N\}} S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{u}^2) \\ &= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathbf{u}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}^{-2})} \det \left(\frac{1 - (u_k^2/v_j^2)^{(M-N-n+1)}}{1 - u_k^2/v_j^2} \right)_{1 \leq j, k \leq N}. \end{aligned} \quad (78)$$

При $n + 1 = 0$, соотношение (78) сводится к (75). После использования соотношений (77) и (78), ответ для (41), вычисленный на бетевских решениях (22), дает *вероятность образования пустоты* в следующем виде:

$$E(n, N) \equiv \frac{M - N + 1}{M + 1} \times \det \left(\left(1 - \frac{n}{M - N + 1} \right) \delta_{jk} + \frac{1 - e^{in(\theta_j - \theta_k)}}{(M - N + 1)(1 - e^{i(\theta_k - \theta_j)})} (1 - \delta_{jk}) \right)_{1 \leq k, j \leq N}. \quad (79)$$

Вычислим числитель (74) в произвольной параметризации:

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \hat{H}_{\text{SA}}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle = \\ & = \sum_{\tilde{\lambda}^L, \tilde{\lambda}^R \subseteq \{(M-2N-n+1)^N\}} S_{\tilde{\lambda}^L}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\tilde{\lambda}^R}(\mathbf{u}^2) F_{\tilde{\mu}^L; \tilde{\mu}^R}(\beta), \end{aligned} \quad (80)$$

где $F_{\tilde{\mu}^L; \tilde{\mu}^R}(\beta)$ есть $2N$ -точечная корреляционная функция над ферромагнитным состоянием, определяемая (57) за исключением того, что вместо гамильтониана (9) используется гамильтониан \hat{H}_{SA} (17). Суммирование в (80) по нестрогим разбиениям $\tilde{\lambda}^L$ и $\tilde{\lambda}^R$ аналогично суммированию в (75). Соответствующие строгие разбиения $\tilde{\mu}^L$ и $\tilde{\mu}^R$ определяются следующим образом: $\tilde{\mu}^{L,R} = \tilde{\lambda}^{L,R} + 2\delta_N$, где $\delta_N = (N - 1, N - 2, \dots, 0)$. Теперь решеточные индексы $\tilde{\mu}^L, \tilde{\mu}^R$ удовлетворяют требованию исключения: заполнение ближайших узлов запрещено. Аналог соотношения (59) может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{\beta/2}^K \left[\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \hat{H}_{\text{SA}}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle \right] = \\ & = \sum_{\tilde{\lambda}^L, \tilde{\lambda}^R \subseteq \{(M-2N-n+1)^N\}} |P_K(\tilde{\mu}^R \rightarrow \tilde{\mu}^L)| S_{\tilde{\lambda}^L}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\tilde{\lambda}^R}(\mathbf{u}^2). \end{aligned} \quad (81)$$

Решения уравнений Бете (21) приводят к полному набору собственных состояний, и оператор разложения единицы имеет вид:

$$\mathbb{I} = \frac{1}{(M + 1)(M + 1 - N)^{N-1}} \sum_{\{\boldsymbol{\theta}\}} |\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\theta}})|^2 |\Psi_N(\boldsymbol{\theta})\rangle \langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta})|, \quad (82)$$

где $\{\boldsymbol{\theta}\}$ означает суммирование по всем независимым решениям (22). Здесь используется экспоненциальная параметризация решений уравнений Бете в компактной фор-

ме, $e^{i\theta} \equiv (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N})$. Будем вычислять числитель выражения (74) используя вставки разложения единицы (82). Принимая во внимание (66), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \hat{H}_{\text{SA}}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle &= \frac{1}{(M+1)(M+1-N)^{N-1}} \sum_{\{\theta\}} e^{-\beta E_N(\theta)} \\ &\times |\mathcal{V}(e^{i\theta})|^2 \mathcal{P}(\mathbf{v}^{-2}, e^{i\theta}) \mathcal{P}(e^{-i\theta}, \mathbf{u}^2), \end{aligned} \quad (83)$$

где

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}^{-2}, e^{i\theta}) \equiv \sum_{\tilde{\lambda}^L} S_{\tilde{\lambda}^L}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\tilde{\lambda}^L}(e^{i\theta}), \quad \mathcal{P}(e^{-i\theta}, \mathbf{u}^2) \equiv \sum_{\tilde{\lambda}^R} S_{\tilde{\lambda}^R}(e^{-i\theta}) S_{\tilde{\lambda}^R}(\mathbf{u}^2). \quad (84)$$

Область суммирования в (84) имеет вид: $\tilde{\lambda}^L, \tilde{\lambda}^R \subseteq \{(M-2N-n+1)^N\}$. Тогда, с использованием (32) мы получаем из (83):

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \hat{H}_{\text{SA}}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle = \\ &= \frac{1}{(M+1)(M+1-N)^{N-1}} \frac{\sum_{M-N \geq I_1 > I_2 \dots > I_N \geq 0} e^{-\beta E_N(\theta)}}{\mathcal{V}(\mathbf{u}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}^{-2})} \\ &\times \det \left(\frac{1 - (e^{i\theta_i} v_j^{-2})^{M-N-n+1}}{1 - e^{i\theta_i} v_j^{-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \det \left(\frac{1 - (u_l^2 e^{-i\theta_p})^{M-N-n+1}}{1 - u_l^2 e^{-i\theta_p}} \right)_{1 \leq l, p \leq N}, \end{aligned} \quad (85)$$

где суммирование идет по упорядоченным наборам $\{I_k\}_{1 \leq k \leq N}$ которые параметризуют решение θ (22), и $E_N(\theta)$ задается соотношением (24). Выражение для $\mathcal{T}(\theta^{\text{g}}, n, \beta)$ (74) возникает из (85):

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\theta^{\text{g}}, n, \beta) &= \frac{1}{(M+1)^2 (M+1-N)^{N-2}} \sum_{M-N \geq I_1 > I_2 \dots > I_N \geq 0} e^{-\beta(E_N(\theta) - E_N(\theta^{\text{g}}))} \\ &\times \left| \det \left(\frac{1 - e^{i(M-N-n+1)(\theta_l - \theta_p^{\text{g}})}}{1 - e^{i(\theta_l - \theta_p^{\text{g}})}} \right)_{1 \leq l, p \leq N} \right|^2, \end{aligned} \quad (86)$$

где θ^{g} означает вакуумное решение (23), и $E_N(\theta^{\text{g}})$ – энергия основного состояния в пределе сильной анизотропии (24).

ЗАМЕЧАНИЕ: О выборе эффективного гамильтониана при $\Delta \rightarrow -\infty$ и о четырехвершинной модели

Шестивершинная модель, играющая важную роль при обсуждении связи интегрируемых моделей с комбинаторикой, интенсивно изучалась как для периодических,

так и для фиксированных граничных условий (определение которых дано в [145]). Шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки рассмотрена в [23, 24, 27, 146]. Для условия типа доменной стенки модель имеет отношение к перечислению знакопеременных матриц [25] и к перечислению укладок “ацтекских алмазов” [147]. Шестивершинная модель (частный случай, например, шестнадцативершинной модели [1]) на квадратной решетке определяется шестью различными конфигурациями стрелок, направленных как в сторону каждого узла, так и от него. Каждому допустимому типу вершин приписывается статистический вес w_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) (Рис. 2). Изображая стрелки, которые указывают вверх или вправо толстыми линиями, можно получить альтернативное описание вершин в терминах линий, протекающих сквозь узлы решетки. Так как грани решетки могут находиться только в двух состояниях (с жирной линией или без нее), то существует взаимно-однозначное соответствие между допустимыми конфигурациями стрелок на решетке и графами линий – наборами решеточных путей. *Четырехвершинная* модель возникает в пределе, когда $w_1 = w_3 = 0$.

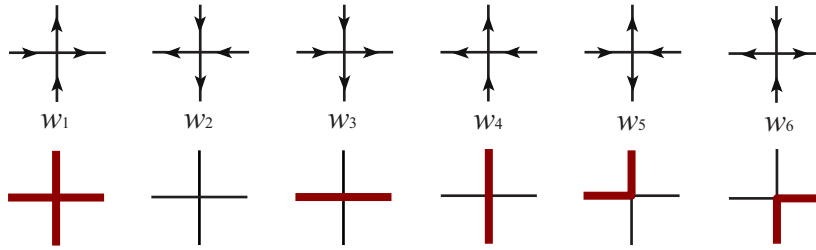


Рис. 2: Конфигурации вершин шестивершинной модели.

Шестивершинная модель характеризуется [148] L -оператором $L_{6v}(n|u)$, который действует в тензорном произведении квантового и вспомогательного пространств [27] ($u \in \mathbb{C}$, n – номер узла, на котором действие L -оператора нетривиально), и который

удовлетворяет сплетающему соотношению

$$\tilde{R}(u, v)(L_{6v}(n|u) \otimes L_{6v}(n|v)) = (L_{6v}(n|v) \otimes L_{6v}(n|u))\tilde{R}(u, v), \quad (87)$$

где $\tilde{R}(u, v)$ есть сплетающая R -матрица. Из $L_{6v}(n|v)$ и $\tilde{R}(u, v)$ специальным предельным переходом можно получить, [32], L -оператор $L_{4v}(n|u)$ и R -матрицу четырехвершинной модели. В частности,

$$L_{4v}(n|u) \equiv \begin{pmatrix} -u\check{q}_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & u^{-1}\check{q}_n \end{pmatrix}, \quad (88)$$

где $\check{q}_n = \sigma_n^+ \sigma_n^-$ (см. (18)) и операторы σ_n^\pm определены в (2). Матрица монодромии рассматриваемых моделей определяется как матричное произведение L -операторов:

$$T(u) = L(M|u)L(M-1|u) \cdots L(0|u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Трансфер-матрица является матричным следом матрицы монодромии: $\tau(u) = \text{Tr } T(u)$.

В работе [148] показано, что трансфер-матрица шестивершинной модели перестановочна с гамильтонианом XXZ модели (1): $[\hat{H}_{XXZ}, \tau_{6v}(u)] = 0$. Трансфер-матрица четырехвершинной модели $\tau_{4v}(u)$ удовлетворяет свойству: $\mathcal{P}\tau_{4v}(u) = \tau_{4v}(u)\mathcal{P} = \tau_{4v}(u)$, где \mathcal{P} – проектор (17), и имеет место, [32],

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 *Трансфер-матрица четырехвершинной модели перестановочна с XXZ -гамильтонианом, взятом в изинговском пределе: $[\hat{H}_{SA}, \tau_{4v}(u)] = 0$.*

Доказательство В [32] приведено доказательство, которое основано на методе, предложенном в [148]. \square

В рамках алгебраического анзаца Бете вектор состояния четырехвершинной модели конструируется следующим образом: $|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \prod_{i=1}^N B_{4v}(u_i) |\uparrow\rangle$, где операторы $B_{4v}(u)$ отвечают (89). Этот вектор является собственным вектором трансфер-матрицы четырехвершинной модели, а следовательно и гамильтониана (17), если па-

параметры u_i удовлетворяют уравнениям Бете (21). В работе [145] показано, что этот вектор представим в виде (27).

Утверждение Скалярное произведение $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ исчезает, если параметры \mathbf{u} и \mathbf{v} соответствуют независимым решениям бетевских уравнений (21).

Доказательство В соответствии с соотношением (75), скалярное произведение $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ пропорционально определителю матрицы $(T_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}$. Уравнения Бете (21) позволяют представить этот определитель следующим образом:

$$\det(T_{kj})_{1 \leq k, j \leq N} \equiv \det\left(\frac{1 - (u_k^2/v_j^2)^{M-N+2}}{1 - u_k^2/v_j^2}\right) = \left(\prod_{k=1}^N \frac{-v_k}{u_k}\right)^N \det(A_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}, \quad (90)$$

где матричные элементы A_{kj} принимают вид:

$$A_{kj} = \frac{(u_k v_j)^{M+3-N}}{u_k^2 - v_j^2} \left(\prod_{l=1, l \neq k}^N u_l^2 - \prod_{l=1, l \neq j}^N v_l^2 \right). \quad (91)$$

Определитель матрицы $(A_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}$ исчезает при условии, что параметры \mathbf{u} и \mathbf{v} являются независимыми решениями уравнений Бете (21). В самом деле, для этой матрицы существует нетривиальный собственный N -вектор с компонентами χ_j , $1 \leq j \leq N$, с нулевым собственным значением:

$$\sum_{j=1}^N A_{kj} \chi_j = 0, \quad \chi_j = (u_j^2 - v_j^2) \prod_{l=1, l \neq j}^N \frac{u_j^2 - v_l^2}{u_j^2 - u_l^2}. \quad (92)$$

Справедливость соотношения (92) имеет место благодаря двум тождествам:

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{y_k - x_k}{y_k - x_j} \prod_{l=1, l \neq k}^N \frac{y_k - x_l}{y_k - y_l} \right) = 1, \\ \sum_{k=1}^N \left(\frac{y_k - x_k}{y_k} \prod_{l=1, l \neq k}^N \frac{y_k - x_l}{y_k - y_l} \right) = 1 - \prod_{l=1}^N \frac{x_l}{y_l}.$$

Таким образом, $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ обращается в нуль, т.е., векторы состояния ортогональны, при условии, что множества параметров \mathbf{u} и \mathbf{v} представляют независимые решения уравнений (21). \square

Полнота системы векторов состояния была доказана в [138, 142]. Итак, эффективный гамильтониан \hat{H}_{SA} (17) перестановочен с трансфер-матрицей четырехвершинной модели, которая возникает из трансфер-матрицы шестивершинной модели в пределе бесконечной анизотропии. Гамильтониан \hat{H}_{SA} (17) и изинговский гамильтониан \hat{H}_{IZ} (16) обладают общей полной ортогональной системой собственных функций. Следовательно, итог **ЗАМЕЧАНИЯ** состоит в том, что как гамильтониан \hat{H}_{SA} (17) так и векторы состояния (27) являются приемлемыми для исследования изинговского предела XXZ модели.

1.1.4 Плоские разбиения, q -биномиальные определители и производящие функции плоских разбиений и самоизбегающих путей

Прежде чем показать, что скалярные произведения векторов состояния и форм-факторы связаны с *производящими функциями плоских разбиений в ящике*, приведем необходимые сведения производящих функций разбиений и биномиальных определителей.

Производящие функции плоских разбиений и самоизбегающих путей

Назовем массив $(\pi_{ij})_{1 \leq i, j}$ неотрицательных целых чисел, которые не возрастают с увеличением как i , так и j , *плоским разбиением* π . Элементы π_{ij} называются *частями* плоского разбиения, и $|\pi| = \sum_{i, j} \pi_{ij}$ есть его *объем* (*вес*). Если λ - некоторое (нестрогое) разбиение, то плоское разбиение π можно рассматривать как отображение из диаграммы разбиения λ (см. Рис. 1) в множество неотрицательных целых чисел, подчиненных указанному требованию невозрастания [30].

Каждому плоскому разбиению соответствует трехмерная диаграмма, образуемая укладкой кубиков с единичной стороной (трехмерная диаграмма Юнга). При этом высота столбца с координатами (i, j) равна части плоского разбиения π_{ij} . Будем на-

зывать ящиком размера $L \times N \times P$ подмножество целочисленной трехмерной решетки:

$$\mathcal{B}(L, N, P) = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid 0 \leq i \leq L, 0 \leq j \leq N, 0 \leq k \leq P\}.$$

Принято говорить, что плоское разбиение π соответствует ящику $\mathcal{B}(L, N, P)$ при условии, что $i \leq L$, $j \leq N$ и $\pi_{ij} \leq P$ для всех кубов диаграммы Юнга. Если части плоского разбиения π убывают вдоль каждого столбца и каждого ряда ($\pi_{ij} > \pi_{i+1,j}$ и $\pi_{ij} > \pi_{i,j+1}$), то говорят, что π есть *строгое плоское разбиение* π_{spp} . Если части плоского разбиения π убывают вдоль каждого столбца ($\pi_{ij} > \pi_{i+1,j}$), то говорят, что π есть *плоское разбиение строгое по столбцам* π_{cspp} . Плоское разбиение π , соответствующее $\mathcal{B}(N, N, P)$, может быть преобразовано в плоское разбиение π_{cspp} строгое по столбцам в $\mathcal{B}(N, N, P + N - 1)$ добавлением $N \times N$ матрицы π_{min} ,

$$\pi_{\text{min}} = \begin{pmatrix} N-1 & N-1 & \cdots & N-1 \\ N-2 & N-2 & \cdots & N-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеется связь между объемами разбиений π и π_{cspp} : $|\pi_{\text{cspp}}| = |\pi| + \frac{N^2(N-1)}{2}$. Плоское разбиение π , соответствующее $\mathcal{B}(N, N, P)$, может быть преобразовано в строгое плоское разбиение π_{spp} в $\mathcal{B}(N, N, P + 2N - 2)$ добавлением матрицы $\pi_{\text{min}} + \pi_{\text{min}}^T$. Аналогично, $|\pi_{\text{spp}}| = |\pi| + N^2(N - 1)$.

Статистическая сумма трехмерных диаграмм Юнга, или производящая функция плоских разбиений в $\mathcal{B}(L, N, P)$, определяется как $Z_q(L, N, P) = \sum_{\{\pi\}} q^{|\pi|}$, где $q^{|\pi|}$ – больцмановский вес, и суммирование идет по всем плоским разбиениям в $\mathcal{B}(L, N, P)$.

Производящая функция $Z_q(L, N, P)$ принимает вид [30]:

$$Z_q(L, N, P) = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^P \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{P+j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}}. \quad (93)$$

Формула Мак-Магона гласит, что имеется

$$A(L, N, P) = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^P \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{P+j+k-1}{j+k-1} \quad (94)$$

плоских разбиений в ящике $\mathcal{B}(L, N, P)$. Правая часть (93) стремится к $A(L, N, P)$ при $q \rightarrow 1$.

Производящая функция плоских разбиений строгих по столбцам в $\mathcal{B}(N, N, P)$ есть:

$$Z_q^{\text{cspp}}(N, N, P) = q^{\frac{N^2}{2}(N-1)} \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{1 - q^{P+1+j-k}}{1 - q^{j+k-1}}. \quad (95)$$

Предел $q \rightarrow 1$ дает число $A^{\text{cspp}}(N, N, P)$ плоских разбиений строгих по столбцам в $\mathcal{B}(N, N, P)$:

$$A^{\text{cspp}}(N, N, P) = \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{P+1+j-k}{j+k-1}. \quad (96)$$

Заметим, что

$$Z_q^{\text{cspp}}(N, N, P) = q^{\frac{N^2}{2}(N-1)} Z_q(N, N, P - N + 1), \quad (97)$$

и $A^{\text{cspp}}(N, N, P) = A(N, N, P - N + 1)$.

Производящая функция строгих плоских разбиений в $\mathcal{B}(N, N, P)$ есть:

$$Z_q^{\text{spp}}(N, N, P) = q^{N^2(N-1)} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{1 - q^{P+3-j-k}}{1 - q^{j+k-1}}. \quad (98)$$

При $q \rightarrow 1$ получаем число строгих плоских разбиений в $\mathcal{B}(N, N, P)$:

$$A^{\text{spp}}(N, N, P) = \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{P+3-j-k}{j+k-1}. \quad (99)$$

Что касается строгих плоских разбиений, то существует [145] взаимно-однозначное соответствие между ними и наборами допустимых путей на $2N \times (P+1)$ -мерной квадратной решетке со следующими граничными условиями: все стрелки на левом и правом краях указывают влево, в то время как стрелки на верхнем и нижнем концах первых N колонок (считая слева) указывают внутрь, в то время как стрелки на верхнем и нижнем концах последних N колонок указывают наружу. Данные условия и называются фиксированными граничными условиями (см. Рис. 3, где $N = 3$ и $P = 6$). Как решеточные пути четырехвершинной модели, так и градиентные линии

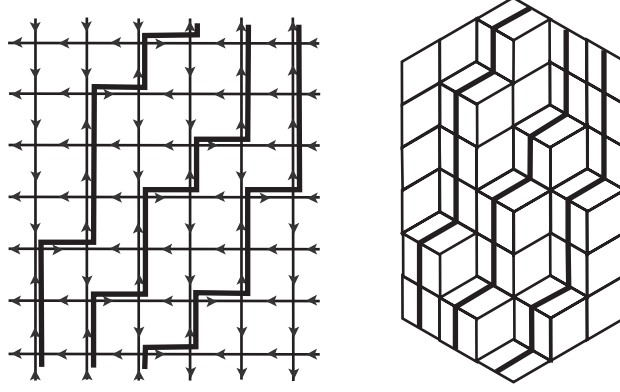


Рис. 3: Допустимый набор решеточных путей для четырехвершинной модели и соответствующее строгое плоское разбиение.

для строгого разбиения на Рис. 3 характеризуются 3×3 матрицей π ,

$$\pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

q -Биномиальные определители и определитель куперберговского типа

Имеется связь между форм-факторами $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \mathcal{O} | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ операторов \bar{P}_n и \bar{F}_n , вычисленными в q -параметризации,

$$\mathbf{v}^{-2} = \mathbf{q} \equiv (q, q^2, \dots, q^N), \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{q}/q = (1, q, \dots, q^{N-1}), \quad (100)$$

и производящими функциями плоских разбиений. Точнее, скалярные произведения векторов состояния (36) и (75), а также форм-факторы (34), (49) и (78) связаны с производящими функциями плоских разбиений в ящике (93), (95) и (98). Эта связь выявляется в q -параметризации (100), и соответствующие формулы даются **ПРЕДЛОЖЕНИЕМ 4**, которое и будет сформулировано ниже. В соответствующих соотношениях существенно используются q -биномиальные определители [43]. Напомним основные понятия.

Пусть дана пара S -наборов, \mathbf{a} и \mathbf{b} , упорядоченных следующим образом: $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_S$ и $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_S$. Тогда q -биномиальный определитель, $\binom{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}_q$, определен так

$$\binom{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}_q \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_S \\ b_1 & b_2 & \dots & b_S \end{pmatrix}_q \equiv \det \left(\begin{bmatrix} a_j \\ b_i \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq S}, \quad (101)$$

где матричные элементы $\begin{bmatrix} a_j \\ b_i \end{bmatrix}$ задаются q -биномиальными коэффициентами:

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} \equiv \frac{[N]!}{[r]! [N-r]!}. \quad (102)$$

Здесь, $[n]$ означает q -число, являющееся q -аналогом положительного целого $n \in \mathbb{Z}^+$, $[n] \equiv \frac{1-q^n}{1-q}$, и $[n]! \equiv [1][2] \dots [n]$ - q -факториал, $[0]! \equiv 1$. Свойства q -биномиальных коэффициентов даны в ПРИЛОЖЕНИИ I. В пределе $q \rightarrow 1$, q -биномиальные коэффициенты становятся биномиальными коэффициентами $\binom{a_j}{b_i}$, и q -биномиальный определитель (101) превращается в *биномиальный определитель*, [149]:

$$\binom{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_S \\ b_1 & b_2 & \dots & b_S \end{pmatrix} = \det \left(\binom{a_j}{b_i} \right)_{1 \leq i, j \leq S}. \quad (103)$$

Биномиальный определитель (103) неотрицателен и становится положительным при $b_i \leq a_i, \forall i$, [149]. Что касается упорядочения элементов \mathbf{a} и \mathbf{b} в (101), (103), мы следуем работе [149], где показано, что биномиальный определитель дает число самоизбегающих путей определенного типа на двумерной решетке. Пусть пучок путей (w_1, w_2, \dots, w_S) таков, что путь w_i идет из $A_i = (0, a_i)$ в $B_i = (b_i, b_i)$, $1 \leq i \leq S$ и при этом допустимы шаги только в северном и восточном направлениях. Типичный пучок для $S = 5$ изображен на Рис. 4.

Чтобы согласовать наши обозначения для разбиений с определениями (101), (103), введем значок обратного упорядочения разбиений. Например, $\delta_{\mathcal{P}}^{\leftarrow} = (0, 1, \dots, \mathcal{P} - 1)$.

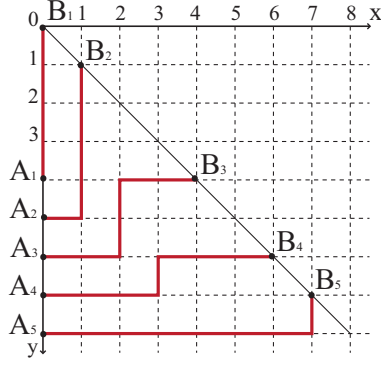


Рис. 4: S -Набор (w_1, w_2, \dots, w_S) самоизбегающих путей для $S = 5$.

Жирные символы \mathbf{N} или $\mathbf{1}$ означают (N, N, \dots, N) или $(1, 1, \dots, 1)$, соответственно.

Теперь можно сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 Значение определителя матрицы $(\bar{T})_{1 \leq j, k \leq N}$, задаваемой матричными элементами:

$$\bar{T}_{kj} = \frac{1 - q^{(P+1)(j+k-1)}}{1 - q^{j+k-1}}, \quad 1 \leq k \leq L, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (104)$$

$$\bar{T}_{kj} = q^{j(N-k)}, \quad L+1 < k \leq N, \quad 1 \leq j \leq N,$$

где $\frac{P}{2} < N < P$, $L \leq N$ (когда $L = N$, \bar{T} состоит из одного блока), выражается следующими соотношениями:

$$q^{-\frac{L}{2}(L-1)(N-L)} \frac{\det(\bar{T})_{1 \leq j, k \leq N}}{\mathcal{V}_N(\mathbf{q})\mathcal{V}_L(\mathbf{q}/q)} = q^{\frac{N}{2}(1-P)\mathcal{P}} \begin{pmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{L} + \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \\ \mathbf{L} + \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \end{pmatrix}_q = \quad (105)$$

$$= \prod_{k=1}^{\mathcal{P}} \prod_{j=1}^L \frac{1 - q^{j+k+N-1}}{1 - q^{j+k-1}} = Z_q(L, N, \mathcal{P}), \quad (106)$$

где $\mathcal{P} \equiv P - N + 1$, и $\mathcal{V}_N(\mathbf{q})$, $\mathcal{V}_L(\mathbf{q}/q)$ - определители Вандермонда. Кроме того, $Z_q(L, N, \mathcal{P})$ есть производящая функция (93), и q -биномиальный определитель имеет вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{L} + \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \\ \mathbf{L} + \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \end{pmatrix}_q &\equiv \begin{pmatrix} N+L, & N+L+1, & \dots & N+L+\mathcal{P}-1 \\ L, & L+1, & \dots & L+\mathcal{P}-1 \end{pmatrix}_q = \\ &= \begin{pmatrix} L+N, & L+1+N, & \dots & L+\mathcal{P} \\ L, & L+1, & \dots & L+\mathcal{P}-N \end{pmatrix}_q. \end{aligned} \quad (107)$$

Доказательство соотношений (105) и (106), основанное на теории симметрических функций, приведено в ПРИЛОЖЕНИИ I. Хотя $1 \leq L \leq N$, соотношение $\det \bar{\Gamma} =$

$q^{\frac{N}{2}(1-P)P} \mathcal{V}_N(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} \mathbf{N} + \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \\ \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \end{pmatrix}_q$ формально можно записать и при $L = 0$, т.к. в этом случае

$\det \bar{\Gamma}$ есть определитель Вандермонда. При $L = 0$, q -биномиальный определитель

имеет вид $\begin{pmatrix} \mathbf{N} + \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \\ \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \end{pmatrix}_q = q^{\frac{N}{2}(P-1)P}$ (см. (A1.17)) и равен единице при $q \rightarrow 1$. \square

Замечание 1 Матричные элементы (104) соответствуют матричным элементам (53) в q -параметризации (100) (при этом P, L в (104) произвольны). Уместно называть $\det \bar{\Gamma}$ определителем куперберговского типа (см. [25], где обсуждается связь формулы для числа знакопеременных матриц [26] со статсуммой шестивершинной модели с граничным условием типа доменной стенки). А именно, рассмотрим представление $Z_q(N, N, \mathcal{P})$ в виде двойного произведения в соответствии с (93), где L и P заменены на N и \mathcal{P} , соответственно. В этом случае, формула для $\det \bar{\Gamma}$ даваемая **ПРЕДЛОЖЕНИЕМ 4** совпадает с формулой, следующей из соотношения

$$\det \left(\frac{1 - s^{j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}} \right)_{1 \leq j, k \leq N} = \mathcal{V}_N(\mathbf{q}) \mathcal{V}_N(\mathbf{q}/q) \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{1 - sq^{j-k}}{1 - q^{j+k-1}}, \quad (108)$$

взятого при $s = q^{P+1}$. Соотношение (108) извлекается из [25]. Существенное своеобразие излагаемого подхода состоит в том, что $\bar{\Gamma}$ (104) состоит из двух блоков, и ее матричные элементы зависят только от одного параметра q . В свою очередь, матрица под знаком определителя в левой части (108) состоит из одного блока, зависящего от двух независимых параметров s и q . Доказательство **ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4** отличается от доказательства в [25] тем, что основано на применении формулы Бине-Коши и симметрических функций.

Замечание 2 Соотношение (105) связывает $\det \bar{\Gamma}$ с q -биномиальным определителем (102) который дает в пределе $q \rightarrow 1$ число \mathcal{P} -наборов самоизбегающих путей, связы-

вающих точки $A_l = (0, N + L + l - 1)$ и $B_l = (L + l - 1, L + l - 1)$, $1 \leq l \leq \mathcal{P}$, на квадратной решетке (соответствующая картинка аналогична той, что на Рис. 4 за исключением того, что точки B_l сейчас эквидистантны). Число \mathcal{P} -наборов самоизбегающих решеточных путей возрастает от единичного значения при условии, что L растёт от нуля до N .

Замечание 3 Объекты, фигурирующие в формулировке **ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4**, имеют наглядную комбинаторную трактовку. А именно, в пределе $q \rightarrow 1$, q -биномиальный определитель в соотношении (105) переходит в биномиальный определитель, а производящая функция в (106) становится числом плоских разбиений $A(L, N, \mathcal{P})$ (94) в ящике $\mathcal{B}(L, N, \mathcal{P})$. Таким образом, в пределе $q \rightarrow 1$ мы имеем дело с равенством

$$\begin{pmatrix} L + N, & L + N + 1, & \dots & L + N + \mathcal{P} - 1 \\ L, & L + 1, & \dots & L + \mathcal{P} - 1 \end{pmatrix} = A(L, N, \mathcal{P}), \quad (109)$$

которое выражает равенство числа плоских разбиений и числа пучков ($\equiv \mathcal{P}$ -наборов) самоизбегающих путей.

Напомним [6, 26], что биномиальный коэффициент $\binom{n+m}{m}$ выражает число путей на квадратной решетке из точки $(0, 0)$ (левый нижний угол) в точку (n, m) (правый верхний угол) таких, что элементарные шаги совершаются только вверх или вправо. Эти пути называются *решеточными путями*. Биномиальный определитель (103) равен числу самоизбегающих решеточных путей в пучке (w_1, w_2, \dots, w_S) таких, что путь w_i соединяет точки $A_i = (0, a_i)$ и $B_i = (b_i, b_i)$, $1 \leq i \leq S$ [149]. Следовательно, биномиальный определитель (109) даёт число самоизбегающих решеточных путей, соединяющих точки $A_i = (0, N + L + i - 1)$ и $B_i = (L + i - 1, L + i - 1)$, $1 \leq i \leq \mathcal{P}$. В силу наложенной периодичности, это число совпадает с количеством самоизбегающих решеточных путей, соединяющих $C_i = (i, N + L + i - 1)$ и B_i . Соответствующая конфигурация (Рис. 5) известна как *арбуз* [62].

Наличие биекции между арбузами и плоскими разбиениями в ящике [150] приво-

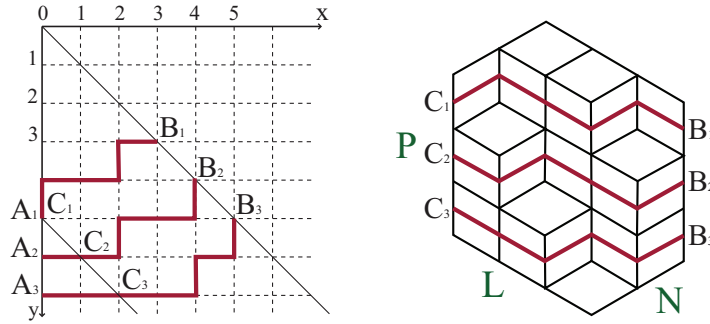


Рис. 5: Пучок самоизбегающих решеточных путей, образующих конфигурацию арбузов, и плоское разбиение с градиентными линиями.

дит к комбинаторной интерпретации равенства

$$q^{\frac{N}{2}(1-P)P} \binom{L+N, L+N+1, \dots, L+N+P-1}{L, L+1, \dots, L+P-1}_q = Z_q(L, N, P). \quad (110)$$

Решеточные пути из $(0, 0)$ в (n, m) содержатся внутри прямоугольника $n \times m$. Если разместить единичные квадраты сверху и слева от этих путей, тогда возникнет диаграмма Юнга, характеризующаяся разбиением λ , наибольшая часть которого не превосходит n , и количество частей которого не превосходит m . Число этих путей равно числу способов разместить диаграмму Юнга в прямоугольнике размера $n \times m$. При этом q -биномиальный коэффициент $\begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix}$ (A1.3) есть производящая функция этих диаграмм Юнга. Вклад каждой диаграммы в соответствующие q -биномиальные коэффициенты, образующие (107), дается весом $q^{|\lambda|}$ [6]. Веса решеточных путей из $A_i = (0, N+L+i-1)$ в $B_i = (L+i-1, L+i-1)$ отличаются общим множителем $q^{\frac{N}{2}(P-1)P}$ от весов путей из $C_i = (i, N+L+i-1)$ в $B_i = (L+i-1, L+i-1)$. В ре-

зультате, q -биномиальный определитель (107) равен производящей функции плоских разбиений (93) в ящике $\mathcal{B}(L, N, \mathcal{P})$, умноженной на $q^{\frac{N}{2}(\mathcal{P}-1)\mathcal{P}}$. \square

В ПРИЛОЖЕНИИ I содержится вычисление, которое приводит к (110) и которое основано на связи функций Шура с элементарными симметрическими функциями. Сейчас поясним возникновение конфигурации ‘арбуз’, предъявив вычисление, которое основано на связи функций Шура с полустандартными диаграммами Юнга. Это вычисление проиллюстрирует возникновение конфигурации ‘арбуз’. Сформулируем следующее

Утверждение *Производящая функция конфигураций ‘арбуз’ дается соотношением:*

$$W(N, M) = \sum_W q^{|w|} = \sum_{\lambda \subseteq M^N} S_\lambda(\mathbf{q}) S_\lambda(\mathbf{q}/q), \quad (111)$$

где суммирование \sum_W идет по всем ‘арбузам’, которые имеют фиксированные концевые точки C_i и B_i , $1 \leq i \leq N$. Рисунок 5 схематически изображает типичную диаграмму для $N = 3$.

Доказательство Рассмотрим соотношение (111). Будем отождествлять разбиение λ и соответствующую диаграмму Юнга. Тогда *полустандартной таблицей Юнга T на диаграмме λ* называется диаграмма, клетки которой заполнены положительными целыми числами $n \in \mathbb{N}^+$. При этом заполнение числами слабо убывает по строкам и строго убывает по столбцам. Вес \mathbf{x}^T таблицы T определен как

$$\mathbf{x}^T \equiv \prod_{i,j} x_{T_{ij}},$$

где произведение берется по всем матричным элементам T_{ij} . Функция Шура может быть определена следующим образом:

$$S_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum \mathbf{x}^T, \quad (112)$$

где $m \geq N$, и суммирование идет по всем таблицам T на диаграмме λ с матричными элементами, взятыми из множества $\{1, 2, \dots, m\}$. Многочлены (112) являются симметрическими многочленами от переменных x_1, x_2, \dots, x_m и образуют базис в кольце симметрических многочленов (доказательство приведено в [151]).

Существует естественный способ представить полустандартную таблицу T на диаграмме λ , как пучок самоизбегающих решеточных путей с зафиксированными наборами конечных точек. Пусть T_{ij} – элемент в i -ой строке и j -ом столбце полустандартной таблицы T . Тогда i -ый решеточный путь в пучке C (отсчитываемой от вершины пучка) содержит информацию об i -ом ряде таблицы ($i = 1, \dots, N$). Отдельные пути идут из точек $C_i = (N - i + 1, N - i)$ в точки $(1, \mu_i = \lambda_i + N - i)$ (см. Рис. 6). Для каждого i путь содержит λ_i шагов на север, при этом вдоль каждой абсциссы x_j делается столько шагов, сколько раз число $N - j + 1$ встречается в i -ом ряде таблицы T . Следовательно, для каждого пучка путей значение степени l_j при x_j в выражении для веса равно полному числу шагов на север вдоль абсциссы x_j , или полному числу вхождений $N - j + 1$ в таблицу. Таким образом, представление для функции Шура принимает вид:

$$S_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_C \prod_{j=1}^N x_j^{l_j}, \quad (113)$$

где суммирование идет по всем допустимым пучкам C . Представление (113) естественно возникает в моделях решаемых с помощью обратной задачи рассеяния [152]. Путь с номером k содержится в прямоугольнике размера $\lambda_k \times (N - k)$, $k = 1, \dots, N$. Определим *объем пути* как число квадратов под ним внутри соответствующего прямоугольника. Объем пучка путей равен суммарному объему входящих путей:

$$|\zeta|_C = \sum_{j=1}^N (j - 1)l_j.$$

Тогда из (113) и (114) видно, что q -параметризованная функция Шура принимает

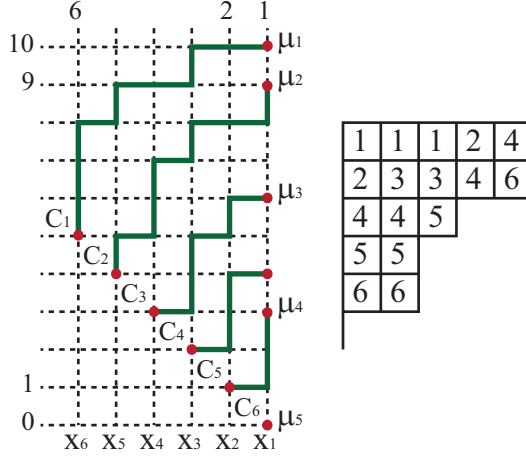


Рис. 6: Пучок решеточных путей, соответствующих полустандартной таблице на диаграмме $\lambda = (5, 5, 3, 2, 2, 0)$ для $N = 6$.

вид статсуммы для набора описанных пучков путей:

$$S_{\lambda}(\mathbf{q}/q) = \sum_C q^{|\zeta|_C},$$

где суммирование идет по всем допустимым пучкам C . Добавляя к объему пучка, получаем:

$$|\xi|_C = |\lambda| + |\zeta|_C = \sum_{j=1}^N j l_j,$$

и

$$S_{\lambda}(\mathbf{q}) = \sum_C q^{|\xi|_C} = q^{|\lambda|} \sum_C q^{|\zeta|_C} = q^{|\lambda|} S_{\lambda}(\mathbf{q}/q).$$

Рассмотрим *сопряженный* пучок самоизбегающих решеточных путей (Рис. 7) из $(1, \mu_i = \lambda_i + N - i)$ в $B_i = (i, N + M - i)$. Каждый i -ый путь содержит $M - \lambda_i$ шагов на север. Соответствующая функция Шура принимает вид:

$$S_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_B \prod_{j=1}^N x_j^{M-l_j}, \quad (114)$$

где суммирование идет по всем допустимым пучкам B из N самоизбегающих путей. Путь с номером k содержится в прямоугольнике размера $(k - 1) \times (M - \lambda_k)$,

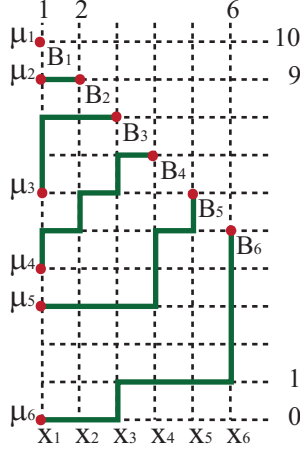


Рис. 7: Сопряженный пучок решеточных путей.

$k = 1, \dots, N$. Объем пути равен числу квадратов под ним внутри соответствующего прямоугольника. Объем пучка путей равен суммарному объему всех путей:

$$|\zeta|_B = \sum_{j=1}^N (j-1)(M-l_j).$$

В пределе $q \rightarrow 1$ функция Шура равна числу пучков самоизбегающих решеточных путей типа B или C :

$$S_\lambda(1, \dots, 1) = \sum_B 1 = \sum_C 1.$$

Произведение двух функций Шура в сумме (32) может быть графически изображено как пучок из N самоизбегающих путей, которые соединяют эквидистантные точки C_i с эквидистантными точками B_i ($i = 1, \dots, N$). Эта конфигурация, называемая *арбузом*, представлена на Рис. 8. Вся сумма (32) представляет собой сумму по всем ‘арбузам’. Повторяя рассуждения, получаем объем ‘арбуза’:

$$|w| = |\xi|_C + |\zeta|_B.$$

Таким образом приходим к производящей функции ‘арбузов’ (111).

Форм-факторы и производящие функции плоских разбиений

После введения комбинаторных определений можно перейти к вычислению форм-факторов. Начнем с форм-фактора ферромагнитной струны (34) в q -параметризации

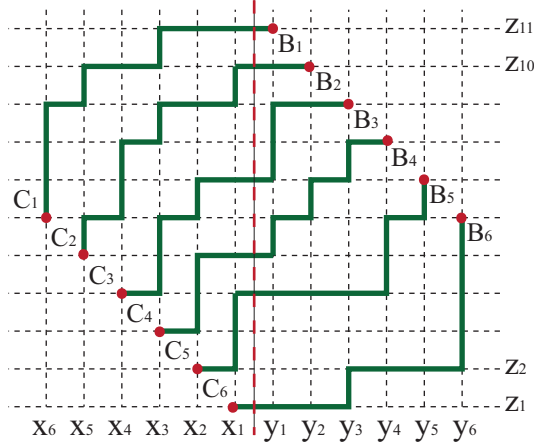


Рис. 8: Конфигурация ‘арбуз’.

(100). Значения матричных элементов (35) в q -параметризации связаны с матричными элементами (104) при $L = N$ и $P = M - n$. В результате, с использованием (105) и (106) приходим к ответу:

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle &= \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{q}, \mathbf{q}/q) \\
 &= q^{nN^2} \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{1 - q^{M-n+1+j-k}}{1 - q^{j+k-1}} = q^{\frac{N^2}{2}(2n+1-N)} Z_q^{\text{cspp}}(N, N, M - n).
 \end{aligned} \tag{115}$$

Ответ (115) для форм-фактора выражается через производящую функцию разбиений строгих по столбцам в ящике $\mathcal{B}(N, N, M - n)$. Соответствующее число разбиений строгих по столбцам $A^{\text{cspp}}(N, N, M - n)$ возникает при $q \rightarrow 1$:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle = \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = A^{\text{cspp}}(N, N, M - n). \tag{116}$$

Выражение $\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{q}, \mathbf{q}/q)$ в (115) есть q -параметризованная сумма (32). Используя представление (A1.22), возможно выразить функции Шура в этой сумме через определители, параметризованные сопряженными разбиениями $\bar{\boldsymbol{\mu}}$. Тогда соотношение (115) приводит при $q \rightarrow 1$ к следующему представлению для числа плоских

разбиений в ящике:

$$A(N, N, \mathcal{M} - n) = \binom{2\mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{M}-n}^{\triangleleft}}{\mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{M}-n}^{\triangleleft}} = \sum_{\bar{\lambda} \subseteq \{N^{\mathcal{M}-n}\}} \binom{\mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{M}-n}^{\triangleleft}}{\bar{\lambda}^{\triangleleft} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{M}-n}^{\triangleleft}}^2, \quad (117)$$

где учитываются (97), (105), (106), и (A1.23). Соотношение (117) дает представление для числа плоских разбиений в ящике $\mathcal{B}(N, N, \mathcal{M} - n)$, которые могут быть эквивалентно представлены в терминах решеточных самоизбегающих путей. Представление (117) альтернативно представлению в виде суммы для производящей функции ‘арбуз’. Но результат, естественно, один и тот же в обоих случаях. Биномиальные определители $\binom{\mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{P}}^{\triangleleft}}{\bar{\boldsymbol{\mu}}^{\triangleleft}}$ (A1.23), параметризованные частями строгих разбиений $\bar{\boldsymbol{\mu}}$, возникают при доказательстве **ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4** в ПРИЛОЖЕНИИ I. Заменим произвольное положительное P на $M - n$ (и \mathcal{P} на $\mathcal{M} - n$). Тогда биномиальный определитель в (117) принимает вид:

$$\binom{\mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{M}-n}^{\triangleleft}}{\bar{\boldsymbol{\mu}}^{\triangleleft}} = \begin{pmatrix} N, & N + 1, & \dots, & M - n - 1, & M - n \\ \bar{\mu}_{\mathcal{M}-n}, & \bar{\mu}_{\mathcal{M}-n-1}, & \dots, & \bar{\mu}_2, & \bar{\mu}_1 \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Как следует из [149], это соотношение дает число $(\mathcal{M} - n)$ -наборов решеточных путей, связывающих точки $A_l = (0, N + l - 1)$ и $B_l = (\bar{\mu}_{\mathcal{M}-n+1-l}, \bar{\mu}_{\mathcal{M}-n+1-l})$, $1 \leq l \leq \mathcal{M} - n$.

Производящая функция (59) в q -параметризации принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\beta/2}^K & \left[\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle \right] = \\ & = \sum_{\boldsymbol{\lambda}^L, \boldsymbol{\lambda}^R \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} |P_K(\boldsymbol{\mu}^R \rightarrow \boldsymbol{\mu}^L)| S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(\mathbf{q}) S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(\mathbf{q}/q), \end{aligned} \quad (119)$$

где разбиения $\boldsymbol{\lambda}^{L,R}$ ограничены снизу, и $\boldsymbol{\mu}^{L,R} = \boldsymbol{\lambda}^{L,R} + \boldsymbol{\delta}_N$. Используем соотноше-

ния (AI.22) и (AI.23) и придадим (119) в пределе $q \rightarrow 1$ следующий вид:

$$\begin{aligned} & \lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{D}_{\beta/2}^K \left[\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle \right] = \\ & = \sum_{\bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^R \subseteq \{N^{\mathcal{M}-n}\}} |P_K(\bar{\mu}^R; \bar{\mu}^L)| \binom{\mathbf{N} + \delta_{\mathcal{M}-n}^{\triangleleft}}{(\bar{\mu}^L)^{\triangleleft}} \binom{\mathbf{N} + \delta_{\mathcal{M}-n}^{\triangleleft}}{(\bar{\mu}^R)^{\triangleleft}}. \end{aligned} \quad (120)$$

Числа $|P_K(\bar{\mu}^R; \bar{\mu}^L)|$ связаны с количествами путей недружественных пешеходов $|P_K(\mu^R \rightarrow \mu^L)|$. Применяя оператор $\mathcal{D}_{\beta/2}^K$ к коррелятору $F_{\mu^L; \mu^R}(\beta)$, взятому в виде (63), можно получить $|P_K(\bar{\mu}^R; \bar{\mu}^L)|$ при условии, что представление (AI.8) используется для $S_{\lambda^L}(e^{i\theta})$ и $S_{\lambda^R}(e^{-i\theta})$. Комбинаторная интерпретация биномиальных определителей в (120) такая же, как и для определителя (118).

Аналогично, форм-фактор $\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{F}_n | \Psi_{N-n}((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle$ есть производящая функция плоских разбиений в ящике $\mathcal{B}(N-n, N, \mathcal{M})$, которая выражается через (49), (51), и переписывается в q -параметризации:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{F}_n | \Psi_{N-n}((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle & = q^{\frac{n}{2}(N-n)(N-n-1)} \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^{N-n}\}} S_{\hat{\lambda}}(\mathbf{q}) S_{\lambda}(\mathbf{q}/q) = \\ & = \frac{\det \bar{\mathbb{T}}}{\mathcal{V}_N(\mathbf{q}) \mathcal{V}_{N-n}(\mathbf{q}/q)}, \end{aligned} \quad (121)$$

где $\bar{\mathbb{T}}$ задается (104) при $L = N - n$ и $P = M$. Разбиения $\hat{\lambda}$ и λ используются одинаково как в (49), так и в (121). Используя (106), получим из (121):

$$\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{F}_n | \Psi_{N-n}((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle = q^{\frac{n}{2}(N-n)(N-n-1)} Z_q(N-n, N, \mathcal{M}). \quad (122)$$

Таким образом,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{F}_n | \Psi_{N-n}((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle = A(N-n, N, \mathcal{M}), \quad (123)$$

и среднее $\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{F}_n | \Psi_{N-n}((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle$ есть производящая функция формулы Мак Магона (94) для плоских разбиений в ящике $\mathcal{B}(N-n, N, \mathcal{M})$.

1.1.5 Асимптотики корреляционных функций при убывающей температуре

Корреляторы (29), (30) и (74) можно оценить при $1 \ll N \ll M$ и $T \ll 1$. Для корреляционной функции (29) воспользуемся представлением (68), которое эквивалентно представлению (67) [31,33]. Заменяем в (68) при достаточно больших M суммирования интегрированиями и получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) &\simeq \frac{1}{\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}^g)N!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{\beta \sum_{l=1}^N (\cos \theta_l - \cos \theta_l^g)} \\ &\times |\mathcal{P}_{M/n}(e^{-i\boldsymbol{\theta}}, e^{i\boldsymbol{\theta}^g})|^2 \prod_{1 \leq k < l \leq N} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^2 \frac{d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_N}{(2\pi)^N}. \end{aligned} \quad (124)$$

При больших β (низкая температура), аппроксимируем $\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta)$:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq \frac{\mathcal{A}(N, n)}{\beta^{\frac{N^2}{2}}}, \quad \mathcal{A}(N, n) \equiv (A^{\text{cspp}}(N, N, M - n))^2 \frac{\mathcal{I}_N}{\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}^g)}, \quad (125)$$

$$\mathcal{I}_N \equiv \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{1 \leq k < l \leq N} |x_k - x_l|^2 \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_N}{(2\pi)^N}, \quad (126)$$

где \mathcal{I} имеет вид статсуммы гауссова унитарного ансамбля. Приближение (125) состоит в вынесении комбинаторного множителя $\mathcal{P}_{M/n}^2(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Значение $\mathcal{P}_{M/n}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ есть $\mathcal{P}_{M/n}(\mathbf{q}, \mathbf{q}/q)$ вычисленное при $q \rightarrow 1$, и, согласно (115), оно совпадает с числом разбиений строгих по столбцам $A^{\text{cspp}}(N, N, M - n)$.

Интеграл (126) вычисляется, [153], и ответ удобно представить в виде:

$$\mathcal{I} = e^{\phi_N}, \quad \phi_N \equiv \sum_{k=1}^N \log \frac{\Gamma(k)}{(2\pi)^{1/2}}. \quad (127)$$

В обзоре [44] обсуждается связь итеграла (126) с теорией интеграла Сельберга. Принимая во внимание, что $1/\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}^g)$ имеет приближенный вид,

$$\frac{1}{\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}^g)} \simeq \frac{(2\pi)^{N(N-1)}}{(M+1)^{N^2}} \prod_{1 \leq r < s \leq N} |r - s|^2 = \left(\frac{2\pi}{M+1} \right)^{N^2} e^{2\phi_N}, \quad (128)$$

окончательно получаем асимптотические оценки:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq (A^{\text{cspp}}(N, N, M - n))^2 e^{N^2 \log \frac{2\pi}{M+1} - \frac{N^2}{2} \log \beta + 3\phi_N}, \quad (129)$$

Асимптотическое поведение ϕ_N (127) имеет вид (ПРИЛОЖЕНИЕ II):

$$\phi_N = \frac{N^2}{2} \log N - \frac{3N^2}{4} + \mathcal{O}(N \log N), \quad N \gg 1. \quad (130)$$

Выразим $A^{\text{cspp}}(N, N, M - n)$ через гамма-функции и получим оценку (подробности имеются в [33] и ПРИЛОЖЕНИИ II):

$$\log A^{\text{cspp}}(N, N, M - n) \simeq N^2 \log \left(\mathbf{A} \frac{M - n}{N} \right), \quad M - n \gg N \gg 1, \quad (131)$$

где $\mathbf{A} = \frac{e^2}{4}$. Соотношение (131) дает асимптотическое поведение числа разбиений строгих по столбцам в высоком ящике с квадратным дном $\mathcal{B}(N, N, M - n)$. Окончательно, в соответствии с (130) и (131), оценка (129) конкретизируется:

$$\log \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq N^2 \log \left(\mathbf{C} \frac{(M - n)^2}{M(N\beta)^{1/2}} \right), \quad (132)$$

где \mathbf{C} - соответствующая постоянная. Предположим, что M и N растут, а температура T убывает. Тогда, в соответствии с (132), корреляционная функция $\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta)$ убывает при выполнении условия $T < \frac{1}{\mathbf{C}^2} \frac{NM^2}{(M-n)^4}$.

Повторяя шаги, получаем:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq A^2(N - n, N, \mathcal{M}) e^{N^2 \log \frac{2\pi}{M+1} - \frac{N^2}{2} \log \beta + 3\phi_N}, \quad (133)$$

где $A(N - n, N, \mathcal{M})$ - число плоских разбиений в ящике. Аналогично,

$$\log \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq N^2 \log \left(\mathbf{D} \frac{N^{3/2}}{M\beta^{1/2}} \right) + 2N(N - n) \log \left(\mathbf{B} \frac{M - n}{2N - n} \right), \quad (134)$$

где $\mathbf{D} = 2\pi e^{-9/4}$ (см. ПРИЛОЖЕНИЕ II). Соотношение (134) означает, что $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta)$ убывает с ростом M и N при условии, что T имеет аналогичную оценку.

В изинговском случае вероятность выживания ферромагнитной струны записывается следующим образом:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) = \frac{|\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\theta}^v})|^2}{V^2} \sum_{\{\boldsymbol{\theta}\}} e^{-\beta(E_N(\boldsymbol{\theta}) - E_N(\boldsymbol{\theta}^g))} |\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{P}(e^{-i\boldsymbol{\theta}}, e^{i\boldsymbol{\theta}^v})|^2, \quad (135)$$

где $V \equiv (M+1)(M+1-N)^{N-1}$. Здесь $\mathcal{P}(e^{-i\boldsymbol{\theta}}, e^{i\boldsymbol{\theta}^v})$ выражается посредством соотношения (84), при условии, что область суммирования имеет вид: $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \subseteq \{(M-2N-n+1)^N\}$.

В пределе $N \ll M$ заменяем суммы в (135) интегралами и пользуясь (77) получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) &\simeq \frac{1}{(M+1)^N N!} \prod_{1 \leq r < s \leq N} 2(1 - \cos(\theta_r^g - \theta_s^g)) \\ &\times \prod_{i=1}^N \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) e^{\beta \sum_{l=1}^N (\cos \theta_l - \cos \theta_l^g)} |\mathcal{P}(e^{-i\boldsymbol{\theta}}, e^{i\boldsymbol{\theta}^g})|^2 \prod_{1 \leq k < l \leq N} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^2. \end{aligned} \quad (136)$$

Решение для основного состояния описывается формулой $\theta_j^g \equiv \frac{2\pi}{M+1-N} \left(\frac{N+1}{2} - j \right)$, и асимптотически выполняются оценки: $\cos \theta_l \approx 1$ и $\cos \theta_l^g \approx 1$, $\forall l$. При больших β получаем из (136) приближенное выражение:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq \frac{\mathcal{I}_N (A^{\text{spp}}(N, N, M-n))^2 (2\pi)^{N(N-1)}}{\beta^{N^2/2} (M+1)^{N^2}} \prod_{1 \leq r < s \leq N} |r-s|^2, \quad (137)$$

где \mathcal{I}_N – интеграл Мехты (126), и $A^{\text{spp}}(N, N, M-n) = \prod_{1 \leq k, j \leq N} \frac{M-n+3-j-k}{j+k-1}$ – число строгих плоских разбиений в ящике. Далее, получаем оценки:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{I}_n | \Psi_N((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle = A^{\text{spp}}(N, N, M-n), \quad (138)$$

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq (A^{\text{spp}}(N, N, M-n))^2 e^{N^2 \log \frac{2\pi}{M+1} - \frac{N^2}{2} \log \beta + 3\phi_N}. \quad (139)$$

Можно оценить, например, отношение числа разбиений строгих по столбцам $A^{\text{spp}}(N, N, M-n)$ к числу плоских разбиений в ящике $A(N-n, N, M-N+1)$. Обращаясь к соотношениям (131) и (134), получим логарифм отношения:

$$\log \frac{A^{\text{spp}}(N, N, M-n)}{A(N-n, N, M-N+1)} = N^2 \log \left(\frac{2A}{B} \right) + nN \log \left(\frac{B}{2} \frac{M}{N} \right). \quad (140)$$

При достаточно больших M значение $\log\left(\frac{B}{2} \frac{M}{N}\right)$ положительно. Пусть n тоже достаточно велико, $\log\left(\frac{2A}{B}\right) \ll n \ll N$. Тогда выбором M (например, $\frac{B}{2} \frac{M}{N} \sim e^N$) можно обеспечить доминирование второго слагаемого в правой части соотношения (140). Другими словами, значение $A^{\text{cspp}}(N, N, M - n)$ будет расти быстрее чем $A(N - n, N, M)$. В случае, когда первый вклад доминирует в правой части (140), требуется более детальное исследование, чтобы определить знак выражения $\log\left(\frac{2A}{B}\right)$. Таким образом, как $A^{\text{cspp}}(N, N, M - n)$, так и $A(N - n, N, M - N + 1)$, могут продемонстрировать доминирующее поведение при растущих длинах сторон ящика.

Таким образом, корреляционные функции (29) и (30) асимптотически связаны с комбинаторными соотношениями, а q -биномиальные определители приводят к связи корреляционных функций и соответствующих форм-факторов с перечислением плоских разбиений и самоизбегающих решеточных путей [33]. Показатели экспонент в (129), (133) и (139) имеют вид свободной энергии при слабой связи некоторых решеточных калибровочных моделей [60], в которых был предсказан фазовый переход третьего рода [61].

1.2 XX магнетик Гейзенберга и случайные блуждания недружественных пешеходов

В работах [28, 29] показано, что корреляционные функции XX магнетика Гейзенберга в нулевом магнитном поле над ферромагнитным состоянием могут быть использованы для перечисления путей блуждания недружественных перешедов. В работах [68, 69] парная корреляционная функция спинов, вычисленная по всем собственным состояниям магнетика, проинтерпретирована как производящая функция блужданий одиночного пешехода в среде с переменным числом недружественных со-

седей. В работах [68, 69] используется гамильтониан (9) (то есть гамильтонианом (1) при $\Delta = h = 0$), но предполагается, что номера узлов меняются от 1 до M , и $M = 0 \pmod{2}$. Кроме того, нам понадобится *матрица перескоков* $\Delta_{nm}^{(s)}$, определенная следующими соотношениями:

$$\Delta_{nm}^{(s)} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{|n-m|,1} + s\delta_{|n-m|,M-1}), \quad (141)$$

Благодаря выбору матрицы (141), сумма $-\sum_{n,m=1}^M \Delta_{nm}^{(+)} \sigma_n^+ \sigma_m^-$ согласуется, вплоть до нормировки, с XX гамильтонианом (9).

Будем пользоваться общим определением зависящих от времени t и температуры $T \equiv 1/\beta$ корреляционных функций рассматриваемой модели имеет вид:

$$G_{j;l}^{ab}(t) \equiv \frac{1}{Z} \text{Tr} (\sigma_j^a(0) \sigma_l^b(t) e^{-\beta H}), \quad Z \equiv \text{Tr} (e^{-\beta H}), \quad (142)$$

где $\sigma_l^b(t) \equiv e^{itH} \sigma_l^b e^{-itH}$, Tr означает усреднение по всем собственным состояниям гамильтониана (9), и Z – статистическая сумма. В работе [47] обсуждалось вычисление корреляторов (142) в базисе собственных функций гамильтониана XX магнетика. Основное внимание при этом уделялось связи корреляционных функций в термодинамическом пределе с определителями Фредгольма [4]. Основная идея вычисления корреляторов (142) в подходе производящих функций, которые представлены фермионными интегралами с квазипериодическими условиями по мнимому времени, будет обсуждаться в следующем разделе 1.3. В данном же разделе 1.2 приведем некоторые соотношения без вывода, отсылая к [63–67] за дальнейшими деталями.

Операторные средние над ферромагнитным состоянием играют роль производящих функций путей случайных блужданий *недружественных пешеходов* (при встрече в любом из узлов решетки недружественные пешеходы уничтожают друг друга). Перевороты спинов на одномерной решетке можно ассоциировать [28, 29] со случайными перемещениями пешеходов. Действительно, рассмотрим состояние ферромаг-

нитного упорядочения спинов на M узлах: $|\uparrow\rangle \equiv \otimes_{n=1}^M |\uparrow\rangle_n$ и рассмотрим среднее:

$$F_{j;l}(\beta) \equiv \langle \uparrow | \sigma_j^+ e^{-\beta \mathcal{H}_0} \sigma_l^- | \uparrow \rangle, \quad (143)$$

где \mathcal{H}_0 соответствует гамильтониану (9) при $h = 0$, и $\beta \in \mathbb{C}$ можно рассматривать как “эволюционный” параметр. Направление спина “вверх” (или “вниз”) соответствует пустому (или занятому) узлам. Дифференцируя $F_{j;l}(\beta)$ (143) и раскрывая коммутатор $[\mathcal{H}, \sigma_j^+]$, мы получаем разностно-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{d\beta} F_{j;l}(\beta) = \frac{1}{2} (F_{j+1;l}(\beta) + F_{j-1;l}(\beta)). \quad (144)$$

Решение данного уравнения определяется граничными условиями по решеточному аргументу, а также условием при $\beta = 0$.

Среднее $F_{j;l}(\beta)$ можно рассматривать как производящую функцию траекторий со случайными поворотами, начинающихся в l -ом узле и оканчивающихся в j -ом узле цепочки. Действительно, введем обозначение \mathcal{D}_λ^K для оператора K -кратного дифференцирования по λ в точке $\lambda = 0$. Применение \mathcal{D}_β^K к (143) дает:

$$\mathcal{D}_\beta^K [F_{j;l}(\beta)] = \langle \uparrow | \sigma_j^+ (-\mathcal{H}_0)^K \sigma_l^- | \uparrow \rangle = \sum_{n_1, \dots, n_{K-1}} \Delta_{jn_{K-1}}^{(+)} \cdots \Delta_{n_2 n_1}^{(+)} \Delta_{n_1 l}^{(+)} \cdot \quad (145)$$

Правая часть (145) совпадает с матричным элементом j -ой строки и l -ого столбца, отвечающим произведению K матриц перескоков (141). Каждая матрица соответствует переходу между двумя ближайшими узлами решетки. Будучи умноженной на 2^K (что связано с принятой нормировкой матрицы (141)), правая часть (145) дает число траекторий из K шагов между l -ым и j -ым узлами. Будем обозначать это число $|P_K(l \rightarrow j)|$.

Рассмотрим бесконечную цепочку ($M \rightarrow \infty$). Тогда решением уравнения (144), удовлетворяющим условию $F_{j;l}(0) = \delta_{j,l}$, оказывается [28] модифицированная функ-

ция Бесселя $I_{j-l}(\beta)$:

$$F_{j;l}(\beta) = I_{j-l}(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\beta \cos \theta} e^{i(j-l)\theta} d\theta. \quad (146)$$

Пусть K удовлетворяет $K \geq |l - j|$ и $K + |j - l| = 0 \pmod{2}$. Тогда дифференцирование (146) приводит к биномиальной формуле $|P_K(l \rightarrow j)| = C_K^L$ для числа всех решеточных путей “длины” K между двумя узлами на бесконечной оси:

$$|P_K(l \rightarrow j)| \equiv \mathcal{D}_{\beta/2}^K [F_{j;l}(\beta)] = \frac{(m + 2L)!}{L!(m + L)!}. \quad (147)$$

Здесь L означает половину числа поворотов: $L \equiv (K - m)/2$.

Перейдем к многоточечной корреляционной функции $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\beta)$, которая задается соотношением (57) и которая уже возникла в разделе 1.1.2 при вычислении матричного элемента (56), связанного с выживанием ферромагнитной струны. В разделе 1.1.2 уже показано (см. соотношение (58)), что $\mathcal{D}_{\beta/2}^K [F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\beta)]$ дает число траекторий N недружественных пешеходов ($\frac{\beta}{2}$ – потому, что нормировка гамильтониана другая), каждый из которых совершает K шагов, $|P_K(l_1, \dots, l_N \rightarrow j_1, \dots, j_N)|$. Здесь начальные и конечные положения на узлах заданы последовательностями $l_1 > l_2 > \dots > l_N$ и $j_1 > j_2 > \dots > j_N$. Коррелятор (57) удовлетворяет уравнению (60), которое для случая периодичности по решеточному аргументу и при “начальном” условии $F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(0) = \prod_{m=1}^N \delta_{j_m, l_m}$ приводит к решению (61). Соответствующее решение для $N = 1$ имеет вид суммы (62), которая в пределе $M \rightarrow \infty$ дает функцию Бесселя (146).

Как показано в [69], число траекторий N недружественных пешеходов $|P_K(l_1, \dots, l_N \rightarrow j_1, \dots, j_N)|$ может быть выражено в терминах случайных блужданий той же “длины” K для одного пешехода, перемещающегося по узлам N -мерной бесконечной гиперкубической решетки. В пределе $M \rightarrow \infty$ из представлений (61) и

(146) получаем:

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\beta) = \frac{e^{\beta N}}{N!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{\beta \sum_{l=1}^N (\cos \theta_l - 1)} \times S_{\lambda}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N}) \prod_{1 \leq k < l \leq N} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^2 \frac{d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_N}{(2\pi)^N}, \quad (148)$$

где $S_{\lambda}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N})$ – функция Шура и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ – нестрогое разбиение. Благодаря трансляционной инвариантности, можно положить $l_1 > l_2 > \dots > l_N \geq -N$ для начальных положений, и задать элементы разбиения $\lambda_k = l_k + k$. Для ведущей асимптотики в пределе $\beta \rightarrow \infty$ получаем из (148):

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\beta) \simeq S_{\lambda}(1, 1, \dots, 1) \frac{e^{\beta N} \mathcal{I}_N}{\beta^{\frac{N^2}{2}}}, \quad (149)$$

где \mathcal{I}_N – статсумма (126) гауссова унитарного ансамбля. При этом, значение $S_{\lambda}(1, 1, \dots, 1)$ совпадает с размерностью неприводимого представления унитарной группы. Кроме того, $S_{\lambda}(1, 1, \dots, 1)$ может быть проинтерпретировано как число пучков путей, которые можно представить, [28], как “временную развертку” решеточных траекторий блужданий N недружественных пешеходов на цепочке.

С учетом (26) оказывается, что нормированное среднее вида

$$\langle \sigma_{m+1}^+ e^{-\beta \mathcal{H}_0} \sigma_1^- \rangle_N \equiv \frac{\langle \Psi_N | \sigma_{m+1}^+ e^{-\beta \mathcal{H}_0} \sigma_1^- | \Psi_N \rangle}{\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle} \quad (150)$$

(парная корреляционная функция спинов, вычисленная по всем собственным состояниям) может быть представлено как линейная комбинация $(N + 1)$ -точечных производящих функций типа (57) и, таким образом, связано с блужданиями $N + 1$ пешехода. Начальное и конечные положения одного из них зафиксированы при $l_1 = 1$ и $j_1 = m + 1$, соответственно, в то время как для остальных (*виртуальных*) выбор положений случаен.

Представляет интерес вычисление (150) в термодинамическом пределе, когда M и N растут (их отношение остается конечным), то есть число виртуальных пешеходов

возрастает. В данном пределе [3, 4]:

$$\tilde{F}_{m+1;1}(\beta) \equiv \langle \sigma_{m+1}^+ e^{-\beta \mathcal{H}_0} \sigma_1^- \rangle_N \Big|_{M,N \gg 1} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\text{Tr}} (\sigma_{m+1}^+ e^{-\beta \mathcal{H}_0} \sigma_1^-), \quad (151)$$

где $\widetilde{\text{Tr}}$ означает, что для вычисления нормированного среднего используется процедура, указанная в разделе 2. Для $\tilde{F}_{m+1;1}(\beta)$ (151) имеет место [69] разностно-дифференциальное соотношение. Сравнение этого соотношения с уравнением (144) заставляет предположить, что среднее $\tilde{F}_{m+1;1}(\beta)$ тоже может рассматриваться как производящая функция блужданий и ее можно интерпретировать как производящую функцию блужданий одиночного пешехода в среде с переменным числом недружественных соседей [69].

Займемся вычислением $\tilde{F}_{m+1;1}(\beta)$ (151) в фермионном представлении, сводя задачу к вычислению производящей функции вида:

$$\tilde{\mathcal{G}} \equiv \widetilde{\text{Tr}} (e^S c_{m+1} e^{-\beta \mathcal{H}_0} c_1^\dagger e^{-\nu \mathcal{H}_0}), \quad (152)$$

где оператор S определен с помощью матрицы $\hat{S} = \text{diag} \{S_k\}_{1 \leq k \leq M}$. Действительно, $\tilde{F}_{m+1;1}(\beta)$ соответствует выбору $\nu = 0$ и $S_k = -i\pi\theta(m-k)$, где $\theta(m-k)$ – функция Хэвисайда, $\theta(0) = 1$. При достаточно больших M и N , приближенно получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}} &\approx \left[\text{tr} (e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}^0} \hat{e}_{1,m+1}) - \frac{d}{d\alpha} \right] \det(\hat{I} + \hat{\mathcal{M}}_1 + \alpha \hat{\mathcal{M}}_2) \Big|_{\alpha=0}, \\ \hat{\mathcal{M}}_1 + \alpha \hat{\mathcal{M}}_2 &\equiv e^{-\nu \hat{\mathcal{H}}^0} e^{\hat{S}} e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}^0} (\hat{I} + \alpha \hat{e}_{1,m+1} e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}^0}), \end{aligned} \quad (153)$$

где $\hat{e}_{1,m+1} \equiv (\delta_{1,n} \delta_{m+1,l})_{1 \leq n,l \leq M}$. Матрица $\hat{\mathcal{H}}^0$ используется вместо $\hat{\mathcal{H}}^\pm$, так как $s = \pm$ можно заменить нулем при достаточно больших M .

Соотношение (153) записано в координатном представлении. Ответ для $\tilde{F}_{m+1;1}(\beta)$ запишем, сохраняя матричную символику (в пределе $M \rightarrow \infty$ соответствующие операции надо понимать в смысле действий над интегральными операторами [3, 4]):

$$\tilde{F}_{m+1;1}(\beta) = \det(\hat{I} + \hat{\mathcal{U}}_m) \left[\text{tr} (e^{-\beta \hat{\mathcal{E}}_0} \check{e}_{1,m+1}) - \text{tr} \left(\frac{\hat{\mathcal{V}}_m}{\hat{I} + \hat{\mathcal{U}}_m} \right) \right] \quad (154)$$

(например, tr соответствует следу $M \times M$ матриц). Матрицы $\widehat{\mathcal{U}}_m, \widehat{\mathcal{V}}_m, \check{e}_{1,m+1}$ соответствуют импульсным представлениям матриц $\widehat{\mathcal{M}}_1, \widehat{\mathcal{M}}_2, \widehat{e}_{1,m+1}$ (153), но нам понадобятся только выражения для следов $\text{tr} \widehat{\mathcal{U}}_m$ и $\text{tr} \widehat{\mathcal{V}}_m$ (см. ниже). В импульсном представлении \widehat{e}_0 означает диагональную матрицу собственных значений энергии XX модели. Разложим формально $\widetilde{F}_{m+1;1}(\beta)$ по степеням $\widehat{\mathcal{U}}_m$ и получим ответ в двух низших порядках:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{m+1;1}(\beta) &\approx F_{m+1;1}(\beta) + F_{m+1;1}(\beta) \text{tr} \widehat{\mathcal{U}}_m - \text{tr} \widehat{\mathcal{V}}_m, \\ \text{tr} \widehat{\mathcal{U}}_m &= (M - 2m) F_{1;1}(\beta), \quad \text{tr} \widehat{\mathcal{V}}_m = F_{m+1;1}(2\beta) - 2 \sum_{l=1}^m F_{m+1;l}(\beta) F_{l;1}(\beta), \end{aligned} \quad (155)$$

где обозначения $F_{j;l}(\beta)$ означают интегралы типа (146). Хотя M и m выбраны достаточно большими, отношение m/M считается ограниченным.

По аналогии со случаем ферромагнитного состояния, подействуем оператором $\mathcal{D}_{\beta/2}^K$ на $\widetilde{F}_{m+1;1}(\beta)$ (155). Тогда в первом порядке придем к соотношению (147). Во втором порядке ответ возникает в следующем виде:

$$\begin{aligned} &(M - K) |P_K(l \rightarrow l + m)|^2 + \\ &+ \mathcal{D}_{\beta/2}^K \left[2 \sum_{l=1}^m \begin{vmatrix} F_{m+1;l}(\beta) & F_{m+1;1}(\beta) \\ F_{l;l}(\beta) & F_{l;1}(\beta) \end{vmatrix} - \sum_{l=0}^K \begin{vmatrix} F_{m+L;l}(\beta) & F_{m+1;1}(\beta) \\ F_{l;l}(\beta) & F_{l;L}(\beta) \end{vmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (156)$$

Получены оценки для числа путей пешехода, перемещающегося из некоторого фиксированного узла в другой достаточно удаленный узел решетки в случае, когда число звеньев $K = m + 2L$ возрастает ($1 \ll m \ll L$), причем наложено предположение, что L растет как m^2 . Картина блужданий в представлении суперпозиции собственных состояний может рассматриваться как совместное блуждание исходного (основного) и одного, двух, трех, и т.д. виртуальных пешеходов. Например, вычис-

для $\mathcal{D}_{\beta/2}^K[\tilde{F}_{m+1;1}(\beta)]$, во втором порядке получаем в ведущем приближении:

$$\frac{2^{4L}}{\pi L} e^{-m^2/(2L)} (M + 2mZ_1(m, L) - (\pi L)^{1/2} e^{m^2/(4L)}), \quad (157)$$

$$Z_1(m, L) \equiv -1 + e^{m^2/(4L)} \frac{2}{m} \sum_{l=0}^{m/2} e^{-l^2/L},$$

где $Z_1(m, L)$ порядка единицы. Численная проверка показывает, что второе и третье слагаемые в (157) могут стать сравнимыми с первым, что свидетельствует о сопоставимости вкладов основного и виртуального пешеходов.

1.3 XY магнетик Гейзенберга и производящие функции корреляторов третьих компонент спинов

В работах [63–67] развит подход к вычислению некоторых корреляционных функций с использованием функциональных интегралов по переменным, зависящим от мнимого времени квазипериодически. В качестве модели рассматривается XY магнетик Гейзенберга в постоянном однородном магнитном поле и вычисляется (“продольная”) корреляционная функция оператора третьей компоненты спина на узле σ_k^z . Вычисление корреляционных функций сводится к производящим функциям, которые можно представить в виде функциональных интегралов по антикоммутирующим переменным с квазипериодической зависимостью от мнимого времени. Требование квазипериодичности учитывается как связь, которая ограничивает область интегрирования. Для XX магнетика Гейзенберга рассматривается модификация подхода на случай двухточечного коррелятора третьих компонент спинов с явной зависимостью от времени. Возможно обобщение на более сложные производящие функции, возникшие в разделе 1.2.

Рассмотрим XY магнетик Гейзенберга, который является предельным случаем XYZ цепочки так же, как XX магнетик является пределом XXZ цепочки Гей-

зенберга. Молель описывается спиновым гамильтонианом в магнитном поле $h \geq 0$ [50, 51]:

$$H = H_{\text{xx}} + \gamma H_{\text{anis}} - hS^z, \quad H_{\text{xx}} \equiv - \sum_{n,m=1}^M \Delta_{nm}^{(+)} \sigma_n^+ \sigma_m^-, \quad (158)$$

$$H_{\text{anis}} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^M \Delta_{nm}^{(+)} (\sigma_n^+ \sigma_m^+ + \sigma_n^- \sigma_m^-), \quad S^z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \sigma_n^z, \quad (159)$$

где S^z – третья компонента полного спина, γ – параметр анизотропии и $M = 0 \pmod{2}$. Операторы локального спина $\sigma_n^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y)$ и σ_n^z определены в (2), $n \in \mathcal{M} \equiv \{1, 2, \dots, M\}$. Перестановочные соотношения имеют вид: $[\sigma_k^+, \sigma_l^-] = \delta_{k,l} \sigma_l^z$, $[\sigma_k^z, \sigma_l^\pm] = \pm 2\delta_{k,l} \sigma_l^\pm$. Матричные элементы $\Delta_{mn}^{(\ell)}$ в (158), (159) задаются (141) [69], и $\ell = 0, \pm$. Наложены периодические граничные условия $\sigma_{n+M}^\alpha = \sigma_n^\alpha, \forall n \in \mathcal{M}$. Гамильтониан H (158) при $\gamma = 0$ сводится к XX -гамильтониану (9).

Рассмотрим производящую функцию корреляторов третьих компонент спинов $G(\{\alpha_k\})$:

$$G(\{\alpha_k\}) \equiv \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{\mathcal{Q}} e^{-\beta H}), \quad \mathcal{Q} \equiv \sum_{k=1}^M \alpha_k q_k, \quad Z \equiv \text{Tr}(e^{-\beta H}), \quad (160)$$

где $\beta = 1/T$, H – гамильтониан (158), и Z – статистическая сумма. Кроме того, $q_k \equiv \frac{1}{2}(1 - \sigma_k^z)$ есть число частиц на k^{th} узле. Производящая функция $G(\{\alpha_k\})$ (160) зависит от M комплексных параметров: $\{\alpha_k\} \equiv \{\alpha_k \in \mathbb{C} \mid k \in \mathcal{M}\}$. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha$ и $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_M = 0$, $G(\{\alpha_k\})$ (160) сводится к производящей функции $G(\alpha, m)$, которая изучалась в [37, 38, 46, 47, 154–156]. Двухточечная статическая корреляционная функция третьих компонент спинов возникает из $G(\alpha, m)$:

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(2\mathcal{D}_m^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} - 4\mathcal{D}_m \frac{d}{d\alpha} + 1 \right) G(\alpha, m), \quad (161)$$

где \mathcal{D}_m и $\mathcal{D}_m^2 \equiv \mathcal{D}_m \circ \mathcal{D}_m$ обозначают решеточные производные первого и второго порядков, соответственно (т.е., $\mathcal{D}_m f(m) \equiv f(m+1) - f(m)$). Средние производений операторов плотности q_k возникают из $G(\{\alpha_k\})$ (160):

$$\langle q_{k_1} q_{k_2} \dots q_{k_l} \rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha_{k_1}} \frac{\partial}{\partial \alpha_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial \alpha_{k_l}} G(\{\alpha_k\}) \Big|_{\{\alpha_k=0\}}, \quad (162)$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq M$. Многоточечные корреляторы операторов σ_k^z выражаются через средние (162) (формулы приведения можно найти в [157]). Соотношение (162) отличается от (161) тем, что нет решеточных дифференцирований и присутствуют только частные производные, например, при $l = 2$ для $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = 1 - 2\langle q_1 \rangle - 2\langle q_{m+1} \rangle + 4\langle q_1 q_{m+1} \rangle$.

Теорема Вика позволяет установить, что $\langle q_1 q_2 \dots q_l \rangle$ есть определитель теплицевой матрицы размера $l \times l$ [49]. Вычисление $G(\{\alpha_k\})$ в предлагаемом подходе приводит к ответу, выражающемуся через определители матриц размера $M \times M$ и при этом обобщаются формулы полученные в [144, 155]. Кроме того, представление (162) позволяет установить, что $\langle q_{k_1} q_{k_2} \dots q_{k_l} \rangle$ есть определитель матрицы, возникающей из теплицевой матрицы.

Наша цель – вычислить $G(\{\alpha_k\})$ (160), воспользовавшись представлением в терминах функционального интеграла фермиевского типа. Совершим преобразование Йордана-Вигнера от σ_k^α к каноническим фермионным переменным c_k, c_k^\dagger [158]:

$$c_k = \exp\left(i\pi \sum_{n=1}^{k-1} \sigma_n^- \sigma_n^+\right) \sigma_k^+, \quad c_k^\dagger = \sigma_k^- \exp\left(-i\pi \sum_{n=1}^{k-1} \sigma_n^- \sigma_n^+\right). \quad (163)$$

Переменные c_k, c_k^\dagger подчиняются алгебре $\{c_k, c_n\} = \{c_k^\dagger, c_n^\dagger\} = 0, \{c_k, c_n^\dagger\} = \delta_{kn}$, где скобка $\{, \}$ – антикоммутатор. Периодические условия для спиновых переменных эквивалентны граничным условиям для фермионных переменных:

$$c_{M+1} = (-1)^\mathcal{N} c_1, \quad c_{M+1}^\dagger = c_1^\dagger (-1)^\mathcal{N}, \quad (164)$$

где $\mathcal{N} \equiv Q(M) = \sum_{k=1}^M c_k^\dagger c_k$. Как показано в [50, 51], преобразование (163) позволяет

представить H (158) в следующем виде:

$$H = H^+ P^+ + H^- P^-, \quad (165)$$

$$\begin{aligned} H^\pm = & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M [c_k^\dagger c_{k+1} + c_{k+1}^\dagger c_k + \gamma(c_{k+1} c_k + c_k^\dagger c_{k+1}^\dagger)] \\ & + h \sum_{k=1}^M c_k^\dagger c_k - hM/2 \end{aligned} \quad (166)$$

где P^\pm – проекторы на состояния с четным (+)/нечетным (–) числом фермионов: $P^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm (-1)^{\mathcal{N}})$. Индекс $s = \pm$ указывает на соответствие между H^s (166) и граничным условием: $c_{M+1} = -s c_1$, $c_{M+1}^\dagger = -s c_1^\dagger$. Оператор \mathcal{N} перестановочен с операторами H_{xx} (158) и S^z (159). Оператор четности $(-1)^{\mathcal{N}}$ перестановочен с H и анти-перестановочен с c_k^\dagger и c_k .

С учетом (165) и (166), статистическая сумма Z (160) принимает вид:

$$Z = \frac{1}{2}(Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-), \quad (167)$$

$$Z_F^\pm = \text{Tr}(e^{-\beta H^\pm}), \quad Z_B^\pm = \text{Tr}((-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H^\pm}).$$

Соотношение (167) имеет место благодаря равенству:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-\beta H}) &= \text{Tr}_{(-1)^{\mathcal{N}}=1}(e^{-\beta H}) + \text{Tr}_{(-1)^{\mathcal{N}}=-1}(e^{-\beta H}) \\ &= \text{Tr}(P^+ e^{-\beta H^+}) + \text{Tr}(P^- e^{-\beta H^-}). \end{aligned} \quad (168)$$

Аналогично, $G(\{\alpha_n\})$ (160) принимает вид:

$$G(\{\alpha_n\}) = \frac{1}{2Z} (G_F^+ Z_F^+ + G_F^- Z_F^- + G_B^+ Z_B^+ - G_B^- Z_B^-), \quad (169)$$

$$G_F^\pm Z_F^\pm \equiv \text{Tr}(e^{\mathcal{Q}} e^{-\beta H^\pm}), \quad G_B^\pm Z_B^\pm \equiv \text{Tr}(e^{\mathcal{Q}} (-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H^\pm}).$$

Различие между H^+ и H^- (166) исчезает в термодинамическом пределе и вклады, помеченные B, сокращаются в Z (167) и G (169). В связи с этим, более детально рассмотрим вычисление G_F^\pm .

Перейдем к выводу представлений в виде функциональных интегралов. Введем грассманы когерентные состояния [18]. Для фермионных операторов существует фоковский вакуум $|0\rangle$: $c_n|0\rangle = \langle 0|c_n^\dagger = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$, $\forall n \in \mathcal{M} \equiv \{1, \dots, M\}$. Определим $2L$ независимых когерентных состояний, которые помечены независимыми комплексно-значными грассмановыми параметрами $x_k^*(a_I)$, $x_k(a_I)$ ($I \in \{1, 2, \dots, L\}$): $|x(a_I)\rangle = e^{c^\dagger x(a_I)}|0\rangle$, $\langle x^*(a_I)| = \langle 0|e^{x^*(a_I)c}$, где $a_I \in \{a_I\}_{1 \leq I \leq L}$ – независимые комплексные числа ¹. Для этих состояний выполняются соотношения:

$$c_k|x(a_I)\rangle = x_k(a_I)|x(a_I)\rangle, \quad \langle x^*(a_I)|c_k^\dagger = \langle x^*(a_I)|x_k^*(a_I),$$

$$\langle x^*(a_I)|x(a_I)\rangle = e^{x^*(a_I)x(a_I)},$$

где принято, что индекс $s = \pm$, указывающий на H^\pm , опущен (хотя состояние $|0\rangle$ одинаково для H^+ и H^- , соответствующие когерентные состояния различны).

Представим соотношения $G_F^\pm Z_F^\pm$, $G_B^\pm Z_B^\pm$ (169) в виде функциональных интегралов.

Пусть след, выражающий $G_F^\pm Z_F^\pm$, имеет интегральное представление:

$$G_F^s Z_F^s = \int dz dz^* e^{z^* z} \langle z^* | e^{\mathcal{Q}} e^{-\beta H^s} | z \rangle, \quad (170)$$

где $\langle z^* | = \langle 0 | e^{z^* c}$ и $| z \rangle = e^{c^\dagger z} | 0 \rangle$. Далее, представляя $e^{-\beta H^s}$ в (170) как произведение L экспонент и внося L разложений единицы, выразим (170) в виде конечнократного интеграла:

$$G_F^s Z_F^s = \int dz dz^* \prod_{I=1}^L dx^*(I) dx(I) \exp\left(z^* z - \sum_{I=1}^L x^*(I)x(I)\right) \times \langle z^* | e^{\mathcal{Q}} | x(1) \rangle \langle x^*(1) | e^{-\frac{\beta}{L} H^s} | x(2) \rangle \dots \langle x^*(L) | e^{-\frac{\beta}{L} H^s} | z \rangle, \quad (171)$$

где $x^*(I) \equiv x^*(a_I)$, $x(I) \equiv x(a_I)$.

¹Используем сокращенные обозначения: $\sum_{k=1}^M c_k^\dagger x_k \equiv c^\dagger x$, $\prod_{k=1}^M dx_k \equiv dx$, и т.д.. Используем матричные обозначения для строки и столбца, x^\dagger и x , составленных из компонент x_k^\dagger и x_k , $k \in \mathcal{M}$.

Приступим к вычислению (171). Во-первых, получаем:

$$\langle z^* | e^{\mathcal{Q}} | x(a_1) \rangle = \langle z^* | e^{c^\dagger \alpha c} | x(a_1) \rangle = \exp(z^* e^\alpha x(a_1)), \quad (172)$$

где $\alpha \equiv \text{diag} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_M \}$ есть диагональная матрица ². В правой части (172) переменные z_k^* и $x_k(1)$ образуют строку z^* и столбец $x(1)$. Далее:

$$\begin{aligned} \langle x^*(I) | e^{-\frac{\beta}{L} H^s} | x(I+1) \rangle &\underset{L \gg 1}{\simeq} \\ &\simeq \exp \left(x^*(I) x(I+1) - \frac{\beta}{L} H^s(x^*, x | I) \right), \quad I \in \{1, 2, \dots, L-1\}, \end{aligned} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} H^s(x^*, x | I) &\equiv -\frac{hM}{2} + \sum_{k,n=1}^M (h\delta_{kn} - \Delta_{kn}^{(-s)}) x_k^*(I) x_n(I+1) \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^M (x_{k+1}(I) x_k(I+1) + x_k^*(I) x_{k+1}^*(I+1)) \quad . \end{aligned} \quad (174)$$

Использование представлений (172), (173), (174) позволяет выполнить переход к $L \rightarrow \infty$ в (171). Чтобы учесть $L \rightarrow \infty$, введем обозначения $x^*(0) = z^* e^\alpha$, $x(L+1) = z$, и наложим связи:

$$e^{-\alpha} x(L+1) = -x(0), \quad e^\alpha x^*(L+1) = -x^*(0). \quad (175)$$

Напомним, что дельта-функция грассмановой переменной θ имеет вид, [18]: $\delta(\theta - \theta') \equiv \theta - \theta'$ и может быть представлена в виде грассманова интеграла по вспомогательным переменным λ, λ^* . Таким образом, связи (175) можно записать как интегралы по грассмановым переменным λ_k^*, λ_k :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^M (x_k(0) + e^{-\alpha_k} x_k(L+1)) &= \int \exp[\lambda^*(x(0) + e^{-\alpha} x(L+1))] d\lambda^*, \\ \prod_{k=1}^M (x_k^*(0) + e^{\alpha_k} x_k^*(L+1)) &= \int \exp[(x^*(0) + e^\alpha x^*(L+1))\lambda] d\lambda. \end{aligned} \quad (176)$$

Внесем (176) под знак интегрирования в (171) как ограничение области функционального интегрирования до перехода $L \rightarrow \infty$. Индекс a_I становится при $L \rightarrow \infty$

²Обозначим \mathbf{A} и \hat{A} матрицы в “решеточном” и “импульсном” представлениях.

мнимым временем τ , и стандартная процедура [11, 12, 18] показывает, что (171) превращается в представление для G_F^s в виде функционального интеграла.

Используем разложение в ряд Фурье [50, 51]:

$$x_k(\tau) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{M}} \sum_{q \in S^\pm} e^{iqk} x_q(\tau), \quad (177)$$

где импульсы $q \in S^\pm$ подчиняются $\cos Mq = \mp 1$ для соблюдения граничных условий $x_{M+1}(\tau) = \mp x_1(\tau)$. Для λ_k^* , λ_k разложение аналогично (177). Будем считать в дальнейшем, что обозначения $x_{k,\tau}$ и $x_k(\tau)$, x_τ и $x(\tau)$ эквивалентны. С помощью (177) получим билинейные формы для правой части (176) после $L \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k^*(x_k(\tau_0) + e^{-\alpha k} x_k(\tau_0 + \beta)) = \sum_{q, q'} \lambda_q^*(\delta_{qq'} x_{q'}(\tau_0) + (e^{-\hat{\alpha}})_{qq'} x_{q'}(\tau_0 + \beta)), \quad (178)$$

где

$$(e^{-\hat{\alpha}})_{qq'} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e^{-\alpha k} e^{ik(q'-q)}, \quad (\hat{\alpha})_{qq'} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \alpha_k e^{ik(q'-q)}. \quad (179)$$

В компактной записи равенство (178) имеет вид:

$$\lambda^*(x(\tau_0) + e^{-\alpha} x(\tau_0 + \beta)) = \lambda^*(x(\tau_0) + e^{-\hat{\alpha}} x(\tau_0 + \beta)). \quad (180)$$

После использования (177) в (174), XU -гамильтониан принимает в импульсном представлении вид $2M \times 2M$ матрицы:

$$\tilde{H} \equiv \hat{\varepsilon} \otimes \sigma^3 + \hat{\Gamma} \otimes \sigma^1, \quad (181)$$

где $\hat{\varepsilon} \equiv \text{diag}_{q \in S^\pm} \{\varepsilon_q\}$, $\hat{\Gamma} \equiv \text{diag}_{q \in S^\pm} \{\Gamma_q\}$ ($\varepsilon_q \equiv h - \cos q$ и $\Gamma_q \equiv \gamma \sin q$); $\text{diag}_{q \in S^\pm}$ означает диагональную матрицу $M \times M$. Матрица (181) диагонализуется унитарной матрицей \tilde{g} :

$$\tilde{g} \tilde{H} \tilde{g}^{-1} = \tilde{E} \equiv \hat{E} \otimes \sigma^3, \quad \tilde{g} \equiv \text{diag}_{q \in S^\pm} \{e^{-i(\theta_q/2)\sigma^2}\}, \quad (182)$$

где $\hat{E} \equiv \text{diag}_{q \in S^\pm} \{E_q\}$, и $E_q = \sqrt{\varepsilon_q^2 + \Gamma_q^2}$ – уровни энергии. “Углы” θ_q задаются $\tan \theta_q = -\Gamma_q/\varepsilon_q$, [154, 155].

Используем (178), (180) и представим интегралы, выражающие связи (176), с использованием матриц размера $2M \times 2M$. В результате приходим к одному интегралу:

$$\int \exp\left(\frac{1}{2} \int (X_\tau^* J_\tau + J_\tau^* X_\tau) d\tau\right) d\Lambda, \quad (183)$$

$$J_\tau^* \equiv \Lambda^* (\tilde{I} \delta(\tau - \tau_0) - \ell e^{-\tilde{\alpha}} \delta(\tau - \tau_0 - \beta)), \quad (184)$$

$$J_\tau \equiv (\tilde{I} \delta(\tau - \tau_0) - \ell e^{\tilde{\alpha}} \delta(\tau - \tau_0 - \beta)) \Lambda,$$

где τ изменяется между $-\infty$ и ∞ . В соотношениях (183) и (184) введены столбцы высоты $2M$: $\Lambda \equiv (\dots, \lambda_q, -\lambda_{-q}^*, \dots)^T$, $X_\tau \equiv (\dots, x_{q,\tau}, x_{-q,\tau}^*, \dots)^T$, где $q \in \mathbf{S}^\pm$. Кроме того, в (184) используются следующие матрицы: $\tilde{I} \equiv \hat{I} \otimes \sigma^0$, $\tilde{\alpha} \equiv \hat{\alpha} \otimes \sigma^3$, где \hat{I} есть единичная $M \times M$ матрица, σ^0 есть единичная 2×2 матрица, $\hat{\alpha}$ есть $M \times M$ матрица с элементами (179). Параметр ℓ (184) указывает, что формула применима как для $G_{\text{F/B}}^\pm Z_{\text{F/B}}^\pm$ ($\ell = -1$) так и для $G_{\text{B/F}}^\pm Z_{\text{B/F}}^\pm$ ($\ell = 1$). Связи (175) преобразуются при $\alpha_k \rightarrow 0$ в обычное условие антипериодичности.

С учетом диагонализации (182) приходим к интегральному представлению:

$$G_{\text{F/B}}^\pm Z_{\text{F/B}}^\pm = e^{-\beta E_0^\pm} \int e^{\mathcal{S}_g} d\tilde{\Lambda} DY, \quad \mathcal{S}_g \equiv \frac{1}{2} \int \mathcal{L}_g(\tau) d\tau, \quad (185)$$

где DY и $d\tilde{\Lambda}$ есть меры интегрирования по компонентам $Y_\tau = \tilde{g} X_\tau$ и $\tilde{\Lambda}$, и E_0^\pm энергия “основного” состояния [144, 155, 156]. Лагранжиан $\mathcal{L}_g(\tau)$ имеет вид:

$$\mathcal{L}_g(\tau) = Y_\tau^* \left(\frac{d}{d\tau} - \tilde{E} \right) Y_\tau + Y_\tau^* \tilde{J}_\tau + \tilde{J}_\tau^* Y_\tau. \quad (186)$$

Для “источников” J_τ^* , J_τ , преобразованных с помощью \tilde{g} и \tilde{g}^{-1} , приняты обозначения \tilde{J}_τ^* , \tilde{J}_τ :

$$\tilde{J}_\tau^* \equiv \tilde{\Lambda}^* (\tilde{I} \delta(\tau - \tau_0) - \ell \tilde{g} e^{-\tilde{\alpha}} \tilde{g}^{-1} \delta(\tau - \tau_0 - \beta)),$$

$$\tilde{J}_\tau \equiv (\tilde{I} \delta(\tau - \tau_0) - \ell \tilde{g} e^{\tilde{\alpha}} \tilde{g}^{-1} \delta(\tau - \tau_0 - \beta)) \tilde{\Lambda},$$

где $\tilde{\Lambda}^* \equiv \Lambda^* \tilde{g}^{-1}$, $\tilde{\Lambda} \equiv \tilde{g} \Lambda$. Для вычисления гауссова интеграла по грассмановым переменным (185) применим метод стационарной фазы (более широко, приближение седловой точки для интегралов по путям обсуждается в [19]), и уравнения имеют вид:

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta Y_\tau^*} = \frac{d}{d\tau} Y_\tau - \tilde{E}_\pm Y_\tau + \tilde{J}_\tau = 0, \quad (187)$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta Y_\tau} = -\frac{d}{d\tau} Y_\tau^* - Y_\tau^* \tilde{E}_\pm + \tilde{J}_\tau^* = 0 \quad (188)$$

(вариации δY_τ^* , δY_τ исчезают при $\tau \rightarrow \pm\infty$). Уравнение (187) решается:

$$Y_\tau = \int \tilde{G}(\tau - \tau') \tilde{J}_{\tau'} d\tau', \quad \tilde{G}(\tau - \tau') = e^{(\tau - \tau')\tilde{E}} (\tilde{I}\Theta(\tau' - \tau) + \tilde{M}), \quad (189)$$

где для функции Хэвисайда $\Theta(0) = \frac{1}{2}$, а выбор матрицы \tilde{M} подчинен ограничению:

$$\tilde{M}\tilde{g}e^{\tilde{\alpha}} - \ell e^{\beta\tilde{E}}\tilde{M}\tilde{g} = \tilde{R}, \quad \tilde{R} \equiv \ell e^{\beta\tilde{E}}(\tilde{I} - \exp(\frac{\hat{\alpha}}{2} \otimes \sigma^0))\tilde{g}. \quad (190)$$

Матрица $\tilde{M}\tilde{g}$ существует [143], и, пользуясь (189), (190), получаем:

$$G_{\text{F/B}}^\pm Z_{\text{F/B}}^\pm = e^{-\beta E_0^\pm} \text{Det}^{1/2} \left(\frac{d}{d\tau} - \tilde{E} \right) \int \exp \left(\frac{1}{2} \int \tilde{J}_\tau^* \tilde{G}(\tau - \tau') \tilde{J}_{\tau'} d\tau d\tau' \right) d\tilde{\Lambda}. \quad (191)$$

Вычислим гауссов интеграл (191), используя уравнение (190), которому подчинена матрица \tilde{M} , и получим:

$$\det_{2M}^{1/2} (\exp(\frac{\hat{\alpha}}{2} \otimes \sigma^0)) \det_{2M}^{1/2} (\tilde{I} - \ell \tilde{g} \exp(-\hat{\alpha} \otimes \sigma^3) \tilde{g}^{-1} \exp(\beta\tilde{E})). \quad (192)$$

Регуляризуем (191), деля на аналогичное выражение при $\{\alpha_k = 0\}$, т.е., на $Z_{\text{F/B}}^\pm$.

Используем (192) и получаем регуляризованный ответ для $G_{\text{F/B}} \equiv G_{\text{F/B}}^s$:

$$G_{\text{F/B}} = \exp(\text{tr} \hat{\alpha}/2) \det_{2M}^{1/2} (\tilde{I} + \tilde{M}^\ell), \quad \tilde{M}^\ell \equiv \frac{\tilde{g} \exp(-\hat{\alpha} \otimes \sigma^3) \tilde{g}^{-1} - \tilde{I}}{\tilde{I} - \ell \exp(-\beta\tilde{E})}. \quad (193)$$

Соотношение (193) при $\ell = -1$ дает G_{F} , а G_{B} возникает при $\ell = 1$. В работе [67] показано, что квадратный корень из определителя можно извлечь и получить из (193)

следующее выражение:

$$\begin{aligned} G_{\text{F/B}} &= \det_M(\widehat{I} + \widehat{M}^\ell), \\ \widehat{M}^\ell &= (e^{\widehat{\alpha}} - \widehat{I}) \widehat{f}^\ell, \quad \widehat{f}^\ell \equiv \frac{1}{2}(\widehat{I} - \widehat{e}_{2\theta} \widehat{t}^{(-\ell)}). \end{aligned} \quad (194)$$

Соотношение (194) обобщает представление полученное в [144, 155].

Вычислим (162) с помощью (194). Введем сокращения: $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_{\text{F/B}}$ и $\widehat{K} \equiv (\widehat{I} + \widehat{M}^\ell)^{-1}$ и сформулируем

УТВЕРЖДЕНИЕ Определитель \mathcal{G} (194) есть производящая формула миноров,

$$\mathcal{G}^{-1} \partial_{k_1} \partial_{k_2} \dots \partial_{k_l} \mathcal{G} = e^{\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} + \dots + \alpha_{k_l}} \det_l(F_{ij}), \quad (195)$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq M$, и $\det_l(F_{ij}) \equiv \det(F_{k_i, k_j})_{1 \leq i, j \leq l}$.

Доказательство Применим индукцию. Для производной первого порядка получаем:

$$\mathcal{G}^{-1} \partial_{k_1} \mathcal{G} = e^{\alpha_{k_1}} \text{tr} [\widehat{K} \widehat{\delta}_{k_1} \widehat{f}] \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \text{tr} [\widehat{\delta}_{k_1} \widehat{f}] = \frac{1}{M} \text{tr}(\widehat{f}), \quad (196)$$

где $\widehat{f} \equiv \widehat{f}^\ell$, $\partial_l \equiv \partial/\partial\alpha_l$, и $\widehat{\delta}_{k_1} \equiv \partial_{k_1} \widehat{\alpha}$. Дифференцирование второго порядка \mathcal{G} дает ответ ($k_1 \neq k_2$):

$$\mathcal{G}^{-1} \partial_{k_1} \partial_{k_2} \mathcal{G} = e^{\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}} (\text{tr} [\widehat{K} \widehat{\delta}_{k_1} \widehat{f}] \text{tr} [\widehat{K} \widehat{\delta}_{k_2} \widehat{f}] - \text{tr} [\widehat{K} \widehat{\delta}_{k_1} \widehat{f} \widehat{K} \widehat{\delta}_{k_2} \widehat{f}]). \quad (197)$$

Введем обозначение

$$F_{k_1, k_2} \equiv \frac{1}{M} \sum_{p, q} e^{-ik_2 p} f_p K_{pq} e^{ik_1 q}, \quad (198)$$

с использованием которого можно увидеть, что след $\text{tr} [\widehat{K} \widehat{\delta}_{k_1} \widehat{f} \widehat{K} \widehat{\delta}_{k_2} \widehat{f}]$ факторизуется в произведение $F_{k_1, k_2} F_{k_2, k_1}$, и соотношение (197) принимает вид:

$$\mathcal{G}^{-1} \partial_{k_1} \partial_{k_2} \mathcal{G} = e^{\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}} \begin{vmatrix} F_{k_1, k_1} & F_{k_1, k_2} \\ F_{k_2, k_1} & F_{k_2, k_2} \end{vmatrix}. \quad (199)$$

Полученные соотношения (196) и (199) дают базу индукции.

Далее получаем, что след $\text{tr} [\widehat{K}\widehat{\delta}_{k_1}\widehat{f}\widehat{K}\widehat{\delta}_{k_2}\widehat{f}\dots\widehat{K}\widehat{\delta}_{k_l}\widehat{f}]$ факторизуется в произведение $F_{k_1,k_2}F_{k_2,k_3}\dots F_{k_{l-1},k_l}$. Теперь предположим, что (195) выполняется при $l-1$,

$$\mathcal{G}^{-1}\partial_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1}}^{l-1}\mathcal{G} = e^{\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}+\dots+\alpha_{k_{l-1}}}\det_{l-1}(F_{ij}). \quad (200)$$

Используя соотношение

$$\partial_{\alpha_{k_n}}F_{k_i,k_j} = e^{\alpha_{k_n}}F_{k_i,k_n}F_{k_n,k_j}, \quad (201)$$

подействуем на (200) производной ∂_{k_l} и получим:

$$\partial_{k_1,k_2,\dots,k_{l-1},k_l}^l\mathcal{G} = e^{\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}+\dots+\alpha_{k_{l-1}}}\left(\mathcal{G}\partial_{k_l}\det_{l-1}(F_{ij}) + \det_{l-1}(F_{ij})\partial_{k_l}\mathcal{G}\right), \quad (202)$$

С другой стороны, получаем производную определителя $\det_{l-1}(F_{ij})$:

$$\partial_{k_l}\det_{l-1}(F_{ij}) = \sum_{i=1}^{l-1}(-1)^{l+i}F_{li} \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & \check{F}_{1i} & \dots & F_{1l} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & \check{F}_{2i} & \dots & F_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{l-1,1} & F_{l-1,2} & \dots & \check{F}_{l-1,i} & \dots & F_{l-1,l} \end{vmatrix}, \quad (203)$$

где \check{F}_{ij} указывает, что соответствующий столбец пропущен. Комбинируя (203) и (196) (для $\partial_{k_l}\mathcal{G}$), получаем из (202) основное утверждение (195).

Учитываем, что $\mathcal{G} \rightarrow 1$ при $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M \rightarrow 0$ и получаем из (195):

$$\partial_{k_1}\partial_{k_2}\dots\partial_{k_l}\mathcal{G} = \det(f_{k_i,k_j})_{1 \leq i,j \leq l}, \quad (204)$$

где матричные элементы f_{k_i,k_j} возникают из (198). Уравнение (204) показывает, что l -кратное дифференцирование \mathcal{G} дает минор порядка l матрицы размера $M \times M$. Учитывая (169) и получаем из (204), что в термодинамическом пределе $G(\{\alpha_k\})$ (160) есть, в соответствии с (162), производящая функция, которая дает среднее произведения плотностей на узлах в виде минора. При этом сама производящая функция $G(\{\alpha_k\})$ (160) в термодинамическом пределе имеет детерминантный вид. \square

В работе [66] явными вычислениями показано, что представления в виде определителей для $G_{\mathbb{F}/\mathbb{V}}^s$ (169) действительно приводят к правильным ответам для (двухточечных) корреляционных функций. В [67] дан пример вычисления двухточечной функции с зависимостью от времени (трудности, возникающие при учете времени обсуждаются в [42], где выбран другой путь). Полученные здесь представления пригодны и для многоточечных корреляторов, а также для корреляторов, которые возникают из более сложных производящих функций (см. раздел 1.2).

ГЛАВА 2. СЛАБОНЕОДНОРОДНЫЕ БОЗЕ-ГАЗ В ГАРМОНИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ И А-ФАЗА ГЕЛИЯ-3

2.1 Сверхтекучий одномерный бозе-газ в гармоническом потенциале. Эффективное действие

В работах [76–82] рассматривается квантовополевая модель, описывающая неоднородный одномерный нерелятивистский бозе-газ на вещественной оси $\mathbb{R} \ni x$ с гамильтонианом \hat{H} :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \left\{ \hat{\psi}^\dagger(x) \mathcal{H} \hat{\psi}(x) + \frac{g}{2} \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) \right\} dx, \\ \mathcal{H} &\equiv \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu + V(x), \end{aligned} \quad (205)$$

где $\hat{\psi}^\dagger(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ означают операторнозначные поля, описывающие рождение и уничтожение квазичастиц над фоковским вакуумом $|0\rangle$. Поля $\hat{\psi}^\dagger(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ подчиняются перестановочному соотношению $\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(x') - \hat{\psi}^\dagger(x')\hat{\psi}(x) = \delta(x-x')$ (между собой $\hat{\psi}^\dagger(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ перестановочны), и \mathcal{H} – “одночастичный” гамильтониан. В (205) использованы обозначения: m – масса бозе-частиц, μ – химический потенциал, g – константа связи, отвечающая слабому отталкиванию (т. е. $g > 0$), и внешний удерживающий потенциал выбран в виде гармонического потенциала $V(x) \equiv \frac{m}{2}\Omega^2 x^2$.

Статистическая сумма Z записывается в виде функционального интеграла:

$$Z = \int e^{S[\psi, \bar{\psi}]} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (206)$$

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \int dx \left\{ \bar{\psi}(x, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mathcal{H} \right) \psi(x, \tau) - \frac{g}{2} |\psi(x, \tau)|^4 \right\}, \quad (207)$$

где $S[\psi, \bar{\psi}]$ – функционал действия, и гамильтониан \mathcal{H} определен в (205). Интегрирование в (206) идет по комплекснозначным функциям $\bar{\psi}(x, \tau)$, $\psi(x, \tau)$, которые достаточно быстро убывают при $x \rightarrow \pm\infty$ и периодичны с периодом $\beta = (k_B T)^{-1}$ по переменной $\tau \in [0, \beta]$ (k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура), и $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ есть мера функционального интегрирования.

Известно, что в одномерных системах невозможна бозе-конденсация, связанная с макроскопическим заполнением низшего квантового уровня [159]. С другой стороны, нетривиальность основного состояния одномерного газа бозе-частиц, взаимодействующих через дельта-образный потенциал, позволяет говорить о существовании *квази-конденсата* [70, 71]. Поэтому при достаточно низких температурах можно представить $\bar{\psi}(x, \tau)$, $\psi(x, \tau)$ в виде сумм двух слагаемых [11, 12]:

$$\psi(x, \tau) = \psi_o(x, \tau) + \psi_e(x, \tau), \quad \bar{\psi}(x, \tau) = \bar{\psi}_o(x, \tau) + \bar{\psi}_e(x, \tau), \quad (208)$$

где $\bar{\psi}_o(x, \tau)$, $\psi_o(x, \tau)$ отвечают квази-конденсату и $\bar{\psi}_e(x, \tau)$, $\psi_e(x, \tau)$ отвечают высокоэнергетичным возбуждениям. Переменные в (208) ортогональны:

$$\int \psi_o(x, \tau)\bar{\psi}_e(x, \tau)dx = 0, \quad \int \bar{\psi}_o(x, \tau)\psi_e(x, \tau)dx = 0,$$

и мера $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ заменяется на $\mathcal{D}\psi_o\mathcal{D}\bar{\psi}_o\mathcal{D}\psi_e\mathcal{D}\bar{\psi}_e$.

В интеграле (206) последовательно проинтегрируем сначала по высокоэнергетичным, а затем – по низкоэнергетичным переменным [11, 12]. Вывод эффективного действия S_{eff} , основанный на подстановке (208) в (207), означает использование подхода разложения по петлям [16]. На втором этапе уместно перейти к новым функциональным переменным ‘плотность–фаза’ [11, 12], более адекватно описывающим “низкоэнергетическую” физику. Подставим в (208) в (207) и учтем в S слагаемые не старше второго порядка по $\bar{\psi}_e$, ψ_e , считая что надконденсатные квазичастицы не взаимодействуют друг с другом. В этом случае можно проинтегрировать по температурным

Флуктуациям $\bar{\psi}_e, \psi_e$ в замкнутом виде и прийти к приближенному выражению для статсуммы Z :

$$Z \approx \int e^{S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o]} \mathcal{D}\psi_o \mathcal{D}\bar{\psi}_o, \quad S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o] = \log \int e^{\tilde{S}[\psi_o + \psi_e, \bar{\psi}_o + \bar{\psi}_e]} \mathcal{D}\psi_e \mathcal{D}\bar{\psi}_e, \quad (209)$$

где $S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o]$ – функционал эффективного действия, который зависит только от квазиконденсатных переменных $\psi_o, \bar{\psi}_o$, и тильда в \tilde{S} означает, что $\bar{\psi}_e, \psi_e$ учитываются до второго порядка.

Представим действие \tilde{S} в виде суммы $\tilde{S} = S_{\text{cond}} + S_{\text{free}} + S_{\text{int}}$, где S_{cond} – функционал действия квази-конденсатных переменных,

$$S_{\text{cond}}[\psi_o, \bar{\psi}_o] \equiv \int_0^\beta d\tau \int dx \left\{ \bar{\psi}_o(x, \tau) \hat{K}_+ \psi_o(x, \tau) - \frac{g}{2} |\psi_o(x, \tau)|^4 \right\}, \quad (210)$$

S_{free} – функционал действия надконденсатных возбуждений,

$$S_{\text{free}}[\psi_e, \bar{\psi}_e] \equiv \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int dx (\bar{\psi}_e, \psi_e) \hat{G}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \bar{\psi}_e \end{pmatrix}, \quad (211)$$

и S_{int} отвечает взаимодействию высокоэнергетичных возбуждений с квази-конденсатом:

$$S_{\text{int}}[\psi_o, \bar{\psi}_o, \psi_e, \bar{\psi}_e] \equiv \int_0^\beta d\tau \int dx \left\{ \bar{\psi}_e(x, \tau) [\hat{K}_+ - g\bar{\psi}_o\psi_o] \psi_o(x, \tau) \right. \\ \left. + \psi_e(x, \tau) [\hat{K}_- - g\bar{\psi}_o\psi_o] \bar{\psi}_o(x, \tau) \right\}. \quad (212)$$

В (211) введен матрично-дифференциальный оператор \hat{G}^{-1} :

$$\hat{G}^{-1} \equiv \hat{G}_0^{-1} - \hat{\Sigma}, \quad \hat{G}_0^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \hat{K}_+ & 0 \\ 0 & \hat{K}_- \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma} \equiv g \begin{pmatrix} 2|\psi_o|^2 & \psi_o^2 \\ (\bar{\psi}_o)^2 & 2|\psi_o|^2 \end{pmatrix}. \quad (213)$$

В (210), (212), (213) используются операторы $\hat{K}_\pm \equiv \pm \frac{\partial}{\partial \tau} - \mathcal{H}$, где \mathcal{H} – гамильтониан (205).

Определим $\bar{\psi}_o, \psi_o$ из условия стационарности S_{cond} (210). Соответствующее тре-

бование $\delta(S_{\text{cond}}[\psi_o, \bar{\psi}_o]) = 0$ приводит к уравнениям Гросса–Питаевского [70]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu - V(x) \right) \psi_o - g (\bar{\psi}_o \psi_o) \psi_o &= 0, \\ \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu - V(x) \right) \bar{\psi}_o - g (\bar{\psi}_o \psi_o) \bar{\psi}_o &= 0. \end{aligned} \quad (214)$$

При соблюдении (214) вклад от S_{int} (212) выпадает из \tilde{S} . В ведущем приближении, поля $\psi_e, \bar{\psi}_e$ описываются действием S_{free} (211), которое зависит от $\bar{\psi}_o, \psi_o$ через посредство матрицы $\hat{\Sigma}$ (213). В случае большого количества частиц в магнито-оптической ловушке уместно воспользоваться приближением *Томаса–Ферми* [70, 71, 73, 74] и отбросить кинетический член в (214). Это приводит к решению:

$$\bar{\psi}_o \psi_o = \rho_{\text{TF}}(x; \mu) \equiv \frac{1}{g} (\mu - V(x)) \Theta(\mu - V(x)), \quad (215)$$

где Θ – функция Хевисайда. Как показано в [73], отношение осцилляторной энергии к энергии межчастичного взаимодействия $\sim \left(\frac{R}{\zeta a_{\perp}} \right)^5$ порядка единицы при $R \sim \zeta$. Здесь R – радиус облака, занимаемого бозе-газом, a_{\perp} – осцилляторная длина (в поперечной плоскости, если учесть анизотропию) и $\zeta \sim N^{1/5} \gg 1$ – безразмерный параметр, характеризующий систему, который велик для большого числа частиц, $N \gg 1$. При этом условии, как осцилляторная энергия, так и межчастичное взаимодействие, имеют порядок $\sim R^2 \sim N^{2/5}$. С другой стороны, кинетическая энергия на одну частицу имеет порядок $\sim \frac{1}{R^2} \sim N^{-2/5} \ll 1$. Таким образом, отношение кинетической энергии к энергии взаимодействия $\sim \frac{1}{R^4} \sim \frac{1}{N^{4/5}} \ll 1$. Это оправдывает обсуждаемое приближение, а численные расчеты подтверждают адекватность использования соответствующей волновой функции [70, 71].

Интегрирование в (209) гауссово и мы получаем:

$$S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o] \equiv S_{\text{cond}}[\psi_o, \bar{\psi}_o] - \frac{1}{2} \ln \text{Det} (\hat{G}^{-1}). \quad (216)$$

Для придания смысла выражению (216) требуется регуляризация. Оператор \hat{G}^{-1} (213) записан в виде уравнения Дайсона [10], где \hat{G} есть матрица функций Грина

полей $\bar{\psi}_e, \psi_e$. Уместно представить \widehat{G}^{-1} в виде

$$\widehat{G}^{-1} = \widehat{G}_0^{-1} - \widehat{\Sigma} \equiv \widehat{\mathcal{G}}^{-1} - (\widehat{\Sigma} - 2g\rho_{TF}(x; \mu)\widehat{I}), \quad (217)$$

где $\rho_{TF}(x; \mu)$ – решение (215), \widehat{I} – единичная матрица, и $\widehat{\mathcal{G}}^{-1}$ определяется как

$$\widehat{\mathcal{G}}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \widehat{K}_+ - 2g\rho_{TF}(x; \mu) & 0 \\ 0 & \widehat{K}_- - 2g\rho_{TF}(x; \mu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{K}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_- \end{pmatrix}. \quad (218)$$

Обращение $\widehat{\mathcal{G}}^{-1}$ связано с решением уравнений, определяющих функции Грина \mathcal{G}_\pm :

$$(\widehat{K}_\pm - 2g\rho_{TF}(x; \mu))\mathcal{G}_\pm = \delta(x - x')\delta(\tau - \tau'). \quad (219)$$

Используя соотношение $\ln \text{Det} = \text{Tr} \ln$, получаем

$$-\frac{1}{2} \ln \text{Det} \widehat{G}^{-1} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\widehat{I} - \widehat{\mathcal{G}}(\widehat{\Sigma} - 2g\rho_{TF}(x; \mu)\widehat{I}) \right) - \frac{1}{2} \ln \text{Det} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_- \end{pmatrix}. \quad (220)$$

Пусть $\pm i\omega_B - \lambda_n$ – собственные значения операторов \mathcal{K}_\pm , где ω_B – бозонные частоты и λ_n – уровни энергии (нумеруемые мульти-индексом n) оператора $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - |V(x) - \mu|$.

Регулярная часть логарифма определителя в (220) имеет смысл свободной энергии \widetilde{F}_{nc} идеального газа надконденсатных возбуждений:

$$\widetilde{F}_{nc}(\mu) \equiv \frac{1}{2\beta} \ln \text{Det} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta} \sum_n \ln \left(2 \sinh \frac{\beta\lambda_n}{2} \right),$$

где регуляризованные значения определителей операторов \mathcal{K}_\pm могут быть получены, например, в подходе дзета-регуляризации [17]. В ведущем порядке по g , получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ln \text{Det} \widehat{G}^{-1} &\approx -\beta \widetilde{F}_{nc}(\mu) + g \int_0^\beta d\tau \int dx (\mathcal{G}_+(x, \tau; x, \tau) + \mathcal{G}_-(x, \tau; x, \tau)) (\bar{\psi}_o \psi_o - \rho_{TF}(x; \mu)) \\ &\equiv -\beta F_{nc}(\mu) - 2g \int_0^\beta d\tau \int dx \rho_{nc}(x) \bar{\psi}_o \psi_o, \end{aligned} \quad (221)$$

где $F_{nc}(\mu)$ – свободная энергия неидеального газа надконденсатных квазичастиц, и последний член в (221) описывает взаимодействие надконденсатных квазичастиц с

конденсатом. Плотность надконденсатных квазичастиц есть $\rho_{nc}(x) \equiv -\mathcal{G}_{\pm}(x, \tau; x, \tau)$.

Для очень низких температур и достаточно далеко от границы конденсата можно заменить $\rho_{nc}(x)$ на $\rho_{nc}(0)$, так как $\mathcal{G}_{\pm}(x, \tau; x, \tau)$ почти постоянно в объеме [160]. Окончательно получаем эффективное действие

$$S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o] = -\beta F_{nc}(\mu) + \int_0^{\beta} d\tau \int dx \left\{ \bar{\psi}_o(x, \tau) \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Lambda - V(x) \right) \psi_o(x, \tau) - \frac{g}{2} \bar{\psi}_o(x, \tau) \bar{\psi}_o(x, \tau) \psi_o(x, \tau) \psi_o(x, \tau) \right\}, \quad (222)$$

где $\Lambda = \mu - 2g\rho_{nc}(0)$ — ренормированный химический потенциал. Будем рассматривать S_{eff} (222) как однопетлевое эффективное действие, в котором учтены температурные поправки над “классическим” фоном, отвечающим (215). Прделанный вывод эффективного действия годится также и для пространственных размерностей 2 и 3.

Введем переменные ‘плотность–фаза’,

$$\psi_o(x, \tau) = \sqrt{\rho(x, \tau)} e^{i\varphi(x, \tau)}, \quad \bar{\psi}_o(x, \tau) = \sqrt{\rho(x, \tau)} e^{-i\varphi(x, \tau)}. \quad (223)$$

Будем рассматривать $\rho(x, \tau)$ и $\varphi(x, \tau)$ как две новых независимых переменных функционального интегрирования. При этом мера $\mathcal{D}\bar{\psi}_o \mathcal{D}\psi_o$ заменяется на меру $\mathcal{D}\rho \mathcal{D}\varphi$. В новых переменных (223) переходим от (222) однопетлевому эффективному действию [80–82]:

$$S_{\text{eff}}[\rho, \varphi] = -\beta F_{nc}(\mu) + i \int_0^{\beta} d\tau \int dx \left\{ \rho \partial_{\tau} \varphi + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x (\rho \partial_x \varphi) \right\} + \int_0^{\beta} d\tau \int dx \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left(\sqrt{\rho} \partial_x^2 \sqrt{\rho} - \rho (\partial_x \varphi)^2 \right) + (\Lambda - V) \rho - \frac{g}{2} \rho^2 \right\}, \quad (224)$$

где $\Lambda = \mu - 2g\rho_{nc}(0)$ — ренормированный химический потенциал, и приняты сокращенные обозначения для частных производных. Условие $\delta(S_{\text{eff}}[\rho, \varphi]) = 0$ приводит к уравнениям типа Гросса–Питаевского:

$$i\partial_{\tau} \varphi + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_x^2 \sqrt{\rho} - (\partial_x \varphi)^2 \right) + \Lambda - V(x) - g\rho = 0, \quad (225)$$

$$-i\partial_{\tau} \rho + \frac{\hbar^2}{m} \partial_x (\rho \partial_x \varphi) = 0.$$

Приближение Томаса–Ферми, справедливое при достаточно низких температурах, позволяет отбросить кинетический член $(\partial_x^2 \sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$ в первом из уравнений (225). Решение с $\partial_\tau \rho = 0 = \partial_\tau \varphi$ получается, если положить в (225) поле скоростей $\mathbf{v} = m^{-1} \partial_x \varphi$ равным нулю. В этом случае уравнения (225) приводят к плотности конденсата, которая описывается решением (215), и где химический потенциал μ заменен на Λ :

$$\rho_{\text{TF}}(x) \equiv \frac{\Lambda}{g} \tilde{\rho}_{\text{TF}}(x) = \frac{\Lambda}{g} \left(1 - \frac{x^2}{R_c^2}\right) \Theta \left(1 - \frac{x^2}{R_c^2}\right). \quad (226)$$

Параметр R_c есть граница области квази-конденсата: $R_c^2 \equiv \frac{2\Lambda}{m\Omega^2}$.

Пусть $\rho_0(x, \tau)$ есть некоторое решение уравнений (225), которое представимо, по аналогии с (208), в следующем виде: $\rho_0(x, \tau) = \rho_{\text{TF}}(x) + \pi_0(x, \tau)$. Линеаризуем уравнения (225) в окрестности решения $\rho_0 = \rho_{\text{TF}}(x)$, $\varphi = \text{const}$ и после замены $\pi_0 = e^{i\omega\tau} u(x)$ придем к уравнению типа Лежандра:

$$-\frac{\omega^2}{\hbar^2 v^2} u(x) + \frac{d}{dx} \left(\left(1 - \frac{x^2}{R_c^2}\right) \frac{d}{dx} u(x) \right) = 0, \quad v^2 \equiv \frac{\rho_{\text{TF}}(0)g}{m} = \frac{\Lambda}{m}, \quad (227)$$

где v есть скорость звука в центре ловушки. Рассмотрим уравнение (227) для $x \in [-R_c, R_c] \subset \mathbb{R}$ и выполним аналитическое продолжение $\omega \rightarrow iE$. Многочлены Лежандра $P_n(x/R_c)$ являются решениями (227), если и только если

$$\left(\frac{R_c}{\hbar v}\right)^2 E^2 \equiv \frac{2}{\hbar^2 \Omega^2} E^2 = n(n+1), \quad n \geq 0. \quad (228)$$

Спектр надконденсатных возбуждений имеет вид: $E_n = \hbar\Omega \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$, $n \geq 0$, [161, 162]. Выполняя в (227) при конечных x формальный переход $1/R_c \rightarrow 0$, получаем уравнение для однородного бозе-газа. Рассматривая последнее по-прежнему на отрезке $[-R_c, R_c] \ni x$ с периодическим граничным условием по x , приходим к дискретному спектру следующего вида: $E_k = \hbar v k$, где k – волновое число, $k = (\pi/R_c)n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.2 Корреляционные функции бозе-газа и их асимптотики

Рассмотрим двухточечную температурную корреляционную функцию в виде отношения двух функциональных интегралов:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \equiv \frac{1}{Z} \int e^{S[\psi, \bar{\psi}]} \bar{\psi}(x_1, \tau_1) \psi(x_2, \tau_2) \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (229)$$

где $S[\psi, \bar{\psi}]$ – действие (207) и Z – статсумма (206). Все вычисления проводятся в координатном представлении. Нас интересует поведение коррелятора (229) для расстояний значительно меньших, чем размер области квази-конденсата. Так как при достаточно низких температурах основной вклад в (229) происходит за счет низколежащих возбуждений, интегрируем сначала по $\bar{\psi}_e, \psi_e$. В однопетлевом приближении выводим искомую корреляционную функцию в виде интеграла по переменным $\bar{\psi}_o, \psi_o$, который оценивается вариационным методом В. Н. Попова [75].

2.2.1 Вариационный принцип В. Н. Попова

Кратко опишем вариационный принцип, сформулированный в [75] для исследования корреляционных функций бозе-газа (модели жидкого гелия-4) и приближенного вычисления критических индексов. Рассмотрим среднее (229). Используя идею функционального интегрирования по “быстрым” и “медленным” переменным [11, 12], представим поле $\psi(\mathbf{x}, \tau)$ в виде суммы “медленной” ψ_o и “быстрой” ψ_1 компонент: $\psi(\mathbf{x}, \tau) = \psi_o(\mathbf{x}) + \psi_1(\mathbf{x}, \tau)$, где $\psi_o(\mathbf{x})$ есть сумма слагаемых с $|\mathbf{k}| < k_o, |\omega| < \omega_o$ в разложении $\psi(\mathbf{x}, \tau) = (\beta V)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \psi_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega \tau)}$ и $\psi_1(\mathbf{x}, \tau) = \psi - \psi_o$. Обозначим

$$S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o] = \log \int e^{S[\psi_o + \psi_1, \bar{\psi}_o + \bar{\psi}_1]} \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\bar{\psi}_1,$$

где S_{eff} есть эффективное (“гидродинамическое”) действие “медленных” полей $\psi_o, \bar{\psi}_o$, получающееся после интегрирования по “быстрым” полям $\psi_1, \bar{\psi}_1$. Для бозе-газа при-

ближенно имеем:

$$S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o] = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left\{ \bar{\psi}_o(\mathbf{x}) \partial_\tau \psi_o(\mathbf{x}) + \bar{\psi}_o(\mathbf{x}) \frac{\Delta}{2m^*} \psi_o(\mathbf{x}) + \Lambda |\psi_o(\mathbf{x})|^2 - \frac{g}{2} |\psi_o(\mathbf{x})|^4 \right\},$$

где $g = t_0$ есть амплитуда рассеяния двух бозе-частиц, эффективная масса приближенно равна массе бозе-частицы, и Λ есть ренормированный химический потенциал. Для трехмерного бозе-газа $\Lambda = \lambda - 2t_0(4\pi)^{-3/2}\zeta(\frac{3}{2})T^{3/2}$, и уравнение $\Lambda = 0$ дает линию фазового перехода в сверхтекучее состояние. При $\Lambda < 0$ система в нормальном состоянии, при $\Lambda > 0$ система в сверхтекучем состоянии. Будем считать приближенным выражением для (229) следующее выражение [75]:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \approx \psi(\mathbf{x}_1, \tau_1) \bar{\psi}(\mathbf{x}_2, \tau_2) e^{S_{\text{eff}}[\psi, \bar{\psi}] - S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o]}, \quad (230)$$

где $\psi, \bar{\psi}$ определяются из условия $\delta(S_{\text{eff}}[\psi, \bar{\psi}] + \log \psi(\mathbf{x}_1, \tau_1) + \log \bar{\psi}(\mathbf{x}_2, \tau_2)) = 0$. При этом $\psi_o, \bar{\psi}_o$ определяются условием $\delta(S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o]) = 0$. Для $\psi, \bar{\psi}$ в (230) условие стационарности конкретизируется в виде пары неоднородных уравнений Гинзбурга–Ландау:

$$\begin{aligned} (\partial_\tau + \frac{1}{2m^*} \Delta_{\mathbf{z}} + \Lambda - g|\psi|^2) \psi(\mathbf{z}, \tau) &= \frac{-1}{\psi(\mathbf{x}_2, \tau_2)} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}_2) \delta(\tau - \tau_2), \\ (-\partial_\tau + \frac{1}{2m^*} \Delta_{\mathbf{z}} + \Lambda - g|\psi|^2) \bar{\psi}(\mathbf{z}, \tau) &= \frac{-1}{\psi(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}_1) \delta(\tau - \tau_1). \end{aligned} \quad (231)$$

Уравнения для $\psi_o, \bar{\psi}_o$ являются однородной версией уравнений (231). Как показано в [75], оценка, основанная на выражении (230), дает качественно правильное поведение корреляционных функций (например, экспоненциальное убывание в одномерном случае при любом знаке Λ) для всех случаев, когда удастся сравнение с независимо полученными результатами.

Оценим с помощью соотношения (230) среднее (229), записанное в переменных (223). С учетом вида эффективного действия $S_{\text{eff}}[\rho, \varphi]$ (224), получим:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\int \exp \left(S_{\text{eff}}[\rho, \varphi] - i\varphi(x_1, \tau_1) + i\varphi(x_2, \tau_2) + \frac{1}{2} \ln(\rho(x_1, \tau_1)\rho(x_2, \tau_2)) \right) \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\varphi}{\int \exp(S_{\text{eff}}[\rho, \varphi]) \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\varphi}. \quad (232)$$

Так как при достаточно низких температурах флуктуации плотности подавлены [70], то можно заменить $\ln \rho$ в (232) на $\ln \rho_{TF}$, где плотность $\rho_{TF} = \rho_{TF}(x)$ определяется (226). Воспользуемся (230) и оценим (232) [79, 80]:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \sqrt{\rho_{TF}(x_1)\rho_{TF}(x_2)} \times \exp(-S_{\text{eff}}[\rho_0, \varphi_0] + S_{\text{eff}}[\rho_1, \varphi_1] - i\varphi_1(x_1, \tau_1) + i\varphi_1(x_2, \tau_2)), \quad (233)$$

где ρ_0, φ_0 определяются из (225), а ρ_1, φ_1 определяются условием экстремальности $\delta(S_{\text{eff}}[\rho, \varphi] - i\varphi(x_1, \tau_1) + i\varphi(x_2, \tau_2)) = 0$, эквивалентным паре уравнений, аналогичных уравнениям (231):

$$i\partial_\tau \varphi + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_x^2 \sqrt{\rho} - (\partial_x \varphi)^2 \right) + \Lambda - V(x) - g\rho = 0 \quad (234)$$

$$-i\partial_\tau \rho + \frac{\hbar^2}{m} \partial_x (\rho \partial_x \varphi) = i\delta(x - x_1)\delta(\tau - \tau_1) - i\delta(x - x_2)\delta(\tau - \tau_2). \quad (235)$$

Подставляя решения (234), (235) в (224), получаем

$$S_{\text{eff}}[\rho_1, \varphi_1] = -\beta F_{nc}(\mu) - 1 + \frac{g}{2} \int_0^\beta d\tau \int dx \rho_1^2. \quad (236)$$

Далее, если граница R_c отстоит далеко от начала координат, то $\rho_1(x, \tau)$ представимо в виде: $\rho_1(x, \tau) = \rho_{TF}(x) + \pi_1(x, \tau)$. С учетом малости $\sqrt{\pi_1} \partial_x^2 \sqrt{\pi_1}$ и $\partial_x \pi_1 \partial_x \varphi_1$ и проводя линеаризацию вблизи решения Томаса–Ферми, из уравнений (234), (235) можно получить уравнение:

$$\frac{1}{\hbar^2 v^2} \partial_\tau^2 \varphi_1 + \partial_x (\tilde{\rho}_{TF}(x) \partial_x \varphi_1) = i \frac{mg}{\hbar^2 \Lambda} \left\{ \delta(x - x_1)\delta(\tau - \tau_1) - \delta(x - x_2)\delta(\tau - \tau_2) \right\}, \quad (237)$$

где v означает скорость звука (227), и $\tilde{\rho}_{TF}$ определяется (226). Решение уравнения (237) зависит от координат источников: $\varphi_1(x, \tau) \equiv \varphi_1(x, \tau; x_1, \tau_1, x_2, \tau_2)$. С использованием (234), (235) и (236), можно вычислить для показателя экспоненты в (233):

$$-S_{\text{eff}}[\rho_0, \varphi_0] + S_{\text{eff}}[\rho_1, \varphi_1] \simeq \frac{i}{2} (\varphi_1(x_1, \tau_1) - \varphi_1(x_2, \tau_2)). \quad (238)$$

Подставляя (238) в (233), получаем приближенно коррелятор:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \sqrt{\rho_{TF}(x_1)\rho_{TF}(x_2)} \exp\left(-\frac{i}{2}(\varphi_1(x_1, \tau_1) - \varphi_1(x_2, \tau_2))\right). \quad (239)$$

Естественно придти от (237) к *неоднородному уравнению Стрингари* [80]:

$$\frac{1}{\hbar^2 v^2} \partial_\tau^2 G(x, \tau; x', \tau') + \partial_x \left(\left(1 - \frac{x^2}{R_c^2}\right) \partial_x G(x, \tau; x', \tau') \right) = \frac{g}{\hbar^2 v^2} \delta(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (240)$$

В результате (239) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \sqrt{\rho_{TF}(x_1)\rho_{TF}(x_2)} \exp\left(-\frac{1}{2}(G(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) + G(x_2, \tau_2; x_1, \tau_1)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}G(x_1, \tau_1; x_1, \tau_1) + \frac{1}{2}G(x_2, \tau_2; x_2, \tau_2)\right). \end{aligned} \quad (241)$$

Как следует из [75], $G(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) = -\langle \varphi(x_1, \tau_1) \varphi(x_2, \tau_2) \rangle$ имеет смысл корреляционной функции фаз, где угловые скобки следует понимать в смысле усреднения по мере $\mathcal{D}\rho\mathcal{D}\varphi$ с весом $e^{S_{\text{eff}}[\rho, \varphi]}$. Слагаемые $G(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2)$ и $G(x_2, \tau_2; x_1, \tau_1)$ в показателе экспоненты в (241) зависят от относительного положения аргументов и ответственны за поведение на больших расстояниях. Каждое из слагаемых $G(x_1, \tau_1; x_1, \tau_1)$, $G(x_2, \tau_2; x_2, \tau_2)$ в (241) зависит только от одного из наборов координат и влияет только на амплитуду. Благодаря инвариантности относительно сдвигов по τ , $G(x, \tau; x', \tau')$ зависит от разности τ и τ' и при совпадении температурных аргументов остается только зависимость от пространственных координат. Таким образом, можно представить (241) в следующем виде [80]:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)} \exp\left(-\frac{1}{2}(G(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) + G(x_2, \tau_2; x_1, \tau_1))\right), \quad (242)$$

где $\tilde{\rho}(\cdot)$ – перенормированная плотность неоднородного квази-конденсата. Асимптотика (242) определяется свойствами решений уравнения (240).

2.2.2 Пространственно-однородный бозе-газ

Вдали от границы квази-конденсата, $|x| \ll R_c$, уравнение (240) принимает вид:

$$\frac{1}{\hbar^2 v^2} \partial_\tau^2 G(x, \tau; x', \tau') + \partial_x^2 G(x, \tau; x', \tau') = \frac{g}{\hbar^2 v^2} \delta(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (243)$$

Рассмотрим уравнение (243) на множестве функций, периодических по каждому из аргументов $(x, \tau) \in [-R_c, R_c] \times [0, \beta]$. Считая, что δ -функции в правой части (243) периодические, представим решение в виде двойного ряда Фурье:

$$G(x, \tau; x', \tau') = \left(\frac{-g}{2\beta R_c} \right) \sum_{\omega, k} \frac{e^{i\omega(\tau - \tau') + ik(x - x')}}{\omega^2 + E_k^2}, \quad (244)$$

где суммирование выполняется по $\omega = \frac{2\pi}{\beta} l$, $l \in \mathbb{Z}$, и по $k = \frac{\pi}{R_c} n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом $E_k = \hbar v k$ означает энергию квазичастиц. Регуляризация (244) состоит в отбрасывании вклада для $\omega = k = 0$. Чтобы вычислить функцию Грина (244) и исследовать ее асимптотическое поведение, введем двойной ряд:

$$\mathcal{Z}_2(l) = \mathcal{Z}_2(\mathbf{a}, \mathbf{x} | l) \equiv \sum'_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{i(a_1 x_1 n_1 + a_2 x_2 n_2)}}{((a_1 n_1)^2 + (a_2 n_2)^2)^l}, \quad (245)$$

где $\Re l > 1$ ³ и суммирование идет по $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Для сокращенной записи параметров суммы \mathcal{Z}_2 (245) введены также двумерные обозначения \mathbf{x} и \mathbf{a} (с положительными компонентами $a_1, a_2 > 0$). Штрих означает регуляризацию (слагаемое при $\mathbf{n} = (0, 0)$ пропущено). С точностью до переобозначений, ряд $\mathcal{Z}_2(\mathbf{a}, \mathbf{x} | l)$ (245) совпадает с дзета-функцией Эпштейна второго порядка [163]. Ряд $\mathcal{Z}_2(l)$ абсолютно сходится и аналитичен по l в полуплоскости $\Re l > 1$. Функциональное выражение для $\mathcal{Z}_2(l)$ (245) может быть полезным для вычисления как корреляционных функций, так и статсумм (при $x_1 = x_2 = 0$). Развитый подход близок к методу дзета-регуляризации [164–167].

³ \Re и \Im обозначают, соответственно, вещественную и мнимую части комплексного числа.

Приведем некоторые соотношения, связанные с ϑ -функциями Якоби [163]. Введем комплексные параметры: $z, \hat{\tau} \in \mathbb{C}$, $\Im \hat{\tau} > 0$, и параметр $q = e^{i\pi\hat{\tau}}$. С помощью этих параметров определяем ϑ -функции Якоби,

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z|\hat{\tau}) &= -i \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} (-1)^{r-1/2} q^{r^2} e^{2\pi izr}, \\ \vartheta_2(z|\hat{\tau}) &= \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} q^{r^2} e^{2\pi izr}, \\ \vartheta_3(z|\hat{\tau}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} e^{2\pi izn}, \\ \vartheta_4(z|\hat{\tau}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi izn},\end{aligned}\tag{246}$$

и η -функцию Дедекинда [167]:

$$\eta(\hat{\tau}) \equiv q^{1/12} Q_0 = \left(\frac{\partial_z \vartheta_1(0|\hat{\tau})}{2\pi} \right)^{1/3}, \quad Q_0 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).\tag{247}$$

Известно также следующее разложение [163]:

$$\log \left| \frac{\partial_z \vartheta_1(0|\hat{\tau})}{\vartheta_1(z|\hat{\tau})} \right| = \log \frac{\pi}{\sin(\pi z)} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \frac{1 - \cos(2\pi zn)}{2n}.\tag{248}$$

Для суммирования в (245) воспользуемся приемом стандартным при изучении дзета-функций Эпштейна. Используем интеграл Меллина ($\Re l > 0$, $a > 0$),

$$a^{-l} = \Gamma^{-1}(l) \int_0^{\infty} s^{l-1} e^{-sa} ds,\tag{249}$$

и приходим к регуляризованному ответу:

$$\mathcal{Z}_2(l) = \Gamma^{-1}(l) \int_0^{\infty} s^{l-1} \left[\vartheta_3\left(\frac{a_1 x_1}{2\pi} \middle| i \frac{s}{\pi} a_1^2\right) \vartheta_3\left(\frac{a_2 x_2}{2\pi} \middle| i \frac{s}{\pi} a_2^2\right) - 1 \right] ds,\tag{250}$$

где использована ϑ -функция Якоби $\vartheta_3(z|\hat{\tau})$ (246). Далее применяется модулярное преобразование:

$$\vartheta_3(z|\hat{\tau}) = \left(\frac{i}{\hat{\tau}}\right)^{1/2} e^{-i\pi z^2/\hat{\tau}} \vartheta_3\left(\frac{z}{\hat{\tau}} \middle| -\frac{1}{\hat{\tau}}\right)\tag{251}$$

по отношению к каждой из ϑ -функций в (250). Выполним (251) для ϑ -функции, зависящей от a_1 . После этого, результат интегрирования по s выражается через мо-

дифицированную функцию Бесселя $K_{l-1/2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2(l) &= \frac{-1}{\Gamma(2l+1)} \left(\frac{2\pi i}{a_1}\right)^{2l} B_{2l}\left(\frac{a_1 x_1}{2\pi}\right) + \frac{4}{\Gamma(l)} \left(\frac{\pi}{a_1 a_2}\right)^l \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/2} \\ &\times \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(a_2 x_2 n_2)}{n_2^{l-1/2}} \left|k + \frac{a_1 x_1}{2\pi}\right|^{l-1/2} K_{l-1/2}\left(2\pi \frac{a_2}{a_1} n_2 \left|k + \frac{a_1 x_1}{2\pi}\right|\right), \end{aligned} \quad (252)$$

где $a_1 x_1 \in [0, 2\pi]$ и $B_{2l}(\cdot)$ – многочлен Бернулли [163]. При $x_1 = x_2 = 0$, представление (252) воспроизводит соответствующие соотношения [164]. Представление (252) при $x_1, x_2 \neq 0$ может быть использовано для получения асимптотик \mathcal{Z}_2 (245) при $a_1 \ll a_2 \ll 1$. Преобразование (251) может быть выполнено в другом сомножителе в (250). При этом возникнет представление, приспособленное для изучения асимптотического поведения при $a_2 \ll a_1 \ll 1$. Соответствующий ответ возникает из (252) при перестановке индексов $1 \longleftrightarrow 2$. Для дальнейшего исследования (252), уместно представить $K_{l-1/2}$ в виде некоторого ряда (в виде конечной суммы при целых l), как это сделано в [164] для случая $x_1 = x_2 = 0$.

Рассмотрим (252) при $l = 1$ и воспользуемся тем, что

$$K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}. \quad (253)$$

В итоге, получаем для $G(x, \tau; x', \tau')$ (244) два представления. Одно из них имеет вид:

$$G(x, \tau; x', \tau') = (-g) \left(\frac{\beta}{4R_c} (\Im(z - z'))^2 + \frac{1}{2\pi\hbar v} \log \left| \frac{\eta(\hat{\tau})}{\vartheta_1(z - z' | \hat{\tau})} \right| \right), \quad (254)$$

где функции $\vartheta_1(z | \hat{\tau})$ и $\eta(\hat{\tau})$ определены в (246). Параметры $\hat{\tau}$ и z введены следующим образом:

$$\hat{\tau} \equiv i \frac{2R_c}{\beta\hbar v}, \quad z \equiv \beta^{-1} \left(\tau + i \frac{x}{\hbar v} \right). \quad (255)$$

Другое представление принимает вид:

$$G(x, \tau; x', \tau') = (-g) \left(\frac{\beta}{4R_c} (\Re(z - z'))^2 + \frac{1}{2\pi\hbar v} \log \left| \frac{\eta(-1/\hat{\tau})}{\vartheta_1\left(\frac{z-z'}{\hat{\tau}} \middle| \frac{-1}{\hat{\tau}}\right)} \right| \right). \quad (256)$$

Совпадение (254) и (256) следует из

$$\begin{aligned} \eta(-1/\hat{\tau}) &= (-i\hat{\tau})^{1/2}\eta(\hat{\tau}), \\ i\vartheta_1\left(\frac{z-z'}{\hat{\tau}} \middle| -\frac{1}{\hat{\tau}}\right) &= (-i\hat{\tau})^{1/2} \exp\left(i\pi\frac{(z-z')^2}{\hat{\tau}}\right)\vartheta_1(z-z'|\hat{\tau}). \end{aligned} \quad (257)$$

Используя соотношения (247), можно переписать (254):

$$\begin{aligned} G(x, \tau; x', \tau') &= (-g)\left(\frac{\beta}{4R_c}(\Im(z-z'))^2 - \frac{1}{2\pi\hbar v} \log(2\pi Q_0^2)\right. \\ &\quad \left. + \frac{|\hat{\tau}|}{12\hbar v} + \frac{1}{2\pi\hbar v} \log\left|\frac{\partial_z \vartheta_1(0|\hat{\tau})}{\vartheta_1(z-z'|\hat{\tau})}\right|\right). \end{aligned} \quad (258)$$

Пользуясь в (258) известным разложением (248), получаем при $\frac{1}{|\hat{\tau}|} = \frac{\beta\hbar v}{2R_c} \ll 1$:

$$\begin{aligned} G(x, \tau; x', \tau') &\simeq (-g)\left[\frac{\beta}{4R_c}(\Im(z-z'))^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{|\hat{\tau}|}{12\hbar v} - \frac{1}{2\pi\hbar v} \log(2|\operatorname{sh}(i\pi(z-z'))|)\right]. \end{aligned} \quad (259)$$

Аналогично, с помощью (248) получаем из (256) оценку при $|\hat{\tau}| \ll 1$:

$$\begin{aligned} G(x, \tau; x', \tau') &\simeq (-g)\left[\frac{\beta}{4R_c}(\Re(z-z'))^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12\hbar v|\hat{\tau}|} - \frac{1}{2\pi\hbar v} \log\left(2\left|\operatorname{sh}\left(i\pi\frac{z-z'}{\hat{\tau}}\right)\right|\right)\right]. \end{aligned} \quad (260)$$

Соотношения (259), (260) аписаны для $|x-x'| \leq 2R_c$, $|\tau-\tau'| \leq \beta$, [80–82] и позволяют оценивать $\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2)$ для убывающей температуры и растущего объема.

Использование (259) в представлении (242) приводит к ответу для $\beta\hbar v/R_c \ll 1$:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)}}{\left|\sinh\frac{\pi}{\hbar\beta v}(|x_1-x_2|+i\hbar v(\tau_1-\tau_2))\right|^{g/2\pi\hbar v}}. \quad (261)$$

Применяя (260), получаем в пределе $R_c/(\beta\hbar v) \ll 1$:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)}}{\left|\sinh\frac{i\pi}{2R_c}(|x_1-x_2|+i\hbar v(\tau_1-\tau_2))\right|^{g/2\pi\hbar v}}. \quad (262)$$

Из (261) и (262) следует, что при нулевой температуре и в бесконечном объеме двухточечный коррелятор ведет себя следующим образом:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)}}{|x_1-x_2|+i\hbar v(\tau_1-\tau_2)}^{1/\theta}, \quad (263)$$

где $\theta \equiv 2\pi\hbar v/g$ и аргументы достаточно близки друг к другу. Используя обозначения $v = \sqrt{\Lambda/m}$ и $\rho = \Lambda/g$ соответственно для скорости звука и для плотности однородного идеального бозе-газа, получаем для критического индекса следующее универсальное выражение [3, 4]: $\theta = \frac{2\pi\hbar\rho}{mv}$.

Иными словами, независимо от того, что быстрее убывает, температура или обратный размер “ящика” (если обратный размер, то имеет место оценка (261), если температура – (262)), термодинамическим пределом для однородного случая можно считать (263). При этом роль соотношений $R_c/(\beta\hbar v) \gg 1$ и $\beta\hbar v/R_c \gg 1$ прозрачна. Модулярное преобразование тэта-функции, зависящей, например, от τ (сумма по частотам), эквивалентно пересуммированию частотного ряда по Пуассону и оценке коэффициентов нового ряда стацфазой при $\beta\hbar v/R_c \gg 1$. Интеграл по s снова оценивается стацфазой с тем же параметром, и в результате для (250) возникает оценка (260). В противоположном пределе, $R_c/(\beta\hbar v) \gg 1$, аналогично приходим от (250) к (259) (сначала – суммирование по импульсам).

2.2.3 Бозе-газ в гармоническом потенциале при $k_B T \gg \hbar v/R_c$

Будем искать функцию Грина, описываемую (240), где $\delta(\tau - \tau')$ – периодическая δ -функция на отрезке $[0, \beta]$ и $\delta(x - x')$ – δ -функция Дирака на \mathbb{R} с носителем в точке x' . Решение (240) представим рядом Фурье:

$$G(x, \tau; x', \tau') = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega} e^{i\omega(\tau - \tau')} G_{\omega}(x, x'), \quad (264)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{\beta}l$, $l \in \mathbb{Z}$. Спектральная плотность $G_{\omega}(x, x')$ (264) подчиняется уравнению

$$-\frac{\omega^2}{\hbar^2 v^2} G_{\omega}(x, x') + \frac{d}{dx} \left(\left(1 - \frac{x^2}{R_c^2}\right) \frac{d}{dx} G_{\omega}(x, x') \right) = \frac{g}{\hbar^2 v^2} \delta(x - x'). \quad (265)$$

Функции Лежандра $P_{\nu}(x)$ и $Q_{\nu}(x)$ определены при $|x| < 1$, [163], и связаны с однородным уравнением (227) при надлежащем продолжении $\omega \rightarrow iE$. Они связаны также

с функцией Лежандра $\mathfrak{Q}_\nu(z)$, определенной на комплексной плоскости \mathbb{C} с разрезом от $-\infty$ до $z = 1$. На краях разреза имеем [163]:

$$\mathfrak{Q}_\nu(x \pm i0) = Q_\nu(x) \mp i\frac{\pi}{2}P_\nu(x). \quad (266)$$

Окончательно, получаем выражение для $G_\omega(x, x')$:

$$G_\omega(x, x') = \frac{-igR_c}{\pi\hbar^2v^2} \mathfrak{Q}_\nu\left(\frac{x}{R_c} + \text{sign}(x - x')i0\right) \mathfrak{Q}_\nu\left(\frac{x'}{R_c} - \text{sign}(x - x')i0\right), \quad (267)$$

где $\nu \equiv -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{R_c}{\hbar v}\right)^2\omega^2}$. Поведение $G_\omega(x, x')$ для $x, x' \in [-R_c, R_c]$ описывается (267) с учетом соотношений (266).

Сильное неравенство $k_B T \gg \hbar v/R_c$ приводит к оценке для ненулевых частот: $|\omega| \gg \hbar v/(2R_c)$. В этом случае можно воспользоваться в (267) известными асимптотиками функций Лежандра [168] и получить $G(x, \tau; x', \tau')$ (264) в следующем виде:

$$G(x, \tau; x', \tau') \simeq \frac{\Lambda}{2\pi\hbar v\rho(x, x')} \ln \left\{ 2 \left| \sinh \frac{\pi}{\hbar\beta v} (|x - x'| + i\hbar v(\tau - \tau')) \right| \right\}, \quad (268)$$

где v определяется в (227) и

$$\rho(x, x') \equiv \frac{\Lambda}{g} \left(1 - \frac{x^2 + x'^2}{4R_c^2} \right) \approx \frac{\Lambda}{g} \left(1 - \frac{S^2}{2R_c^2} \right), \quad (269)$$

где $S \equiv \frac{1}{2}(x + x')$, и соблюдаются условия *квазиоднородного* предела: $x, x' \ll R_c$, $|x - x'| \ll \frac{1}{2}(x + x')$ и $|x - x'| \ll R_c$. С учетом (268) оценка (242) принимает вид:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)}}{\left| \sinh \frac{\pi}{\hbar\beta v} (|x_1 - x_2| + i\hbar v(\tau_1 - \tau_2)) \right|^{\frac{1}{\theta(x, x')}}}, \quad \theta(x, x') \equiv \frac{2\pi\hbar\rho(x, x')}{mv}, \quad (270)$$

где введен зависящий от координат параметр $\theta(x, x')$. Соотношение (270) может быть упрощено в двух важных предельных случаях. А именно из (270) получаем, что в квазиоднородном пределе и при соблюдении условия $1 \ll \frac{|x_1 - x_2|}{\hbar\beta v} \ll \frac{R_c}{\hbar\beta v}$ корреляционная функция экспоненциально затухает:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)} \exp\left(-\frac{1}{\xi(x, x')} \left| |x_1 - x_2| + i\hbar v(\tau_1 - \tau_2) \right| \right). \quad (271)$$

В соотношении (271) введена корреляционная длина $\xi(x, x')$:

$$\xi(x, x') \equiv \frac{\hbar\beta v}{\pi} \theta(x, x') = \frac{2\hbar^2\beta\rho(x, x')}{m}. \quad (272)$$

При выполнении условия $\frac{|x_1-x_2|}{\hbar\beta v}, \frac{|\tau_1-\tau_2|}{\beta} \ll 1 \ll \frac{R_c}{\hbar\beta v}$, асимптотическое соотношение (270) упрощается:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)}}{|x_1 - x_2| + i\hbar v(\tau_1 - \tau_2)|^{1/\theta(x, x')}}. \quad (273)$$

Асимптотика (273) аналогична оценке (263) для однородного газа.

2.2.4 Бозе-газ в гармоническом потенциале при $k_B T \ll \hbar v / R_c$

Перейдем к другому случаю, допускающему исследование асимптотического поведения коррелятора $\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2)$ и снова обратимся к неоднородному уравнению Стрингари (240). Определяемые с помощью многочленов Лежандра функции $\tilde{P}_n(x) \equiv \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n\left(\frac{x}{R_c}\right)$, $n \geq 0$, составляют полную ортонормальную систему в пространстве $L_2[-R_c, R_c]$, что позволяет записать решение (240) в виде двойного ряда Фурье:

$$G(x, \tau; x', \tau') = \left(\frac{-g}{\beta R_c}\right) \sum_{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_n(x)\tilde{P}_n(x')}{\omega^2 + E_n^2} e^{i\omega(\tau-\tau')}, \quad E_n = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{\alpha} \quad (274)$$

где суммирование идет по бозе-частотам (см. (244), (264)), уровни (228) переобозначены с помощью $\alpha \equiv R_c/(\hbar v)$. Получим регуляризованное выражение для $G(x, \tau; x', \tau')$ (274):

$$\begin{aligned} G(x, \tau; x', \tau') &= \left(\frac{-g}{\beta R_c}\right) \left[\frac{\beta^2}{4} B_2\left(\frac{\Delta\tau}{\beta}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n(x)\tilde{P}_n(x') \int_0^{\infty} e^{-sE_n^2} \vartheta_3\left(\frac{\Delta\tau}{\beta} \middle| i\frac{s}{\pi} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2\right) ds \right]. \end{aligned} \quad (275)$$

Выполняем для ϑ_3 модулярное преобразование, интегрируем по s и получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-sE_n^2} \vartheta_3\left(\frac{\Delta\tau}{\beta} \middle| i\frac{s}{\pi} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2\right) ds = \frac{\beta}{2E_n} \left[\coth\left(\frac{\beta}{2} E_n\right) \cosh(E_n \Delta\tau) - \sinh(E_n \Delta\tau) \right], \quad (276)$$

где $\Delta\tau \equiv |\tau - \tau'|$. Исследуем представление, задаваемое (275), (276), в случае $\beta/\alpha \gg 1$.

Это означает, что $k_B T \ll \hbar\Omega$ и $\beta E_n \gg 1, \forall n \geq 1$. Получаем из (275), (276):

$$G(x, \tau; x', \tau') = \frac{-g\beta}{4R_c} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\tau}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] - \frac{g}{2\hbar v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}} P_n\left(\frac{x}{R_c}\right) P_n\left(\frac{x'}{R_c}\right) e^{-\sqrt{n(n+1)} \frac{\Delta\tau}{\alpha}}. \quad (277)$$

Разницу между двумя соседними уровнями (274) можно оценить при $\forall n > 1$:

$$E_{n+1} - E_n \approx \frac{1}{\alpha} \left[1 + \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{4n^3} + \dots \right], \quad (278)$$

откуда видно, что уровни (274) приближенно равноотстоящие, если $n > n_0$ при достаточно больших n_0 . В свою очередь, имеет место следующее соотношение:

$$\frac{n + 1/2}{\sqrt{n(n+1)}} = 1 + \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{8n^3} + \dots \quad (279)$$

Замечательно, что слагаемые $\sim \frac{1}{n}$ отсутствуют как в (278), так и в (279). В рассматриваемой задаче возможна оценка с *логарифмической точностью*, так как обратные степени n могут быть опущены как в (278) так и в (279) при достаточно больших n . Сходимость ряда (277) при этом не нарушается, так как $\Delta\tau \neq 0$.

Рассмотрим также показатель экспоненты в (277), для которого получаем

$$\sqrt{n(n+1)} \frac{\Delta\tau}{\alpha} = \frac{\Delta\tau}{\alpha} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Delta\tau}{\alpha} \left(\frac{1}{8n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{5}{128n^3} - \dots \right). \quad (280)$$

Учитывая, что $\Delta\tau/\alpha \ll 1$, вторым слагаемым в (280) также можно пренебречь в показателе экспоненты при $n > n_0$. Сказанное означает, что ряд, фигурирующий в (277), может быть разбит на две части и формула примет вид:

$$G(x, \tau; x', \tau') \approx \frac{-g\beta}{4R_c} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\tau}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] - \frac{g}{2\hbar v} \sum_{n=1}^{n_0} \left[\frac{n + 1/2}{\sqrt{n(n+1)}} e^{-\sqrt{n(n+1)} \frac{\Delta\tau}{\alpha}} - e^{-(n+1/2) \frac{\Delta\tau}{\alpha}} \right] P_n\left(\frac{x}{R_c}\right) P_n\left(\frac{x'}{R_c}\right) - \frac{g}{2\hbar v} e^{-\Delta\tau/(2\alpha)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n\left(\frac{x}{R_c}\right) P_n\left(\frac{x'}{R_c}\right) - 1 \right], \quad (281)$$

где $t \equiv e^{-\Delta\tau/\alpha}$ и n_0 – номер, который фиксируется и не должен “уходить” на бесконечность. Полученная формула (281) годится как для τ и τ' близких к нулю или β , так и для случая, когда вблизи β только τ либо τ' . Считаем, что τ и τ' близки друг к другу, но не совпадают. Используя известный ряд [163]

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\cos \vartheta_1) P_n(\cos \vartheta_2) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{u_+ + u_-} \mathbb{K}(\kappa), \quad 0 < t < 1, \quad (282)$$

$$u_{\pm} \equiv \sqrt{1 - 2t \cos(\vartheta_1 \pm \vartheta_2) + t^2}, \quad \kappa = \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-}, \quad (283)$$

где \mathbb{K} – полный эллиптический интеграл первого рода, можно оценить (281). Положим $\Delta\tau/\alpha \ll 1$, $\cos \vartheta_1 \equiv x/R_c \ll 1$, $\cos \vartheta_2 \equiv x'/R_c \ll 1$ и оценим u_+ , u_- :

$$u_+ \approx 1 + t - \frac{t}{1+t} \frac{(x+x')^2}{2R_c^2} \approx 2 - \frac{\Delta\tau}{\alpha} - \frac{(x+x')^2}{4R_c^2} + \frac{3(\Delta\tau)^2}{4\alpha^2}, \quad (284)$$

$$u_- \approx \left((1-t)^2 + t \frac{(x-x')^2}{R_c^2} \right)^{1/2} \approx \frac{||x-x'| + i\hbar v \Delta\tau|}{R_c} \equiv u_*. \quad (285)$$

Для κ (283) ограничимся оценкой $\kappa \simeq 1 - u_*$, где u_* дается правой частью (285), и выпишем несколько ведущих членов асимптотического разложения $\mathbb{K}(\kappa)$ [163]:

$$\mathbb{K}(\kappa) \approx \mathbb{K}(1 - u_*) \approx \frac{u_*}{4} \left(\left(\frac{2}{u_*} + 1 \right) \ln \frac{8}{u_*} - 1 \right) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{8}{u_*}, \quad u_* \ll 1. \quad (286)$$

При малых $\frac{x}{R_c}$, $\frac{x'}{R_c}$ и $\frac{\Delta\tau}{\alpha}$ (квазиоднородный предел) в ведущем приближении в (281) доминирует третье слагаемое. С учетом (284), (285) и (286) возникает ведущая оценка:

$$G(x, \tau; x', \tau') \simeq \frac{-g}{2\pi\hbar v (1 - \frac{S^2}{2R_c^2})} \ln \frac{R_c}{||x-x'| + i\hbar v(\tau - \tau')|}. \quad (287)$$

Кроме того, выполняется следующее условие:

$$1 \ll n_0 \lesssim \frac{\beta\hbar v}{R_c} < \frac{1}{u_*} \ll \ln \frac{1}{u_*}. \quad (288)$$

При ограниченности отклонений между пространственными аргументами x и x' , рост R_c означает соответствующее увеличение верхней границы для допустимых значений n_0 . Благодаря (288), оценка (287) не зависит явно от конкретного выбора n_0 .

В асимптотическом пределе, коэффициент перед логарифмом в (287) переходит в критический показатель $-1/\theta$, где $\theta = 2\pi\hbar v/g$ (см. (263)). Оценка (287) согласуется с оценкой при нулевой температуре в [169], где коэффициент перед логарифмом пропорционален обратной степени локального параметра Латтинджера.

Окончательно, возникает оценка:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)}}{|x_1 - x_2| + i\hbar v(\tau_1 - \tau_2)|^{1/\theta(x, x')}}}, \quad (289)$$

где $\theta(x, x')$ определяется соотношением (270). Соотношение (289) представляет основной результат для $k_B T \ll \hbar v/R_c$. Вывод (289) аналогичен переходу от (262) к (263). Оценки (273) и (289) показывают, что в термодинамическом пределе и при нулевой температуре корреляционная функция $\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2)$ ведет себя степенным образом.

При этом заметим, что в слабонеоднородном случае происходит обобщение однородной ситуации. А именно, для случая $R_c/\beta\hbar v \gg 1$ использование представления (264), в котором функция Грина (267) заменяется своим приближенным выражением, эквивалентно, в случае однородного газа, пересуммированию по Пуассону ряда по импульсам с последующим применением к его коэффициентам стацфазы. Оценка (268) есть неоднородный аналог логарифмического вклада (259). В противоположном случае, $\beta\hbar v/R_c \gg 1$, переход от (275) к (277) соответствует суммированию в однородном газе вначале по частотам. Далее, коэффициент перед логарифмом в (287) совпадает с коэффициентом в (269) только в ведущем приближении. При этом предел, связанный с (287) (температура стремится к нулю быстрее), “ближе” к случаю, когда объем конечен и $T = 0$, т.е. когда для бозе-газа в ловушке возникает конденсат. Несовпадение коэффициентов свидетельствует о том, что предел $\beta\hbar v/R_c \gg 1$ сигнализирует о перестройке квази-конденсата в “конденсат”.

2.2.5 Многоточечная корреляционная функция неоднородного газа

Рассмотрим асимптотическое поведение многоточечной температурной корреляционной функции полей $\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}$,

$$\Gamma_m(x_1, \tau_1; \dots; x_{2m}, \tau_{2m}) \equiv \langle T_\tau \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{z}_1) \dots \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{z}_m) \hat{\psi}(\mathbf{z}_{m+1}) \dots \hat{\psi}(\mathbf{z}_{2m}) \rangle, \quad (290)$$

где $\mathbf{z} = (x, \tau)$. При низкой температуре и для больших относительных расстояний $R_{ij} \equiv |x_i - x_j|$, m -точечная корреляционная функция может быть выражена через двухточечные [159],

$$\Gamma_m(x_1, \tau_1; \dots; x_{2m}, \tau_{2m}) \simeq \prod_{1 \leq i < j \leq 2m} \Gamma(x_i, \tau_i; x_j, \tau_j)^{-l_i l_j}, \quad (291)$$

где $l_i = 1$, если $i = 1, \dots, m$, $l_i = -1$ если $i = m + 1, \dots, 2m$, и $\Gamma(x_i, \tau_i; x_j, \tau_j) = \langle T_\tau \hat{\psi}^\dagger(x_i, \tau_i) \hat{\psi}(x_j, \tau_j) \rangle$ есть двухточечная корреляционная функция (229), обсуждавшаяся выше. Пусть точки x_i лежат внутри квази-конденсата достаточно далеко от его границы. Факторизация асимптотики корреляционной функции (291) имеет место так же, как и в свободном случае [170]; нарушение трансляционной инвариантности модифицирует только двухточечные корреляции.

Выразим (290) в представлении функционального интегрирования:

$$\Gamma_m(x_1, \tau_1; \dots; x_{2m}, \tau_{2m}) = \frac{1}{Z} \int e^{S[\psi, \bar{\psi}]} \bar{\psi}(x_1, \tau_1) \dots \bar{\psi}(x_m, \tau_m) \times \psi(x_{m+1}, \tau_{m+1}) \dots \psi(x_{2m}, \tau_{2m}) \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (292)$$

где Z есть статистическая сумма (206), (207). В ведущем порядке оцениваем Γ_m (292):

$$\Gamma_m(x_1, \tau_1; \dots; x_{2m}, \tau_{2m}) \simeq \frac{\int e^{S_{\text{эф}}[\psi_o, \bar{\psi}_o]} \bar{\psi}_o(\mathbf{z}_1) \dots \bar{\psi}_o(\mathbf{z}_m) \psi_o(\mathbf{z}_{m+1}) \dots \psi_o(\mathbf{z}_{2m}) \mathcal{D}\psi_o \mathcal{D}\bar{\psi}_o}{\int e^{S_{\text{эф}}} \mathcal{D}\psi_o \mathcal{D}\bar{\psi}_o}, \quad (293)$$

где S_{eff} есть эффективное действие (222). Приходим к корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \Gamma_m(x_1, \tau_1; \dots; x_{2m}, \tau_{2m}) &\simeq \\ &\frac{\int \exp \left(S_{\text{eff}}[\rho, \varphi] - i \sum_{k=1}^m \varphi(\mathbf{z}_k) + i \sum_{k=m+1}^{2m} \varphi(\mathbf{z}_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \ln \rho_{TF}(\mathbf{z}_k) \right) \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\varphi}{\int \exp (S_{\text{eff}}[\rho, \varphi]) \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\varphi}. \end{aligned} \quad (294)$$

Применяя вариационный принцип [75], получаем оценку для корреляционной функции (294):

$$\begin{aligned} \Gamma_m(x_1, \tau_1; \dots; x_{2m}, \tau_{2m}) &\simeq \exp \left(-S_{\text{eff}}[\rho_0, \varphi_0] + S_{\text{eff}}[\rho_1, \varphi_1] \right. \\ &\left. - i \sum_{k=1}^m \varphi_1(\mathbf{z}_k) + i \sum_{k=m+1}^{2m} \varphi_1(\mathbf{z}_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \ln \rho_{TF}(\mathbf{z}_k) \right), \end{aligned} \quad (295)$$

где поля ρ_0, φ_0 удовлетворяют уравнениям Гросса–Питаевского (225). По определению, поля ρ_1, φ_1 определяются условием экстремальности

$$\delta \left(S_{\text{eff}}[\rho, \varphi] - i \sum_{k=1}^m \varphi(\mathbf{z}_k) + i \sum_{k=m+1}^{2m} \varphi(\mathbf{z}_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \ln \rho_{TF}(\mathbf{z}_k) \right) = 0, \quad (296)$$

откуда возникает пара уравнений, одно из которых – неоднородное:

$$\begin{aligned} i \partial_\tau \varphi + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_x^2 \sqrt{\rho} - (\partial_x \varphi)^2 \right) + (\Lambda - V(x)) - g\rho &= 0, \quad (297) \\ -i \partial_\tau \rho + \frac{\hbar^2}{m} \partial_x (\rho \partial_x \varphi) &= i \sum_{k=1}^m \delta(x - x_k) \delta(\tau - \tau_k) - i \sum_{k=m+1}^{2m} \delta(x - x_k) \delta(\tau - \tau_k) \end{aligned} \quad (298)$$

Из (297), (298) возникает следующее уравнение:

$$\frac{1}{\hbar^2 v^2} \partial_\tau^2 \varphi + \partial_x (\tilde{\rho}_{TF}(x) \partial_x \varphi) = i \frac{mg}{\hbar^2 \Lambda} \left\{ \sum_{k=1}^m \delta(x - x_k) \delta(\tau - \tau_k) - \sum_{k=m+1}^{2m} \delta(x - x_k) \delta(\tau - \tau_k) \right\}. \quad (299)$$

Так же как в двухточечном случае из (234), (235), (236) получаем соотношение (238), пользуемся уравнениями (297), (298) и находим:

$$-S_{\text{eff}}[\rho_0, \varphi_0] + S_{\text{eff}}[\rho_1, \varphi_1] = \frac{i}{2} \left(\sum_{k=1}^m \varphi_1(\mathbf{z}_k) - \sum_{k=m+1}^{2m} \varphi_1(\mathbf{z}_k) \right). \quad (300)$$

Подстановка (300) в (295) ведет к корреляционной функции

$$\Gamma_m(x_1, \dots, x_{2m}) \simeq \prod_{k=1}^{2m} \sqrt{\rho_{TF}(x_k)} \exp \left(-\frac{i}{2} \left(\sum_{k=1}^m \varphi_1(\mathbf{z}_k) - \sum_{k=m+1}^{2m} \varphi_1(\mathbf{z}_k) \right) \right), \quad (301)$$

где функция $\varphi_1(\mathbf{z}) \equiv \varphi_1(\mathbf{z}; \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{2m})$ удовлетворяет уравнению (299). Более того, можно выразить решение уравнения (299) в терминах функции $G(\mathbf{z}, \mathbf{z}')$, которая есть решение уравнения (240), и это, в свою очередь, дает

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2} \left(\sum_{k=1}^m \varphi_1(\mathbf{z}_k) - \sum_{k=m+1}^{2m} \varphi_1(\mathbf{z}_k) \right) \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=m+1}^{2m} (G(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k) + G(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_j)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m (G(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k) + G(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_j)) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{2m-1} \sum_{k=j+1}^{2m} (G(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k) + G(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_j)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m} G(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_j). \tag{302}
\end{aligned}$$

Корреляционная функция первого порядка при $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_2$ тогда равна (241). Подстановка этого выражения в (302) дает результат (291):

$$\Gamma_m(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{2m}) = \prod_{1 \leq i < j \leq 2m} \Gamma^{-l_i l_j}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j).$$

2.3 Сверхтекучая А-фаза гелия-3 и ток частиц

В жидком гелии-3 при достаточно низких температурах возникает притяжение двух фермионов с противоположными импульсами (эффект Купера), приводящее к сверхтекучести. Из-за сильного отталкивания атомов гелия-3, имеющих спин $s = \frac{1}{2}$, спаривание происходит в состоянии с ненулевым орбитальным моментом, при котором возможны сверхтекучие фазы: A , B , и A_1 [83,84]. Соответствующие волновые функции пар отвечают спин-триплетному p -спариванию и характеризуются относительным угловым моментом $L = 1$ ($L_z = 0, \pm 1$) и полным спином $S = 1$ ($S_z = 0, \pm 1$). В частности, сверхтекучая A -фаза может рассматриваться как двухкомпонентная смесь жидкостей, куперовские пары которых имеют $L_z = +1$ и $S_z = \pm 1$ [83,84].

В работах [90–93] для сверхтекучей A -фазы гелия-3 развит подход к вычислению и исследованию тока частиц \mathbf{j} при условии $\xi_0 \ll |\boldsymbol{\partial} \otimes \mathbf{1}|^{-1}$ (лондоновский предел), где ξ_0 – длина когерентности и $|\boldsymbol{\partial} \otimes \mathbf{1}|^{-1}$ – масштаб изменения орбитального параметра

порядка. Полученное представление для \mathbf{j} позволяет получить формально все члены асимптотического разложения по степеням частных производных параметра порядка. При этом формальность связана с тем, что сам слабо меняющийся параметр порядка рассматривается только в линейном приближении. Практически, в [90–93] получены в пределе нулевой температуры поправки второго и третьего порядков.

Сверхтекучая А-фаза гелия-3 (${}^3\text{He} - \text{A}$) при абсолютной температуре T , $k_B T = \frac{1}{\beta}$ (k_B – постоянная Больцмана) есть нерелятивистская система Ферми-частиц спина $s = \frac{1}{2}$, занимающих область пространства V . Чтобы описать ${}^3\text{He} - \text{A}$ в подходе функционального интегрирования, рассмотрим антикоммутирующие комплекснозначные функции $\psi_s^*(\tau, \mathbf{r})$ и $\psi_s(\tau, \mathbf{r})$ (элементы бесконечной грассмановой алгебры с инволюцией, [18]), где $s = \downarrow, \uparrow$ – спиновый индекс, $\mathbf{r} \in V$ и $\tau \in [0, \beta]$. Ток частиц \mathbf{j} возникает как усреднение функционала, отвечающего оператору импульса:

$$\mathbf{j} = \frac{i}{2} \sum_{s=\downarrow, \uparrow} \int \left(\int (\boldsymbol{\partial} \psi_s^* \psi_s - \psi_s^* \boldsymbol{\partial} \psi_s) d^3x \right) e^S \mathcal{D}(\psi_s^*, \psi_s), \quad (303)$$

где $\mathcal{D}(\psi_s^*, \psi_s)$ – мера функционального интегрирования по $\psi_s^*(\tau, \mathbf{r})$, $\psi_s(\tau, \mathbf{r})$, e^S – вес и S – функционал действия, описывающий ${}^3\text{He} - \text{A}$ (выражение для S можно найти в [13]). Для вывода (303) применяется подход производящего функционала, само функциональное интегрирование при этом проводится последовательно по “быстрым” и по “медленным” переменным [13]. В результате ток \mathbf{j} выражается через нормальную фермионную функцию Грина, которая удовлетворяет уравнению Дайсона-Горькова [10].

Ток \mathbf{j} линеен в ведущем приближении по производным параметра порядка [84]. Отсутствие ясности по вопросу о старших поправках к ведущему вкладу \mathbf{j}_0 , [86–89], привело к тому, что в работах [90–93] был предложен подход к выводу асимптотического разложения для \mathbf{j} . В приближении слабой неоднородности параметра порядка,

в работах [90–93] получено новое интегральное представление для нормальной функции Грина и, таким образом, для \mathbf{j} при нулевой температуре:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{\text{corr}}, \quad \mathbf{j}_{\text{corr}} = -3\rho(8\pi)^{-1} \int d\Omega \hat{k} \frac{\alpha\Delta}{|\Delta|^2} \Phi(x^2, Q), \quad (304)$$

$$\Phi(x^2, Q) = \int_0^\infty e^{-Qt} \left(\sqrt{\frac{\tanh t}{t}} e^{x^2(t-\tanh t)} \right)' dt, \quad Q = \frac{|\Delta|^2}{\alpha c_F}. \quad (305)$$

В соотношении (304), \mathbf{j}_0 есть известное выражение первого порядка при $T = 0$ [84]:

$$\mathbf{j}_0 = \rho \mathbf{v}_s + \frac{1}{4m} \text{rot}(\rho \hat{l}) + \mathbf{j}_{\text{an}}, \quad \mathbf{j}_{\text{an}} = -\frac{C_0}{2m} \hat{l}(\hat{l} \cdot \text{rot} \hat{l}), \quad (306)$$

где ρ – плотность жидкости, \mathbf{v}_s – сверхтекучая скорость, \hat{l} – поле слабо неоднородного вектора орбитального углового момента (шляпка $\hat{}$ означает единичный вектор), $C_0 \approx \rho$. Два первых слагаемых в правой части (306) стандартны для бесщелевой сверхтекучей жидкости с p -спариванием, а возникновение третьего слагаемого \mathbf{j}_{an} происходит [83, 85] благодаря существованию двух полюсов (т.е. двух нулей параметра щели) на сфере Ферми для ${}^3\text{He} - \text{A}$.

2.3.1 Представления для тока частиц в виде сумм и интеграла

Матричное уравнение Дайсона–Горькова имеет стандартный вид [10]:

$$\partial_\tau g(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - \int d^3 k'' H(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') g(\mathbf{k}'', \mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k - k') \delta(\tau - \tau'). \quad (307)$$

Здесь τ – “мнимое” время, и $H(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')$ – гамильтониан Бардина–Купера–Шриффера:

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') = \begin{pmatrix} \xi_{k''} \delta^{(3)}(k - k'') & (2\pi)^{-3} \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') \\ (2\pi)^{-3} \Delta^*(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) & -\xi_{k''} \delta^{(3)}(k - k'') \end{pmatrix},$$

где $\xi_k \equiv \frac{1}{2m}(k^2 - k_F^2)$, k_F – импульс Ферми, и $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')$ – параметр порядка ${}^3\text{He} - \text{A}$.

Уравнение (307) определяет 2×2 матрицу $g(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ нормальных (элементы g_{11} , g_{22})

и аномальных (элементы g_{12} , g_{21}) двухточечных функций Грина. Для тока \mathbf{j} (303) возникает выражение:

$$\mathbf{j} = \frac{2}{\beta} \sum_{\omega} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{k} g_{11}, \quad (308)$$

где импульсное интегрирование идет по слою около сферы Ферми. Используются смешанное координатно-импульсное представление,

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} H\left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}},$$

($\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$ – центр масс пары, импульс \mathbf{k} сопряжен $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$) и разложение в ряд Фурье по τ . Предполагаем, что $\xi_{(k-i\partial)} \approx \xi_k - i c_F \hat{k} \cdot \partial$, и в низшем порядке по градиентам вблизи сферы Ферми получаем из (307) [86]:

$$i\omega g - \begin{pmatrix} \xi - i c_F \hat{k} \cdot \partial & \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}) & -\xi + i c_F \hat{k} \cdot \partial \end{pmatrix} g = \mathbf{1}, \quad (309)$$

где $g \equiv g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, $\xi \approx c_F(k - k_F)$ и c_F – скорость Ферми. Параметр порядка $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ имеет вид $\delta(\hat{k} \cdot \hat{\Delta}_1(\mathbf{r}) + i\hat{k} \cdot \hat{\Delta}_2(\mathbf{r}))$, где δ – амплитуда щели, $\hat{k} = \mathbf{k}/k$ и $\hat{l} = \hat{\Delta}_1 \times \hat{\Delta}_2$ – единичный вектор орбитального момента. Уравнение (309) можно рассматривать как “одномерное”, так как дифференцирование идет по направлению \hat{k} .

Описание пространственно-неоднородной трехмерной системы сводится к описанию эффективно одномерных подсистем при условии того, что неоднородности параметра порядка малы по сравнению с характерными масштабами. Вычисляем \mathbf{j} в сферических координатах ρ, θ, ϕ с центром в произвольной точке \mathcal{O} , в окрестности которой линейизируем слабо неоднородный параметр порядка,

$$\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \approx \Delta(\hat{k}, \rho = 0) + \alpha\rho \equiv \alpha(\rho_0 + \rho) + i\Delta, \quad (310)$$

где $\Delta \equiv \Im \Delta(\hat{k}, \rho = 0)$ и $\alpha\rho_0 = \Re \Delta(\hat{k}, \rho = 0)$. Вычисляем в произвольной точке \mathbf{r} (где $\hat{k} \cdot \vec{\partial} = \partial/\partial\rho$) и окончательно $\mathbf{r} \rightarrow \mathcal{O}$. Условие соблюдения лондоновского

предела гласит, что длина когерентности $\xi_0 = c_F/\delta$ (порядка размера пары) гораздо меньше, чем масштаб изменения орбитального вектора \widehat{l} , $\frac{1}{\chi^2} \equiv \xi_0|\partial \otimes \widehat{l}| \ll 1$. Условие линеаризации $\alpha\rho \ll \delta$ означает $\rho/\xi_0 \ll \chi^2$, и выполняется тем лучше, чем больше χ^2 . Замена $x = (\alpha/c_F)^{1/2}(\rho + \rho_0)$ приводит (309) к виду:

$$(i\omega + \mathcal{H})G = e^{ix\xi(\alpha c_F)^{-1/2}} \mathbf{1}, \quad \mathcal{H} = i\sqrt{\alpha c_F}\sigma_3 \frac{d}{dx} - \sqrt{\alpha c_F}\sigma_1 x + \Delta\sigma_2, \quad (311)$$

где гамильтониан \mathcal{H} выражен через матрицы Паули и $\alpha c_F > 0$. В этом случае выражение (308) принимает вид:

$$\mathbf{j} = \frac{k_F^3}{8\pi^3 c_F} \int d\Omega \widehat{k} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{\omega} \mathcal{J} \right), \quad \mathcal{J}(x) = \int d\xi e^{-ix\xi(\alpha c_F)^{-1/2}} G_{11}(x), \quad (312)$$

где матрица $G(x)$ определяется (311). Окончательно, $x = x_0$, где $x_0 \equiv \Re\Delta(\widehat{k}, \rho = 0)/\sqrt{\alpha c_F}$. Уравнение (311) связано с задачей о квантовании электрона со спином в однородном магнитном поле (задача Ландау), и ответ принимает вид (304)–(305).

Для решения (311) представим $G(x)$ в виде:

$$G = \sqrt{2}u \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}, \quad u \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad (313)$$

где функции $h_{1,2} \equiv h_{1,2}(x)$ и $f_{1,2} \equiv f_{1,2}(x)$ подлежат определению. С помощью унитарной матрицы u преобразуем \mathcal{H} (311):

$$u^{-1}\mathcal{H}u = \mathcal{H}_{em} \equiv \begin{pmatrix} \Delta & i\sqrt{\alpha c_F}a^- \\ -i\sqrt{\alpha c_F}a^+ & -\Delta \end{pmatrix}, \quad a^\pm = x \mp d/dx. \quad (314)$$

Оператор \mathcal{H}_{em} есть гамильтониан электрона в магнитном поле с собственными значениями $E_0 = -\Delta$, $E_n = \pm\sqrt{\Delta^2 + 2\alpha c_F n}$, и его собственные функции $\widehat{\Psi}_0$, $\widehat{\Psi}_n^\pm$ ($n \geq 1$), имеют вид [90]:

$$\widehat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0(x) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Psi}_n^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2E_n}} \begin{pmatrix} \sqrt{E_n \pm \Delta} \psi_{n-1}(x) \\ \mp i\sqrt{E_n \mp \Delta} \psi_n(x) \end{pmatrix}, \quad (315)$$

где $\psi_n(\mathbf{x})$ – функции Эрмита. Используем (314), чтобы перейти от (311) к уравнению

$$(i\omega + \mathcal{H}_{em}) \begin{pmatrix} h \\ f \end{pmatrix} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{ix\xi(\alpha c_F)^{-1/2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad (316)$$

для нахождения G_{11} . В правой части (316) стоит δ -функция Дирака, неизвестные h, f зависят от x, x' и $G_{11}(x) = \int dx' (h(x, x') + f(x, x'))$. Для решения (316) воспользуемся разложением по функциям (315):

$$\begin{pmatrix} h \\ f \end{pmatrix}(x, x') = B(x') \widehat{\Psi}_0(x) + \sum_{s=\pm} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(s)}(x') \widehat{\Psi}_n^{(s)}(x).$$

Определяем $B(x'), b_n^{(s)}(x')$, получаем \mathcal{J} и после суммирования по ω находим [92]:

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \sum_{\omega} \mathcal{J} = \pi \sqrt{\alpha c_F} & \left[n(E_0) \psi_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{n-1}^2 + \psi_n^2) + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{n-1}^2 - \psi_n^2) \frac{\tanh(\beta E_n/2)}{E_n} \right], \quad (317) \end{aligned}$$

где $n(\varepsilon)$ есть вес Ферми. Ответ для тока частиц возникает из подстановки (317) в \mathbf{j} (312), [93]. Для перехода к нулевой температуре нужно заменить фермиевский вес $n(E_0)$ функцией Хэвисайда $\theta(E_0)$, а $\tanh(\beta E_n/2)$ – на единицу. Окончательно, \mathbf{j} принимает вид:

$$\mathbf{j} = \frac{k_F^3}{8\pi^2 c_F} \int d\Omega \widehat{k} \sqrt{\alpha c_F} \left[n(E_0) \psi_0^2 + \frac{\Delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{n-1}^2 - \psi_n^2) \frac{\tanh(\beta E_n/2)}{E_n} \right]. \quad (318)$$

Для практики требуется та часть \mathcal{J} , которая четна по частоте ω (нечетная не дает вклада в \mathbf{j}):

$$\mathcal{J}_e = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{\alpha c_F}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^2 \left[(|\lambda|^2 + n + 1)^{-1} - (|\lambda|^2 + n)^{-1} \right], \quad (319)$$

где $|\lambda|^2 \equiv (\omega^2 + \Delta^2)(2\alpha c_F)^{-1}$. Если воспользоваться формулой суммирования

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n^2(y)}{(n+q)^d} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^{\infty} ds \frac{s^{d-1}}{\sqrt{\sinh s}} e^{(\frac{1}{2}-q)s - y^2 \tanh \frac{s}{2}}, \quad d > \frac{1}{2}, \quad q > 0, \quad (320)$$

то можно получить из (319):

$$\mathcal{J}_e = -\Delta \left(\frac{\pi}{\alpha c_F} \right)^{1/2} \int_0^\infty dt (\tanh t)^{1/2} e^{-x^2 \tanh t - 2|\lambda|^2 t}. \quad (321)$$

Пользуясь (321), получаем интегральное представление:

$$\beta^{-1} \sum_{\omega} \mathcal{J}_e = -\Delta \frac{\kappa^{1/2}}{2} \int_0^\infty dt \left(\frac{\tanh(\kappa t)}{t} \right)^{1/2} \tilde{\Theta}(t) e^{-x^2 \tanh(\kappa t) - (\Delta\beta/2)^2 t}, \quad (322)$$

где $\kappa = \alpha c_F (\beta/2)^2$, $\tilde{\Theta}(t) = (\pi t)^{1/2} \vartheta_2(0, i\pi t)$. Суммирование по частотам учитывается введением тэта-функции ϑ_2 (246). Вывод представления (320), основанный на использовании формулы Мелера [171], можно найти в [92, 93].

2.3.2 Предельные случаи и вычисления для конкретных текстур параметра порядка

Предельные переходы удобно изобразить с помощью “коммукативной диаграммы”:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{j} = \mathbf{j} \Big|_{\beta^{-1} \sum \mathcal{J}=(322)} & \xrightarrow{1} & \text{I} \\ 4 \downarrow & & \downarrow 2 \\ \text{II} & \xrightarrow{3} & (1) \end{array}, \quad (323)$$

где горизонтальные стрелки 1 и 3 означают $T \rightarrow 0$, а вертикальные 2 и 4 – низшее “градиентное” приближение. Использование $\lim_{\tau \rightarrow 0} \vartheta_2(0, i\tau) = \tau^{-1/2}$ позволяет переписать \mathbf{j} при $T = 0$ (стрелка 1):

$$\mathbf{j} \approx -\frac{3\rho}{8\pi c_F} \int d\Omega \hat{k} \Delta \int_0^\infty dt \left(\frac{\tanh t}{t} \right)^{1/2} e^{-x^2 \tanh t - (\Delta^2/\alpha c_F) t}, \quad (324)$$

В низшем “градиентном” приближении (стрелка 2) заменяем в (324) $\tanh t$ на t и получаем:

$$\mathbf{j} \approx -\frac{3\rho}{8\pi} \int d\Omega \hat{k} \frac{\alpha \Delta}{\alpha c_F x^2 + \Delta^2} = \frac{3\rho}{8\pi} \int d\Omega \hat{k} \left((\hat{k} \cdot \vec{\partial}) \arctan \left(\frac{\hat{k} \cdot \hat{\Delta}_2}{\hat{k} \cdot \hat{\Delta}_1} \right) \right), \quad (325)$$

где используется $\widehat{k} \cdot \vec{\partial} = \sqrt{\frac{\alpha}{c_F}} \frac{d}{dx}$ и $\frac{\widehat{k} \cdot \widehat{\Delta}_2}{\widehat{k} \cdot \widehat{\Delta}_1} = \frac{\Delta}{x \sqrt{\alpha c_F}}$. Ответ (325) сводится, [85], к \mathbf{j}_0 (306), где $\widehat{l} = \widehat{\Delta}_1 \times \widehat{\Delta}_2$ и $(v_s)_i = \frac{1}{2} \widehat{\Delta}_1 \cdot \partial_i \widehat{\Delta}_2$. Итак видно, что (306) есть низшее лондоновское приближение для (318).

Шаги $4 \rightarrow 3$ связаны с заменой $\tanh(\kappa t) \rightarrow \kappa t$ в (322) (стрелка 4) благодаря наискорейшему спуску при $\Delta \neq 0$ и больших β . В результате приходим к выражению

$$\mathbf{j} \approx -\frac{3\rho}{8\pi} \int d\Omega \widehat{k} \frac{\alpha \Delta}{|\Delta|^2} \left(1 - Y \left(\frac{|\Delta| \beta}{2} \right) \right), \quad Y(a) \equiv \int_0^\infty \frac{dy}{\cosh^2 \sqrt{y^2 + a^2}} \quad (326)$$

(позиция II на (323)), где Y есть функция Йосиды [173], связанная с преобразованием Лапласа функции $\widetilde{\Theta}(t)$. Ток (326) есть ток \mathbf{j}_0 “одетый” температурными поправками, [172]. При $T = 0$ (стрелка 3), $Y(\infty) = 0$ и приходим к (325).

Основная задача – получить разложение \mathbf{j} (324) в лондоновском пределе. При фиксированном \widehat{k} общая фаза параметра порядка $\Delta(\widehat{k}, \mathbf{r})$ позволяет сделать параметр α положительным. Тогда можно записать

$$e^{-i\psi} \Delta(\widehat{k}, \mathbf{r}) \equiv \Delta_0 + \alpha \rho, \quad \alpha = \delta \mathcal{M} e^{i(\frac{\pi}{2} - \psi)}, \quad \Delta_0 = \delta \sin \theta e^{i(\phi - \psi)}, \quad (327)$$

где фаза ψ используется для подгонки, а полное выражение для \mathcal{M} можно найти в [93]. Без потери общности можно показать, что существенными градиентными комбинациями, помимо v_1 и v_2 , являются только $\partial_1 \widehat{l}_2 + \partial_2 \widehat{l}_1$, $2mv_3 - \frac{1}{2} \widehat{l} \cdot \text{rot } \widehat{l}$, и $\partial_3 \widehat{l}_2 = \text{rot } \widehat{l} \times \widehat{l}$. Можно также считать, что \mathcal{M} зависит либо от $\partial_1 \widehat{l}_2 + \partial_2 \widehat{l}_1$, либо от $2mv_3 - \frac{1}{2} \widehat{l} \cdot \text{rot } \widehat{l}$. В работе [93] показано, что достаточно рассмотреть \mathcal{M} в редуцированном виде:

$$\mathcal{M} = -\partial_3 \widehat{l}_2 \cos^2 \theta + (2mv - \partial_1 \widehat{l}_2) \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \equiv -\frac{1}{\xi_0 \chi_1^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{\xi_0 \chi_2^2} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \quad (328)$$

(при $\partial_1 \widehat{l}_2 + \partial_2 \widehat{l}_1 = 0$, $v \equiv v_3$). Подбором ψ обеспечиваем $\alpha \in \mathbb{R}^+$ и получаем:

$$\alpha c_F = \frac{\delta^2 \sin^2 \theta}{Q}, \quad x_0^2 = \left(\frac{\sin \phi}{\chi_1^2 \tan^2 \theta} \right)^2 Q^3, \quad \delta^{-1} \frac{\Delta}{Q} = \cos \theta \left(\frac{1 \cos \phi}{\chi_1^2 \tan \theta} - \frac{1}{\chi_2^2} \right), \quad (329)$$

$$\frac{1}{Q^2} = \left(\frac{1 \sin \phi}{\chi_2^2 \tan \theta} \right)^2 + \left(\frac{1 \cos \phi}{\chi_2^2 \tan \theta} - \frac{1}{\chi_1^2 \tan^2 \theta} \right)^2.$$

В результате приходим к \mathbf{j}_{corr} (304) в следующем виде:

$$\mathbf{j}_{\text{corr}} = \frac{3\rho}{8\pi\xi_0} \int d\Omega \widehat{k} \cos\theta \left(\frac{1}{\chi_2^2} - \frac{1}{\chi_1^2} \frac{\cos\phi}{\tan\theta} \right) \Phi(x_0^2, Q). \quad (330)$$

Конкретизируя χ_1, χ_2 в (330), вычислим поправочные члены для трех ориентаций $\text{rot } \widehat{l}$ по отношению к \widehat{l} : $\text{rot } \widehat{l} \parallel \widehat{l}$ ($\chi_1 \rightarrow \infty$ и фиксируется $\chi_2 \gg 1$), $\text{rot } \widehat{l} \perp \widehat{l}$ ($\chi_2 \rightarrow \infty$ и фиксируется $\chi_1 \gg 1$), и произвольная ориентация $\text{rot } \widehat{l}$ и \widehat{l} ($\chi_1 = \chi_2 = \chi \gg 1$). Проведены разложения интегрального представления (305) по Лапласу в лондоновском пределе до третьего асимптотического порядка $\sim (\xi_0\chi^6)^{-1}$ включительно. Оценены коэффициенты при квадратичных членах, и получены новые поправки третьего порядка, содержащие логарифмическую зависимость от градиентных членов.

1. $\text{rot } \widehat{l}$ параллелен \widehat{l}

Здесь только $(\xi_0\chi^2)^{-1} \equiv 2mv - \partial_1 \widehat{l}_2 > 0$ отлично от нуля в \mathcal{M} (328). Получаем из (329), что $Q = \chi^2 |\tan\theta|$, $x_0 = 0$, и соотношение (330) означает, что только третья компонента тока j_3 отлична от нуля:

$$j_3 = \frac{3\rho}{2} \frac{1}{\xi_0\chi^2} \int_0^\infty \mathcal{F}(\chi^2 u) \frac{u du}{(u^2 + 1)^{5/2}}, \quad \mathcal{F}(\chi^2 u) = \int_0^\infty e^{-\chi^2 ut} \left(\sqrt{\frac{\tanh t}{t}} \right)' dt, \quad (331)$$

где $u = |\tan\theta|$. Оцениваем (331) и получаем

$$j_3 = \frac{\rho}{2} \frac{1}{\xi_0\chi^2} \left(1 + \frac{1}{\chi^4} \log \frac{\mathcal{B}}{\chi^2} \right), \quad \log 2\mathcal{B} = \frac{4}{3} + \int_0^\infty \left(3u\mathcal{F}(u) + \frac{1}{u+1} \right) du. \quad (332)$$

Все квадратичные поправки нули (квадратичная поправка пропорциональна $|\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}|$, [86]), низшая – поправка третьего порядка с логарифмом лондоновского параметра.

2. $\text{rot } \widehat{l}$ перпендикулярен \widehat{l}

В этом случае (329) приводит к $Q = (\chi \tan\theta)^2$, $x_0 = -\chi |\tan\theta| \sin\phi$, где $(\xi_0\chi^2)^{-1} \equiv \partial_3 \widehat{l}_2 > 0$. Компоненты 2 и 3 в \mathbf{j}_{corr} (330) исчезают, а первая есть:

$$j_1 = -\frac{3\rho}{4} \frac{1}{\xi_0\chi^2} \int_0^\infty \mathcal{F}(\chi^2 u^2) \frac{u du}{(u^2 + 1)^{5/2}}, \quad (333)$$

$$\mathcal{F}(\chi^2 u^2) = \int_0^\infty e^{-\chi^2 u^2 t} \left(\sqrt{\frac{\tanh t}{t}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 2; \chi^2 u^2 (t - \tanh t)\right) \right)' dt,$$

$u = |\tan \theta|$ и ${}_1F_1$ есть функция Куммера [163]. Окончательно:

$$j_1 = -\frac{\rho}{4} \frac{1}{\xi_0 \chi^2} \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{\chi^2} + \frac{5}{8\chi^4} \log \frac{\mathcal{B}}{\chi^2} \right), \quad (334)$$

$$\mathcal{A} = 3 \int_0^\infty \mathcal{F}(u^2) u du \approx -2 \times 10^{-1}, \quad \log 4\mathcal{B} = \frac{31}{15} - 12 \int_0^\infty \left(u^3 \mathcal{F}(u^2) - \frac{1}{6(u+1)} \right) du.$$

В этом случае две поправки, и низшая типа $(\text{rot } \hat{l})_\perp |\hat{l} \times \text{rot } \hat{l}|$ найденная в [86] для тока перпендикулярного \hat{l} . Коэффициент \mathcal{A} в (334) был численно оценен в [91]. Следующий член кубический и он содержит логарифм лондоновского параметра.

3. $\text{rot } \hat{l}$ и \hat{l} произвольны

В этом случае (330) учитывается целиком, что соответствует наличию квадратичных поправок вида $|\hat{l} \times \text{rot } \hat{l}|(\vec{v} - (1/4m)\text{rot } \hat{l})_\parallel$ и $|\hat{l} \times \text{rot } \hat{l}|(\partial_1 \hat{l}_2 + \partial_2 \hat{l}_1)$ [86]. Для простоты кладем $\chi_1 = \chi_2$. Рассмотрим компоненту $j_{\text{corr},3}$, которая вдоль \hat{l} , и получим из (330):

$$j = \frac{3\rho}{2\pi} \frac{1}{\xi_0 \chi^2} \iint_{\Pi} \frac{dudv}{\sqrt{(u^2+1)^5(1-v^2)}} ((u-v)\mathcal{F}_- + (u+v)\mathcal{F}_+), \quad (335)$$

$$\mathcal{F}_\mp = \int_0^\infty e^{-t(xu)^2 \mathcal{Q}} \left(\sqrt{\frac{\tanh t}{t}} e^{(t-\tanh t)(xu)^2(1-v^2) \mathcal{Q}^3} \right)' dt,$$

где $\mathcal{Q}^{-2} \equiv \mathcal{Q}_\mp^{-2} = 1 + u^2 \mp 2uv$, область Π имеет вид $\{(u, v) : u \in [0, \infty[, v \in [0, 1]\}$, и $u = \tan \theta$, $v = \cos \phi$. Оцениваем интеграл (335) и получаем:

$$j_3 = \frac{\rho}{2} \frac{1}{\xi_0 \chi^2} \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{\chi^2} + \frac{7}{4\chi^4} \log \frac{\mathcal{B}}{\chi^2} \right), \quad (336)$$

где $\mathcal{A} \sim 2/\sqrt{\pi} - 3/2 \approx -3.7 \times 10^{-1}$.

Итак, в первом случае только логарифмическая поправка третьего порядка. Во втором есть обе поправки. Как ясно из [86], квадратичные поправки обязаны быть

$\sim |\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}|$, что согласуется с отсутствием квадратичного члена в первом случае. Во втором случае $\mathbf{j}_{\text{сорт}}$ перпендикулярен \widehat{l} . Член второго порядка в (334) соответствует найденному в [86] в виде $(\text{rot } \widehat{l})_{\perp} |\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}|$. Третий случай также дает поправки обоих типов. Что касается квадратичной поправки вдоль \widehat{l} , ответ [86] таков:

$$\rho \xi_0 |\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}| \left(A (v_3 - \widehat{l} \cdot \text{rot } \widehat{l}/4m) + \frac{B}{m} (\partial_1 \widehat{l}_2 + \partial_2 \widehat{l}_1) \right).$$

Квадратичный член в (336) соответствует $A \neq 0, B = 0$. Можно утверждать и то, что вклад $A = 0, B \neq 0$ тоже предсказан предложенным расчетом.

Подводя итог, за интегралы при квадратичных членах отвечают диски радиуса $1/\chi$ вблизи топологически устойчивых полюсов (при $\theta = 0, \pi$) параметра порядка на сфере Ферми. Более того, в дополнение к результатам [86] продемонстрированы еще логарифмические члены. Поправка, найденная в [88], $\chi_{\text{orb}}(\vec{v}_s \cdot \partial) \widehat{\mathbf{l}}_{\mathbf{a}} \partial \widehat{\mathbf{l}}_{\mathbf{a}}$, где χ_{orb} логарифмически большая величина, есть часть выражения третьего порядка в (336). Предложенная процедура также объясняет отрицательный результат статьи [87]. Квадратичные вклады нетривиальны благодаря тому, что щель А-фазы обращается в нуль в полюсах сферы Ферми.

Окончательно, в лондоновском пределе $\xi_0 \ll |\text{gr}|^{-1}$, каждая из компонент тока \mathbf{j} для ${}^3\text{He} - \text{A}$ имеет схематический вид:

$$j = \text{const} \times \rho \text{gr} \left(1 + \mathcal{A} \xi_0 |\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}| + \mathcal{C} \xi_0^2 (\text{gr})^2 \log(\mathcal{B} \xi_0 \text{gr}) \right).$$

Здесь gr означает некоторую комбинацию градиентов параметра порядка. Полученные интегральные представления для коэффициентов \mathcal{A} и \mathcal{C} достаточно надежны (в смысле законности линеаризации при выводе (311)).

При построении интегрального представления (304), (305) удается доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 *Для произведения двух функций параболического цилиндра*

$D_\nu(x)D_\nu(-x)$ при $\Re \nu < 0$ имеет место следующее интегральное представление:

$$D_\nu(x)D_\nu(-x) = 2^{-1/2}\Gamma^{-1}(-\nu) \times \int_0^\infty \exp\left(\left(\nu + \frac{1}{2}\right)t - \frac{x^2}{2} \tanh \frac{t}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{\sinh t}}, \quad \Re \nu < 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (337)$$

Доказательство Следуя [94], получим решение уравнения (311) (считаем $\alpha_{CF} \equiv 1$ и $x \in \mathbb{R}$), принадлежащее $L^2(\mathbb{R})$, двумя способами. Используя метод вариации произвольной постоянной, приходим к \mathcal{J} (312) в следующем виде:

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{i} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\lambda \Gamma(|\lambda|^2 + 1) \mathcal{U}_+(x\sqrt{2}) \mathcal{U}_+(-x\sqrt{2}) + \lambda^* \Gamma(|\lambda|^2) \mathcal{U}_-(x\sqrt{2}) \mathcal{U}_-(-x\sqrt{2}) \right), \quad (338)$$

где $\lambda \equiv (\omega + i\Delta)/\sqrt{2}$, $\Gamma(|\lambda|^2)$ – гамма-функция, и $\mathcal{U}_\pm(y) \equiv \mathcal{U}(|\lambda|^2 \pm 1/2, y)$ – функции параболического цилиндра (обозначение $\mathcal{U}(a, y)$ эквивалентно обозначению $D_{-a-\frac{1}{2}}(y)$) [163, 174]. Второй способ связан с использованием разложения по базису (315) и приводит к ответу:

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{i} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^2(x) \left(\frac{\lambda}{|\lambda|^2 + n + 1} + \frac{\lambda^*}{|\lambda|^2 + n} \right). \quad (339)$$

Пользуясь единственностью функции Грина задачи Штурма-Лиувилля [171] приравняем по-отдельности вещественную и мнимую части (338) и (339), и после аналитического продолжения $|\lambda|^2 \rightarrow z$ получим:

$$\Gamma(z) \mathcal{U}\left(z - \frac{1}{2}, x\sqrt{2}\right) \mathcal{U}\left(z - \frac{1}{2}, -x\sqrt{2}\right) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n^2(x)}{n + z}, \quad \Re z > 0. \quad (340)$$

Ряд в правой части (340) сходится абсолютно и однородно на $\mathbb{R} \ni x$, и может быть записан в виде интеграла с использованием соотношения

$$(n + z)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t(n+z)} dt, \quad \Re z > 0,$$

и производящей функции многочленов Эрмита [171]. В результате приходим к (337). \square

Следствия: Правая часть (337) преобразуется в следующий интеграл [94]:

$$D_\nu(x)D_\nu(-x) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{z-1}}{(1+s)^z} e^{-\frac{x^2}{2}s} \frac{ds}{\sqrt{s}} = B\left(\frac{1}{2}, z\right) \Phi_1\left(\frac{1}{2}, z, z + \frac{1}{2}; -1, \frac{x^2}{2}\right), \quad (341)$$

где $\Re z > 0$ и $\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma; u, v)$ есть конфлюэнтный гипергеометрический ряд двух переменных [163]. Соотношение аналогичное (340) может быть получено и для произведения двух функций параболического цилиндра при совпадающих аргументах:

$$\Gamma(z) \mathcal{U}^2 \left(z - \frac{1}{2}, x\sqrt{2} \right) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi_n^2(x)}{n+z}, \quad \Re z > 0, \quad (342)$$

где суммирование в правой части идет по простым полюсам $\Gamma(z)$. Получаем из (342):

$$D_\nu^2(x) = 2^{-1/2} \Gamma^{-1}(-\nu) \int_0^\infty \exp \left(\left(\frac{1}{2} + \nu \right) t - \frac{x^2}{2} \coth \frac{t}{2} \right) \frac{dt}{\sqrt{\sinh t}}, \quad \Re \nu < 0, \quad (343)$$

или

$$D_\nu^2(x) = \Gamma^{-1}(-\nu) \int_1^\infty \frac{(s+1)^\nu}{(s-1)^{\nu+1}} e^{-\frac{x^2}{2}s} \frac{ds}{\sqrt{s}}. \quad (344)$$

Из интегралов (341) и (344) получаем следующие комбинации:

$$\begin{aligned} D_\nu(x) (D_\nu(x) + D_\nu(-x)) &= \Gamma^{-1}(-\nu) \int_0^\infty \frac{(s+1)^\nu}{|s-1|^{\nu+1}} e^{-\frac{x^2}{2}s} \frac{ds}{\sqrt{s}}, \\ D_\nu(x) (D_\nu(x) - D_\nu(-x)) &= \Gamma^{-1}(-\nu) \int_0^\infty \frac{(s+1)^\nu}{|s-1|^\nu} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}s}}{s-1} \frac{ds}{\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

Кроме того, (337) и (343) могут быть записаны в следующем виде:

$$D_\nu(x) D_\nu(\pm x) = \frac{e^{-x^2/2}}{2^{1/2} \Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \exp \left(\left(\frac{1}{2} + \nu \right) t \mp x^2 (e^t \mp 1)^{-1} \right) \frac{dt}{\sqrt{\sinh t}}.$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями для функций параболического цилиндра [163, 174] и применяя Теорему 5.1 из [175], можно проверить, что полученное интегральное представление для $y(x) \equiv D_\nu(x) D_\nu(-x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + [4(\nu + 1/2) - x^2] \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Представленный способ получить (337) может быть применен для получения аналогичного соотношения при произвольных несовпадающих аргументах функций параболического цилиндра [94]. \square

2.4 Спектр возбуждений в антиферромагнитной фазе трехзонной двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием

Возможность антиферромагнитного порядка в высокотемпературных соединениях, содержащих плоскости CuO_2 , свидетельствует о важной роли магнетизма в физике высокотемпературной сверхпроводимости. В основу теоретического описания магнитных и сверхпроводящих состояний в указанных системах могут быть положены однозонная и трехзонная модели Хаббарда на двумерных решетках. В моделях Хаббарда антиферромагнетизм существует для любого отталкивания при половинном заполнении (один фермион на узел или на элементарную ячейку) и разрушается допированием. Модели Хаббарда рассматриваются в режимах как слабой ($t \gg U$), так и сильной ($t \ll U$) связи (t – амплитуда перескоков электронов с узла на узел, U – параметр кулоновского отталкивания двух электронов на узле). Для извлечения физической информации в области параметров $t \sim U$ принято использовать эффективную $t - J$ модель, гамильтониан которой можно построить с помощью гамильтониана однозонной модели Хаббарда. Метод функционального интегрирования активно применяется для изучения фазовых диаграмм как сильнокоррелированной модели Хаббарда [176], так и $t - J$ модели [177].

Для слабого отталкивания $t \gg U$ антиферромагнитное и сверхпроводящие состояния в трехзонной двумерной модели Хаббарда изучены в работе [178] методом температурных функций Грина (в процитированных в [178] статьях аналогично рассмотрена однозонная модель). Антиферромагнитный порядок возникает на “медной” подрешетке. Продемонстрирована и изучена возможность сверхпроводящего состояния с нечетными орбитальными угловыми моментами в случае, когда уровень Фер-

ми проходит вблизи седловой точки (точки Ван Хофа) энергетической зоны (в двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием сверхпроводящее спаривание с орбитальным моментом $l = 1$ возможно, если уровень Ферми близок к минимуму энергетической зоны, и учитываются перескоки следующие за ближайшими).

В работах [179, 180] рассмотрено антиферромагнитное упорядочение в двумерной трехзонной модели Хаббарда со слабым отталкиванием. Функциональное интегрирование используется в [179, 180] для построения эффективного действия в антиферромагнитном состоянии и для вычисления спектра коллективных бозевских возбуждений как вблизи точки фазового перехода (область Гинзбурга–Ландау), так и в низкотемпературной области. Метод функционального интегрирования [11, 12] позволяет эффективно исследовать коллективные возбуждения в моделях физики конденсированного состояния. Применение метода связано с последовательным интегрированием по “быстрым” и по “медленным” переменным и с использованием преобразования Хаббарда–Стратоновича для взятия интеграла по “медленным” ферми-полям.

Гамильтониан трехзонной модели Хаббарда подробно представлен в [178]. Поэтому сразу запишем импульсное представление исходного действия S :

$$S = S_0 + S_1, \quad (345)$$

$$S_0 = \sum_{p,s} \Psi_s^*(p) G_0^{-1}(p) \Psi_s(p),$$

$$S_1 = -(\beta N)^{-1} \sum_{\alpha=1}^3 \mathcal{U}_\alpha \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} \psi_{\alpha\uparrow}^*(p_1) \psi_{\alpha\downarrow}^*(p_2) \psi_{\alpha\downarrow}(p_4) \psi_{\alpha\uparrow}(p_3), \quad (346)$$

где $G_0^{-1}(p) = i p_0 - \mathcal{H}_0(\mathbf{p})$,

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_d - \mu & -T_1^*(\mathbf{p}) & -T_2^*(\mathbf{p}) \\ -T_1(\mathbf{p}) & \varepsilon_p - \mu & 0 \\ -T_2(\mathbf{p}) & 0 & \varepsilon_p - \mu \end{pmatrix}, \quad \Psi_s(p) = \begin{pmatrix} \psi_{1s}(p) \\ \psi_{2s}(p) \\ \psi_{3s}(p) \end{pmatrix}. \quad (347)$$

Поля $\psi_{1s}(p)$ в столбцах $\Psi_s(p)$ (347) описывают фермионы на “медной” подрешетке

плоскости CuO_2 , а $\psi_{2s}(p)$ и $\psi_{3s}(p)$ – на “кислородных” подрешетках, и s принимает значения \uparrow, \downarrow . Число узлов в подрешетках есть $N = L^2$ и $3N$ – общее число узлов. Здесь и далее использованы 3-импульсные обозначения $p = (p_0, \mathbf{p})$, где $p_0 = (2n + 1)\frac{\pi}{\beta}$, $n \in \mathbb{Z}$ – фермионные мацубаровские частоты, $\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2) = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2)$ и $n_{1,2}$ пробегает дискретные значения $1 \leq n_{1,2} \leq L$. Кулоновское отталкивание на узлах характеризуется $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_d > 0$, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3 \equiv \mathcal{U}_p > 0$ и $\mathcal{U}_p = \frac{\mathcal{U}_d}{2}$. Далее, ε_d и ε_p – узельные энергии и μ – химический потенциал. В функциях $T_{1,2}(\mathbf{p}) = t(1 + e^{ip_{1,2}})$ использована амплитуда t перескоков с атомов меди на ближайшие атомы кислорода. Слагаемое S_1 (346) считается малым возмущением при условии $\mathcal{U}_\alpha \ll t$ (слабая связь).

Используем действие S (345) для построения температурной теории возмущений в формализме функционального интеграла

$$Z = \text{const} \times \int \mathcal{D}(\Psi^*, \Psi) \exp S, \quad \mathcal{D}(\Psi^*, \Psi) = \prod_{\alpha=1}^3 \prod_{p,s} d\psi_{\alpha s}^*(p) d\psi_{\alpha s}(p), \quad (348)$$

где функциональные переменные есть комплекснозначные образующие бесконечномерной грассмановой алгебры, и $\mathcal{D}(\Psi^*, \Psi)$ – мера интегрирования [11, 12]. Диаграммная техника, основанная на (345), (348) содержит, в качестве элементов, линии (неперенормированные функции Грина) $G_{0,\alpha\beta}(p)$ и вершины \mathcal{U}_α . Неperенормированные функции Грина есть, по определению, частные двух функциональных интегралов

$$G_{0,\alpha\beta}(p) \equiv - \frac{\int \mathcal{D}(\Psi^*, \Psi) \psi_{\alpha s} \psi_{\beta s}^* \exp S_0}{\int \mathcal{D}(\Psi^*, \Psi) \exp S_0}$$

и образуют набор матричных элементов матрицы, обратной к $G_0^{-1}(p)$. Правила составления диаграмм и последующих вычислений стандартны и могут быть найдены в [11, 12]. Накладывая условие $\mu + 2t = \varepsilon_d + \mathcal{U}_d/4 = \varepsilon_p + \mathcal{U}_p/8$, в трехзонной модели с отталкиванием можно реализовать нормальное состояние с заполнением $N/3N = 1/3$ (одна квазичастица на элементарную ячейку). Полная функция Грина определяется при этом из уравнения Дайсона-Горькова, и для собственно-энергетических частей

используется однопетлевое приближение, при котором перенормировка химического потенциала сводится к сдвигу на константу. При температуре $T \ll 2t$ спектр элементарных возбуждений имеет вид: $E_0(\mathbf{p}) = 2t$, $E_{\pm}(\mathbf{p}) = 2t \pm \sqrt{|T_1|^2 + |T_2|^2} \equiv 2t \pm 2t(1 + \frac{1}{2}(\cos p_1 + \cos p_2))^{1/2}$.

Вычислим Z (348) последовательно интегрируя по “быстрым” и “медленным” переменным. Уровень (линия) Ферми задается уравнением $\cos p_1 + \cos p_2 = 0$ и “медленные” переменные Ψ_S^* , Ψ_S (здесь нижний индекс $S(\equiv \text{Slow})$ – не спиновая переменная, а условный символ) можно определить, ограничив 2-импульсы исходных полей узким слоем $|\cos p_1 + \cos p_2| \leq \varepsilon_0$ вблизи линии Ферми так, что $\max\{T, T_c\} \ll \frac{t}{2}\varepsilon_0 \ll 2t$. Далее, равенством $\Psi_F = \Psi - \Psi_S$ ($F \equiv \text{Fast}$) определяются “быстрые” переменные. Интегрирование по Ψ_F^* , Ψ_F приводит к функционалу $\tilde{S}[\Psi_S^*, \Psi_S]$, имеющему смысл эффективного действия “медленных” полей: $\int \mathcal{D}(\Psi_F^*, \Psi_F) e^S = e^{\tilde{S}[\Psi_S^*, \Psi_S]}$. Используя опыт вычислений для неидеального ферми-газа [11, 12] и ограничиваясь порядками не выше четвертого, получим \tilde{S} непосредственно из S (345): $G_0^{-1}(p)$ заменяется на матрицу $g^{-1}(p)$ (обращение $g^{-1}(p)$ приводит к одночастичным функциям Грина “медленных” полей), и \mathcal{U}_α – на двухчастичную амплитуду рассеяния $T_\alpha(p_1, p_2, p_3, p_4)$ “медленных” квазичастиц с противоположными спинами. При этом областью суммирования по 2-импульсам является слой вблизи линии $\cos p_1 + \cos p_2 = 0$. Для $g(p)$ и T_α возникают диаграммные ряды теории возмущений, где внутренним суммированиям отвечают “быстрые” импульсы. Зафиксируем $g^{-1}(p)$ в \tilde{S} приближенным уравнением Дайсона $g^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - \Sigma$, где Σ – диагональная матрица нормальных собственно-энергетических частей, $\Sigma = \mu - \text{diag}\{x + \varepsilon_d, y + \varepsilon_p, y + \varepsilon_p\}$. Тогда, в однопетлевом приближении, ренормированные параметры заполнения x и y равны $-2t$, а перенормированные функции Грина возникают как матричные элементы матрицы обратной к $g^{-1}(p)$. В низшем приближении можно заменить T_α на \mathcal{U}_α .

Как показано в [179], при достаточно низкой температуре можно применить преобразование Хаббарда-Стратоновича и перейти от действия для медленных полей $\tilde{S}[\Psi_S^*, \Psi_S]$ к эффективному действию S_{eff} для коллективного двухкомпонентного поля $\mathbf{N}_p \equiv (N_1(p_0, \mathbf{p}), N_2(p_0, \mathbf{p}))$. Компоненты поля \mathbf{N}_p соответствуют Фурье-компонентам вектора Нееля, описывающего антиферромагнитный порядок. В результате статсумма \mathcal{Z} принимает вид:

$$\mathcal{Z} = \text{const} \times \int \mathcal{D}(\mathbf{N}_p, \mathbf{N}_{-p}) \exp S_{\text{eff}}, \quad S_{\text{eff}} = -\frac{1}{\mathcal{U}_d} \sum_p \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{N}_{-p} + \log \text{Det} \frac{\widehat{M}(\mathbf{N})}{\widehat{M}(0)}, \quad (349)$$

где $\mathcal{D}(\mathbf{N}_p, \mathbf{N}_{-p})$ – мера интегрирования, Det означает регуляризованный определитель оператора, задаваемого в импульсном представлении матрицей

$$\widehat{M}(\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} \delta_{p_1, p_2}(ip_0 + \varepsilon(\mathbf{p})) & \frac{1}{2\sqrt{\beta N}}(N_x + iN_y)_{(p_1\pi - p_2)} \\ \frac{1}{2\sqrt{\beta N}}(N_x - iN_y)_{(p_1\pi - p_2)} & \delta_{p_1, p_2}(ip_0 + \varepsilon(\mathbf{p})) \end{pmatrix},$$

где $p_\pi \equiv (p_0, \mathbf{p} + \boldsymbol{\pi})$ и $\boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi)$. Для дальнейшего изучения \mathcal{Z} используется приближение стационарной фазы для функциональных интегралов. Например, оценим критическую температуру перехода, ниже которой физика описывается коллективным полем \mathbf{N}_p . Найдем стационарное решение из условия $\delta S_{\text{eff}}/\delta \Delta = 0$. Подставляя $\mathbf{N}_p = \sqrt{\beta N} \Delta \delta_{p,0}$ в S_{eff} и полагая $|\Delta| = 0$ на линии фазового перехода с логарифмической точностью получаем [179]: $T_c \sim t \exp(-2\pi \sqrt{\frac{t}{\mathcal{U}_d}})$.

Получим энергетические спектры коллективных возбуждений бозевского типа в двух случаях. Сначала найдем спектр в области Гинзбурга–Ландау, характеризующейся температурами вблизи температуры фазового перехода $|T - T_c| \ll T_c$. Здесь можно разложить $\log \text{Det}$ в (349) по степеням N_1, N_2 . Обозначив $\widehat{M}^{-1}(0) = \widehat{H}$, $\widehat{M}(\vec{N}) = \widehat{H}^{-1} + \widehat{N}$ и используя $\log \text{Det} A = \text{Tr} \log A$, получим, ограничиваясь первыми двумя членами:

$$S_{\text{eff}} \simeq -\sum_p A_p \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{N}_{-p} - \frac{g}{32\beta N} \sum_{p_1+p_3=p_2+p_4} (\mathbf{N}_{p_1} \cdot \mathbf{N}_{-p_2})(\mathbf{N}_{p_3} \cdot \mathbf{N}_{-p_4}),$$

где

$$A_p = \frac{1}{\mathcal{U}_d} + (4\beta N)^{-1} \sum'_k (ik_0 - \varepsilon_0)^{-1} (ip_0 + ik_0 + \varepsilon_1)^{-1}, \quad g \simeq \frac{7\zeta(3)}{4\pi^4 t T_c^2} \log \frac{t}{T_c},$$

$\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(\mathbf{k})$, $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{k})$ и значение T_c (см. выше) задается $A_0 = 0$.

Если при $T > T_c$ выполнены условия $T_c/t \ll |p_0|/t \ll |T - T_c|/T_c \ll 1$, $\log \frac{t}{|p_0|} \simeq \log \frac{t}{T_c}$, то спектр имеет вид

$$E(\mathbf{p}) = -i \frac{7\zeta(3)}{2\pi^3 T_c} c_B^2 |p|^2 - i \frac{4}{\pi} (T - T_c), \quad c_B^2 = \frac{t^2}{4\pi} \left(\frac{\mathcal{U}_d}{t} \right)^{1/2}.$$

Полученный спектр изображается точкой на нефизическом листе плоскости энергии, что говорит о затухающем характере коллективных возбуждений. При $T < T_c$ модель допускает бозе-конденсацию и возникает голдстоуновская ветвь:

$$E(\mathbf{p}) = -i \frac{7\zeta(3)}{2\pi^3 T_c} c_B^2 |p|^2 - i \frac{8}{\pi} (T_c - T), \quad E(\mathbf{p}) = -i \frac{7\zeta(3)}{2\pi^3 T_c} c_B^2 |p|^2.$$

Полученные ветви спектра напоминают бозе-спектр неидеального Ферми-газа в области Гинзбурга-Ландау [11, 12].

В случае $T \ll T_c$ опускаем детали вычисления и получаем:

$$E(\mathbf{p}) = \frac{t}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^{1/2} |\mathbf{p}|,$$

где выражения для x и y могут быть найдены в [179, 180]. Используя оценки $x \simeq 4/(\pi \mathcal{D}^2 \sqrt{t \mathcal{U}_d})$, $y \simeq 4/(\pi^2 \mathcal{D}^2 t)$, $\mathcal{D}/t \ll 1$, получаем $E(\mathbf{p}) = c_B |\mathbf{p}|$, где c_B есть скорость боголюбовского звука (спиновых волн). Поправка к линейному спектру $-c_B \gamma p(p^2 + 4p_1^2 p_2^2 p^{-2})$, $p \equiv |\mathbf{p}|$, $\gamma > 0$ анизотропна и положительна, что означает стабильность коллективного возбуждения по отношению к распаду на возбуждения того же типа. Есть и вторая (неголдстоуновская) ветвь спектра: $E(0) = 2\mathcal{D} = \Delta$.

ГЛАВА 3. КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ НЕСИНГУЛЯРНЫХ ДИСЛОКАЦИЙ И ПЕРЕНОРМИРОВКА УПРУГИХ МОДУЛЕЙ

3.1 Калибровочный подход и геометрические соотношения теории дислокаций

Сохраняется интерес к описанию дефектов в твердом теле (т.е. дислокаций и дисклинаций) при помощи (нелинейных) лагранжевых моделей, основанных на калибровочной группе $P(3) = T(3) \otimes SO(3)$. Стоит ожидать, что в определенных предельных ситуациях модели, являющиеся по формулировке нелинейными, должны показывать согласованность с такими известными решениями линейной несовместной теории упругости как дислокации и дисклинации Вольтерры. Широко известен основанный на группе $P(3)$ подход [109, 110]. Интерпретация, предложенная в [109, 110], несвободна от недостатков. В этой связи в работах [181, 182] проанализирована связь соответствующих структурных уравнений Картана с геометрическими уравнениями теории дефектов Вольтерры и предложена геометрическая интерпретация плотностей дефектов и плотностей петель дефектов. Для описания статике *модифицированных* (т.е. несингулярных) дислокаций в работе [113] предложен подход $T(3)$ -калибровочной модели, основанной на лагранжиане Гильберта–Эйнштейна.

Алгебра Ли $\mathfrak{p}(3)$ группы $P(3)$ есть полупрямая сумма трехмерных алгебр Ли $\mathfrak{t}(3)$ и $\mathfrak{so}(3)$, элементы которых можно рассматривать как 3-векторы. При этом, $\mathfrak{t}(3)$ есть

алгебра с тривиальной скобкой, а для $\mathfrak{so}(3)$ роль скобки играет векторное умножение. Пусть M – открытое множество в \mathbb{R}^3 и T^*M – кокасательное расслоение над M . Дифференциальные формы со значениями в $\mathfrak{p}(3)$ являются элементами пространств $V^{(n)}(M) \equiv \mathfrak{p}(3) \otimes \wedge^n(T^*M)$, $0 \leq n \leq 3$. В соответствии с тем, что $\mathfrak{p}(3)$ есть полупрямая сумма, имеем расщепление: $V^{(n)}(M) \ni v^{(n)} \equiv \boldsymbol{\eta}^{(n)} \oplus \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$. Можно определить гомеоморфизм $d^{\text{Sh}} : V^{(n)}(M) \longrightarrow V^{(n+1)}(M)$ (внешняя производная Шефера) [181, 182]:

$$d^{\text{Sh}}v^{(n)} = \begin{pmatrix} d\boldsymbol{\lambda}^{(n)} \\ d\boldsymbol{\eta}^{(n)} + d\mathbf{x} \times_{\wedge} \boldsymbol{\lambda}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (350)$$

где \times_{\wedge} означает, что формы умножаются внешним образом, а их коэффициенты – как 3-векторы. Оператор d^{Sh} нильпотентен, $d^{\text{Sh}} \circ d^{\text{Sh}} = 0$. Пусть $\mathcal{A} \equiv \boldsymbol{\gamma} \oplus \boldsymbol{\zeta} \in V^{(1)}(M)$ и $\mathcal{F} \equiv \boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\theta} \in V^{(2)}(M)$, и пусть соблюдается $\mathcal{F} = d^{\text{Sh}}\mathcal{A}$. В рамках классической теории дефектов [183] (основанной на теории упругости с несовместностью) коэффициенты 2-форм $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ есть плотности дисклинаций и дислокаций, а коэффициенты 1-форм $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – плотности петель дисклинаций и дислокаций. Уравнения непрерывности для плотностей дефектов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ принимают вид условия интегрируемости $d^{\text{Sh}}\mathcal{F} = 0$. Инвариантность 2-формы \mathcal{F} относительно сдвигов $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} + d^{\text{Sh}}v^{(0)}$ означает, что классическую теорию дислокаций и дисклинаций естественно рассматривать как абелеву калибровочную модель с калибровочной группой $\mathfrak{p}(3) \approx \mathbb{R}^6$.

Калибрование группы $\mathfrak{P}(3)$ есть частный случай калибрования на главном расслоении аффинных реперов с группой $\mathfrak{A}(3) = \mathfrak{T}(3) \rtimes \text{GL}(3)$. При расщеплении $\mathfrak{A}(3)$ -калибровочного преобразования аффинной кривизны $\boldsymbol{\Phi} \oplus \mathcal{R}$, калибровочное поведение “трансляционной” части $\boldsymbol{\Phi}$ не такое, как должно быть для кручения линейной связности $\boldsymbol{\omega}$, являющейся “вращательной” частью аффинной связности $\boldsymbol{\phi} \oplus \boldsymbol{\omega}$. Переход к ассоциированному расслоению с 3-векторным сечением $\boldsymbol{\xi}$ и введение \mathbb{R}^3 -значной 1-формы $\mathbf{B} = \boldsymbol{\phi} + d\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}$ в качестве канонической 1-формы, [184], позволяет

перейти от структурного уравнения аффинных реперов к структурным уравнениям расслоения линейных реперов:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\omega} + (1/2)\boldsymbol{\omega} \times_{\wedge} \boldsymbol{\omega} &= \mathcal{R} \\ d\mathbf{B} + \boldsymbol{\omega} \times_{\wedge} \mathbf{B} &= \mathcal{T} \end{aligned} \xrightarrow{\xi - \mathbf{x} \ll 1} d^{\text{Sh}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{T} \end{pmatrix}, \quad (351)$$

где $\mathcal{T} = \boldsymbol{\Phi} + \mathcal{R} \times \boldsymbol{\xi}$. Уравнения Римана–Картана в левой части (351) описывают геометрию пространства, характеризуемого 2-формами кривизны \mathcal{R} и кручения \mathcal{T} . Представляя $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ (где \mathbf{u} есть малое смещение точки \mathbf{x} исходной конфигурации), можно прийти к соотношению в правой части (351), где 1-форма $\boldsymbol{\omega}$ отождествляется с плотностью петель дисклинаций ζ , а 1-форма $\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ приобретает смысл 1-формы петель дислокаций γ . В свою очередь, 2-формы \mathcal{R} и \mathcal{T} оказываются инфинитезимально 2-формами плотностей дисклинаций и дислокаций. Тожества Бьянки переходят в уравнения непрерывности плотностей дефектов $d\mathcal{R} = 0$, $d\mathcal{T} = \mathcal{R} \times_{\wedge} d\mathbf{x}$. Представленная интерпретация полей дефектов и петель дефектов в рамках P(3)-калибровочного подхода, отличается от использованной в [109, 110], но согласуется с геометрической интерпретацией многозначных полей, представленной в [185]. После выбора геометрической арены, дальнейшие шаги связаны с выбором лагранжиана.

Выбор T(3) в качестве калибровочной группы представляет самостоятельный интерес. В [113] рассмотрены два варианта модели, основанной на трансляционном калибровочном уравнении эйнштейновского типа. В первом варианте правая часть содержит тензор упругих напряжений, во втором – в правой части стоит разность между полным тензором упругих напряжений и, так называемым, фоновым тензором упругих напряжений (background stress tensor). В первом варианте в линейном случае возникают функции напряжений, которые совпадают на малых расстояниях с известными функциями напряжений Эйри и Прандтля одиночных дислокаций. На больших расстояниях дальнедействующие (т.е. растущие с расстоянием)

асимптотики функций напряжений меняются на короткодействующие с поведением $\rho^{-1/2} \exp(Q\rho)$, $\Re Q \leq 0$ при $\rho \gg 1$. Иными словами, в отличие от классической ситуации возникают решения с “экранировкой” полей напряжений. Во втором варианте возникает модификация классических сингулярных дислокаций, связанная с возникновением ядра: вблизи оси дефекта возникает цилиндрическая область, внутри которой сглаживаются особенности компонент тензора напряжений.

3.2 Модифицированная винтовая дислокация и квадратичные поправки к тензору напряжений

Подход [113], приводящий к несингулярным дефектам, рассматривается более детально в [121] на примере модифицированной винтовой дислокации. А именно, в рамках модели, предложенной в [113], развивается подход к вычислению квадратичных по модулю вектора Бюргера вкладов в тензор напряжений. Дело в том, что в известной классической работе [118] предложен подход к определению квадратичных поправок к тензору напряжений. Задача двумерна (плоская задача теории упругости) и поправки определены внутри кольца в плоскости, перпендикулярной линии дефекта. Внешний радиус кольца соответствует границе цилиндра, содержащего дефект. Внутренний радиус соответствует искусственному обрезаю на условной границе ядра дислокации. При этом как на внешней, так и на внутренней границах задаются условия типа свободной поверхности. В подходе, развиваемом в [113, 121], использование калибровочного лагранжиана Гильберта–Эйнштейна интерпретируется как учет энергии ядра дислокации. Соотношения, возникающие в [121] обобщают [118] в том смысле, что возникающие квадратичные напряжения определены внутри диска, и могут рассматриваться как регулярные продолжения классических решений внутрь ядра конечного радиуса. При этом самосогласованно возникают ра-

диусы, которые выделяют область ядра и которые зависят от упругих модулей второго и третьего порядков, то есть определяются рассматриваемой средой. На основе подхода, учитывающего конечность ядер, может быть построено термодинамическое описание твердых тел (кристаллов) с большим числом несингулярных дефектов.

Пусть начальное и конечное состояния тела рассматриваются по отношению к координатным системам $\{x^i\}$ и $\{x^a\}$, характеризующимся квадратами длин $g_{ij}dx^i dx^j$ и $\eta_{ab}dx^a dx^b$. При этом компоненты метрик связаны соотношением $\eta_{ab} = g_{ij}\mathcal{E}_a^i \mathcal{E}_b^j$, где $dx^i = \mathcal{E}_a^i dx^a$. Компоненты \mathcal{E}_a^i ортогональны триадам \mathbf{e}_i^a , определенным с помощью $\partial_i = \mathbf{e}_i^a \partial_a$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$. Компоненты \mathcal{E}_a^i определены 1-формой $dx^i = \mathcal{E}_a^i dx^a$. Выполняются соотношения ортогональности для \mathcal{E}_a^i и \mathbf{e}_i^a : $\mathbf{e}_i^a \mathcal{E}_b^i = \delta_b^a$, $\mathbf{e}_i^a \mathcal{E}_a^j = \delta_i^j$. Пусть отображение $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ задает деформацию начального состояния, и смещение $\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}$ параметризуется следующим образом: $\xi^i - x^i = u^a \mathcal{E}_a^i$. Задачу о квадратичных поправках будем рассматривать, следуя [118], в терминах эйлера тензора деформаций $(\mathbf{e})_{ab} \equiv e_{ab}$, характеризующего отклонение от плоской метрики η_{ab} конечного состояния:

$$\eta_{ab}d\xi^a d\xi^b - g_{ij}dx^i dx^j = 2e_{ab}d\xi^a d\xi^b, \quad 2e_{ab} \equiv \eta_{ab} - g_{ab}, \quad (352)$$

где $g_{ab} \equiv g_{ij}\mathcal{B}_a^i \mathcal{B}_b^j$ – тензор Коши, и компоненты \mathcal{B}_a^i определяются 1-формой $dx^i = \mathcal{B}_a^i d\xi^a$. Для учета дислокаций рассматриваем 1-форму с коэффициентами $\mathcal{B}_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} - \phi_a^i$, которые при неоднородных $\Gamma(3)$ -преобразованиях $x^i \rightarrow x^i + \eta^i(x)$ инвариантны так же, как $\mathcal{B}_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a}$ – при однородных сдвигах $x^i \rightarrow x^i + \eta^i$. При этом 1-форма $\mathcal{B}_a^i d\xi^a$ теряет свойство замкнутости, а преобразование калибровочных потенциалов ϕ_a^i обеспечивает инвариантность \mathcal{B}_a^i :

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \rightarrow \frac{\partial x^j}{\partial \xi^a} \left(\delta_j^i + \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right), \quad \phi_a^i \rightarrow \phi_a^i + \frac{\partial x^j}{\partial \xi^a} \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}. \quad (353)$$

Сдвиги (353) обеспечивают калибровочную инвариантность \mathcal{B}_a^i . Нетривиальность

дислокационного ядра связана с калибровочными переменными ϕ_a^i , для которых 1-форма $\mathcal{B}_a^i d\xi^a$ не замкнута: $d(\mathcal{B}_a^i d\xi^a) \neq 0$. Наличие дислокаций означает: $d(\mathcal{B}_a^i d\xi^a)|_{\mathcal{D}_p} = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_a^i d\xi^a|_{\mathcal{D}_p+cuts} = dU^i$.

Введем ковариантную производную $\overset{(\eta)}{\nabla}_a$, определяемую требованием ковариантной постоянности компонент \mathcal{E}_a^i : $\overset{(\eta)}{\nabla}_a \mathcal{E}_b^i \equiv \partial_a \mathcal{E}_b^i - \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ ab \end{smallmatrix} \right\}_\eta \mathcal{E}_c^i = 0$, где $\left\{ \begin{smallmatrix} c \\ ab \end{smallmatrix} \right\}_\eta$ – символ Кристоффеля второго рода [192]. При этом метрика $\eta_{ab} = \mathcal{E}_a^i \mathcal{E}_{bi}$ тоже ковариантно постоянна. Рассмотрим тензор Римана–Кристоффеля $R_{abc}{}^d$:

$$R_{abc}{}^d = \partial_a \left\{ \begin{smallmatrix} d \\ bc \end{smallmatrix} \right\}_g - \partial_b \left\{ \begin{smallmatrix} d \\ ac \end{smallmatrix} \right\}_g + \left\{ \begin{smallmatrix} d \\ ae \end{smallmatrix} \right\}_g \left\{ \begin{smallmatrix} e \\ bc \end{smallmatrix} \right\}_g - \left\{ \begin{smallmatrix} d \\ be \end{smallmatrix} \right\}_g \left\{ \begin{smallmatrix} e \\ ac \end{smallmatrix} \right\}_g, \quad (354)$$

где символы Кристоффеля $\left\{ \begin{smallmatrix} a \\ bc \end{smallmatrix} \right\}_g$ вычислены в метрике g_{ab} , которая тоже ковариантно постоянна, $\overset{(g)}{\nabla}_a g_{bc} = 0$. С использованием $\overset{(\eta)}{\nabla}_a \eta_{bc} = 0$ получаем соотношение:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} c \\ ab \end{smallmatrix} \right\}_\eta - \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ ab \end{smallmatrix} \right\}_g = 2e_{ab}{}^c, \quad (355)$$

$$2e_{ab}{}^c \equiv g^{ce} \left(\overset{(\eta)}{\nabla}_a e_{be} + \overset{(\eta)}{\nabla}_b e_{ae} - \overset{(\eta)}{\nabla}_e e_{ab} \right), \quad (356)$$

где e_{ab} определяется в (352).

Используя (354), (355) и (356), обсудим калибровочное уравнение гильберт-эйнштейновского типа. Для записи калибровочного уравнения введем тензор Эйнштейна $G^{ef} \equiv \frac{1}{4} \mathcal{E}^{ab} \mathcal{E}^{cd} R_{abcd}$, где \mathcal{E}^{abc} – тензор Леви-Чивиты и R_{abcd} – кривизна Римана-Кристоффеля (354). Тогда калибровочное уравнение принимает вид:

$$G^{ef} = \frac{1}{2\ell} (\sigma^{ef} - (\sigma_{bg})^{ef}), \quad \nabla_a \sigma^{ab} = 0. \quad (357)$$

Здесь ℓ характеризует энергию калибровочного поля φ . Геометрия деформированного состояния плоская и соответствующая кривизна $\overset{(\eta)}{R}_{abc}{}^d$ для метрики η_{ab} исчезает. Используем (355) и (356) в (357), используем исчезновение $\overset{(\eta)}{R}_{abc}{}^d$ и получаем из (357):

$$-\mathcal{E}^{ab} \mathcal{E}^{cd} \overset{(\eta)}{\nabla}_a \overset{(\eta)}{\nabla}_c e_{bd} = \frac{1}{2\ell} (\sigma^{ef} - (\sigma_{bg})^{ef}) + 2\mathcal{E}^{ab} \mathcal{E}^{cd} e_{adl} e_{bc}{}^l. \quad (358)$$

Кроме того, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}_{\text{bg}}$ в (357) – полный и фоновый тензоры напряжений. Тензор фоновых напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{\text{bg}}$ определяется заданным распределением сингулярных дислокаций и выполняется $\nabla_a(\sigma_{\text{bg}})^{ab} = 0$. Разница $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{bg}}$ играет роль источника (вынуждающей силы).

Модель с калибровочным уравнением (357) задается калибровочным и упругим лагранжианами. Используем трансляционную часть калибровочного восьмипараметрического лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{gauge}} \equiv \mathcal{L}_{\text{gauge}}(\boldsymbol{\omega}, \mathcal{B}, \Lambda)$, которая зависит, при $\boldsymbol{\omega} = 0$ и $\Lambda = 0$, от кручения (от плотности дислокаций) $\mathcal{T}_{ab}{}^c = (\partial_a \mathcal{B}_b{}^i - \partial_b \mathcal{B}_a{}^i) B_i{}^c$ квадратично:

$$\mathcal{B}^{-1} \mathcal{L}_{\text{g}}(\boldsymbol{\omega} = 0, \mathcal{B}, 0) = -\frac{1}{4} \mathcal{T}_{abc} (\beta_1 \mathcal{T}^{abc} + \beta_2 \mathcal{T}^{cab} + \beta_3 \mathcal{T}^{eb}{}_{e} \eta^{ac}), \quad \mathcal{B} \equiv \det \mathcal{B}_a{}^i, \quad (359)$$

где $B_j{}^c \mathcal{B}_c{}^i = \delta_j^i$, $B_i{}^c \mathcal{B}_a{}^i = \delta_a^c$. Упругая энергия изотропного тела в эйлеровом описании имеет вид:

$$W(\mathbf{e}) = j I_1^2(\mathbf{e}) + k I_2(\mathbf{e}) + l' I_1^3(\mathbf{e}) + m' I_1(\mathbf{e}) I_2(\mathbf{e}) + n' I_3(\mathbf{e}), \quad (360)$$

где $j = \mu + \lambda/2$ и $k = -2\mu$ есть упругие модули второго порядка (λ и μ – постоянные Ляме) и l' , m' , и n' – упругие модули третьего порядка. Выбор параметров $\beta_1 = -\ell$, $\beta_2 = 2\ell$, $\beta_3 = 4\ell$ в (359) и использование (360) обеспечивает возникновение уравнения (357).

Ключевым шагом рассматриваемого подхода является решение калибровочного уравнения (357), которое обобщает и заменяет соотношения несовместности классического подхода [118]. В работе [118] был предложен метод функций напряжений, применимый к широкому классу задач о дефектах в рамках несовместной теории упругости. Для удобства сопоставлений с соотношениями, возникающими в [118], уравнение (357) также будет решаться с использованием функций напряжений. При этом уравнения равновесия в напряжениях (см. (357)) удовлетворяются автоматически. Деформации и напряжения рассматриваются в двух низших приближениях:

$\mathbf{e} \approx \mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)}$, $\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$, где $\mathbf{e}^{(2)}$ и $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ – второго порядка малости по сравнению с $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$. Каждое из слагаемых $\mathbf{e}^{(i)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) состоит из фонового и калибровочного вкладов. Будем решать задачу в напряжениях. Подставляя указанные разложения в (357), получим уравнения первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) порядков (см. [120]):

$$\mathbf{Inc} \mathbf{e}^{(i)} = \frac{1}{2\ell} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \mathbf{Q}^{(i-1)}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = 0, \quad (361)$$

$$(\mathbf{Inc} \mathbf{e}^{(i)})^{ab} \equiv -\mathcal{E}^{acd} \mathcal{E}^{bfe} \nabla_c \nabla_f e_{de}^{(i)}, \quad (\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}^{(i)})^{ab} \equiv \sigma^{ab(i)} - (\boldsymbol{\sigma}_{\text{bg}}^{(i)})^{ab}, \quad (362)$$

$$Q^{(0)ab} \equiv 0, \quad Q^{(1)ab} \equiv 2 \mathcal{E}^{acd} \mathcal{E}^{bfe} e_{cel}^{(1)} e_{df}^{(1)l}. \quad (363)$$

Оператор ‘ \mathbf{Inc} ’ принято называть *оператором несовместности*, ∇ означает ковариантную производную $\overset{(\eta)}{\nabla}_a$ ($\equiv \nabla_a$), и индексы поднимаются с помощью метрики $\boldsymbol{\eta}$. Уравнения (361) имеют смысл уравнений равновесия и нестандартных (благодаря наличию $\frac{1}{2\ell} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}^{(i)}$) законов несовместности в соответствующих порядках. Уравнения равновесия (361) удовлетворяются анзацем Кренера: $\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{Inc} \boldsymbol{\chi}^{(i)}$. Образующие соотношения, соответствующие выбору энергии (360), связывают деформации $\mathbf{e}^{(i)}$ и напряжения $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$:

$$\mathbf{e}^{(i)} = C_1 I_1(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}) \boldsymbol{\eta} + C_4 \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \boldsymbol{\Psi}^{(i-1)}, \quad (364)$$

$$\boldsymbol{\Psi}^{(1)} \equiv (C_2 I_1^2(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}) + C_3 I_2(\boldsymbol{\sigma}^{(1)})) \boldsymbol{\eta} + C_5 I_1(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + C_7 I_3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}) (\boldsymbol{\sigma}^{(1)})^{-1}. \quad (365)$$

Здесь $\boldsymbol{\Psi}^{(0)} \equiv 0$, и $I_{1,2,3}(\cdot)$ – инварианты тензоров второго ранга. Числовые коэффициенты C_1 и C_4 имеют вид: $C_1 = -(2\mu)^{-1} \frac{\nu}{1+\nu}$, $C_4 = (2\mu)^{-1}$, где $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ есть коэффициент Пуассона. Коэффициенты C_2 , C_3 , C_5 и C_7 выражаются через упругие модули второго и третьего порядков, фигурирующие в (360), λ , μ и l' , m' , n' (дальнейшие детали, в частности касающиеся связи с реальными анизотропными кристаллами, имеются в [118, 120, 186]). Подставляя образующие соотношения (364), (365) во второе уравне-

ние (361) и используя анзац Кренера, получаем уравнения для компонент тензорной функции χ .

Заменяем производные ∇_a частными производными ∂_a , где x^a есть координаты конечного состояния и $\partial_3 \equiv 0$, и конкретизируем соотношения для χ [118, 120]:

$$\mu \phi \equiv \partial_2 \chi_{13}^{(i)} - \partial_1 \chi_{23}^{(i)}, \quad f \equiv \chi_{33}^{(2)}, \quad p \equiv -\partial_{11}^2 \chi_{22}^{(2)} - \partial_{22}^2 \chi_{11}^{(2)} + 2\partial_{12}^2 \chi_{12}^{(2)}. \quad (366)$$

Остальные компоненты $\chi^{(i)}$ нули.

Рассмотрим несингулярную винтовую дислокацию, расположенную вдоль бесконечного цилиндра. Тензор напряжений получен в двух порядках в виде сумм классического и калибровочного вкладов. В первом порядке только $\phi^{(1)}$ (366) не нуль для винтовой дислокации. Соответствующее уравнение имеет вид [121]:

$$(\Delta - \kappa^2) (\phi^{(1)} - \phi_{\text{bg}}^{(1)}) = b \delta^{(2)}(x), \quad (367)$$

где $\phi_{\text{bg}}^{(1)} \equiv (-b/2\pi) \log \rho$ есть фоновый потенциал напряжений, и b длина вектора Бюргера, направленного вдоль оси дислокации. Кроме того, используется безразмерный параметр $\kappa^2 \equiv \mu/\ell$, и b играет роль параметра возмущения. В цилиндрических координатах конечного состояния получаем: $\phi = \phi_{\text{bg}}^{(1)} - f_S$, $f_S \equiv (b/2\pi)K_0(\kappa\rho)$, где K_0 есть модифицированная функция Бесселя. Единственная ненулевая компонента напряжений, $\sigma_{\phi z}$, принимает вид:

$$\sigma_{\phi z} = \frac{b\mu}{2\pi\rho} (1 - \kappa\rho K_1(\kappa\rho)), \quad (\sigma_{\text{bg}})_{\phi z} = \frac{b\mu}{2\pi\rho}. \quad (368)$$

Область ядра характеризуется расстояниями $\rho \lesssim \kappa^{-1}$, так как калибровочная поправка к классическому закону $\sim 1/\rho$ экспоненциально мала вне указанной области. Внутри нее, $\sigma_{\phi z} \sim A\rho \log(B\rho)$.

Во втором порядке отличны от нуля компоненты напряжений:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} f, \quad \sigma_{\phi\phi}^{(2)} = -\frac{d^2}{d\rho^2} f, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = p. \quad (369)$$

Используем $\mathbf{Q}^{(1)}$ (363) и $\mathbf{\Psi}^{(1)}$ (365) и с помощью (361) конкретизируем калибровочные уравнения для функций напряжений f и p [121]:

$$\begin{aligned} (\Delta - \kappa^2) \left(\Delta + \frac{\kappa^2}{1-2a} \right) (f - f_{\text{bg}}) &= k \mathcal{R}, \\ p &= -\frac{a}{1-a} \Delta f - \frac{2\mu}{1-a} (\Psi_{33} + \tilde{g}) + \frac{\kappa^2}{1-a} (f - f_{\text{bg}}), \end{aligned} \quad (370)$$

где f_{bg} фоновый потенциал и $k \equiv \frac{2\mu}{1-2a} = 2\mu \frac{1+\nu}{1-\nu}$ (здесь $a \equiv \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} = \frac{1}{1+\nu-1}$) и Ψ_{33} , \tilde{g} могут быть найдены в [121]. Первое уравнение в (370) уместно назвать, [121], неоднородным *би-гельмгольцевым* уравнением и именно оно подлежит решению. Второе соотношение служит для того, чтобы выразить $\sigma_{zz} = p$. Источник \mathcal{R} имеет громоздкое общее выражение, вывод которого подробно обсуждается в [121]. Умножим \mathcal{R} на ρ^2 и переобозначим $\kappa\rho \mapsto s$. Сохраняя обозначение \mathcal{R} для полученного объекта, запишем окончательную формулу следующим образом:

$$\mathcal{R} \approx s^2 w(s) + \sum_{a=1}^3 \mathcal{R}_a, \quad (371)$$

$$X^{-2} \mathcal{R}_1 = (\tilde{c} + cs^2) K_1(s) \left(K_1(s) - \frac{2}{s} \right), \quad (372)$$

$$X^{-2} \mathcal{R}_2 \approx \frac{2\tilde{c}}{s_*^2} s K_1(s) \tilde{h}_{[0, s_*]}(s), \quad X^{-2} \mathcal{R}_3 \approx -2c (s K_1(s))^2,$$

где $\tilde{c} \equiv (1-a)(1-2\mu^2 C_7) - 4c$ и $c \equiv \mu^2 C_3$. При этом коэффициенты C_3 , C_7 соответствуют определениям (364), (365). Кроме того, введено обозначение:

$$s^2 w(s) \equiv X^2 \frac{s^2}{s_*^4} \left[(1+a) - \frac{1}{2} (s^2 - s_*^2) \right] \tilde{h}_{[0, s_*]}(s), \quad (373)$$

где $s_* \equiv \kappa\rho_*$, и $\tilde{h}_{[0, s_*]}(s)$ есть единица при $s \in [0, s_*]$ и нуль при $s \notin [0, s_*]$. Далее, $\tilde{\phi}$ означает $\phi^{(1)}$ (см. (367)) без множителя $\frac{b}{2\pi}$. Множитель $X^2 \equiv \left(\frac{b\kappa}{2\pi}\right)^2$ квадратичен по b . Далее, $\Delta_s = s^{-1} \frac{d}{ds} \left(s \frac{d}{ds} \right)$, и K_0 , K_1 – модифицированные функции Бесселя. Асимптотически, функция \mathcal{R} хорошо локализована на большом удалении. При малых s имеем разложение:

$$\mathcal{R}(s) \simeq p_1 s^{-2} + p_2 \log s + p_3 + s^2 (p_4 \log^2 s + p_5 \log s + p_6) + o(s^2), \quad (374)$$

где, в принципе, $p_2 = 0$, а выражения для остальных коэффициентов p_1, p_3, \dots, p_6 могут быть найдены в [121].

Решение первого из уравнений (370) сводится к последовательному решению двух неоднородных уравнений Бесселя методом вариации произвольной постоянной:

$$\left[s^2 \frac{d^2}{ds^2} + s \frac{d}{ds} - s^2 \right] G(s) = \mathcal{R}(s), \quad (375)$$

$$\left[s^2 \frac{d^2}{ds^2} + s \frac{d}{ds} + s^2 \right] \mathcal{F}\left(\frac{s}{\mathcal{N}}\right) = \frac{s^2}{\mathcal{N}^2} G\left(\frac{\kappa}{\mathcal{N}} s\right). \quad (376)$$

Переменная s в уравнении (376) определена следующим образом: $s \equiv \mathcal{N}\rho$, $\mathcal{N}^2 \equiv \frac{\kappa^2}{1-2a}$.

Модифицированный потенциал напряжений второго порядка f принимает вид: $f = f_{\text{bg}} + k\mathcal{F}$. В результате получаем:

$$f = f_{\text{bg}} + kI_{\mathcal{F}}, \quad f_{\text{bg}} = -\tilde{n} \log^2 \rho + d_1 \rho^2 + d_2 \log \rho, \quad \tilde{n} \equiv k \frac{p_1}{8\kappa^2}, \quad (377)$$

$$I_{\mathcal{F}}(\rho) \equiv J_0(\mathcal{N}\rho) \int_{\rho}^{\infty} \tilde{Y}_0(\mathcal{N}t) G(\kappa t) t dt - \tilde{Y}_0(\mathcal{N}\rho) \int_{\rho}^{\infty} J_0(\mathcal{N}t) G(\kappa t) t dt, \quad (378)$$

где $p_1 = -X^2 \tilde{c}$, $\mathcal{N}^2 = \frac{\kappa^2}{1-2a}$. При этом X^2 и \tilde{c} такие же, как в (372), а k определено в (370). Далее, $G(s)$ определяется (375), и f_{bg} есть классический потенциал напряжений второго порядка, удовлетворяющий неоднородному уравнению $\Delta \Delta f_{\text{bg}} = \frac{-8\tilde{n}}{\rho^4}$. В классике использование f_{bg} (377) приводит к напряжениям второго порядка:

$$\left(\overset{(2)}{\sigma}_{\text{bg}} \right)_{\rho\rho} = 2\tilde{n} \frac{\log \rho}{\rho^2} - \frac{d_2}{\rho^2} - 2d_1, \quad \left(\overset{(2)}{\sigma}_{\text{bg}} \right)_{\phi\phi} = -2\tilde{n} \frac{\log \rho}{\rho^2} + \frac{2\tilde{n} + d_2}{\rho^2} - 2d_1. \quad (379)$$

Для определения d_1 , d_2 накладываем условия $\left(\overset{(2)}{\sigma}_{\text{bg}} \right)_{\rho\rho} \Big|_{\rho=\rho_e} = 0$, $\left(\overset{(2)}{\sigma}_{\text{bg}} \right)_{\rho\rho} \Big|_{\rho=\rho_c} = 0$ на границах цилиндра $\rho = \rho_c$ и $\rho = \rho_e > \rho_c$. При $\rho_e \gg \rho_c$ приближенно получаем $d_1 \approx \frac{\tilde{n}}{\rho_e^2} \log \frac{\rho_e}{\rho_c}$, $d_2 \approx 2\tilde{n} \log \rho_c$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\overset{(2)}{\sigma}_{\text{bg}} \right)_{\rho\rho} &\approx \frac{2\tilde{n}}{\rho^2} \left(\log \frac{\rho}{\rho_c} - \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 \log \frac{\rho_e}{\rho_c} \right), \\ \left(\overset{(2)}{\sigma}_{\text{bg}} \right)_{\phi\phi} &\approx \frac{2\tilde{n}}{\rho^2} \left(1 - \log \frac{\rho}{\rho_c} - \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 \log \frac{\rho_e}{\rho_c} \right). \end{aligned} \quad (380)$$

Заметим, что \tilde{n} пропорционально b^2 , и $\sigma_{\text{bg}}^{(2)}$ действительно второго порядка по b .

Следующий этап – подстановка f (377) в (369) и определение свободных параметров s_* (входит в (365)), $const$ (возникает в G при решении (375)), d_1 , и d_2 из рассмотрения асимптотических свойств $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$, $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}$ и $\sigma_{zz}^{(2)}$. В результате получаем:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = (\sigma_{\text{far}}^{(2)})_{\rho\rho} - k\rho^{-1}I'_{\mathcal{F}}, \quad \sigma_{\phi\phi}^{(2)} = (\sigma_{\text{far}}^{(2)})_{\phi\phi} + k(\mathcal{N}^2 I_{\mathcal{F}} + \rho^{-1}I'_{\mathcal{F}} - G), \quad (381)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \nu(\sigma_{\rho\rho}^{(2)} + \sigma_{\phi\phi}^{(2)}) - 2\mu(1+\nu)(\Psi_{zz} + \tilde{g}) + \kappa^2(1+\nu)kI_{\mathcal{F}}. \quad (382)$$

где k определено в (370), решение G уравнения (375) может быть найдено в [121], используется $I_{\mathcal{F}}$ (378) и $I'_{\mathcal{F}} = \frac{d}{d\rho}I_{\mathcal{F}}$. Компоненты тензора $\sigma_{\text{far}}^{(2)}$ в (381) совпадают с выражениями (380), но индекс far означает, что вместо произвольного внутреннего радиуса (радиуса ядра) ρ_c в выражениях для $\sigma_{\text{far}}^{(2)}$ присутствует радиус ρ_1 , определяемый только упругими параметрами модели [121]. При достаточно больших значениях ρ в выражениях (381) доминируют компоненты $\sigma_{\text{far}}^{(2)}$, то есть асимптотика имеет классический вид. Что касается $\sigma_{zz}^{(2)}$ (382), то здесь еще используется Ψ_{zz} (см. (365)) в цилиндрических координатах: $\Psi_{zz} = -c(\partial_{\rho}\phi^{(1)})^2$, где $\phi^{(1)}$ дается (367). Кроме того, \tilde{g} отвечает функции $w(s)$ (373), выраженной с помощью ρ .

При достаточно больших ρ_e можно переписать (382):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(2)} \approx & \nu((\sigma_{\text{far}}^{(2)})_{\rho\rho} + (\sigma_{\text{far}}^{(2)})_{\phi\phi}) - 2\mu(1+\nu)\Psi_{zz} + k(\mathcal{N}^2 I_{\mathcal{F}} - \nu G) \\ & - 2\mu(1+\nu)\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \left[\frac{2c}{\rho_e^2} \log \frac{\rho_e}{\rho_2} + \frac{1}{2\rho_*^2} \left(\frac{\rho^2}{\rho_*^2} - 1 \right) h_{[0, \rho_*]}(\rho) \right], \end{aligned} \quad (383)$$

где $I_{\mathcal{F}}$ задается (378) и ρ_* – один из радиусов, возникающих в подходе, зависящих от упругих постоянных и характеризующих ядро. При $\kappa\rho \gg 1$ получаем из (381), (382)

и (383):

$$\begin{aligned}
(\sigma_{\text{far}}^{(2)})_{\rho\rho} &\approx \frac{2\tilde{n}}{\rho^2} \left(\log \frac{\rho}{\rho_1} - \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 \log \frac{\rho_e}{\rho_1} \right), \\
(\sigma_{\text{far}}^{(2)})_{\phi\phi} &\approx \frac{2\tilde{n}}{\rho^2} \left(1 - \log \frac{\rho}{\rho_1} - \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 \log \frac{\rho_e}{\rho_1} \right), \\
\sigma_{zz}^{(2)} &\approx 2 \left[\nu\tilde{n} + \left(\frac{b}{2\pi} \right)^2 \mu(1+\nu)c \right] \left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho_e^2} \log \frac{\rho_e}{\rho_m} \right].
\end{aligned} \tag{384}$$

где ρ_e – внешний радиус цилиндра и $\tilde{n} \sim \mu b^2$. Асимптотика $\sigma_{\text{far}}^{(2)}$ (384) отличается от $\sigma_{\text{bg}}^{(2)}$ (380) наличием длины ρ_1 вместо искусственного радиуса ядра ρ_c . Если обозначить расстояние от оси дефекта как ϵ , то при $\epsilon \rightarrow 0$ компоненты $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$, $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}$ ведут себя как $o(\epsilon^2 \log^3 \epsilon)$. Компонента $\sigma_{zz}^{(2)}$ зависит от новых параметров ρ_2 и ρ_* (383) и имеет на больших расстояниях классический вид, характеризуемый новой длиной ρ_m (384) вместо произвольно задаваемого радиуса ρ_c . Параметры ρ_1 , ρ_2 , ρ_m и ρ_* выражаются через упругие модули второго и третьего порядков [121], для которых в свою очередь возникают определенные ограничения. Данные ограничения позволяют, в принципе, конкретизировать кристаллические материалы, для которых пригоден развиваемый подход. Таким образом в предложенной калибровочной модели продолжение полей напряжений внутри области ядра характеризуется радиусами ρ_1 , ρ_2 , ρ_m , ρ_* , которые определяют границу ядра как переходный “слой”. Полученные поправки $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$, $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}$ не имеют особенностей на оси Ox_3 , а особенность $\sigma_{zz}^{(2)}$ – интегрируемая. Более существенно, что асимптотики (384) не зависят от искусственных параметров.

3.3 Перенормировка упругих модулей и влияние ядер дислокаций

Предложен теоретико-полевой подход [134], дающий описание дислокаций в сплошном упругом теле как термодинамического ансамбля. За основу взяты несингулярные винтовые дислокации с нетривиальным ядром, описываемые калибровочно-трансля-

ционной моделью [113, 121] с лагранжианом Гильберта-Эйнштейна.

Как показано в [134], совокупность параллельных (винтовых) дислокаций с положительными и отрицательными векторами Бюргера эквивалентна двумерной кулоновской двухкомпонентной системе положительных и отрицательных зарядов. Кулоновский характер системы проявляется в том, что попарное взаимодействие зарядов на больших расстояниях – логарифмическое, а несингулярность проявляется в том, что на малых расстояниях потенциал взаимодействия регуляризуется, стремясь к нулю. Двумерная кулоновская система принадлежит к классу систем, охватываемых подходом [122–127]. Плавление двумерного кристалла опосредуется возникновением дислокационных диполей (пар дислокаций противоположного заряда), ростом размеров диполей и последующей диссоциацией дислокаций, которые образуют пары. Присутствие дислокационных диполей связано с перенормировкой упругих модулей. Фазовый переход плавления означает, что значение упругого модуля достигло критического значения. Конечный размер ядра приводит к тому, что закон перенормировки модуля сдвига модифицируется, по сравнению со случаем сингулярных дефектов. С технической точки зрения, предложенный здесь подход является дальнейшим развитием подхода работ [188, 189].

Статистическая сумма \mathcal{Z} упругого цилиндра, содержащего большое число прямолинейных дислокаций, которые расположены параллельно его оси, записывается в виде функционального интеграла:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N} \int e^{-\beta W} \mathcal{D}(\sigma_{ij}^b, \sigma_{ij}^c, u_i, e_{ij}), \quad (385)$$

где $W \equiv E - iE_{\text{ext}}$, $E \equiv E_{\text{el}} + E_{\text{core}}$, и β – обратная температура T . Функционал W

СОСТОИТ ИЗ ВКЛАДОВ:

$$\begin{aligned}
E_{\text{el}} &= \frac{1}{4\mu} \int ((\sigma_{ij}^{\text{b}} + \sigma_{ij}^{\text{c}})^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{ii}^{\text{b}} + \sigma_{ii}^{\text{c}})^2) d^3x, \\
E_{\text{core}} &= \int (\ell e_{ij} (\text{inc } e)_{ij} - e_{ij} \sigma_{ij}^{\text{c}}) d^3x, \\
E_{\text{ext}} &= \frac{1}{2} \int \sigma_{ij}^{\text{b}} (\partial_i u_j + \partial_j u_i - 2\mathcal{P}_{ij}) d^3x,
\end{aligned} \tag{386}$$

где $(\text{inc } e)_{ij} = -\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k \partial_m e_{ln}$ (ϵ_{ikl} – антисимметричный тензор). Здесь E_{el} – упругая энергия суперпозиции двух полей напряжений, σ_{ij}^{b} и σ_{ij}^{c} . Тензор σ_{ij}^{b} описывает вклад, соответствующий сингулярным дислокациям (*фоновое напряжение*), а модификация компонент напряжений σ_{ij}^{b} внутри ядра описывается тензором σ_{ij}^{c} ; μ – модуль сдвига и ν – коэффициент Пуассона. Собственная энергия дислокационных ядер есть E_{core} . Выражение для E_{core} возникает из лагранжиана нелинейной T(3)-калибровочной модели несингулярной винтовой дислокации. Здесь e_{ij} есть тензор суммарной деформации, ℓ есть параметр энергии дислокационного ядра. Кроме того, присутствует E_{ext} – вспомогательный член типа “источника”, линейный по производным вектора смещения u_i и по компонентам источника \mathcal{P}_{ij} , связанного с пластической деформацией e_{ij}^{P} : $\mathcal{P}_{ij} = e_{ij}^{\text{P}} + C_{ij}$. Слагаемое E_{ext} (386) ответственно, во-первых, за то, что уравнения равновесия в напряжениях возникают как связь для интегрирования по полям напряжений. Во-вторых, учет E_{ext} обеспечивает фиксирование распределения фоновых (сингулярных) дислокаций. Конкретная конфигурация дислокационных линий задается конкретизацией тензора e_{ij}^{P} , сосредоточенного на двумерных поверхностях скачка, ограниченных линиями дислокаций [192]. Поле C_{ij} имеет вспомогательный характер и при $\ell \neq 0$ его фиксация снимает некоторый произвол, обеспечивая то, что точкой стационарности для σ_{ij}^{b} является распределение напряжений сингулярных дислокаций, описываемых пластическими полями e_{ij}^{P} ($C_{ij} = 0$ при $\ell = 0$). Кроме того, $\mathcal{D}(\sigma_{ij}^{\text{b}}, \sigma_{ij}^{\text{c}}, u_i, e_{ij})$ в (385) есть мера функционального интегрирования, представляю-

щая собой произведение мер для каждой из функциональных переменных в скобках. Множитель $\frac{1}{N}$ в (385) - нормировка. Статсумму \mathcal{Z} , определяемую (385) и (386), оценим в ведущем приближении с помощью стацфазы [9, 11, 12, 14–16]. Соответствующие точки стационарности определяются требованием исчезновения вариации функционала W при независимом варьировании функциональных аргументов, $\delta W = 0$.

Работаем в рамках плоской теории упругости, применимой для достаточно длинного цилиндра [101, 186]. Ситуация становится двумерной, описываемой функционалами, которые возникают из (386):

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{1}{2\mu} \int (\sigma_i^{\text{b}} + \sigma_i^{\text{c}})^2 d^2x, \\ E_{\text{core}} &= 2 \int (\ell e_i (\text{inc } e)_i - e_i \sigma_i^{\text{c}}) d^2x, \\ E_{\text{ext}} &= \int \sigma_i^{\text{b}} (\partial_i u - 2\mathcal{P}_i) d^2x, \end{aligned} \quad (387)$$

где подинтегральные выражения (x_1, x_2) -зависимы, и суммирование идет по $i = 1, 2$. Вектор смещения винтовой дислокации направлен вдоль Ox_3 [186], и мы обозначаем $u \equiv u_3$. Вводим сокращения: $\sigma_i^{\#} \equiv \sigma_{i3}^{\#}$ ($\#$ есть b или c), $e_i \equiv e_{i3}$, и т.д..

Напомним, что отдельной положительно ориентированной винтовой дислокации с вектором Бюргера \mathbf{b} параллельным Ox_3 , которая пересекает плоскость x_1Ox_2 в $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$, отвечает пластическая деформация $e_2^P = (b/2)\theta(-x_1 + y_1)\delta(y_2 - x_2)$ [101], где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда и $b = |\mathbf{b}|$. Рассмотрим набор из \mathcal{N} винтовых дислокаций с координатами $\mathbf{x} = \mathbf{y}_I$ и векторами Бюргера \mathbf{b}_I , $1 \leq I \leq \mathcal{N}$. Соответствующая статсумма (385) оценивается методом наискорейшего спуска, требующим исчезновения вариации $\delta W = 0$. При этом, в частности, варьирование поля деформации e_{ij} приводит к уравнению:

$$(\text{inc } e)_{ij} = \frac{1}{2\ell} \sigma_{ij}^{\text{c}}, \quad (388)$$

являющемся линейризацией калибровочного уравнения эйнштейновского типа (357),

которое рассматривалось в нелинейном подходе в работе [121]. Так как $\partial_i(\text{inc } e)_{ij} \equiv 0$, мы приходим к подстановке $\sigma_i^c = \mu \epsilon_{ij} \partial_j f^c$, обеспечивающей удовлетворение уравнения равновесия $\partial_i \sigma_i^c = 0$. Кроме того, функциональный интеграл по u (см. (385) и (387)) играет роль дельта-функционала $\delta(\partial_i \sigma_i^b)$, ограничивающего интегрирование по σ_i^b . Данная связь учитывается подстановкой $\sigma_i^b = \mu \epsilon_{ij} \partial_j f^b$. Произвольность вариаций δf^b и δf^c приводит к условиям экстремальности:

$$\begin{aligned} \Delta(f^b + f^c) &= 2i(\partial_1 \mathcal{P}_2 - \partial_2 \mathcal{P}_1), \\ \Delta(f^b + f^c) &= \kappa^2 f^c, \quad \kappa^2 \equiv \frac{\mu}{\ell}, \end{aligned} \tag{389}$$

где $\mathcal{P}_i \equiv e_i^P + C_i$. Самосогласованность уравнений (389) требует совпадения их правых частей:

$$\partial_1 C_2 - \partial_2 C_1 = \frac{1}{2}(\rho - i\kappa^2 f^c), \quad \rho(\mathbf{x}) \equiv 2(\partial_2 e_1^P - \partial_1 e_2^P) = \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} j(\mathbf{x} - \mathbf{y}_I), \tag{390}$$

где $j(\mathbf{x} - \mathbf{y}_I) \equiv b_I \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_I)$, $\delta^{(2)}(\mathbf{x})$ есть дельта-функция на $x_1 O x_2$, и $\rho(\mathbf{x})$ – плотность дислокаций. Представим общее решение уравнения (390) следующим образом:

$$C_i = \frac{i}{2}(\partial_i \phi + \epsilon_{ij} \partial_j \psi), \tag{391}$$

где ϕ есть произвольная регулярная функция, а ψ определяется подстановкой (391) в (390). Если (390) соблюдается, то можно произвольно зафиксировать либо f^b , либо f^c . Естественно выбрать уравнение для f^b таким же, как и при $\ell = 0$:

$$\Delta f^b = -i\rho(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}) \equiv \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} j(\mathbf{x} - \mathbf{y}_I). \tag{392}$$

Определяем f^b из (392) в виде функции напряжений Прандтля для набора винтовых дислокаций:

$$f^b = \frac{-i}{2\pi} \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} b_I \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}_I|. \tag{393}$$

Тогда уравнения (389) ведут к единственному уравнению для f^c :

$$(\Delta - \kappa^2)f^c = i\rho(\mathbf{x}), \quad (394)$$

с решением вида:

$$f^c = \frac{-i}{2\pi} \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} b_I K_0(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}_I|), \quad (395)$$

где $K_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя. Выбор $\phi = 0$, $\psi = f^c$ обеспечивает совпадение (390) и (394). Замена $\frac{f^\#}{i} \rightarrow f^\#$ приводит к физическим напряжениям $\sigma_{\phi z} = -\mu \partial_\rho f$, где $f = f^b + f^c$ и

$$f = \frac{-1}{2\pi} \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} b_I \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}_I|), \quad \mathcal{U}(s) \equiv \log\left(\frac{\gamma}{2}s\right) + K_0(s). \quad (396)$$

Потенциал f^b модифицируется внутри трубчатых областей поперечного размера $\simeq \kappa^{-1}$. При $\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}_I| \gg 1$, $\forall I$, в полном решении доминирует классический вклад f^b . Сумма $f^b + f^c$ стремится к константе, когда $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_I$, и известные особенности в полном напряжении $\sigma_i^b + \sigma_i^c$ не возникают. Стационарное решение описывает модифицированную винтовую дислокацию [113, 121], которая согласуется с градиентной упругостью [107, 108]. Градиентная упругость принадлежит к классу теорий обобщенного континуума, которые эффективно учитывают межатомные силы для объяснения поведения материалов на нано-масштабах [187].

После функционального интегрирования по e_{ij} , [134], статсумма (385) оценивается с помощью $\mathcal{Z} \simeq (\text{Det } \mathbf{A})^{-1} e^{-\beta \mathcal{W}}$, где эффективная энергия \mathcal{W} возникает при вычислении в точке стационарности, и наложено условие “электро-нейтральности” $\sum_{I=1}^{\mathcal{N}} b_I = 0$, чтобы избежать возникновения больших значений $\log R$ (R – радиус сечения). Энергия \mathcal{W} принимает приближенный вид, зависящий от положений дис-

локаций $\{\mathbf{y}_I\} \equiv \{\mathbf{y}_I\}_{1 \leq I \leq \mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= 2\mu \int \partial_1 e_2^P(\mathbf{x}) ((\Delta - \kappa^2)^{-1} - \Delta^{-1}) \partial_1 e_2^P(\mathbf{s}) d^2x d^2s, \\ &= \frac{-\mu}{4\pi} \sum_{I \neq J} b_I b_J \mathcal{U}(\kappa |\mathbf{y}_I - \mathbf{y}_J|), \quad \mathcal{U}(s) \equiv \log\left(\frac{\gamma}{2}s\right) + K_0(s), \end{aligned} \quad (397)$$

где расстояния в (397) отнесены к единичному параметру решетки кубического кристалла.

Рассматриваем положительные и отрицательные дислокации, расположенные в точках $\{\mathbf{y}_I^+\}_{1 \leq I \leq \mathcal{N}}$ и $\{\mathbf{y}_I^-\}_{1 \leq I \leq \mathcal{N}}$. По аналогии с двумерной электро-нейтральной плазмой положительных и отрицательных зарядов приходим к статсумме большого канонического ансамбля \mathbf{Z}_C :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_C &= \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{N}! \mathcal{N}!} \prod_{I=1}^{\mathcal{N}} \int d^2\mathbf{y}_I^+ \prod_{J=1}^{\mathcal{N}} \int d^2\mathbf{y}_J^- \exp \left[-2\beta \mathcal{N} \lambda + \right. \\ &\left. + \frac{\beta\mu}{4\pi} \left(\sum_{I,J} \mathcal{U}(\kappa |\mathbf{y}_I^+ - \mathbf{y}_J^+|) + \sum_{I,J} \mathcal{U}(\kappa |\mathbf{y}_I^- - \mathbf{y}_J^-|) - 2 \sum_{I,J} \mathcal{U}(\kappa |\mathbf{y}_I^+ - \mathbf{y}_J^-|) \right) \right], \end{aligned} \quad (398)$$

где $2\mathcal{N}$ – число дислокаций и λ – химпотенциал дислокации. Определим двухточечную корреляционную функцию компонент тензора напряжений $\langle \sigma_i^\#(\mathbf{x}_1) \sigma_j^\#(\mathbf{x}_2) \rangle_P$ (где $\#$ означает b или c) с помощью следующих функциональных средних:

$$\langle \sigma_i^\#(\mathbf{x}_1) \sigma_j^\#(\mathbf{x}_2) \rangle_P \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_o} \int \sigma_i^\#(\mathbf{x}_1) \sigma_j^\#(\mathbf{x}_2) e^{-\beta W} \mathcal{D}(\sigma_i^b, \sigma_i^c, u, e_i), \quad (399)$$

где W определяется так же, как и в (385) с использованием (387). Кроме того, \mathcal{Z}_o – статсумма (385) для бездефектного состояния при $\ell = 0$. Корреляторы определены по отношению к распределению дислокаций, заданному пластическими деформациями e_i^P ($i = 1, 2$).

Для вычисления (399) применим подход производящего функционала. Введем производящий функционал $\mathcal{G}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}]$ в виде функционального интеграла, параметризованного источниками $\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c$ и пластическим источником \mathcal{P} :

$$\mathcal{G}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}] = \int e^{-\beta W + i\beta \int (J_i^b \sigma_i^b + J_j^c \sigma_j^c) d^2x} \mathcal{D}(\sigma_i^b, \sigma_i^c, u, e_i). \quad (400)$$

Нормировка включена в меру, и $\mathbf{J}^\#$ означает две компоненты, $J_1^\#$ и $J_2^\#$ (как и \mathcal{P}).

Источник \mathcal{P} отмечен отдельно в (400), так как имеет другое значение. Корреляторы возникают следующим образом (ПРИЛОЖЕНИЕ III):

$$\langle \sigma_i^\#(\mathbf{x}_1) \sigma_j^\#(\mathbf{x}_2) \rangle_P = \lim_{\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c \rightarrow 0} \left(\mathcal{G}^{-1}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}_o^{\text{ph}}] \frac{(-i/\beta)^2 \delta^2}{\delta J_i^\#(\mathbf{x}_1) \delta J_j^\#(\mathbf{x}_2)} \mathcal{G}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}^{\text{ph}}] \right), \quad (401)$$

где \mathcal{P}^{ph} подставляется в $\mathcal{P} (= \mathbf{e}^P + \mathbf{C})$, чтобы выразить, что \mathcal{G} взят для конкретной фоновой конфигурации в терминах полей \mathbf{C} . Вычисление $\mathcal{G}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}^{\text{ph}}]$ приведено в Приложении. Кроме того, $\mathcal{P}_o^{\text{ph}} \equiv \mathcal{P}^{\text{ph}}|_{\mathbf{e}^P=0}$ и подразумевается нормировка на бездефектное состояние, как и в (399).

Получим корреляционную функцию $\langle \sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_j^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) \rangle_P$ физических напряжений $\sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_i^b(\mathbf{x}) + \sigma_i^c(\mathbf{x})$. Вычислим (400) сдвигами, уничтожающими члены линейные по $\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c$. Запишем ответ, зависящим от одного источника $J_i(\mathbf{x}) = J_i^b(\mathbf{x}) = J_i^c(\mathbf{x})$:

$$\mathcal{G}[\mathbf{J}, \mathbf{J} | \mathcal{P}^{\text{ph}}] = e^{-\mu\beta Q/2} \mathcal{G}[0, 0 | \mathcal{P}_o^{\text{ph}}], \quad (402)$$

$$Q \equiv \int \left(\partial_i \mathcal{J}_i \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta - \kappa^2} \right) \partial_k \mathcal{J}_k - \mathcal{J}_i \frac{\kappa^2}{\Delta - \kappa^2} \mathcal{J}_i + \Delta \mathcal{J}_i \frac{1}{\Delta - \kappa^2} \mathcal{J}_i \right) d^2x, \quad (403)$$

где $\mathcal{J}_i \equiv J_i - 2e_i^P$ и функции Грина Δ^{-1} , $(\Delta - \kappa^2)^{-1}$ являются операторами свертки.

Физические корреляционные функции принимают вид:

$$\langle \sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_j^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) \rangle_P = \lim_{\mathbf{J} \rightarrow 0} \left(\mathcal{G}^{-1}[\mathbf{J}, \mathbf{J} | \mathcal{P}_o^{\text{ph}}] \frac{\beta^{-2} \delta^2}{\delta J_i(\mathbf{x}_1) \delta J_j(\mathbf{x}_2)} \mathcal{G}[\mathbf{J}, \mathbf{J} | \mathcal{P}^{\text{ph}}] \right). \quad (404)$$

Используем (402) и (403) и получаем:

$$\langle \sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_j^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) \rangle_P = e^{-\beta\mathcal{W}} \left[\sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_j^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) - \frac{\mu}{2\pi\beta} \partial_{(\mathbf{x}_1)_i} \partial_{(\mathbf{x}_2)_j} \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \right], \quad (405)$$

где

$$\sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{\pi} \epsilon_{ik} \partial_{(\mathbf{x})_k} \int \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{s}|) \partial_1 e_2^P(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (406)$$

есть полное упругое напряжение произведенное выбранной дислокационной конфигурацией. Экспоненциальный множитель в (405) есть больцмановский вес набора дислокаций. Будем усреднять $\langle \sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_j^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) \rangle_P$ (405) по полжениям дислокаций.

Средний квадрат дипольного момента Рассмотрим большой канонический

ансамбль дислокаций в приближении *дипольной фазы*, которое соответствует связанным парам противоположных дислокаций в \mathbf{x}_I^\pm , $1 \leq I \leq \mathcal{N}$. Статсумма имеет вид:

$$\mathbf{Z}_{\text{dip}} = \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{N}!} \prod_{I=1}^{\mathcal{N}} \int d^2 \boldsymbol{\xi}_I \int d^2 \boldsymbol{\eta}_I \exp \left[-2\beta \mathcal{N} \lambda - \beta \left(\sum_{I=1}^{\mathcal{N}} w(\boldsymbol{\eta}_I) + \sum_{I < J} w_{IJ} \right) \right], \quad (407)$$

где $\beta w(\boldsymbol{\eta}) \equiv \mathcal{K} \mathcal{U}(\kappa \boldsymbol{\eta})$, $\mathcal{K} = \frac{\mu \beta}{2\pi}$. Здесь $w(\boldsymbol{\eta}_I)$ – энергия I -ого диполя с центром $\boldsymbol{\xi}_I = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_I^+ + \mathbf{x}_I^-)$ и плечом $\boldsymbol{\eta}_I = \mathbf{x}_I^+ - \mathbf{x}_I^-$; w_{IJ} – энергия взаимодействия I -ого и J -ого диполей:

$$\beta w_{IJ} \equiv -\mathcal{K} (\boldsymbol{\eta}_I, \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}_I}) (\boldsymbol{\eta}_J, \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}_J}) \mathcal{U}(\kappa |\boldsymbol{\xi}_I - \boldsymbol{\xi}_J|), \quad (408)$$

где $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}}$ – 2-вектор $(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)$ и $(\boldsymbol{\eta}_I, \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}_I})$ – скалярное произведение 2-векторов $\boldsymbol{\eta}_I$ и $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}_I}$.

Вычислим средний квадрат дипольного момента отдельной молекулы:

$$\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle = \frac{\int \exp(-\beta w(\boldsymbol{\eta})) \boldsymbol{\eta}^2 d\boldsymbol{\eta}}{\int \exp(-\beta w(\boldsymbol{\eta})) d\boldsymbol{\eta}}. \quad (409)$$

Среднее (409) было вычислено в [125] для электро-нейтрального газа частиц с зарядами $\pm q$, взаимодействующих через потенциал:

$$2\lambda - 2q_I q_J \log \frac{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J|}{a}, \quad |\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J| > a, \\ 0, \quad |\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J| < a,$$

где \mathbf{x}_I есть координата I^{th} заряда, и a – обрезание (т.е., диаметр частицы или параметр решетки). Более того, 2λ есть энергия необходимая, чтобы создать пару противоположных зарядов на расстоянии a . Энергия диполя выражается соотношением $\beta w(\boldsymbol{\eta}) = \mathcal{K} \log(|\boldsymbol{\eta}|/a)$, где $\mathcal{K} = 2\beta q^2$. Среднее (409) принимает вид [125]:

$$\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle = a^2 \frac{\mathcal{K} - 2}{\mathcal{K} - 4} = a^2 \frac{\beta q^2 - 1}{\beta q^2 - 2}, \quad (410)$$

при условии соблюдения соотношения $\beta q^2 > 2$. Таким образом, $\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle \approx a^2$ в пределе нулевой температуры, в то время как $\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle$ неограниченно растет при температуре T , принимающей значение вблизи критического значения T_c , которое определяется соотношением $\beta_c q^2 = 2$.

Двухчастичный потенциал, изучавшийся в [188, 189], выражается соотношением $\beta w(\boldsymbol{\eta}) = 2\pi\mathcal{K}\mathcal{U}(|\boldsymbol{\eta}|)$, где $\mathcal{K} = 2\beta q^2$ (здесь β – эффективный параметр, рассматриваемый как обратная температура), и функция $\mathcal{U}(\eta)$ регуляризована при малых значениях параметра $\eta \equiv |\boldsymbol{\eta}|$, $\mathcal{U}(\eta) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2 + \eta^2}{a^2}$. Тогда получаем из (409) при $\mathcal{K} > 2/\pi$:

$$\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle = a^2 \frac{1}{\pi\mathcal{K} - 2}. \quad (411)$$

Дипольный момент (411) строго меньше, чем $\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle$ (410) при $\mathcal{K} > 4$, т.е., во втором случае молекулы более компактны при достаточно низких температурах.

Средний квадрат дипольного момента молекулы принимает вид:

$$\kappa^2 \langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty \exp(-\mathcal{K}(\log \eta + K_0(\eta))) \eta^3 d\eta}{\int_0^\infty \exp(-\mathcal{K}(\log \eta + K_0(\eta))) \eta d\eta}, \quad (412)$$

где $\mathcal{K} = \mu b^2 \beta / 2\pi$. Интеграл в числителе (412) расходится при $\mathcal{K} < 4$. Диссоциация наиболее вероятна для пар дислокаций с единичными векторами Бюргерса, и поэтому фаза диполей не существует при температуре $T > T_c \equiv \frac{\mu}{8\pi}$.

В работах [107, 112, 114] было предложено представить радиус ядра дислокации r_c в следующем виде, $r_c \simeq \eta_b / \kappa$, где $\eta_b = 4.0$ [107], $\eta_b = 6.0$ [114], или $\eta_b = 10.0$ [112]. В свою очередь, параметр κ^{-1} был выражен в терминах межатомного расстояния a следующим образом: $\kappa^{-1} = 0.25 a$ [107], $\kappa^{-1} = 0.399 a$ [106, 114]. Например, $r_c \approx a$ в соответствии с [107], и $r_c \approx 2.4a$ в соответствии с [106, 114]. Представим отношение (412) при значении \mathcal{K} близком к своему “критическому” значению следующим

образом:

$$\langle \eta^2 \rangle \simeq \frac{2\eta_b^2}{\kappa^2(1 + 2\eta_b^2 A^{-1})} \frac{1}{\mathcal{K} - 4}, \quad A^{-1} \equiv \int_0^{\eta_b} \exp(-4(\log \eta + K_0(\eta))) \eta \, d\eta, \quad (413)$$

где η_b и κ выбраны в соответствии с [106], [107] или [114]. Более того, для $\mathcal{U}(\eta)$ (396) может быть получена двусторонняя оценка путем подбора соответствующих пробных функций. Подобные оценки позволяют продемонстрировать, что зависимость $\langle \eta^2 \rangle$ (412) от растущего значения \mathcal{K} характеризуется двойным неравенством:

$$\frac{1}{\mathcal{K}^2} < \kappa^2 \langle \eta^2 \rangle < \frac{1}{\mathcal{K}}. \quad (414)$$

Потенциал $\mathcal{U}(\eta) = \frac{1}{2} \log(1 + \eta^2)$ может быть использован в (412) вместо функции \mathcal{U} (396) для сравнения размеров дипольных моментов. В соответствии с оценкой (414), для потенциала \mathcal{U} (396) диполи более компактны при достаточно низких температурах.

Усреднение корреляционных функций (399) по положениям диполей дает среднее:

$$\begin{aligned} \langle \langle \sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_j^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) \rangle \rangle &= \mathbf{Z}_{\text{dip}}^{-1} \sum' \langle \sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_j^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) \rangle_P \\ &= \frac{-\mu}{2\pi\beta} \partial_{(\mathbf{x}_1)_i} \partial_{(\mathbf{x}_2)_j} \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) + \mathbf{Z}_{\text{dip}}^{-1} \sum' \sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_j^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) e^{-\beta \mathcal{W}_{\text{dip}}}, \end{aligned} \quad (415)$$

где \sum' означает суммирование по числу и положениям диполей, \mathbf{Z}_{dip} – статсумма в дипольном приближении. При вычислении (415) суммирование по положениям диполей заменяется интегрированием. Основным при этом средством является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 *Определим дифференциальный оператор $(D_\kappa)_l \equiv \prod_{n=0}^{l-1} (D_\kappa + n)$, $l \geq 1$, где D_κ обозначает $\frac{-\kappa}{2} \frac{d}{d\kappa}$, и положим $(D_\kappa)_0 \equiv 1$.*

A) Тогда имеет место следующий интеграл:

$$\int K_0(\kappa|\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|) (D_\kappa)_l K_0(\kappa|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2|) d^2 \boldsymbol{\xi} = \frac{2\pi}{\kappa^2(l+1)} (D_\kappa)_{l+1} K_0(\kappa|\Delta \mathbf{x}|), \quad l \geq 0, \quad (416)$$

где $\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ и интегрирование идет по \mathbb{R}^2 .

В) Интегральная формула (416) приводит к следующему интегралу:

$$\int (\partial_{\xi} \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|), \partial_{\xi} (\mathbf{D}_{\kappa})_l K_0(\kappa|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2|)) d^2 \boldsymbol{\xi} = \frac{-2\pi}{l+1} (\mathbf{D}_{\kappa})_{l+1} K_0(\kappa|\Delta \mathbf{x}|), \quad (417)$$

где принято обозначение $(\partial_{\xi} \cdot, \partial_{\xi} \cdot)$ для скалярного произведения 2-векторов $\partial_{\xi} = (\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2})$, и функция \mathcal{U} определена в (396).

Доказательство

А) Сначала рассмотрим (416) при $l = 0$:

$$\int K_0(\kappa|\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|) K_0(\kappa|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2|) d^2 \boldsymbol{\xi} = \quad (418)$$

$$= \frac{2}{\kappa^2} \int_0^{\infty} ds s K_0(s) \int_0^{\pi} d\varphi K_0(\sqrt{s^2 + a^2 - 2as \cos \varphi}) = \quad (419)$$

$$= \frac{\pi}{\kappa} |\Delta \mathbf{x}| K_1(\kappa|\Delta \mathbf{x}|) = \frac{2\pi}{\kappa^2} \mathbf{D}_{\kappa} K_0(\kappa|\Delta \mathbf{x}|), \quad (420)$$

где $a \equiv \kappa|\Delta \mathbf{x}|$. Интегралы (419) по φ (внутренний) и по s сводятся к стандартным, [191], и в результате возникает ответ (420). Соотношение (416) может быть проверено при $l = 1$ с помощью шагов аналогичным тем, которые ведут от (418) к (420). При $l = 2$ непосредственное вычисление не проходит.

В ПРИЛОЖЕНИИ IV приведены вычисления, показывающие, как можно получить (416) непосредственно для нескольких первых l . Одновременно, возникает предположение о том, что (416) имеет место для произвольных l . Перейдем к доказательству представления (416) по индукции, используя (420) как базу индукции. Введем сокращенные обозначения для операции свертки, используемой в (416) и (417). Например, соотношение (416) принимает вид:

$$(K_0 * (\mathbf{D}_{\kappa})_l K_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{2\pi}{\kappa^2(l+1)} (\mathbf{D}_{\kappa})_{l+1} K_0(\kappa|\Delta|). \quad (421)$$

Чтобы получить требуемое соотношение, свернем (421) с K_0 . Учитывая ассоциативность свертки и принимая во внимание базу индукции (420), получаем:

$$\frac{2\pi}{\kappa^2} (\mathbf{D}_{\kappa} K_0 * (\mathbf{D}_{\kappa})_l K_0) = \frac{2\pi}{\kappa^2(l+1)} (K_0 * (\mathbf{D}_{\kappa})_{l+1} K_0). \quad (422)$$

Преобразуем левую часть (422):

$$D_\kappa K_0 * (D_\kappa)_l K_0 = D_\kappa \left(\frac{2\pi}{\kappa^2(l+1)} (D_\kappa)_{l+1} K_0 \right) - K_0 * D_\kappa (D_\kappa)_l K_0 \quad (423)$$

$$= \frac{2\pi}{\kappa^2(l+1)} (D_\kappa + 1) (D_\kappa)_{l+1} K_0 - K_0 * D_\kappa (D_\kappa)_l K_0. \quad (424)$$

Мы использовали (421) в строке (423) и пришли к (424), так как $D_\kappa(\frac{1}{\kappa^2}) = \frac{1}{\kappa^2}$. Далее, в правой части (422) учтем, что $(D_\kappa)_{l+1} = (D_\kappa + l)(D_\kappa)_l$. В результате, из соотношения (422) получаем следующее выражение:

$$\frac{2\pi}{\kappa^2} (D_\kappa + 1) (D_\kappa)_{l+1} K_0 = K_0 * ((l+1)D_\kappa + D_\kappa + l) (D_\kappa)_l K_0. \quad (425)$$

В качестве следующего шага учтем операторное тождество:

$$(l+1)D_\kappa + D_\kappa + l = (l+2)(D_\kappa + l) - l(l+1),$$

и получим из (425):

$$\frac{2\pi}{\kappa^2} (D_\kappa + 1) (D_\kappa)_{l+1} K_0 = (l+2)(K_0 * (D_\kappa)_{l+1} K_0) - \frac{2\pi}{\kappa^2} l (D_\kappa)_{l+1} K_0 \quad (426)$$

(для получения второго слагаемого в правой части (426) снова используется (422)).

Соотношение (426) эквивалентно соотношению (421), в котором l заменили на $l+1$. \square

В) Интеграл (417) вычисляется вспомогательным предельным приемом: заменяем $\mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|)$ на $\mathcal{U}(\rho|\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|)$ выносим оператор $(D_\kappa)_l$ из под знака интегрирования.

Пусть область интегрирования в (417) представляет собой диск достаточно большого радиуса R с вырезанными дисками малого радиуса ε в точках \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 . Воспользуемся

формулой Грина для интеграла по многосвязной области. После применения форму-

лы Грина устремим $R \rightarrow \infty$, а радиусы малых дисков – к нулю, $\varepsilon \rightarrow 0$, и снова введем

$(D_\kappa)_l$ под знак интегрирования с последующим переходом $\rho \rightarrow \kappa$. Окончательно, с

учетом (416) получаем (417). \square

Вычисление (415) дает [134]:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_i(\mathbf{x}_1) \sigma_j(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle &= \frac{-\mu}{2\pi\beta} \partial_{(\mathbf{x}_1)_i} \partial_{(\mathbf{x}_2)_j} \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ &+ \frac{\mu^2}{4\pi^2} \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \partial_{(\mathbf{x}_1)_k} \partial_{(\mathbf{x}_2)_l} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_{\text{dip}}} \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty} \frac{F_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\mathcal{N}!} \right), \end{aligned} \quad (427)$$

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\equiv \int e^{-2\beta\mathcal{N}\Lambda - \beta \sum_I w(\eta_I)} \prod_{P<Q} e^{-\beta w_{PQ}} \\ &\times \left(\sum_{K,L=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{U}_K^{+-}(\mathbf{x}_1) \mathcal{U}_L^{+-}(\mathbf{x}_2) \right) \prod_{I=1}^{\mathcal{N}} d^2 \boldsymbol{\xi}_I d^2 \boldsymbol{\eta}_I \end{aligned} \quad (428)$$

где $\mathcal{N} \geq 1$, $F_0 = 1$ и интегрирование по положениям диполей такое же, как и в (407). Далее, $\mathcal{U}_K^{+-}(\mathbf{x})$ (428) есть потенциал напряжений K -ого диполя, наблюдаемого в точке \mathbf{x} , и приближенное выражение при $|\boldsymbol{\eta}_K| \ll |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_K|$ имеет вид:

$$\mathcal{U}_K^{+-}(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}_K^+|) - \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}_K^-|) \approx -(\boldsymbol{\eta}_K, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}}) \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_K|), \quad (429)$$

где $\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ и (\cdot, \cdot) есть скалярное произведение 2-векторов. При достаточно низких температурах диполи компактны: $\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle \ll \kappa^{-2}$. При вычислении следуем [188, 189] и раскладываем $e^{-\beta w_{PQ}}$ (428) в ряд. Нетривиальные вклады во второй член в (427) выражаются через \tilde{n} -дипольные интегралы, и мы получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_i(\mathbf{x}_1) \sigma_j(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle &\approx \frac{-\mu}{2\pi\beta} \partial_{(\mathbf{x}_1)_i} \partial_{(\mathbf{x}_2)_j} \mathcal{U}(\kappa|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ &+ \frac{\mu^2}{4\pi^2} \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \partial_{(\mathbf{x}_1)_k} \partial_{(\mathbf{x}_2)_l} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \mathcal{I}_{\tilde{n}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (430)$$

Слагаемые $\mathcal{I}_{\tilde{n}} \equiv \mathcal{I}_{\tilde{n}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ в (430) принимают вид:

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int e^{-\beta(2\Lambda + w(\eta))} \mathcal{U}_{\boldsymbol{\eta}}^{+-}(\mathbf{x}_1) \mathcal{U}_{\boldsymbol{\eta}}^{+-}(\mathbf{x}_2) d^2 \boldsymbol{\xi} d^2 \boldsymbol{\eta}, \quad (431)$$

$$\mathcal{I}_{\tilde{n}} \equiv \int e^{-\beta(4\Lambda + w_1 + w_{\tilde{n}})} \mathcal{U}_1^{+-}(\mathbf{x}_1) w_{1,\tilde{n}}^{(\tilde{n}-2)} \mathcal{U}_{\tilde{n}}^{+-}(\mathbf{x}_2) d^2 \boldsymbol{\xi}_1 d^2 \boldsymbol{\eta}_1 d^2 \boldsymbol{\xi}_{\tilde{n}} d^2 \boldsymbol{\eta}_{\tilde{n}}, \quad \tilde{n} > 1, \quad (432)$$

где $w_I \equiv w(\eta_I)$, и $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\eta}}^{+-}(\mathbf{x}_{1,2})$ определяется (429). Слагаемое \mathcal{I}_1 (431) соответствует свободным диполям. Диполь-дипольное взаимодействие приводит к слагаемым $\mathcal{I}_{\tilde{n}}$ (432),

соответствующим \tilde{n} -дипольным кластерам. Ядро $w_{1,\tilde{n}}^{(\tilde{n}-2)}$ (432) для $\tilde{n} > 2$ выражается рекурсивным соотношением:

$$w_{1,I+2}^{(I)} = \int e^{-\beta(2\Lambda+w_{I+1})} w_{1,I+1}^{(I-1)} w_{I+1,I+2}^{(0)} d^2\xi_{I+1} d^2\boldsymbol{\eta}_{I+1}, \quad 1 \leq I \leq \tilde{n} - 2, \quad (433)$$

где $w_{JK}^{(0)} \equiv -\beta w_{JK}$ и w_{JK} дается (408). Ядро $w_{1,\tilde{n}}^{(\tilde{n}-2)}$ содержит усреднение по положениям $(\tilde{n} - 2)$ “промежуточных” диполей.

Вычислим (432), используя (429), (433), и опираясь на **ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6**:

$$\mathcal{I}_{\tilde{n}} = \mathcal{K}^{\tilde{n}-1} (-\pi \langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle \bar{N})^{\tilde{n}} \left[\mathcal{U}(\kappa |\Delta \mathbf{x}|) + \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{l!} (\mathbf{D}_{\kappa})_l K_0(\kappa |\Delta \mathbf{x}|) \right]. \quad (434)$$

При этом интегрирования по $\boldsymbol{\eta}$ выражены с помощью среднего квадрата дипольного момента $\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle$ [124, 188]:

$$\int e^{-2\beta\Lambda - \mathcal{K}\mathcal{U}(\kappa\boldsymbol{\eta})} \eta_i \eta_j d^2\boldsymbol{\eta} = \frac{\delta_{ij}}{2} \langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle \bar{N}, \quad (435)$$

где \bar{N} есть средняя плотность диполей и $\langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle$ есть (412). Интеграл (412) расходится при $\mathcal{K} < 4$, и поэтому дипольная фаза не существует при температуре $T > T_c \equiv \frac{\mu}{8\pi}$.

Из определения оператора $(\mathbf{D}_{\kappa})_l$ видно, что при фиксированном \tilde{n} можно перегруппировать выражение $\mathcal{U}_{1,2}^{(\tilde{n})}$ (434) в виде многочлена по степеням \mathbf{D}_{κ} . Тогда $\mathcal{I}_{\tilde{n}}$ принимает форму:

$$\mathcal{I}_{\tilde{n}} = \frac{(-\beta\mu d)^{\tilde{n}}}{\mathcal{K}} \left(\mathcal{U} + \sum_{p=1}^{\tilde{n}} a_p(\tilde{n}) (\mathbf{D}_{\kappa})^p K_0 \right), \quad (436)$$

где $\beta\mu d \equiv \pi\mathcal{K} \langle \boldsymbol{\eta}^2 \rangle \bar{N}$ и d пропорционально средней площади, занимаемой диполями.

Непосредственно можно получить несколько первых коэффициентов $a_p \equiv a_p(\tilde{n})$:

$$a_1 = \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{l}, \quad a_2 = \sum_{l=2}^{\tilde{n}} \frac{1}{l} \left(\sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{k} \right), \dots, \quad a_{\tilde{n}-1} = \frac{\tilde{n}+1}{2(\tilde{n}-1)!}, \quad a_{\tilde{n}} = \frac{1}{\tilde{n}!}. \quad (437)$$

Например, $a_1 = 1$ и $a_l = 0$, $l > 1$, при $\tilde{n} = 1$. В общем случае, нетривиальность $a_l(\tilde{n})$ требует соблюдения $\tilde{n} \geq l$. В результате, вычисляя суммы (437) с помощью

[190], приходим к перестроенному ряду $\mathcal{I} \equiv \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \mathcal{I}_{\tilde{n}}$ в виде разложения пр степеням $(D_{\kappa})^p K_0$:

$$\mathcal{I} = \frac{-1}{\mathcal{K}} \left[\mathcal{U} \frac{\beta\mu d}{1 + \beta\mu d} + D_{\kappa} K_0 \frac{\log(1 + \beta\mu d)}{1 + \beta\mu d} - (D_{\kappa})^2 K_0 \frac{\log^2(1 + \beta\mu d)}{2(1 + \beta\mu d)} + \dots \right]. \quad (438)$$

Рассмотрим зависимость $\mathcal{I}_{\tilde{n}}$ (434) от $\kappa|\Delta\mathbf{x}|$. Поведение дальнедействующего вклада \mathcal{U} при $\kappa|\Delta\mathbf{x}| \rightarrow 0$ определяется функцией K_0 , которая сокращает логарифмическую сингулярность. Вклады $D_{\kappa} D_{\kappa} \dots D_{\kappa} K_0$ затухают экспоненциально при больших $\kappa|\Delta\mathbf{x}|$ и исчезают при $\kappa|\Delta\mathbf{x}| \rightarrow 0$, за исключением $D_{\kappa} K_0 = \frac{\kappa|\Delta\mathbf{x}|}{2} K_1(\kappa|\Delta\mathbf{x}|)$, который постоянен при $\kappa|\Delta\mathbf{x}| \rightarrow 0$. Третий член в (438) затухает при $\kappa|\Delta\mathbf{x}| \rightarrow 0$ быстрее, чем $\mathcal{U}(\kappa|\Delta\mathbf{x}|)$ так как $(D_{\kappa})^2 K_0(\kappa|\Delta\mathbf{x}|) = \frac{(\kappa|\Delta\mathbf{x}|)^2}{4} K_0(\kappa|\Delta\mathbf{x}|)$. Далее, $\log(1 + \beta\mu d) < 1$ и мы пренебрегаем третьим и старшими членами, и приходим к приближенному выражению:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_i(\mathbf{x}_1) \sigma_j(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle &= \frac{-\mu}{2\pi\beta} \left(\partial_{(\mathbf{x}_1)_i} \partial_{(\mathbf{x}_2)_j} \mathcal{U}(\kappa|\Delta\mathbf{x}|) + \right. \\ &\left. + \epsilon_{ik}\epsilon_{jl} \partial_{(\mathbf{x}_1)_k} \partial_{(\mathbf{x}_2)_l} \frac{\beta\mu d \mathcal{U}(\kappa|\Delta\mathbf{x}|) + \log(1 + \beta\mu d) D_{\kappa} K_0(\kappa|\Delta\mathbf{x}|)}{1 + \beta\mu d} \right), \end{aligned} \quad (439)$$

где $\beta\mu d \equiv \pi\mathcal{K}\langle\eta^2\rangle\bar{N} < 1$ (d пропорционально средней площади диполей).

Перенормированный модуль сдвига μ_{ren} выражается с помощью коррелятора (415):

$$\frac{1}{\mu_{\text{ren}}} \equiv \frac{\beta}{\mu^2 \mathcal{S}} \sum_{i,k=1,2} \iint \langle\langle \sigma_i^{\text{tot}}(\mathbf{x}_1) \sigma_k^{\text{tot}}(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2, \quad (440)$$

где \mathcal{S} – площадь сечения. Подстановка (439) в (440) приводит к закону перенормировки [134]:

$$\frac{\mu}{\mu_{\text{ren}}} = \frac{(1 + 2\beta\mu d)\mathcal{C}_1(\kappa R) - \log(1 + \beta\mu d)\mathcal{C}_D(\kappa R)}{1 + \beta\mu d}, \quad (441)$$

где функции $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1(\kappa R)$ и $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}_D(\kappa R) = \mathcal{C}_2(\kappa R) - \mathcal{C}_1(\kappa R)$ выражаются через функции Бесселя,

$$\mathcal{C}_1(\kappa R) = 1 - 2K_1(\kappa R)I_1(\kappa R), \quad (442)$$

$$\mathcal{C}_2(\kappa R) = 2 - 2I_1(\kappa R)(K_1(\kappa R) - \kappa R K_1'(\kappa R)),$$

где $K_1'(z) = \frac{d}{dz} K_1(z)$. Функции (442) определяют зависимость μ_{ren} (441) от отношения R/κ^{-1} радиуса цилиндра к радиусу ядра дислокации. Функции \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_D положительны и меньше единицы, их поведение при больших z таково: $\mathcal{C}_1(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{3}{8z^3} - \dots$ и $\mathcal{C}_D(z) = \frac{1}{2z} - \frac{9}{16z^3} + \dots$. В обоих случаях, \mathcal{C}_1 и $\mathcal{C}_D \simeq \mathcal{O}(z^2 \log z)$ при $z \rightarrow 0$.

В пределе $\kappa R \rightarrow \infty$ соотношение (441) сводится к закону перенормировки для обычных дислокаций, описываемых напряжениями $\sigma_i^b(\mathbf{x})$. Корреляционная функция $\langle\langle \sigma_i^b(\mathbf{x}_1) \sigma_k^b(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle$ совпадает с правой стороной (439) при $\kappa|\Delta\mathbf{x}| \gg 1$. Получаем:

$$\sum_k \langle\langle \sigma_k^b(\mathbf{x}_1) \sigma_k^b(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle = \frac{\mu(1 + 2\beta\mu d)}{\beta(1 + \beta\mu d)} \overset{(2)}{\delta}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \quad (443)$$

Подставляя (443) в (440) получаем:

$$\frac{1}{2} < \frac{\tilde{\mu}_{\text{ren}}}{\mu} = \frac{1 + \beta\mu d}{1 + 2\beta\mu d} < 1, \quad (444)$$

где $\tilde{\mu}_{\text{ren}}$ – перенормированный модуль сдвига в стандартном случае. Ясно, что (444) возникает из (441) при $\kappa R \rightarrow \infty$. Закон (444) согласуется с результатом работы [133], полученным для дислокационных петель в трехмерном твердом теле.

Определим область изменения κR . Требование $0 < \mathcal{C}_1 < 1$ означает, что μ_{ren}/μ должно характеризоваться двойным неравенством, аналогичным (444):

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2\mathcal{C}_1} < \frac{\mu_{\text{ren}}}{\mu} < 1. \quad (445)$$

Неравенство (445) требует $\mathcal{C}_1 > \frac{1}{2}$, что соблюдается при $\kappa R \gtrsim 1.78$. Далее, внешний диаметр нанотрубок от нанометров до десятков нанометров. Поэтому положим, что соблюдается $R \lesssim 10a$, где a – шаг решетки. В следующую очередь, величина $\frac{1}{\kappa}$ оценивается $\frac{1}{\kappa} \simeq 0.25a$, [107], либо как $\frac{1}{\kappa} \simeq 0.4a$, [114]. Тогда верхняя граница для κR определяется как $\kappa R \lesssim 40$ или как $\kappa R \lesssim 25$, соответственно.

Соотношение (441) позволяет выразить перенормированный модуль сдвига как функцию температуры, $\mu_{\text{ren}} = \mu_{\text{ren}}(T)$. Температура плавления T_c возникает из $\mu\beta_c =$

8π (см. (412)), и мы получаем $\mu_{\text{ren}}(T)$ вблизи T_c при $T < T_c$:

$$\frac{\mu_{\text{ren}}(T)}{\mu_{\text{ren}}(T_c^-)} \approx 1 + \left(\frac{T}{T_c} - 1\right) h(\kappa R, 8\pi d), \quad h(z, w) \equiv \frac{w g(z, w)}{(1+w)(1+2w)}, \quad (446)$$

$$g(z, w) \equiv \frac{1 - \mathcal{C}^*(z)(1 - \log(1+w))}{1 - \mathcal{C}^*(z) \frac{\log(1+w)}{1+2w}}, \quad \mathcal{C}^*(z) \equiv \frac{\mathcal{C}_D(z)}{\mathcal{C}_1(z)},$$

где выражение для $h(z, w)$ имеет место при $z > \epsilon_0 \equiv 0.001$, когда $\mathcal{C}^*(z)$ меньше единицы и предельное значение $\mathcal{C}_0^* \equiv \lim_{z \searrow \epsilon_0} \mathcal{C}^*(z)$ удовлетворяет $0.75 < \mathcal{C}_0^* < 0.95$.

В пределе $z \rightarrow \infty$, $\mathcal{C}^*(z)$ стремится к 0 и закон (446) соответствует сингулярным дислокациям. Далее, $\mu_{\text{ren}}(T_c^-)$ в (446) – предельное значение $\mu_{\text{ren}}(T)$ при $T \nearrow T_c$ (μ_{ren} – нуль выше точки плавления). Сравнение $\mu_{\text{ren}}(T_c^-)$ с $\tilde{\mu}_{\text{ren}}(T_c^-)$ записывается, (441), в виде:

$$\frac{\mu_{\text{ren}}(T_c^-)}{T_c} = \frac{8\pi(1 + 8\pi d)}{(1 + 16\pi d)\mathcal{C}_1 - \log(1 + 8\pi d)\mathcal{C}_D} > \frac{\tilde{\mu}_{\text{ren}}(T_c^-)}{T_c} = \frac{8\pi(1 + 8\pi d)}{1 + 16\pi d}. \quad (447)$$

Соотношение (447) показывает, что $\mu_{\text{ren}}(T_c^-)/T_c$ больше не кратно π при $d \ll 1$ (и, формально, $d \gg 1$), как это происходит при $\tilde{\mu}_{\text{ren}}(T_c^-)/T_c$ в тех же пределах. В предельных случаях именно коэффициент $\frac{1}{\mathcal{C}_1}$ определяет зависимость $\mu_{\text{ren}}(T_c^-)/T_c$ от κR .

Зависимость от размерного параметра κR в (446) и (447) выявляет проявление нестандартного дислокационного решения в выражении для модуля сдвига вблизи плавления. Напомним, что перенормированный модуль Юнга стремится к 16π при $T \rightarrow T_c^-$ в соответствии с теорией [128–131]. В работе [193] анонсируется экспериментальное подтверждение данного факта для случая двумерных коллоидных кристаллов. Предлагаемый же подход демонстрирует, что предельное значение перенормированного модуля сдвига отклоняется от кратности π благодаря несингулярному характеру дислокаций:

$$\frac{\mu_{\text{ren}}(T_c^-)}{T_c} \approx \frac{8\pi}{\mathcal{C}_1(\kappa R)} \xrightarrow{\kappa R \gg 1} 8\pi, \quad d \ll 1. \quad (448)$$

В перенормировке (441) учитываются дальнедействующие корреляции между диполями. Зависимость μ_{ren} от безразмерного параметра κR демонстрирует, что учет конеч-

ности дислокационных ядер модифицирует закон перенормировки. При сравнимых размерах сечений и ядер, $R \gtrsim \kappa^{-1}$, оценки (446), (447) и (448) могут быть протестированы в экспериментах с нано-трубками и графеновыми пленками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании единообразного подхода получены следующие новые научные результаты:

Для XXZ модели Гейзенберга на конечной цепочке (пределы нулевой и бесконечной анизотропии) вычислены форм-факторы операторов ферромагнитной струны и доменной стенки. Показано, что эти форм-факторы, будучи вычисленными в специальной q -параметризации, связаны с производящими функциями плоских разбиений и решеточных самоизбегающих путей. Получены выражения для температурных корреляционных функций типа *выживания ферромагнитной струны* и *выживания доменной стенки*. Для достаточно длинной цепочки и умеренного числа частиц (переворачиваемых спинов) корреляторы связаны с матричными интегралами теории случайных матриц. При низкой температуре асимптотики корреляторов принимают вид произведения статистической суммы гауссова унитарного ансамбля на квадрат чисел плоских разбиений в ящике.

Вычисление форм-факторов и корреляционных функций существенно опирается на соотношения, возникающие при нахождении определителя блочной матрицы, так называемого, “куперберговского типа”. Вычисленный определитель блочной матрицы возникает при выводе формулы для форм-фактора оператора доменной стенки в q -параметризации. При вычислении данного определителя возникает некоторый

q -биномиальный определитель, являющийся производящей функцией плоских разбиений в ящике. При этом в пределе $q \rightarrow 1$ возникает биномиальный определитель, связанный с интерпретацией полученных форм-факторов в терминах самоизбегающих путей на решетке (связь со случайными блужданиями), а построенные форм-факторы приводят к формулам типа Мак-Магона для плоских укладок в ящике.

Развит подход, связанный с функциональным интегрированием по фермионным переменным с квазипериодической зависимостью от мнимого времени. Подход применяется к корреляторам третьих компонент спинов XU цепочки Гейзенберга. Для $XX0$ цепочки Гейзенберга на периодической цепочке рассматриваются корреляционные функции, связанные с перечислением случайных блужданий недружественных пешеходов. В пределе, когда длина цепочки достаточно велика, с помощью функционального интегрирования получен коррелятор, являющийся производящей функцией решеточных путей. Получены асимптотические оценки для числа путей пешехода, перемещающегося из некоторого фиксированного узла в другой достаточно удаленный узел решетки в среде с переменным числом недружественных соседей.

Показано, что двухточечная температурная корреляционная функция для слабонеоднородного бозе-газа с отталкиванием в гармоническом потенциале убывает степенным образом в случае стремящейся к нулю температуры и растущего объема. Для критического индекса, характеризующего убывание, найдена зависимость от пространственных и температурных аргументов.

Для тока частиц в слабонеоднородной сверхтекучей A -фазе гелия-3 получены в лондоновском пределе поправки квадратичные и поправки логарифмические третьей степени по градиентам параметра порядка, а также определены соответствующие численные коэффициенты.

Получено новое интегральное представление николсоновского типа для произве-

дения двух функций параболического цилиндра с совпадающими значками и противоположными аргументами.

С помощью функционального интегрирования получено эффективное действие для антиферромагнитной фазы трехзонной двумерной модели Хаббарда с отталкиванием с заполнением $\frac{1}{3}$ (один электрон на элементарную ячейку). Рассмотрены области как вблизи критической температуры, так и вблизи нулевой температуры. Получены ветви спектра коллективных бозе-возбуждений в антиферромагнитной фазе трехзонной модели Хаббарда. Вблизи нулевой температуры получена голдстоуновская ветвь, которая устойчива по отношению к распаду на большее число возбуждений. Соотношения, полученные в рамках теории возмущений для случая слабого отталкивания, согласуются с соотношениями, характеризующими промежуточную область $t \sim \mathcal{U}$ и могут, в свою очередь, служить для проверки перехода из промежуточной области к пределу слабой связи.

Предложена трансляционно-калибровочная полевая модель кристаллических дислокаций, характеризующихся ядром конечного радиуса. Для напряжений и деформаций внутри ядер существенны нелинейные эффекты, и в этой связи получены квадратичные поправки к тензору напряжений винтовой дислокации, как вне, так и внутри ядра. Полученные поправки модифицируют известные “классические” соотношения и демонстрируют зависимость от физических параметров (модулей упругости) среды. Полученные поправки применимы вблизи ядра дефекта, и на достаточном удалении от дислокации переходят в квадратичные поправки для поля напряжений стандартного подхода. Вместо радиуса ядра задаваемого априорно (и оцениваемого по порядку величины), возникают три параметра размерности длины, которые характеризуют структуру ядра дефекта в рамках предложенной модели (выбранного лагранжиана для энергии ядра дислокации). Новые радиусы возникают как функ-

ции, зависящие от модулей упругости второго и третьего порядков. Иными словами, они определяются упругими характеристиками среды и должны иметь наблюдаемые проявления.

В качестве “очередного” шага, на базе предложенной модели несингулярных дислокаций развит термодинамический подход, который позволяет вычислять поправки в перенормировку упругих модулей. Конкретно, рассмотрены диполи винтовых дислокаций в упругом цилиндре. Вычисляется корреляционная функция в дипольном представлении кулоновского газа со сглаженным взаимодействием. Модуль сдвига $\mu_{\text{ген}}$ получен для взаимодействующих диполей, и возникающие термодинамические выражения, (441), (446) и (447), приобретают зависимость от отношения радиуса цилиндра R к масштабу ядра $\frac{1}{\kappa}$. Вычислена модификация модуля сдвига, вызванная наличием у модифицированных винтовых дислокаций области ядра. Нанозифика предположительно может допустить проверку предложенного подхода (например, соотношений (448)). Полученная модификация закона перенормировки имеет проявления, которые допускают экспериментальную верификацию. Приложение подхода представляет интерес для многослойных нанотрубок и кристаллических пленок.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

В данном ПРИЛОЖЕНИИ содержится доказательство утверждений, выраженных соотношениями (105) и (106). Доказательство основано на формуле Бине–Коши [143]. Начнем с замечаний о q -исчислении [194] и симметрических функциях [30]. Пусть q -число $[n]$ есть q -аналог положительного целого $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$[n] \equiv \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad (\text{III.1})$$

и q -факториал $[n]!$:

$$[n]! \equiv [1][2] \dots [n], \quad [0]! \equiv 1. \quad (\text{III.2})$$

С помощью (III.1) и (III.2) определяем q -биномиальный коэффициент $\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} \equiv \frac{[N][N-1] \dots [N-r+1]}{[r]!} = \frac{[N]!}{[r]![N-r]!}. \quad (\text{III.3})$$

В пределе $q \rightarrow 1$, q -биномиальный коэффициент $\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}$ становится биномиальным ко-

эффициентом $\binom{N}{r}$. Существуют два аналога формулы Паскаля для q -биномиальных

коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + q^r \begin{bmatrix} N-1 \\ r \end{bmatrix}, \quad (\text{III.4})$$

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} = q^{N-r} \begin{bmatrix} N-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N-1 \\ r \end{bmatrix},$$

где $1 \leq r \leq N-1$. В свою очередь, существует следующее тождество для q -биномиальных

коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} N + N' \\ r \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{\min(r,N)} q^{(N-j)(r-j)} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N' \\ r-j \end{bmatrix}. \quad (\text{III.5})$$

Теперь определим *элементарные симметрические функции* $e_r = e_r(\mathbf{x})$, зависящие от N переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$e_r \equiv \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}. \quad (\text{III.6})$$

Функции e_r (III.6) возникают как коэффициенты в произведении:

$$(1 + tx_1)(1 + tx_2) \dots (1 + tx_N) = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + \dots + e_N t^N.$$

Специальные обозначения, L_r and R_r , для e_r при $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{q}/q$, соответственно, соответствуют: $R_r \equiv e_r(\mathbf{q}/q)$ и $L_r \equiv e_r(\mathbf{q})$. Известны следующие значения [30]:

$$R_r = q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}, \quad L_r = q^{r(r+1)/2} \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}, \quad (\text{III.7})$$

где используются q -биномиальные коэффициенты (III.3).

Рассмотрим функции Шура (26) которые зависят от слабо убывающих разбиений $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathcal{P} \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$, где $\mathcal{P} \equiv P - N + 1$. *Сопряженное разбиение* $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ есть разбиение, диаграмма которого является транспонированием диаграммы Юнга, представляющей $\boldsymbol{\lambda}$, [30]. Разбиение $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ состоит из \mathcal{P} частей, $N \geq \bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2 \geq \dots \geq \bar{\lambda}_{\mathcal{P}} \geq 0$, и каждая часть $\bar{\lambda}_k$, $\forall k$, равна количеству элементов в k -ой строке диаграммы (Рис. 2). Соответствующее строгое разбиение $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ задается $\bar{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{P}}$. Части $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ таковы: $P \geq \bar{\mu}_1 > \bar{\mu}_2 > \dots > \bar{\mu}_{\mathcal{P}} \geq 0$. Сопряженные разбиения позволяют выразить функции Шура (26) в терминах элементарных симметрических функций (III.6) [30]:

$$S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) = \det(e_{\bar{\lambda}_i - i + j}(\mathbf{x}))_{1 \leq i, j \leq \mathcal{P}}. \quad (\text{III.8})$$

Чтобы охватить утверждения (105) и (106) мы используем (51) и (53), чтобы выразить $\det \bar{T}$ в q -параметризации (100):

$$\det \bar{T} = q^{\frac{L}{2}(L-1)(N-L)} \mathcal{V}_N(\mathbf{q}) \mathcal{V}_L(\mathbf{q}/q) \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{P}^L\}} S_{\bar{\lambda}}(\mathbf{q}) S_{\lambda}(\mathbf{q}/q), \quad (\text{III.9})$$

где

$$\bar{T}_{kj} = \frac{1 - q^{(P+1)(j+k-1)}}{1 - q^{j+k-1}}, \quad 1 \leq k \leq L, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (\text{III.10})$$

$$\bar{T}_{kj} = q^{j(N-k)}, \quad L+1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Введем Σ_S для обозначения суммы функций Шура в (III.9). Применяя (III.8), преобразуем Σ_S к виду:

$$\Sigma_S = \sum_{\bar{\lambda} \subseteq \{L^{\mathcal{P}}\}} \det(e_{\bar{\lambda}_j - j + k}(\mathbf{q}))_{1 \leq j, k \leq \mathcal{P}} \det(e_{\bar{\lambda}_p - p + l}(\mathbf{q}/q))_{1 \leq l, p \leq \mathcal{P}}, \quad (\text{III.11})$$

где суммирование идет по сопряженным разбиениям $\bar{\lambda}$, $L \geq \bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2 \geq \dots \geq \bar{\lambda}_{\mathcal{P}} \geq 0$.

Более явно,

$$\Sigma_S = \sum_{\bar{\lambda} \subseteq \{L^{\mathcal{P}}\}} \det \begin{pmatrix} L_{\bar{\lambda}_1} & L_{\bar{\lambda}_2-1} & \dots & L_{\bar{\lambda}_{\mathcal{P}}-\mathcal{P}+1} \\ L_{\bar{\lambda}_1+1} & L_{\bar{\lambda}_2} & \dots & L_{\bar{\lambda}_{\mathcal{P}}-\mathcal{P}+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\bar{\lambda}_1+\mathcal{P}-1} & L_{\bar{\lambda}_2+\mathcal{P}-2} & \dots & L_{\bar{\lambda}_{\mathcal{P}}} \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} R_{\bar{\lambda}_1} & R_{\bar{\lambda}_1+1} & \dots & R_{\bar{\lambda}_1+\mathcal{P}-1} \\ R_{\bar{\lambda}_2-1} & R_{\bar{\lambda}_2} & \dots & R_{\bar{\lambda}_2+\mathcal{P}-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\bar{\lambda}_{\mathcal{P}}-\mathcal{P}+1} & R_{\bar{\lambda}_{\mathcal{P}}-\mathcal{P}+2} & \dots & R_{\bar{\lambda}_{\mathcal{P}}} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.12})$$

где учтены определения (III.7). Кроме того, $R_0 = L_0 = 1$ (по определению), в то время как R_r и L_r есть нули при $r > N$. Формула Бине-Коши позволяет выразить

(III.12) в виде определителя матрицы размера $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$:

$$\Sigma_S = \det \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^L L_i R_i & \sum_{i=0}^L L_i R_{i+1} & \dots & \sum_{i=0}^L L_i R_{i+\mathcal{P}-1} \\ \sum_{i=0}^L L_{i+1} R_i & \sum_{i=0}^L L_i R_i & \dots & \sum_{i=0}^L L_i R_{i+\mathcal{P}-2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sum_{i=0}^L L_{i+\mathcal{P}-1} R_i & \sum_{i=0}^L L_{i+\mathcal{P}-2} R_i & \dots & \sum_{i=0}^L L_i R_i \end{pmatrix}. \quad (\text{III.13})$$

Матричные элементы в (III.13) вычисляются с помощью (III.5) и (III.7):

$$\sum_{i=0}^L L_{i+s} R_i = q^{\frac{s}{2}(s+1)} \begin{bmatrix} N+L \\ N-s \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=0}^L L_i R_{i+s} = q^{\frac{s}{2}(s-1)} \begin{bmatrix} N+L \\ N+s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.14})$$

где $0 \leq s \leq \mathcal{P} - 1$. Имея суммы (III.14), выразим (III.13) как определитель матрицы с элементами выраженными q -биномиальными коэффициентами:

$$\Sigma_S = \det \left(q^{\frac{i-j}{2}(i-j+1)} \begin{bmatrix} L+N \\ N-i+j \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq \mathcal{P}}. \quad (\text{III.15})$$

Вычислим определитель (III.15), используя формулы Паскаля (III.4), получаем ответ выраженный через q -биномиальный коэффициент (см. (102)):

$$\Sigma_S = q^{\frac{N}{2}(1-\mathcal{P})\mathcal{P}} \begin{pmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{L} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \\ \mathbf{L} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \end{pmatrix}_q. \quad (\text{III.16})$$

Подстановка (III.16) в (III.9) подтверждает (105). Вычисляем определитель в (III.16) и получаем:

$$\Sigma_S = q^{\frac{N}{2}(1-\mathcal{P})\mathcal{P}} \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^{\mathcal{P}} \frac{[N+j+k-1]}{[j+k-1]} \times \begin{pmatrix} \mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \\ \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \end{pmatrix}_q. \quad (\text{III.17})$$

Стандартным способом получаем, что определитель в (III.17) равен $q^{\frac{N}{2}(\mathcal{P}-1)\mathcal{P}}$. Получаем, что Σ_S (III.17) становится двойным произведением, подтверждая (106).

Двойное произведение в (III.17) совпадает с производящей функцией плоских разбиений в ящике $Z_q(L, \mathcal{P}, N)$ (см. (93)):

$$\prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^{\mathcal{P}} \frac{[N + j + k - 1]}{[j + k - 1]} \equiv \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^{\mathcal{P}} \frac{1 - q^{N+j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}} = Z_q(L, \mathcal{P}, N), \quad (\text{III.18})$$

Двойное произведение в левой части (III.18) можно переписать:

$$\prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{[\mathcal{P} + j + k - 1]}{[j + k - 1]} \equiv \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{\mathcal{P}+j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}} = Z_q(L, N, \mathcal{P}), \quad (\text{III.19})$$

и значит $Z_q(L, \mathcal{P}, N)$ совпадает с $Z_q(L, N, \mathcal{P})$. Получаем для Σ_S (III.13):

$$\Sigma_S = Z_q(L, N, \mathcal{P}). \quad (\text{III.20})$$

Подставляя Σ_S (III.20) в (III.9) получаем второе утверждение, выражаемое (106). \square

Использование (III.7) и (III.8) позволяет представить функции Шура в q -параметризации:

$$S_{\lambda}(\mathbf{q}/q) = \det \left(q^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_i - i + j)(\bar{\lambda}_i - i + j - 1)} \begin{bmatrix} N + \mathcal{P} - j \\ \bar{\lambda}_i - i + \mathcal{P} \end{bmatrix}_{1 \leq i, j \leq \mathcal{P}} \right), \quad (\text{III.22})$$

$$S_{\lambda}(\mathbf{q}) = \det \left(q^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_i - i + j)(\bar{\lambda}_i - i + j + 1)} \begin{bmatrix} N + \mathcal{P} - j \\ \bar{\lambda}_i - i + \mathcal{P} \end{bmatrix}_{1 \leq i, j \leq \mathcal{P}} \right),$$

где используются формулы Паскаля (III.4). Оба представления (III.22) сводятся к одному предельному выражению $S_{\lambda}(\mathbf{1}) \equiv S_{\lambda}(1, 1, \dots, 1)$ при $q \rightarrow 1$:

$$S_{\lambda}(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} N, & N + 1, & \dots, & N + \mathcal{P} - 1 \\ \bar{\mu}_{\mathcal{P}}, & \bar{\mu}_{\mathcal{P}-1}, & \dots, & \bar{\mu}_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{N} + \delta_{\mathcal{P}}^{\triangleleft} \\ \bar{\mu}^{\triangleleft} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.23})$$

где $\bar{\mu}$ есть строгое сопряженное разбиение. Биномиальный определитель в правой части (III.23) допускает интерпретацию в терминах самоизбегающих решеточных путей, соединяющих точки помеченные частями разбиений $(N + \mathcal{P} - 1, N + \mathcal{P} - 2, \dots, N)$ и $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_{\mathcal{P}})$.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Используем представление Бине для $\log \Gamma(z)$ [195] и получим при $N \gg 1$ оценку:

$$\phi_N \simeq \sum_{k=1}^N \left(k - \frac{1}{2}\right) \log k - \frac{N(N+1)}{2} + \sum_{k=1}^N \int_0^1 B(t) e^{-tk} dt + \int_1^{\infty} \frac{B(t)}{e^t - 1} dt, \quad (\text{III.2})$$

где $B(t)$ раскладывается при $|t| < 2\pi$: $B(t) = B_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{5!} + \frac{t^4}{7!} + \dots\right)$, и $B_2 = \frac{1}{6}$ - число Бернулли. Применяя формулу Эйлера-Маклорена в (III.2) получаем ведущий логарифм в (130). Слагаемое $\frac{-3}{4}N^2$ возникает из первых двух вкладов в (III.2). Обзор остальных двух членов в (III.2) подтверждает (130).

Более того, введем обозначения для сумм:

$$\begin{aligned} \phi'_N &\equiv \sum_{k=1}^N \log \frac{\Gamma(k+N)}{(2\pi)^{1/2}}, \\ \phi''_N &\equiv \sum_{k=1}^N \log \frac{\Gamma(k+L)}{(2\pi)^{1/2}}, \\ \phi'''_N &\equiv \sum_{k=1}^N \log \frac{\Gamma(k+N+L)}{(2\pi)^{1/2}}. \end{aligned}$$

По аналогии с предыдущим случаем, использование (III.1) приводит к оценкам для ϕ''_N при $N, L \gg 1$:

$$\phi''_N = \frac{(L+N)^2}{2} \log(L+N) - \frac{L^2}{2} \log L - \frac{3N}{2} \left(L + \frac{N}{2}\right) + \mathcal{O}((N+L) \log(N+L)). \quad (\text{III.3})$$

В частности, мы получаем из (III.3) оценку для ϕ'_N :

$$\phi'_N = \frac{3N^2}{2} \log N + N^2 \left(2 \log 2 - \frac{9}{4}\right) + \mathcal{O}(N \log N), \quad N \gg 1. \quad (\text{III.4})$$

Обращая внимание на оценку (131), уместно использовать (III.3), чтобы оценить разность $\phi'''_N - \phi''_N$ в ведущем порядке по N^2 :

$$\phi'''_N - \phi''_N \approx N^2 \log(2N+L) + \frac{N^2}{2}, \quad N, L \gg 1. \quad (\text{III.5})$$

Тогда, соотношение (131) возникает из (130), (III.4), и (III.5) взятых при $L = M + 1 - n - N$. Чтобы получить (134), используем (130) и (III.3), где мы полагаем $L = N - n$, $L = M + 1 - n$, или $L = M + 1 - N$.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Рассмотрим производящую функцию $\mathcal{G}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}]$ (400), зависящую от трех двухкомпонентных источников, \mathbf{J}^b , \mathbf{J}^c , и \mathcal{P} :

$$\mathcal{G}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}] = \int e^{-\beta W + i\beta \int (J_i^b \sigma_i^b + J_j^c \sigma_j^c) d^2x} \mathcal{D}(\sigma_i^b, \sigma_i^c, u, e_i). \quad (\text{III.1})$$

Показатель экспоненты в (III.1) выглядит после фиксирования кулоновской калибровки следующим образом:

$$\begin{aligned} -\beta W + i\beta \int (J_i^b \sigma_i^b + J_j^c \sigma_j^c) d^2x &= \frac{-\beta}{2\mu} \int (\sigma_i^b + \sigma_i^c)^2 d^2x \\ -2\beta\ell \int e_i \Delta e_i d^2x + i\beta \int \sigma_i^b (\partial_i u - 2\mathcal{P}_i + J_i^b) d^2x &+ \beta \int \sigma_i^c (2e_i + iJ_i^c) d^2x. \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Интеграл (III.1) вычисляется сдвигами переменных функционального интегрирования [11, 12]. В качестве первого шага, выполняется интегрирование по полю деформаций e_i с помощью сдвига $e_i \rightarrow e_i + \frac{1}{2\ell\Delta} \sigma_i^c$. После тождественных преобразований получаем для $\mathcal{G}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mathbf{J}^b, \mathbf{J}^c | \mathcal{P}] &= \text{const} \times \int \exp \left[\frac{-\beta}{2\mu} \int \sigma_i^c \mathcal{D}^{-1} \sigma_i^c d^2x + i\beta \int \sigma_i^c J_i^c d^2x \right. \\ &\left. - \frac{\beta}{2\mu} \int \left(\sigma_i^b \sigma_i^b - i2\mu \sigma_i^b (\partial_i u - 2\mathcal{P}_i + J_i^b + \frac{i}{\mu} \sigma_i^c) \right) d^2x \right] \mathcal{D}(\sigma_i^b, \sigma_i^c, u). \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

После “расщепления” интегрирований, соответствующие интегралы сводятся к числовым множителям, которые не представляют сейчас интереса и которые, таким образом уместно включить в переопределение функциональной меры интегрирования (которая определена с точностью до постоянного множителя $const$). Ядро \mathcal{D}^{-1}

определено в (III.3) следующим образом:

$$\mathbf{D}^{-1} \equiv \delta - \frac{\kappa^2}{\Delta}, \quad (\text{III.4})$$

где Δ^{-1} есть функция Грина двумерного лапласиана на бесконечной плоскости, и δ означает дельта-функцию.

В качестве следующего шага осуществляются последовательные сдвиги переменных σ_i^b и σ_i^c . Для упрощения считается, что $J_i^b = J_i^c = J_i$. После сдвигов

$$\sigma_i^b \longrightarrow \sigma_i^b + i\mu(\partial_i u - 2e_i^P + J_i), \quad \sigma_i^c \longrightarrow \sigma_i^c - i\mu \mathbf{D}(\partial_i u - 2e_i^P), \quad (\text{III.5})$$

производящая функция принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mathbf{J}, \mathbf{J} | \mathcal{P}] = \text{const} \times \int \exp \left[\frac{-\mu\beta}{2} \int ((\partial_i u + \mathcal{J}_i)(\delta + \mathbf{D})(\partial_i u + \mathcal{J}_i) + J_i \mathbf{D} J_i \right. \\ \left. - 2(\partial_i u + \mathcal{J}_i)(\mathbf{D} J_i + 2C_i)) d^2 x - i\beta \int \sigma_i^b (2C_i - \mathbf{D}(\partial_i u - 2e_i^P)) d^2 x \right. \\ \left. - \frac{\beta}{2\mu} \int (\sigma_i^c \mathbf{D}^{-1} \sigma_i^c + \sigma_i^b \sigma_i^b + 2\sigma_i^b \sigma_i^c) d^2 x \right] \mathcal{D}(\sigma_i^b, \sigma_i^c, u), \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

где оператор \mathbf{D} является обратным к \mathbf{D}^{-1} (III.4), и принято обозначение $\mathcal{J}_i \equiv J_i - 2e_i^P$.

В полном согласии с соотношениями (389), (390) и (391), в подходе функционального интегрирования также требуется зафиксировать “фоновый” вклад посредством согласованного выбора функций C_i . С точки зрения функционального интегрирования, соответствующая подстановка

$$C_i = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\partial_i u - 2e_i^P), \quad (\text{III.7})$$

которая удовлетворяет уравнениям (390)), позволяет “отфакторизовать” интегрирование по u . Соответствующий функциональный интеграл отвечает за зависимость статсуммы от пластической деформации e_i^P и, таким образом, от распределения де-

фектов. Тогда возникает следующее представление:

$$\mathcal{G}[\mathbf{J}, \mathbf{J} | \mathcal{P}^{\text{ph}}] = \text{const} \times \int \exp \left[\frac{-\mu\beta}{2} \int ((\partial_i u + \mathcal{J}_i)(\delta - \mathbf{D})(\partial_i u + \mathcal{J}_i) + J_i \mathbf{D} J_i) d^2 x \right] \mathcal{D}(u), \quad (\text{III.8})$$

где обозначение \mathcal{P}^{ph} напоминает о том, что произвол, связанный с выбором C_i , ликвидирован. В качестве последнего шага, сдвиг

$$u \longrightarrow u - \frac{1}{\Delta} \partial_i \mathcal{J}_i,$$

позволяет скомпенсировать вклады первого порядка $\partial_i u$ в показателе в (III.8).

Окончательно, производящая функция принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mathbf{J}, \mathbf{J} | \mathcal{P}^{\text{ph}}] &= \mathcal{G}[0, 0 | \mathcal{P}_o^{\text{ph}}] \times \exp \left[\frac{-\mu\beta}{2} \int \left(\partial_i \mathcal{J}_i \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta - \kappa^2} \right) \partial_k \mathcal{J}_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{J}_i \frac{\kappa^2}{\Delta - \kappa^2} \mathcal{J}_i + \Delta J_i \frac{1}{\Delta - \kappa^2} J_i \right) d^2 x \right], \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

где $\mathcal{J}_i \equiv J_i - 2e_i^P$. Все “отфакторизованные” интегрирования собраны в множителе $\mathcal{G}[0, 0 | \mathcal{P}_o^{\text{ph}}]$, где $\mathcal{P}_o^{\text{ph}} \equiv \mathcal{P}^{\text{ph}}|_{e_i^P=0}$. Уравнение (III.9) приводит к ответу, выражаемому соотношениями (402), (403).

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Существенно, что при $l \geq 1$ левая сторона соотношения (416) может быть преобразована с помощью искусственного предельного приема. Действительно, заменим выражение $(\mathbf{D}_\kappa)_l K_0(\kappa|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2|)$ на $(\mathbf{D}_\rho)_l K_0(\rho|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2|)$ и вынесем $(\mathbf{D}_\rho)_l$ из-под интегрирования. Возникающий при этом интеграл обобщает интеграл (418) и может быть

представлен в виде ряда:

$$\int K_0(\kappa|\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|)K_0(\rho|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2|)d^2\boldsymbol{\xi} = \quad (\text{ШВ.1})$$

$$= \frac{2\pi(K_0(a) - K_0(b))}{\rho^2 - \kappa^2} \quad (\text{ШВ.2})$$

$$= \frac{2\pi}{\kappa + \rho} \left[\frac{2}{\kappa} D_\kappa K_0(a) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(\kappa - \rho)^p}{(p+1)\kappa^{p+1}} D_\kappa \prod_{l=1}^p \left(1 + \frac{2}{l} D_\kappa\right) K_0(a) \right], \quad (\text{ШВ.3})$$

где $a \equiv \kappa|\Delta\mathbf{x}|$, $b \equiv \rho|\Delta\mathbf{x}|$. Применяя оператор $(D_\rho)_l$ к ряду (ШВ.3) и устремляя в конце $\rho \rightarrow \kappa$, можно получить соотношение в правой части (416). Другими словами, интеграл (ШВ.1) представляет собой производящую функцию соотношения (416).

Сделаем следующие пояснения, касающиеся соотношений (ШВ.2) и (ШВ.3). Чтобы получить (ШВ.2), необходимо представить интеграл (ШВ.1) в виде аналогичном (419) и затем воспользоваться [190]. Ряд (ШВ.3) возникает, если разложить $K_0(b)$ в степенной ряд по $(\kappa - \rho)$. В самом деле, разложим $K_0(b)$ и выразим (ШВ.2):

$$\frac{2\pi}{\kappa + \rho} \left[-|\Delta\mathbf{x}|K_0'(a) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-|\Delta\mathbf{x}|)^{p+1}(\kappa - \rho)^p}{(p+1)!} K_0^{(p+1)}(a) \right]. \quad (\text{ШВ.4})$$

Непосредственная проверка подтверждает совпадение свободных членов внутри скобок как в (ШВ.3), так и в (ШВ.4). Применение индукции доказывает почленное совпадение коэффициентов в соответствующих рядах и, следовательно, представление (ШВ.3) имеет место.

В самом деле, соотношение, которое требуется доказать, после некоторых преобразований принимает вид:

$$a^{p+1} \frac{d^{p+1}}{da^{p+1}} K_0(a) = \kappa \frac{d}{d\kappa} \prod_{l=1}^p \left(\kappa \frac{d}{d\kappa} - l \right) K_0(a). \quad (\text{ШВ.5})$$

Допустим, что соотношение (ШВ.5) имеет место при некотором значении p . По индукции требуется доказать выполнение соотношения, возникающего при замене $p \mapsto p+1$. Использование тождества

$$a^{p+2} \frac{d^{p+2}}{da^{p+2}} = \left(a \frac{d}{da} - (p+1) \right) a^{p+1} \frac{d^{p+1}}{da^{p+1}}$$

позволяет осуществить требуемое доказательство. Итак, соотношение (ПІV.3) действительно возникает из (ПІV.2). В качестве примера положим $l = 2$ и применим $\lim_{\rho \rightarrow \kappa} (\mathbf{D}_\rho)_1$ к (ПІV.3). Используем предельные выражения:

$$\lim_{\rho \rightarrow \kappa} (\mathbf{D}_\rho)_2 \frac{1}{\kappa + \rho} = \frac{1}{8\kappa}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \kappa} (\mathbf{D}_\rho)_2 \frac{(\kappa - \rho)^p}{\kappa + \rho} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & p = 1, \\ \frac{\kappa}{4}, & p = 2, \\ 0, & p > 2, \end{cases}$$

и с их помощью получим:

$$\begin{aligned} & \int K_0(\kappa|\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|) (\mathbf{D}_\kappa)_2 K_0(\kappa|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2|) d^2 \boldsymbol{\xi} = \\ & = \frac{2\pi}{4\kappa^2} \left[\mathbf{D}_\kappa K_0(a) + \mathbf{D}_\kappa (1 + 2\mathbf{D}_\kappa) K_0(a) + \frac{2}{3} \mathbf{D}_\kappa (1 + 2\mathbf{D}_\kappa) (1 + \mathbf{D}_\kappa) K_0(a) \right] = \\ & = \frac{2\pi}{3\kappa^2} \mathbf{D}_\kappa (1 + \mathbf{D}_\kappa) (2 + \mathbf{D}_\kappa) K_0(a). \end{aligned} \quad (\text{ПІV.6})$$

Соотношение (ПІV.6) согласуется с правой частью выражения (416) при $l = 2$. Более того, прямой, но громоздкой, проверкой для нескольких первых значений $l > 2$ можно убедиться в том, что (416) действительно выполняется, если ряд (ПІV.3) используется как производящая функция. Именно использование ряда (ПІV.3) для нескольких первых значений l приводит к предположению о том, что (416) выполняется при любом значении l .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга*, Усп. Мат. Наук **34** No. 5 (1979), 13–63.
- [2] L. D. Faddeev, *Quantum completely integrable models of field theory*, Sov. Sci. Rev. Math. C, **1** (1980), 107–160; In: 40 Years in Mathematical Physics, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 2 (World Sci., Singapore, 1995), pp. 187–235.
- [3] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, (Наука, Москва, 1992)
- [4] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993)
- [5] Н. Bethe, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette*, Zeitschrift für Physik **71** No. 3-4 (1931), 205–226.
- [6] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, (Cambridge University Press, Cambridge, 1996)
- [7] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999)
- [8] R. P. Feynman, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20** No. 2 (1948), 367–387.
- [9] Р. Фейнман, А. Хиббс, *Квантовая механика и интегралы по путям*, (Мир, Москва, 1968)
- [10] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, (Физматгиз, Москва, 1962)
- [11] В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, (Атомиздат, Москва, 1976)
- [12] V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987, 1990)
- [13] П. Н. Брусков, В. Н. Попов, *Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей*, (Наука, Москва, 1988)

- [14] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, (Наука, Москва, 1988)
- [15] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, (Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1976)
- [16] С. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New-York, 1980)
- [17] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, (The Benjamin Cummings, Massachusetts, 1981)
- [18] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, (Наука, Москва, 1986)
- [19] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets* (World Scientific, Singapore, 2004)
- [20] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, (Clarendon Press, Oxford, 1996)
- [21] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1998)
- [22] P. P. Kulish, F. A. Smirnov, *Anisotropic Heisenberg Ferromagnet with a Ground of the Domain Wall Type*, J. Phys. C: Solid State Phys., **18** No. 5 (1985), 1037–1048.
- [23] V. E. Korepin, *Calculation of Norms of Bethe Wave Functions*, Comm. Math. Phys. **86** No. 3 (1982), 391–418.
- [24] V. Korepin, P. Zinn-Justin, *Thermodynamic Limit of the Six-vertex Model with Domain Wall Boundary Conditions*, J. Phys. A **33** No. 40 (2000), 7053–7066.
- [25] G. Kuperberg, *Another Proof of the Alternative-sign Matrix Conjecture*, Int. Math. Res. Notices **1996** (1996) 139–150.
- [26] D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999)
- [27] N. M. Bogoliubov, A. G. Pronko, M. B. Zvonarev, *Boundary Correlation Functions of the Six-vertex Model*, J. Phys. A **35** No. 27 (2002), 5525–5541.
- [28] Н. М. Боголюбов, *XXO Цепочка Гейзенберга и случайные блуждания*, Зап. Научн. Семина. ПОМИ **325** (2005), 13–27.

- [29] Н. М. Боголюбов, *Интегрируемые модели для зловердных и дружественных пешеходов*, Зап. Научн. Семина. ПОМИ **335** (2006), 59–74.
- [30] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, (Oxford University Press, Oxford, 1995)
- [31] Н. М. Боголюбов, К. Малышев, *Корреляционные функции XXZ цепочки Гейзенберга для нулевой или бесконечной анизотропии и случайные блуждания недружественных пешеходов*, Алгебра и Анализ **22** No. 3 (2010), 32–59.
- [32] Н. М. Боголюбов, К. Л. Малышев, *Изинговский предел XXZ магнетика Гейзенберга и некоторые температурные корреляционные функции*, Теор. Мат. Физ. **169** No. 2 (2011), 179–193.
- [33] N. M. Bogoliubov, S. Malyshev, *Correlation Functions of $XX0$ Heisenberg Chain, q -Binomial Determinants, and Random Walks*, Nucl. Phys. B **879** (2014), 268–291.
- [34] C. N. Yang, C. P. Yang, *One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-spin Interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground State in a Finite System*, Phys. Rev. **150** No. 1 (1966), 321–327.
- [35] C. N. Yang, C. P. Yang, *One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-spin Interactions. II. Properties of the Ground State Energy per Lattice Site for an Infinite System*, Phys. Rev. **150** No. 1 (1966), 327–339.
- [36] C. N. Yang, C. P. Yang, *One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-spin Anteractions. III. Applications*, Phys. Rev. **151** No. 1 (1966), 258–264.
- [37] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Correlation Functions for the Heisenberg XXZ -Antiferromagnet*, Comm. Math. Phys. **99** No. 2 (1985), 271–302.
- [38] F. H. L. Eßler, H. Frahm, A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Determinant Representation for Correlation Functions of Spin-1/2 XXX and XXZ Heisenberg Magnets*, Comm. Math. Phys. **174** No. 1 (1995), 191–214.
- [39] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Form-Factors of the XXZ Heisenberg spin- $\frac{1}{2}$ finite chain*, Nucl. Phys. B **554** No. 3 (1999), 647–678.
- [40] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, V. Terras, *Correlation Functions of the XXZ Spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg Chain at the Free Fermion Point from their Multiple Integral Representations*, Nucl. Phys. B **642** No. 3 (2002), 433–455.

- [41] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, V. Terras, *Large Distance Asymptotic Behavior of the Emptiness Formation Probability of the XXZ Spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg Chain* J. Phys. A: Math. Gen. **35** No. 49 (2002), L753–L758.
- [42] Н. А. Славнов, *Алгебраический анзац Бете и квантовые интегрируемые системы*, Усп. Мат. Наук, **62** No. 4 (2007), 91–132.
- [43] L. Carlitz, *Some Determinants of q -Binomial Coefficients*, J. reine angew. Math. **226** (1967), 216–220.
- [44] P. J. Forrester, S. O. Warnaar, *The Importance of the Selberg Integral*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **45** No. 4 (2008) 489–534.
- [45] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, (Princeton University Press, Princeton, 2010)
- [46] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Correlators in the Heisenberg XXO Chain as Fredholm Determinants*, Phys. Lett. A **169** No. 4 (1992), 243–247.
- [47] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Temperature Correlation Functions in the XXO Heisenberg Chain. I*, Theor. Math. Phys. **94** No. 1 (1993), 19–51.
- [48] F. Colomo, A. G. Izergin, V. Tognetti, *Correlation Functions in the XXO Heisenberg Chain and their Relations with Spectral Shapes*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** No. 2 (1997), 361–370.
- [49] B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *Entanglement, Toeplitz determinants and Fisher-Hartwig conjecture*, J. Stat. Phys. **116** No. 1-4 (2004), 79–95.
- [50] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Two Soluble Models of an Antiferromagnetic Chain*, Ann. Phys. (NY) **16** No. 3 (1961), 407–466.
- [51] Th. Niemeijer, *Some Exact Calculations on a Chain of Spins 1/2. I, II*, Physica **36** No. 3 (1967), 377–419; **39** No. 3 (1968), 313–326.
- [52] F. Franchini, A. R. Its, V. E. Korepin, L. A. Takhtajan, *Entanglement Spectrum for the XY Model in One Dimension*, Quantum Information Processing, **10** (2011), 325–341.
- [53] A. Vershik, *Statistical Mechanics of Combinatorial Partitions, and their Limit Configurations*, Funct. Anal. Appl. **30** No. 2 (1996), 90–105.

- [54] A. Borodin, V. Gorin, E. M. Rains, *q-Distributions on Boxed Plane Partitions*, *Selecta Mathematica*, **16** No. 4 (2010), 731–789.
- [55] P. L. Ferrari, H. Spohn, *Step Fluctuations for a Faceted Crystal*, *J. Statist. Phys.* **113** No. 1/2 (2003), 1–46.
- [56] A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Correlation Function of Schur Process with Application to Local Geometry of a Random 3-dimensional Young Diagram*, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 581–603.
- [57] R. Rajesh, D. Dhar, *An Exactly Solvable Anisotropic Directed Percolation Model in Three Dimensions*, *Phys. Rev. Lett.* **81** No. 8 (1998), 1646–1649.
- [58] A. Okounkov, N. Reshetikhin, C. Vafa, *Quantum Calabi-Yau and classical crystals*, In: *The Unity of Mathematics (In Honor of the Ninetieth Birthday of I.M. Gelfand)*, P. Etingof, V. S. Retakh, I. M. Singer, Eds., (Birkhäuser, Boston, 2006), 597–618.
- [59] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot, *Vicious Walkers, Friendly Walkers and Young Tableaux: II. With a Wall*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** No. 48 (2000), 8835–8866.
- [60] D. Pérez-Garcia, M. Tierz, *The Heisenberg XX spin chain and low-energy QCD*, arXiv:1305.3877.
- [61] D. J. Gross, E. Witten, *Possible Third-Order Phase Transition in the Large- N Lattice Gauge Theory*, *Phys. Rev. D* **21** No. 2 (1980), 446–453.
- [62] M. E. Fisher, *Walks, Walls, Wetting, and Melting*, *J. Statist. Phys.*, **34** No. 5-6 (1984), 667–729.
- [63] К. Малышев, *Функциональное интегрирование, дзета-регуляризация и корреляторы третьих компонент спинов в XX0 магнетике Гейзенберга*, *Зап. Научн. Семина. ПОМИ* **269** (2000), 269–291.
- [64] К. Малышев, *Функциональное интегрирование и корреляторы z-компонент локальных спинов в XY и XX магнетиках Гейзенберга*, *Зап. Научн. Семина. ПОМИ* **291** (2002), 206–227.
- [65] К. Малышев, *Функциональное интегрирование с “автоморфным” граничным условием и корреляторы третьих компонент спинов в XX модели Гейзенберга*, *Теор. Мат. Физ.* **136** No. 2 (2003), 285–298.

- [66] С. Malyshev, *Functional Integration with “Automorphic” Boundary Conditions and Correlators of z-Components of Spins in the XY and XX Heisenberg Chains*, In: *New Developments in Mathematical Physics Research.*, Ed., Charles V. Benton (Nova Science Publishers, New York, 2004), pp. 85–116.
- [67] К. Малышев, *Условие квазипериодичности по мнимому времени как связь при функциональном интегрировании и временной ZZ-коррелятор XX магнетика Гейзенберга*, Зап. Научн. Семина. ПОМИ **317** (2004), 142–173.
- [68] N. M. Bogoliubov, С. Malyshev, *A Path Integration Approach to the Correlators of XY Heisenberg Magnet and Random Walks*, In: *Proceedings of the 9th Intern. Conf. “Path Integrals: New Trends and Perspectives”* (Dresden, Germany, September 23–28, 2007). Eds., W. Janke, A. Pelster (World Scientific, Singapore, 2008), pp. 508–513.
- [69] Н. М. Боголюбов, К. Л. Малышев, *Корреляционные функции XX-магнетика Гейзенберга и случайные блуждания недружественных пешеходов*, Теор. Мат. Физ. **159** No. 2 (2009), 179–193.
- [70] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Theory of Bose–Einstein Condensation in Trapped Gases*, Rev. Mod. Phys. **71** No. 3 (1999), 463–512.
- [71] С. J. Pethic, H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002)
- [72] A. Griffin, T. Nikuni, E. Zaremba, *Bose-Condensed Gases at Finite Temperatures*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2009)
- [73] G. Baym, С. J. Pethic, *Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas*, Phys. Rev. Lett. **76** No. 1 (1996), 6–9.
- [74] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, J. T. M. Walraven, *Regimes of Quantum Degeneracy in Trapped 1D Gases*, Phys. Rev. Lett. **85** No. 18 (2000), 3745–3749.
- [75] В. Н. Попов, *Возможность нарушения закона подобия при фазовом переходе бозе-системы в сверхтекучее состояние*, Зап. Научн. Семина. ПОМИ **150** (1986), 87–103.
- [76] N. M. Bogoliubov, С. Malyshev, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, J. Timonen, *Asymptotic Behaviour of Correlation Functions in the Trapped Bose Gas*, Физ. Элем. Частиц и Атомного Ядра (Физика ЭЧАЯ) **31** No. 7Б (2000), 115–121.

- [77] N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, C. Malyshev, J. Timonen, *Finite-Temperature Correlations in the Trapped Bose–Einstein Gas*, Europhys. Lett. **55** No. 6 (2001), 755–761.
- [78] Р. К. Буллоу, Н. М. Боголюбов, В. С. Капитонов, К. Л. Малышев, Й. Тимонен, А. В. Рыбин, Г. Г. Варзугин, М. Линдберг, *Квантовые интегрируемые и неинтегрируемые модели, основанные на нелинейном уравнении Шредингера для реализуемой конденсации Бозе–Эйнштейна в размерности $d + 1$ ($d = 1, 2, 3$)*, Теор. Мат. Физ. **134** No. 1 (2003), 55–73.
- [79] N. M. Bogoliubov, C. Malyshev, R. K. Bullough, J. Timonen, *Finite-Temperature Correlations in the One-Dimensional Trapped and Untrapped Bose Gases*, Phys. Rev. A **69** (2004), 023619 (15 pages)
- [80] Н. М. Боголюбов, К. Малышев, *Функциональное интегрирование и двухточечная корреляционная функция одномерного бозе-газа в гармоническом потенциале*, Алгебра и Анализ **17** No. 1 (2005), 84–114.
- [81] C. Malyshev, N. M. Bogoliubov, *The Functional Integration and the Two-Point Correlation Functions of the Trapped Bose Gas*, Proceedings of the 8th Intern. Conf. “Path Integrals from Quantum Information to Cosmology” (Prague, Czech Republic, June 6–10, 2005). Eds., Ā. Burdik, O. Navrátil, S. Pořta (JINR, Dubna, 2005), 20 p.
- [82] Н. М. Боголюбов, К. Малышев, *О вычислении асимптотик двухточечной корреляционной функции одномерного бозе-газа в удерживающем потенциале*, Зап. Научн. Семина. ПОМИ **347** (2007), 56–74.
- [83] M. M. Salomaa, G. E. Volovik, *Quantized Vortices in Superfluid He³*, Rev. Mod. Phys. **59** No. 3 (1987), 533–614.
- [84] D. Vollhardt, P. Wolfe, *The Superfluid Phases of Helium-3*, (Taylor & Francis, London, 1990)
- [85] G. E. Volovik, *Exotic Properties of Superfluid ³He*, (World Scientific, Singapore, 1992)
- [86] R. Combescot, T. Dombre, *Superfluid Current in He³-A at $T=0$* , Phys. Rev. B **28** No. 9 (1983), 5140–5149.
- [87] R. Combescot, T. Dombre, *Superfluid current in He³-A at $T=0$. II*, Phys. Rev. B **32** No. 5 (1985), 2960–2964.

- [88] Г. Е. Воловик, В. П. Минеев, *Орбитальный момент и орбитальная динамика: $^3\text{He-A}$ и бозе-жидкость*, ЖЭТФ **81** No. 3 (1981), 989-1000.
- [89] P. Muzicar, D. Rainer, *Nonanalytic Supercurrents in He3-A* , Phys. Rev. B **27** No. 7 (1983), 4243–4250.
- [90] К. Малышев *О двух способах вычисления сверхтекучего тока в А-фазе гелия-3*, Зап. Научн. Семина. ПОМИ **209** (1994), 179–193.
- [91] С. Malyshev, *A New Representation for the Supercurrent in $^3\text{He-A}$ and Its Zero Temperature Limit*, Physica B **210** No. 3/4 (1995), 359–365. *Erratum*: Physica B, **222** (1996), 252.
- [92] С. Malyshev, *Some Exact Representations for the Mass Current in $^3\text{He-A}$ and their Zero Temperature Implications*, Зап. Научн. Семина. ПОМИ **224** (1995), 250–266.
- [93] С. Malyshev, *Higher Corrections to the Mass Current in Weakly Inhomogeneous Superfluid $^3\text{He-A}$* , Phys. Rev. B **59** No. 10 (1999), 7064–7075.
- [94] С. Malyshev, *A Nicholson-Type Integral for the Product of Two Parabolic Cylinder Functions $D_\nu(x) D_\nu(-x)$ at $\Re \nu < 0$* , Integral Transforms and Special Functions **14** No. 2 (2003), 139–148.
- [95] R. Saito, G. Dresselhaus, M. S. Dresselhaus, *Physical Properties of Carbon Nanotubes*, (Imperial College Press, London, 1998)
- [96] D. Tománek, R. J. Enbody (Eds.), *Science and Application of Nanotubes*, (Kluwer, New York, 2002)
- [97] М. Ю. Gutkin, А. Г. Sheinerman, *Elastic Behavior of a Screw Dislocation in the Wall of a Hollow Nanotube*, Phys. Solid State **49** No. 9 (2007), 1672–1679.
- [98] A. Carpio, L. L. Bonilla, F. de Juan, M. A. H. Vozmediano, *Dislocations in Graphene*, New Journal of Physics **10** (2008), 053021.
- [99] F. de Juan, A. Cortijo, M. A. H. Vozmediano, *Dislocations and Torsion in Graphene and Related Systems*, Nucl. Phys. B **828** No. 3 (2010), 625–637.
- [100] S. Bhowmick, U. V. Waghmare, *Anisotropy of the Stone-Wales Defect and Warping of Graphene Nanoribbons: A First-Principles Analysis*, Phys. Rev. B **81** No. 15 (2010), 155416.
- [101] J. P. Hirth, J. Lothe, *Theory of Dislocations*, (Wiley, New York, 1982)

- [102] R. E. Peierls *The Size of a Dislocation*, Proc. Phys. Soc. **52** No. 289 (1940), 34–37.
- [103] F. R. N. Nabarro *Dislocations in a Simple Cubic Lattice*, Proc. Phys. Soc. **59** No. 332 (1947), 256–272.
- [104] A. D. Brailsford, *Stress Field of a Dislocation*, Phys. Rev. **142** No. 2 (1966), 383–387.
- [105] И. А. Кунин, *Теория упругих сред с микроструктурой*, (Наука, Москва, 1975)
- [106] A. C. Eringen, *On Differential Equations of Non Local Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves*, J. Appl. Phys. **54** No. 9 (1983), 4703–4710.
- [107] M. Yu. Gutkin, E. C. Aifantis, *Screw Dislocation in Gradient Elasticity*, Scr. Mater. **35** No. 11 (1996), 1353–1358.
- [108] M. Yu. Gutkin, E. C. Aifantis, *Edge Dislocation in Gradient Elasticity*, Scr. Mater. **36** No. 1 (1997), 129–135.
- [109] A. Kadić, D. G. B. Edelen, *A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations*, Lect. Notes Phys., vol. **174**, (Springer, Berlin, 1983)
- [110] D. G. B. Edelen, D. C. Lagoudas *Gauge Theory and Defects in Solids*, (North-Holland, Amsterdam, 1988)
- [111] M. C. Valsakumar, D. Sahoo, *Gauge Theory of Defects in the Elastic Continuum*, Bull. Mater. Sci. (India) **10** Nos. 1&2 (1988), 3–44.
- [112] D. G. B. Edelen, *A Correct, Globally Defined Solution of the Screw Dislocation Problem in the Gauge Theory of Defects*, Int. J. Engng Sci. **34** No. 1 (1996), 81–86.
- [113] C. Malyshev, *The $T(3)$ -Gauge Model, the Einstein-Like Gauge Equation, and Volterra Dislocations with Modified Asymptotics*, Ann. Phys. (N.Y.) **286** No. 2 (2000), 249–277.
- [114] M. Lazar, *An Elastoplastic Theory of Dislocations as a Physical Field Theory with Torsion*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** No. 8 (2002), 1983–2004.
- [115] M. Lazar, *A Nonsingular Solution of the Edge Dislocation in the Gauge Theory of Dislocations*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** No. 5 (2003), 1415–1437.
- [116] E. Kröner, A. Seeger, *Nicht-Lineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Arch. Rat. Mech. Anal. **3** No. 1 (1959), 97–119.

- [117] A. Seeger, E. Mann *Use of the Non-Linear Elasticity Theory for Defects in Crystals*, Z. Naturforsch. **14a** (1959), 154–164.
- [118] H. Pfeiderer, A. Seeger, E. Kröner *Non-Linear Elasticity Theory of Straight Dislocations*, Z. Naturforsch. **15a** (1960), 758–772.
- [119] A. Seeger, *The Application of Second-order Effects in Elasticity to Problems of Crystal Physics*, In: *Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics*. Int. Symp., Haifa, Israel, April 23–27, 1962, M. Reiner, D. Abir, Eds., (Pergamon Press, Oxford, 1964), 129–144.
- [120] B. K. D. Gairola *Nonlinear Elastic Problems*, In: *Dislocations in Solids*, **1**, F. R. N. Nabarro, Ed., (Elsevier, Amsterdam, 1979), 223–342.
- [121] C. Malyshev, *The Einsteinian $T(3)$ -Gauge Approach and the Stress Tensor of the Screw Dislocation in the Second Order: Avoiding the Cut-off at the Core*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** No. 34 (2007), 10657–10684.
- [122] В. Л. Березинский, *Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. I. Классические системы*, ЖЭТФ **59** No. 3 (1970), 907–920.
- [123] В. Л. Березинский, *Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. II. Квантовые системы*, ЖЭТФ **61** No. 3 (1971), 1144–1156.
- [124] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *Long Range Order and Metastability in Two Dimensional Solids and Superfluids. (Application of Dislocation Theory)*, J. Phys. C: Solid State Phys. **5** No. 11 (1972), L124–L126.
- [125] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *Ordering, Metastability and Phase Transitions in Two-Dimensional Systems*, J. Phys. C: Solid State Phys. **6** No. 7 (1973), 1181–1203.
- [126] В. Н. Попов, *К теории сверхтекучести двумерных и одномерных бозе-систем*, ТМФ **11** No. 3 (1972), 354–365.
- [127] В. Н. Попов, *Квантовые вихри и фазовый переход в бозе-системах*, ЖЭТФ **64** No. 2 (1973), 672–680.
- [128] A. Holz, J. T. N. Medeiros, *Melting Transition of Two-Dimensional Crystals*, Phys. Rev. B **17** No. 3 (1978), 1161–1174.

- [129] D. R. Nelson, *Study of Melting in Two Dimensions*, Phys. Rev. B **18** No. 5 (1978), 2318–2338.
- [130] D. R. Nelson, B. I. Halperin, *Dislocation-Mediated Melting in Two Dimensions*, Phys. Rev. B **19** No. 5 (1979), 2457–2484.
- [131] A. P. Young, *Melting and the Vector Coulomb Gas in Two Dimensions*, Phys. Rev. B **19** No. 4 (1979), 1855–1866.
- [132] D. R. Nelson, *Defects in Superfluids, Superconductors, and Membranes*, In: “Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory”, Les Houches, 1994 (NATO ASI Series Vol 62) (North-Holland, Amsterdam, 1994), 423–478.
- [133] S. Panyukov, Y. Rabin, *Statistical Physics of Interacting Dislocation Loops and their Effect on the Elastic Moduli of Isotropic Solids*, Phys. Rev. B **59** No. 21 (1999-I), 13657–13671.
- [134] C. Malyshev, *Non-Singular Screw Dislocations as the Coulomb Gas with Smoothed Out Coupling and the Renormalization of the Shear Modulus*, J. Phys. A: Math. Theor. **44** No. 34 (2011), 285003.
- [135] W. Heisenberg, *Zur Theorie des Ferromagnetismus*, Zeitschrift für Physik **49** No. 9-10 (1928), 619–636.
- [136] E. H. Lieb, F. Y. Wu, *Two Dimensional Ferroelectric Models*, In: Phase transitions and critical phenomena, vol. **1**, Eds., C. Domb, M. Green, (Academic Press, London, 1972), 331–490.
- [137] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, (Academic Press, London, 1982)
- [138] M. Gaudin, *La Fonction d'Onde de Bethe*, (Masson, Paris, 1983)
- [139] A. Okounkov, *Infinite Wedge and Random Partitions*, Selecta Mathematica (New Series) **7** No. 1 (2001), 57–81.
- [140] V. Korepin, J. Terilla, *Thermodynamic Interpretation of Quantum Error Correcting Criterion*, Quantum Information Processing **1** No. 4 (2002), 225–242.
- [141] F. C. Alcaraz, R. Z. Bariev, *An Exactly Solvable Constrained XXZ Chain*, In: *Statistical Physics on the Eve of the 21st Century. In Honour of J. B. McGuire on the Occasion of His 65th Birthday (Series on Advances in Statistical Mechanics)*, Eds., M. T. Batchelor, L. T. Wille (World Scientific, Singapore, 1999)

- [142] Н. И. Абаренкова, А. Г. Пронько, *Температурный коррелятор в абсолютно анизотропном XXZ -магнетике Гейзенберга*, Теор. Мат. Физ. **131** No. 2 (2002), 288–303.
- [143] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. 1, (AMS, Providence, 2000)
- [144] A. G. Izergin, N. A. Kitanin, N. A. Slavnov, *On Correlation Functions of the XY-Model*, J. Math. Sci. **88** No. 2 (1998), 224–232.
- [145] Н. М. Боголюбов, *Четырехвершинная модель и случайные укладки*, Теор. Мат. Физ. **155** No. 1 (2008), 25–38.
- [146] D. Allison, N. Reshetikhin, *Numerical Study of the Six-vertex Model with Domain Wall Boundary Conditions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** No. 6 (2005), 1847–1869.
- [147] F. Colomo, A. G. Pronko, *Square Ice, Alternating Sign Matrices, and Classical Orthogonal Polynomials*, J. Stat. Mech. (2005), P01005.
- [148] В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке*, Теор. Мат. Физ. **57** No. 2 (1983), 163–181.
- [149] I. Gessel, G. Viennot, *Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae*, Advances in Mathematics **58** No. 3 (1985), 300–321.
- [150] A. J. Guttmann, A. L. Owczarek, X. G. Viennot, *Vicious Walkers and Young Tableaux I: Without Walls*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** No. 40 (1998), 8123–8135.
- [151] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, (Москва, МЦНМО, 2006)
- [152] N. M. Bogoliubov, S. Malyshev, *A Combinatorial Interpretation of the Scalar Products of State Vectors of Integrable Models*, Зап. Научн. Семина. ПОМИ **421** (2014), 33–46.
- [153] M. L. Mehta, *Random Matrices*, (Academic Press, London, 1991)
- [154] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, V. Terras, *Spin-spin Correlation Functions of the XXZ - $\frac{1}{2}$ Heisenberg Chain in a Magnetic Field*, Nucl. Phys. B **641** No. 3 (2002), 487–518.

- [155] A. G. Izergin, V. S. Kapitonov, N. A. Kitanin, *Equal-Time Temperature Correlators of the One-Dimensional Heisenberg XY-Chain*, J. Math. Sci. **100** No. 2 (2000), 2120–2140.
- [156] V. S. Kapitonov, A. G. Pronko, *Time-dependent temperature correlators of local spins of the one-dimensional XY Heisenberg chain*, J. Math. Sci. **115** No. 1 (2003), 2009–2032.
- [157] Yu. A. Izyumov, Yu. N. Skryabin, *Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems*, (Consultants Bureau, New York, 1988)
- [158] P. Jordan, E. Wigner, *Über das Paulische Äquivalenzverbot*, Z. Physik **47** Nos. 9-10 (1928), 631–651.
- [159] Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды в трех томах*, (Наукова Думка, Киев, 1970–1971)
- [160] M. Naraschewski, D. M. Stamper-Kurn, *Analytical Description of a Trapped Semi-Ideal Bose Gas at Finite Temperature*, Phys. Rev. A **58** No. 3 (1998), 2423–2426.
- [161] S. Stringari, *Collective Excitations of a Trapped Bose-Condensed Gas*, Phys. Rev. Lett. **77** No. 12 (1996), 2360–2363.
- [162] S. Stringari, *Dynamics of Bose-Einstein Condensed Gases in Highly Deformed Traps*, Phys. Rev. A **58** No. 3 (1998), 2385–2388.
- [163] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vols. 1, 2, 3, (McGraw-Hill, New York, 1953)
- [164] E. Elizalde, A. Romeo, *Regularization of General Multidimensional Epstein Zeta-Functions*, Rev. Math. Phys. **1** No. 1 (1989), 113–128.
- [165] E. Elizalde, *Explicit Zeta Functions for Bosonic and Fermionic Fields on a Non-commutative Toroidal Space-Time*, J. Phys. A **34** No. 14 (2001), 3025–3035.
- [166] E. Elizalde, *Zeta Function Methods and Quantum Fluctuations*, J. Phys. A **41** No. 30 (2008), 304040.
- [167] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, (Springer, New York, 1997)
- [168] E.W. Hobson: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1931)

- [169] D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov, *Stability and Phase Coherence of Trapped 1D Bose Gases*, Phys. Rev. Lett. **90** No. 1 (2003), 010401 (4 pages).
- [170] В. Н. Попов, *Длинноволновая асимптотика многочастичных функций Грина одномерного бозе-газа*, Письма в ЖЭТФ **31** No. 9 (1980), 560–563.
- [171] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (McGraw-Hill, New York, 1953)
- [172] M. C. Cross, *A Generalized Ginzburg-Landau Approach to the Superfluidity of Helium 3*, J. Low Temp. Phys. **21** No. 5/6 (1975), 525–534.
- [173] K. Yosida, *Paramagnetic Susceptibility in Superconductors*, Phys. Rev. **110** No. 3 (1958), 769–770.
- [174] M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1970)
- [175] Á. Elbert, M. E. Muldoon, *Inequalities and Monotonicity Properties for Zeros of Hermite Functions*, Proc. Roy. Soc. A **129** No. 1 (1999), 57–75.
- [176] В. С. Капитонов, П. А. Севастьянов, *Интегрирование по супералгебре в модели Хаббарда с сильной корреляцией*, Теор. Мат. Физ. **107** No. 2 (1996), 269–287.
- [177] E. Kochetov, V. Yarunin, *Representation of the t - J Model via Spin-Charge Variables*, Phys. Rev. B, **56** No. 5 (1997), 2703–2711.
- [178] С. Л. Малышев, В. Н. Попов, *On Superconductivity in the Three-Band Two-Dimensional Repulsive Hubbard Model*, Теор. Мат. Физ. **105** No. 1 (1995), 149–162.
- [179] V. Kapitonov, С. Malyshev, V. N. Popov, P. Sevastyanov, *Path Integration and Bose Spectrum in the Antiferromagnetic State of the Two-Dimensional Weakly Repulsive Hubbard Model*, Phys. Lett. A **236** No. 1/2 (1997), 89–96.
- [180] V. Kapitonov, С. Malyshev, *On the Bose-Spectrum in the 2D Weakly Repulsive Hubbard Model at Half Filling*, In: Proceedings of the Sixth Intern. Conf. on “Path-Integrals from peV to TeV”(Florence, Italy, August 25–29, 1998). Eds., R. Casalbuoni, R. Giachetti, V. Tognetti, R. Vaia, P. Verrucchi (World Scientific, Singapore, 1999), 414–417.
- [181] С. Malyshev, *Underlying Algebraic and Gauge Structures of the Theory of Disclinations*, Arch. Mech. (Warsaw) **45** No. 1 (1993), 93–105.

- [182] С. Malyshev, *An Approach to Gauge Potentials in the Non-Abelian ISO(3)-Gauge Model of Defects in Solids*, Arch. Mech. (Warsaw) **48** No. 6 (1996), 1089–1100.
- [183] R. de Wit, *A View of the Relation Between the Continuum Theory of Lattice Defects and Non-Euclidean Geometry in the Linear Approximation*, Int. J. Engng Sci. **19** No. 12 (1981), 1475–1506.
- [184] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии. Том 1*, (Наука, Москва, 1981)
- [185] Н. Kleinert, *Multivalued Fields in Condensed Matter, Electromagnetism, and Gravitation*, (World Scientific, Singapore, 2008)
- [186] С. Teodosiu, *Elastic Models of Crystal Defects*, (Springer, Berlin, 1982)
- [187] М. Lazar, G. A. Maugin, E. C. Aifantis *On Dislocations in a Special Class of Generalized Elacticity*, Phys. Stat. Sol. (b) **242** No. 12 (2005), 2365–2390.
- [188] А. А. Абрикосов (мл.), Я. И. Коган, *О вихрях на мировых листах струн и суперструн*, ЖЭТФ **96** No. 2 (1989), 418–436.
- [189] А. А. Abrikosov (jr), Ya. I. Kogan, *Vortices on the String and Superstring World Sheets*, Int. J. Mod. Phys. A **6** No. 9 (1991), 1501–1524.
- [190] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, (Наука, Москва, 1981)
- [191] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, (Наука, Москва, 1983)
- [192] Н. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter. Stresses and Defects*, Vol. II, (World Scientific, Singapore, 1989)
- [193] Н. Н. von Grünberg, P. Keim, K. Zahn, G. Maret, *Elastic Behavior of a Two-Dimensional Crystal Near Melting*, Phys. Rev. Lett. **93** No. 25 (2004), 255703.
- [194] А. Klimyk, K. Schmudgen, *Quantum Groups and their Representations*, (Springer, Berlin, 1997)
- [195] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, (Springer, Berlin, 1966)