

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Пронько Андрей Георгиевич

**Корреляционные функции вершинных моделей с
фиксированными граничными условиями и их
приложения к задачам комбинаторики**

01.01.03 – Математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Оглавление

Введение	6
Глава 1. Шестиугольная модель с граничными условиями типа доменной стенки	12
1.1. Определение модели и формула Изергина–Корепина для статистической суммы	12
1.1.1. Вершинные конфигурации и веса	12
1.1.2. Граничные условия доменной стенки	13
1.1.3. Неоднородная модель	15
1.1.4. Формула Изергина–Корепина	15
1.2. Комбинаторные приложения	16
1.2.1. Замощения домино ацтекского алмаза	16
1.2.2. Матрицы чередующихся знаков	19
1.2.3. Некоторые результаты о перечислениях матриц чередующихся знаков	21
1.2.4. Явления разделения фаз	23
1.3. Эквивалентные представления для статистической суммы	24
1.3.1. Некоторые сведения из теории ортогональных полиномов	25
1.3.2. Преобразование определителя в формуле Изергина–Корепина	27
1.3.3. Представления в терминах определителей Фредгольма линейных интегральных операторов	29
1.3.4. Представление в виде определителя Фредгольма конечной матрицы	33
Глава 2. Граничные корреляционные функции шестиугольной модели	37
2.1. Формулировка модели в терминах квантового метода обратной задачи	37
2.1.1. L -оператор и матрица монодромии	37
2.1.2. Алгебра Янга–Бакстера	40
2.1.3. «Двуузельная» модель	41
2.1.4. Рекуррентное соотношение для статистической суммы	43
2.2. Одноточечные граничные корреляционные функции	45
2.2.1. Определение граничных корреляционных функций	45
2.2.2. Вычисление для неоднородной модели	47
2.2.3. Явные выражения в точке свободных фермионов	49
2.2.4. Результаты в однородном пределе	51

2.3.	Двухточечные граничные корреляционные функции	52
2.3.1.	Определение и вычисление для неоднородной модели	52
2.3.2.	Результаты в однородном пределе	56
2.3.3.	Представление через ортогональные полиномы	57
2.3.4.	Представление через одноточечные функции	60
Глава 3.	Приложения к задачам перечислений матриц чередующихся знаков	62
3.1.	Статистическая сумма и перечисления матриц чередующихся знаков	62
3.1.1.	Некоторые свойства формулы Изергина–Корепина	62
3.1.2.	Линия свободных фермионов	65
3.1.3.	Точка льда и число матриц чередующихся знаков	66
3.1.4.	Дуальная точка льда и 3-перечисления	67
3.2.	Граничная корреляционная функция и детальные перечисления матриц чередующихся знаков	69
3.2.1.	Свойства граничной корреляционной функции	70
3.2.2.	Линия свободных фермионов	73
3.2.3.	Точка льда и детальные 1-перечисления	74
3.2.4.	Дуальная точка льда и детальные 3-перечисления	76
3.3.	Доказательство теоремы о детальных 3-перечислениях матриц чередующихся знаков	79
3.3.1.	Вывод рекуррентного соотношения	79
3.3.2.	Производящая функция как решение линейного дифференциального уравнения	81
3.3.3.	Кубическое преобразование производящей функции	83
3.3.4.	Явный вид производящей функции	87
Глава 4.	Нелокальные корреляционные функции шестивершинной модели	89
4.1.	Вероятность образования пустоты	89
4.1.1.	Определение вероятности образования пустоты	89
4.1.2.	Рекуррентное соотношение и частные значения	91
4.1.3.	Выражение для неоднородной модели	93
4.1.4.	Выражение в однородном пределе	95
4.2.	Представление для вероятности образования пустоты в виде многократного интеграла	97

4.2.1.	Преобразование к интегральному представлению	97
4.2.2.	Многоточечная производящая функция	99
4.2.3.	Симметризация подынтегрального выражения	102
4.2.4.	Эквивалентные интегральные представления	104
4.3.	Вероятность конфигурации ряда	106
4.3.1.	Определение вероятности конфигурации ряда	107
4.3.2.	Статистическая сумма на верхней подрешетке	108
4.3.3.	Статистическая сумма на нижней подрешетке	110
4.3.4.	Связь с вероятностью образования пустоты	112
Глава 5. Арктическая кривая шестивершинной модели и предельная форма матриц чередующихся знаков		115
5.1.	Разделение фаз и свойства вероятности образования пустоты	115
5.1.1.	Разделение фаз и арктическая кривая	115
5.1.2.	Вероятность образования пустоты и термодинамический предел	118
5.1.3.	Точки касания границы арктической кривой	121
5.1.4.	Асимптотика производящей функции в разупорядоченной фазе	123
5.2.	Уравнения перевала и гипотеза конденсации	127
5.2.1.	Случай точки свободных фермионов	128
5.2.2.	Конденсация корней и арктический эллипс	132
5.2.3.	Гипотеза конденсации в общем случае	135
5.2.4.	Редуцированное уравнение перевала	137
5.3.	Арктическая кривая и ее частные случаи	138
5.3.1.	Предельная форма матриц чередующихся знаков	139
5.3.2.	Арктическая кривая в параметрической форме	142
5.3.3.	Уравнения арктической кривой для частных значений параметров	145
5.3.4.	Производящая функция в антисегнетоэлектрической фазе	148
Глава 6. Фазовый переход третьего рода в замощениях домино		153
6.1.	Вероятность образования пустоты в точке свободных фермионов	153
6.1.1.	Представления в терминах ганкелевых определителей	153
6.1.2.	Представления в терминах определителей Фредгольма	158
6.1.3.	Представление через дифференциально-разностные уравнения	163
6.1.4.	Представление через τ -функцию шестого уравнения Пенлеве	171

6.2.	Фазовый переход в замощениях домино	178
6.2.1.	Свободная энергия на L-образной области и замощения домино	178
6.2.2.	Фазовый переход третьего рода	183
6.2.3.	Частный случай квадратной замороженной области	186
6.2.4.	Формулировка задачи в терминах дискретного кулоновского газа	190
6.3.	Вывод выражения для свободной энергии на L-образной области	193
6.3.1.	Резольвента дискретного кулоновского газа	194
6.3.2.	Явные выражения для резольвенты	197
6.3.3.	Свободная энергия дискретного кулоновского газа в режиме I	202
6.3.4.	Свободная энергия дискретного кулоновского газа в режиме II	205
Глава 7.	Пятивершинная модель и плоские разбиения	210
7.1.	Пятивершинная модель в точке свободных фермионов и плоские разбиения в ящике	210
7.1.1.	Формулировка модели и связь с плоскими разбиениями	210
7.1.2.	Пятивершинная модель и фермионы	213
7.1.3.	Свойства операторов и статистическая сумма	217
7.1.4.	Одноточечная корреляционная функция	221
7.2.	Неоднородная пятивершинная модель и взвешенные перечисления плоских разбиений	224
7.2.1.	Неоднородная пятивершинная модель	224
7.2.2.	Операторная формулировка и детерминантные представления	226
7.2.3.	Матричные произведения	229
7.2.4.	Статическая сумма и одноточечная функция	233
7.3.	Пятивершинная модель с произвольными весами	235
7.3.1.	Детерминантная формула пятивершинной модели	236
7.3.2.	Комбинаторная интерпретация	240
7.3.3.	Статистическая сумма в однородном пределе	243
7.3.4.	Эквивалентные представления для статистической суммы	244
Заключение	248
Список литературы	250

Введение

Актуальность темы исследования. Изучение свойств интегрируемых моделей двумерной статистической механики тесно связано с вычислением в точном виде их корреляционных функций [1–3]. В последние годы наблюдается возрастающий интерес, мотивированный различными математическими и физическими приложениями, к решеточным моделям заданных на конечных решетках и при фиксированных граничных условиях. Основной круг задач связанный с этими моделями — получение явных формул для статистических сумм и корреляционных функций в виде детерминантов или многократных интегралов от известных функций. Это позволяет, в частности, расширить список задач комбинаторики, которые могут целенаправленно решаться с помощью методов основанных на квантовой интегрируемости, а также исследовать явления разделения фаз, которые тесно связаны с проблемами теории протекания (огрубления, плавления).

Важным примером модели, для которой актуальны указанные задачи, является знаменитая шестивершинная модель, или модель квадратного льда. Заметную роль в изучении этой модели, и, в целом, на развитие всей теории интегрируемых моделей, сыграло ее решение в предположении периодических граничных условий, основанное на анзаце Бете, которое было дано в работах Либа [4] и Сазерленда [5]. Частный случай фиксированных граничных условий, при которых шестивершинная модель является интересным объектом изучения — это так называемые граничные условия типа доменной стенки. Шестивершинная модель с этими условиями определяется на конечной квадратной решетке образованной пересечением равного числа горизонтальных и вертикальных прямых, а сами условия означают, что состояния на внешних ребрах каждой из четырех сторон решетки находятся в сегнетоэлектрическом порядке, и имеют противоположную ориентацию на ее противоположных сторонах.

Исторически, шестивершинная модель с такими граничными условиями была введена Корепиным [6], в контексте доказательства гипотезы Годена для норм волновых функций Бете. Изергиным [7] было показано, что статистическая сумма модели представляется точно в виде определителя конечной матрицы. Это представление, известное как формула Изергина–Корепина, получила важные приложения в комбинаторике, в силу взаимно-однозначного соответствия между конфигурациями модели и матрицами чередующихся знаков. Впервые это было продемонстрировано Купербергом в его доказательстве гипотезы Миллса–Роббинса–Рамси о числе матриц чередующихся знаков [8]. Обобщения для детальных перечислений матриц чередующихся знаков были даны в работах Зейльбергера [9], Разумова и Строганова [10], и ряда других авторов.

Современный интерес к шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки во многом обусловлен явлениями разделения фаз. В существенной степени эти явления проистекают от ограничения на разрешенные вершинные состояния — «правила льда», которое индуцирует макроскопически большие области сегнетоэлектрического порядка вблизи границ. Задачи, возникающие в связи с этими явлениями, заключаются в установлении предельных форм (интерфейсов) и изучения статистики случайных конфигураций (флуктуаций). Постановка этих задач восходит к классической работе Вершика и Керова об асимптотике мер Планшереля и предельной формы диаграмм Юнга [11]. Непосредственно шестивершинная модель, в простейшем частном случае — точке свободных фермионов, связана с замощениями домино ацтекских диамантов, комбинаторной задаче, активно исследовавшейся в работах Кеньона, Кона, Проппа и Элкиеса в связи с теоремой об «арктическом круге» [12, 13].

Наиболее интересной, и в тоже время трудной открытой задачей является вычисление трехмерной предельной формы шестивершинной модели в формулировке модели в терминах функции высоты [14]. Эта формулировка является естественным обобщением широко используемого подхода в задачах димеров на двудольных графах. В тоже время, шестивершинная модель существенным образом отличается от моделей димеров присутствием взаимодействия описываемого квантово-групповым (кроссинг) параметром, и сводиться к димерам только в частном случае точки свободных фермионов. В более простой постановке, задача о предельной форме сводится к нахождению арктической кривой — границы между областями разупорядочивания и сегнетоэлектрического порядка, которая также иногда называется замороженной границей предельной формы. В случае граничных условий типа доменной стенки арктическая кривая интересна также тем, что описывает предельную форму матриц чередующихся знаков.

В силу названных выше причин, главное место в нашем исследовании, а именно шесть глав из семи, занимает шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки в контексте задачи вычисления ее корреляционных функций. Одним из принципиально важных результатов является представление в терминах многократного контурного интеграла для нелокальной корреляционной функции — вероятности образования пустоты. Это представление играет ключевую роль для вывода параметрического уравнения для арктической кривой. Также тесно связан с вероятностью образования пустоты новый объект — так называемая шестивершинная модель на L-образной области. Вывод термодинамики этой модели на примере точки свободных фермионов, связанной с замощениям домино, позволил выявить интересную интерпретацию арктической кривой как кривой фазового перехода третьего рода, возникающего при деформациях ацтекских диамантов путем вырезания прямоугольной

области макроскопического размера в углу диаманта.

Наконец седьмая, последняя глава посвящена пятивершинной модели [15] на конечной квадратной решетке с фиксированными граничными условиями, такими что допустимые конфигурации модели находятся во взаимно-однозначном соответствии с плоскими разбиениями (трехмерными диаграммами Юнга) в ящике, которые также эквивалентны замощениям ромбами нерегулярного шестиугольника. Плоские разбиения — это один из самых важных объектов комбинаторики [16]. Известно, что плоские разбиения в ящике демонстрируют явления разделения фаз, которые описываются аналогами теоремы об «арктическом круге» [17, 18]. Пятивершинная модель интересна тем, что задает интегрируемое обобщение плоских разбиений и имеет интерпретацию как модель взаимодействующих димеров на решетке типа «кирпичная кладка» [19]. Нами вычисляется одноточечная функция пятивершинной модели для случая фиксированных граничных условий в точке свободных фермионов, а также выводятся различные представления для статистической суммы описывающей скалярное произведение бетовских векторов вне поверхности масс .

Степень разработанности темы исследования. Вычисление корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей, к которым принадлежат и вершинные модели статистической механики, в существенной степени, помимо собственно интегрируемости (уравнения Янга–Бакстера), основано на использовании трансляционной инвариантности. Это предполагает либо использование периодических (или более общих твистованных, совместных с интегрируемостью) граничных условий, в случае систем в конечном объеме, либо пренебрежение эффектов от границ, в случае систем в бесконечном объеме. Такие предположения являются стандартными при вычислении корреляционных функции, например, одномерного бозе-газа и спиновой XXZ цепочки Гейзенберга [2, 3].

В случае вершинных моделей на конечных решетках с фиксированными граничными условиями трансляционная инвариантность нарушена изначально, на уровне определения модели. По этой причине вычисление корреляционных функций для таких моделей представляет из себя сложную математическую задачу, и требует развития новых методов, приспособленных для получения замкнутых выражений. Например, даже оригинальный метод, примененный Изергиным и Корешиним при выводе детерминантной формулы для статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки оказывается не эффективен в случае корреляционных функций. Решение задачи удалось достигнуть путем развития нового подхода, основанного на выводе рекуррентных соотношений, которые выражают корреляционные функции в терминах статистических сумм на решетках меньшего размера. Это позволяет, после ряда преобразований, получать представления в

терминах кратных контурных интегралов, весьма близких по структуре тем, что известны для корреляционных функций ХХZ цепочки Гейзенберга [20, 21].

При исследовании проблемы вычисления корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки было также обнаружено, что существует ряд открытых задач связанных с формулой Изергина–Корепина в ее комбинаторном контексте. В частности, исследование этой формулы для однородной модели позволило выявить тесную связь перечислений матриц чередующихся знаков с классическими полиномами из схемы Аски–Вильсона. Развитие этих связей на случай граничных корреляционных функций позволило дать новое, более простое доказательство известных результатов о детальных перечислениях, а также получить новый результат — вывести явное выражение для детальных 3-перечислений.

Что касается пятивершинной модели на конечной решетке с фиксированными граничными условиями, то, несмотря на ее связь с плоскими разбиениями, эта модель, как оказалось, мало привлекала внимание исследователей. К числу основных известных результатов можно отнести формулу для скалярного произведения бетовских векторов вне поверхности масс связанных с квантовой R-матрицей пятивершинной модели, которая имеет смысл статистической суммы для граничных условий типа «скалярное произведение» [22]. Однако, даже вариант этой формулы для однородной модели, который наиболее интересен с точки зрения статистической механики, не был известен. Также практически не изученными остаются и корреляционные функции модели. По этой причине пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями является одной из интересных вершинных моделей, наряду с шестивершинной моделью, заслуживающих активного изучения.

Цели и задачи диссертационной работы. Основная цель работы — это исследование влияния граничных условий на свойства интегрируемых решеточных систем классической статистической механики. Одной из основных задач работы является вычисление корреляционных функций шестивершинной модели и ее частных (вырожденных) случаев на решетках конечного размера при фиксированных граничных условиях. Другой задачей является выявления связей корреляционных функций этих моделей с известными объектами комбинаторики, такие как матрицы чередующихся знаков и плоские разбиения. Важным приложением результатов о корреляционных функциях является изучение явлений разделения фаз, обусловленных фиксированными граничными условиями. Одна из целей в этом направлении — найти уравнение арктической кривой шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, которая также описывает предельную форму матриц чередующихся знаков.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический ха-

рактик. Результаты, изложенные в диссертации, а также методы вычисления корреляционных функций вершинных моделей с фиксированными граничными условиями, могут быть использованы для дальнейшего развития теории корреляционных функций решеточных моделей статистической механики и связанных с ними одномерных квантовых интегрируемых систем. Ожидается, что полученные результаты стимулируют дальнейшие исследования явлений разделений фаз, теории предельных форм, перечислений матриц чередующихся знаков, димерных моделей и связанных с ними задачами замощений конечных областей регулярными многогранниками. Кроме того, как было недавно обнаружено в экспериментах с графеновыми пленками, существует практическая реализация квадратного льда [23], поэтому результаты диссертации могут найти применение и при исследовании наноструктур.

Методология и методы исследования. Основным методом, используемым для вычисления корреляционных функций, является метод коммутационных соотношений для элементов квантовой матрицы монодромии (алгебры Янга–Бакстера), являющийся одним из компонентов квантового метода обратной задачи. Также используются методы: теории ортогональных полиномов, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории случайных матриц, теории функций комплексного переменного.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту. Все основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

1. Получены представления для статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в терминах определителей Фредгольма.
2. Вычислены одно- и двухточечные граничные корреляционные функции шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, и показано, что двухточечные функции разрешимы в терминах одноточечных.
3. Установлена связь перечислений матриц чередующихся знаков с классическими ортогональными полиномами, а именно, что 1-, 2-, и 3-перечисления связаны с непрерывными полиномами Хана, полиномами Мейкснера–Поллачка, и дуальными непрерывными полиномами Хана, соответственно, при специальных значениях параметров этих полиномов.
4. Доказана теорема о детальных 3-перечислениях матриц чередующихся знаков.
5. Вычислены нелокальные корреляционные функции шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки — так называемые вероятность образования пустоты и вероятность конфигурации ряда, в терминах многократных контурных интегралов.
6. Найдена арктическая кривая шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, для всех значений параметров модели, при которых эта кривая существует. Частный случай этой кривой — это предельная форма матриц чередующихся знаков.

7. Получены различные представления для вероятности образования пустоты шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в точке свободных фермионов, а именно, в терминах: ганкелевых определителей, определителей Фредгольма, решения системы дифференциально-разностных уравнений типа уравнений Тоды, τ -функции шестого уравнения Пенлеве.

8. Вычислена свободная энергия шестивершинной модели в точке свободных фермионов на L-образной области.

9. Установлено, что арктическая кривая является кривой фазового перехода третьего рода возникающего при деформациях ацтекских диамантов путем вырезания прямоугольной области у угла диаманта. Обнаруженный фазовый переход тесно связан с фазовыми переходами Дугласа–Казакова и Гросса–Виттена–Вадья из теории матричных моделей.

10. Вычислена одноточечная корреляционная функция пятивершинной модели с специальными фиксированными граничными условиями, при которых модель описывает плоские разбиения в ящике, что эквивалентно замощениям ромбами нерегулярного шестиугольника.

11. Вычислен однородный предел детерминантной формулы для статистической суммы пятивершинной модели с граничными условиями типа «скалярного произведения» и показано, что эта величина является τ -функцией шестого уравнения Пенлеве для специальных значений параметров, соответствующих классическим решениям.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на регулярных семинарах лаборатории математических проблем физики ПОМИ РАН, семинарах Отделов Математики и Теоретической физики Университета г. Вупперталь (Германия), семинарах Национального института ядерной физики, г. Флоренция, семинарах Международного центра теоретической физики, г. Триест (Италия), а также на следующих семинарах и конференциях: международном семинаре «Classical and Quantum Integrable Systems» (Протвино, Россия, 2011), международной конференции «Integrable Lattice Models and Quantum Field Theories» (Бад Хоннеф, Германия, 2014), международном семинаре «Statistical Mechanics, Integrability and Combinatorics» (Флоренция, Италия, 2015), международной конференции «Boundary Degrees of Freedom and Thermodynamics of Integrable Models» (Натал, Бразилия, 2016).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 21 печатных работах, из них 21 статей в рецензируемых журналах из списка ВАК [24–44].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 260 страниц, библиография включает 165 наименований.

Шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки

Настоящая глава носит вводный характер. В разделах 1 и 2 обсуждаются базовые факты о шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки, которая является одним из основных предметов исследования диссертации. В этих разделах приводятся определение модели, формула для статистической суммы (формула Изергина–Корепина), и связь модели с задачами комбинаторики. Раздел 3, посвященный эквивалентным представлениям для статистической суммы однородной модели в терминах определителей Фредгольма, основан на результатах автора, изложенных в работах [25, 26].

1.1. Определение модели и формула Изергина–Корепина для статистической суммы

Здесь мы дадим общее определение шестивершинной модели, граничных условий доменной стенки, неоднородной модели и приведем формулу Изергина–Корепина для статистической суммы.

1.1.1. Вершинные конфигурации и веса

Шестивершинная модель, известная также как модель типа льда [1, 45], является моделью равновесной статистической механики, которая была введена для моделирования фазовых переходов в плоских кристаллах с квадратной кристаллической структурой, с двухвалентными ионами в вершинах решетки и одновалентными ионами на ребрах (например, кислорода и водорода, соответственно). Конфигурации модели могут быть изображены путем размещения на ребрах квадратной решетки стрелок, направленных вдоль ребер; стрелки указывают на присутствие валентных связей между ионами у вершины к которой они направлены. Двухвалентность ионов в вершинах означает, что каждая вершина решетки должна содержать две входящие стрелки на примыкающих ребрах; на двух других ребрах стрелки, следовательно, должны быть исходящими. Шесть возможных конфигураций стрелок вокруг вершины, в стандартном порядке, показаны на Рис. 1.1.

Параметрами модели являются энергии конфигураций стрелок вокруг вершины, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_6$;

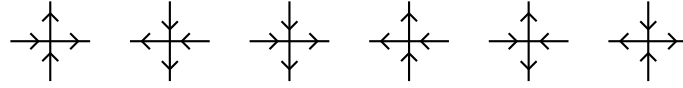


Рис. 1.1. Шесть конфигураций стрелок вокруг вершины

энергия каждой конфигурации модели есть сумма энергий вершин всей решетки. Каждой вершине решетки, таким образом, можно сопоставить больцмановский вес, значение которого зависит только от энергии вершинной конфигурации стрелок вокруг этой вершины,

$$w_i = \exp\{-\epsilon_i/k_B T\}, \quad i = 1, \dots, 6,$$

где k_B — постоянная Больцмана, а T — температура. В большинстве приложений достаточно полагать, что больцмановские веса (или вершинные энергии) инвариантны относительно обращения направления всех стрелок, и выражаются через три параметра a , b и c :

$$w_1 = w_2 \equiv a, \quad w_3 = w_4 \equiv b, \quad w_5 = w_6 \equiv c. \quad (1.1)$$

Параметр

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (1.2)$$

играет важную роль в физике модели [1, 4, 5, 46, 47]. У модели существует три фазы, в зависимости от значения этого параметра: сегнетоэлектрическая фаза, $\Delta \geq 1$, антисегнетоэлектрическая фаза, $\Delta \leq -1$, и разупорядоченная фаза, $-1 < \Delta < 1$.

Ниже в основном модель будет рассматриваться в разупорядоченной фазе. В этой фазе веса параметризуются в виде

$$a = \sin(\lambda + \eta), \quad b = \sin(\lambda - \eta), \quad c = \sin 2\eta, \quad (1.3)$$

причем $\Delta = \cos 2\eta$. Параметризация (1.3) задает положительно определенные веса, при значениях параметров:

$$\eta \in (0, \pi/2), \quad \lambda \in (\eta, \pi/2 - \eta). \quad (1.4)$$

В большинстве вычислений проводимых ниже выбор области значений параметров (фазы модели) несущественен, поскольку подходящая параметризация весов в других фазах может быть получена из (1.3) аналитическим продолжением по параметрам η и λ .

1.1.2. Граничные условия доменной стенки

Мы будем рассматривать шестивершинную модель на конечной квадратной решетке образованной пересечением N вертикальных и N горизонтальных прямых (т. н. $N \times N$

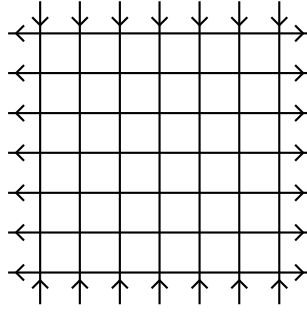


Рис. 1.2. Граничные условия доменной стенки

решетка). Кроме того, направления стрелок на всех внешних ребрах, если не оговорено иное, будут предполагаться фиксированными определенным образом, известным как *граничные условия доменной стенки* [6]. Эти граничные условия означают, что все стрелки на внешних горизонтальных ребрах направлены извне решетки, а на всех внешних вертикальных ребрах — внутрь решетки, см. Рис. 1.2.

Обозначим через Ω_N множество всех конфигураций шестивершинной модели на $N \times N$ решетке с граничными условиями доменной стенки. Пусть $W_N(\mathcal{C})$ есть больцмановский вес конфигурации $\mathcal{C} \in \Omega_N$,

$$W_N(\mathcal{C}) = a^{n_a(\mathcal{C})} b^{n_b(\mathcal{C})} c^{n_c(\mathcal{C})},$$

где $n_a(\mathcal{C})$, $n_b(\mathcal{C})$ и $n_c(\mathcal{C})$ обозначают число вершин с весами равными a , b и c , соответственно, $n_a(\mathcal{C}) + n_b(\mathcal{C}) + n_c(\mathcal{C}) = N^2$. Статистическая сумма модели обычно обозначается как Z_N , и определяется как сумма по всем допустимым конфигурациям:

$$Z_N = \sum_{\mathcal{C} \in \Omega_N} W_N(\mathcal{C}).$$

Основным предметом нашего интереса нас будут *корреляционные функции* модели. Мы будем рассматривать корреляционные функции которые имеют смысл вероятностей некоторых состояний. Более точно, пусть γ есть некоторая совокупность условий, выделяющая из множества Ω_N некоторое подмножество Ω_N^γ . Поскольку величина $W_N(\mathcal{C})/Z_N$ есть мера Гиббса (или, эквивалентно, вероятностная мера на множестве конфигураций модели), корреляционная функция, связанная с набором условий γ , может быть определена как вероятность выполнения этих условий суммированием по состояниям из множества Ω_N^γ :

$$\text{Prob}(\gamma) = \frac{1}{Z_N} \sum_{\mathcal{C} \in \Omega_N^\gamma} W_N(\mathcal{C}). \quad (1.5)$$

Типичным примером набора γ является набор условий фиксирующих направления стрелок на заданных ребрах решетки. Для определения и вычисления этих корреляционных функций (в Главах 2 и 4) мы будем использовать квантовый метод обратной задачи.

1.1.3. Неоднородная модель

Чтобы использовать квантовый метод обратной задачи в вычислениях, нам понадобится рассматривать неоднородную версию модели, в которой веса вершины расположенной на пересечении α -ой вертикальной прямой (нумеруемой справа) и k -ой горизонтальной прямой (нумеруемой сверху) даются выражениями

$$a_{\alpha k} = a(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad b_{\alpha k} = b(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad c_{\alpha k} = c, \quad (1.6)$$

где

$$a(\lambda, \nu) = \sin(\lambda - \nu + \eta), \quad b(\lambda, \nu) = \sin(\lambda - \nu - \eta), \quad c = \sin 2\eta. \quad (1.7)$$

Параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ предполагаются все неравными друг другу; это же предполагается и для ν_1, \dots, ν_N . Параметр

$$\Delta = \frac{a_{\alpha k}^2 + b_{\alpha k}^2 - c_{\alpha k}^2}{2a_{\alpha k}b_{\alpha k}} = \cos 2\eta$$

принимает одно и то же значение для всех вершин, что гарантирует интегрируемость [1].

Статистическая сумма определяется следующим образом

$$Z_N = \sum_{\mathcal{C} \in \Omega_N} \prod_{\alpha, k=1}^N w_{\alpha k}(\mathcal{C}),$$

где $w_{\alpha k}(\mathcal{C})$ принимает значения $w_{\alpha k}(\mathcal{C}) = a_{\alpha k}, b_{\alpha k}, c_{\alpha k}$, в зависимости от конфигурации \mathcal{C} . Очевидно, что $Z_N = Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N)$ где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и ν_1, \dots, ν_N могут рассматриваться как «переменные»; параметр η имеет смысл «константы связи» и часто опускается в обозначениях. После вычислений с помощью квантового метода обратной задачи величины для однородной модели (например, статистическая сумма) могут быть получены из таковых для неоднородной модели в соответствующем пределе,

$$\lambda_\alpha \rightarrow \lambda, \quad \nu_k \rightarrow \nu, \quad \alpha, k = 1, \dots, N, \quad (1.8)$$

где, без потери общности, можно положить $\nu = 0$, см. (1.7). Мы будем называть процедуру (1.8) как *однородный предел*.

1.1.4. Формула Изергина–Корепина

Статистическая сумма неоднородной шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки, в отличие от, например, случая периодических граничных условий, обладает тем интересным и важным свойством, что она допускает точное представление в виде некоторого определителя. Эта представление известно как *формула Изергина–Корепина*:

$$Z_N = \frac{\prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) b(\lambda_\alpha, \nu_k)}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha) \prod_{1 \leq j < k \leq N} d(\nu_j, \nu_k)} \det [\varphi(\lambda_\alpha, \nu_k)]_{\alpha, k=1, \dots, N}, \quad (1.9)$$

где

$$d(\lambda, \lambda') \equiv \sin(\lambda - \lambda'), \quad (1.10)$$

и

$$\varphi(\lambda, \nu) = \frac{c}{a(\lambda, \nu)b(\lambda, \nu)}, \quad (1.11)$$

где функции $a(\lambda, \nu)$ и $b(\lambda, \nu)$ определены в (1.7).

Исторически, формула (1.9) была предложена Изергиным [7] как единственное решение определенного набора условий, которые однозначно фиксируют статистическую сумму как функцию $Z_N = Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N)$, и которые были выведены Корепиным [6]. Здесь мы воспользуемся формулой (1.9), отсылая за деталями оригинального доказательства к работе [48]. В следующей главе мы покажем, что формула (1.9) естественно возникает при вычислении граничных корреляционных функций модели в рамках чисто алгебраического метода, основанного на алгебре Янга–Бакстера.

В однородном пределе формула Изергина–Корепина дает для статистической суммы выражение

$$Z_N = \frac{a^{N^2} b^{N^2}}{\prod_{n=0}^{N-1} (n!)^2} \det \left[\partial_\lambda^{j+k-2} \varphi \right]_{j,k=1,\dots,N}. \quad (1.12)$$

Здесь функция $\varphi = \varphi(\lambda)$ определяется формулой

$$\varphi \equiv \varphi(\lambda, 0) = \frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda + \eta) \sin(\lambda - \eta)} \equiv \frac{c}{ab}, \quad (1.13)$$

а веса a , b , c подразумеваются параметризованными в виде (1.3). В дальнейшем мы будем называть (1.12) формулой Изергина–Корепина для однородной модели.

1.2. Комбинаторные приложения

Шестиугольная модель с граничными условиями типа доменной стенки тесно связана объектами перечислительной комбинаторики — замощениями домино ацтекского диаманта, и матрицами чередующихся знаков. Цель этого раздела — дать краткий обзор известных результатов и сформулировать основные комбинаторные задачи, решение которых, в более общей постановке задаваемой шестиугольной моделью, удастся дать с помощью вычисления корреляционных функций вида (1.5).

1.2.1. Замощения домино ацтекского диаманта

Рассмотрим разбиение плоскости на квадраты с длиной ребра равной 1 и пометим квадраты координатами их центров (x, y) , где x, y — полуцелые числа. *Ацтекским диамантом*

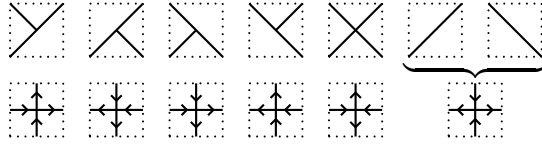


Рис. 1.3. Фрагменты замощений домино (верхний ряд) и соответствующие им стрелочные конфигурации шестивершинной модели (нижний ряд).

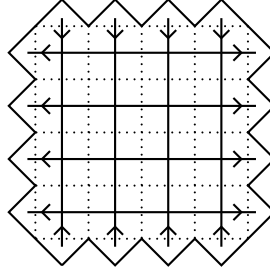


Рис. 1.4. Ацтекский диамант порядка $N = 4$ и связанная с ней квадратная решетка с граничными условиями типа доменной стенки; пунктирные линии указывают расположения фрагментов замощений домино и стрелочных конфигураций.

порядка $N \in \mathbb{N}$ называется область плоскости образованная квадратами, такими что $|x| + |y| \leq N$. Замощениями домино называется разбиение на 2×1 и 1×2 прямоугольники, образованные склеиванием двух элементарных квадратов. Число замощений домино ацтекского диаманта порядка N будем обозначать как $\text{AD}(N)$.

Для обсуждения связи замощений домино с шестивершинной моделью, удобно рассматривать ацтекский диамант повернутый на 45° . В такой формулировке (см., например, [49]) замощения домино отображаются на конфигурации шестивершинной модели путем замены элементарных фрагментов замощений домино на стрелочные конфигурации как показано на Рис. 1.3. Ацтекский диамант порядка N соответствуют $N \times N$ решетке с граничными условиями типа доменной стенки, см. Рис. 1.4.

Как следует из указанного соответствия между замощениями домино и стрелочными конфигурациями (Рис. 1.3), число замощений домино ацтекского диаманта $\text{AD}(N)$ даются статистической суммой однородной шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки с весами $w_1 = \dots = w_5 = 1$ и $w_6 = 2$. Чтобы выразить число замощений $\text{AD}(N)$ через статистическую сумму Изергина–Корепина Z_N , сначала сделаем преобразование к симметричным весам (1.1), используя тот факт, что в каждой конфигурации \mathcal{C} шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки число вершин пятого и шестого типов (см. Рис. 1.1), $n_5(\mathcal{C})$ и $n_6(\mathcal{C})$, соответственно, связаны соотношением $n_6(\mathcal{C}) = n_5(\mathcal{C}) + N$. В результате, найдем, что замощения домино соответствуют отношению

весов $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$, что достигается выбором параметров $\lambda = \pi/2$ и $\eta = \pi/4$ в (1.3).

Таким образом,

$$\text{AD}(N) = (\sqrt{2})^N (\sqrt{2})^{N^2} Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\pi/4}} \quad (1.14)$$

где первый множитель учитывает исходную асимметрию между весами w_5 и w_6 , а второй множитель — общую нормировку весов.

Чтобы вычислить статистическую сумму Z_N при $\lambda = \pi/2$ и $\eta = \pi/4$, рассмотрим формулу Изергина–Корепина для статистической суммы неоднородной модели (1.9). Поскольку $\varphi(\lambda, \nu) \Big|_{\eta=\pi/4} = -2/\cos(2\lambda - 2\nu)$, определитель в (1.9) при $\eta = \pi/4$ может быть вычислен с помощью формулы

$$\det \left[\frac{1}{x_j + y_k} \right]_{j,k=1,\dots,N} = \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_j - x_k)(y_j - y_k)}{\prod_{j,k=1}^N (x_j + y_k)},$$

если положить $x_j = e^{2i\lambda_j}$ и $y_k = e^{2i\nu_k}$. В результате, получим

$$Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N) \Big|_{\eta=\pi/4} = \prod_{1 \leq j < k \leq N} \cos(\lambda_j - \lambda_k) \cos(\nu_k - \nu_j). \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что в однородном пределе (1.8) статистическая сумма равна

$$Z_N \Big|_{\eta=\pi/4} = Z_N(\lambda, \dots, \lambda; 0, \dots, 0) \Big|_{\eta=\pi/4} = 1, \quad (1.16)$$

и, следовательно,

$$\text{AD}(N) = 2^{N(N+1)/2}, \quad (1.17)$$

что есть знаменитый результат о числе замощений домино ацтекского диаманта [49].

Формула (1.16) на самом деле позволяет получить более сильный результат, впервые приведенный в [50]. Рассмотрим обобщение задачи о числе замощений ацтекского диаманта на случай, когда домино с разной пространственной ориентацией имеют различный статистический вес, например, NE-SW домино имеют вес $\sqrt{2(1-\alpha)}$, а NW-SE домино имеют вес $\sqrt{2\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1)$. Обозначим число таких взвешенных замощений ацтекского диаманта порядка N как $\text{AD}(N; \alpha)$. Эта величина дается статистической суммой однородной шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки с весами

$$w_1 = w_2 = \sqrt{2(1-\alpha)}, \quad w_3 = w_4 = \sqrt{2\alpha}, \quad w_5 = 1, \quad w_6 = 2. \quad (1.18)$$

После перехода к симметричной модели, для которой $a : b : c = \sqrt{1-\alpha} : \sqrt{\alpha} : 1$, получим, что для $\text{AD}(N; \alpha)$ имеет место формула, аналогичная (1.14), с единственным отличием, что величина $Z_N \Big|_{\eta=\pi/4}$ вычисляется при λ являющейся функцией α . Из (1.16), однако, следует, что $Z_N \Big|_{\eta=\pi/4}$ не зависит от λ , и, следовательно, $\text{AD}(N; \alpha) = \text{AD}(N)$ для любого $\alpha \in (0, 1)$.

Независимость числа замощений домино от параметра асимметрии α является отличием ацтекского диаманта от других областей, для которых существуют замощения домино. В последствии мы покажем, что некоторая нелокальная корреляционная функция шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки (так называемая вероятность образования пустоты) позволяет исследовать макроскопические деформации ацтекского диаманта. Такие деформации порождают фазовый переход (в термодинамическом пределе, $N \rightarrow \infty$) по параметру α , который тесно связан с фазовыми переходами известными в теории случайных матриц.

1.2.2. Матрицы чередующихся знаков

Матрицы чередующихся знаков — это матрицы, элементы которых состоят из 1, 0 и -1 , причем в каждой строке и каждом столбце ненулевые элементы чередуют знак, и первым и последним ненулевым элементом является 1. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Исторически, матрицы чередующихся знаков возникли как обобщение матриц перестановок, см., например, монографию [51], где обсуждаются различные аспекты теории матриц чередующихся знаков.

Основная комбинаторная задача связанная с матрицами чередующихся знаков — нахождение числа матриц, в том числе, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, а также подсчет их числа, где различные матрицы входят с разным весом. Мы будем называть такие величины *перечислениями*.

Типичный пример перечисления — это сумма $N \times N$ матриц чередующихся знаков, в которую матрица B входит с весом $x^{m(B)}$, где $m(B)$ — число ее матричных элементов равных -1 . Эта сумма называется *x -перечисление* матриц чередующихся знаков, и обозначается как $A(N; x)$. Более точно, обозначим множество всех матриц чередующихся знаков как Λ_N и определим функцию $m(B) \in \mathbb{N}$ на элементах этого множества формулой:

$$m(B) = \sum_{j,k} \chi(-B_{jk}), \quad \chi(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

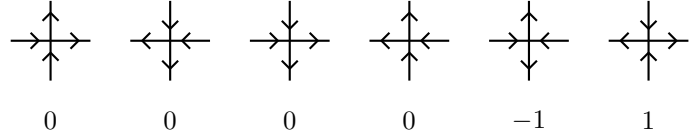


Рис. 1.5. Соответствие между вершинами и элементами матриц чередующихся знаков.

Тогда x -перечисление матриц чередующихся знаков — это величина

$$A(N; x) = \sum_{B \in \Lambda_N} x^{m(B)}.$$

Примером перечисления матриц чередующихся знаков с дополнительным условием является так называемое *детальное* перечисление. В этом перечислении подсчет идет по набору матриц имеющих (единственный) элемент 1 первой строки в заданной r -ой позиции (столбце), $r = 1, \dots, N$. Обозначим множество таких матриц чередующихся знаков как $\Lambda_{N,r}$; поскольку первая строка содержит один и только один такой элемент, $\bigcup_r \Lambda_{N,r} = \Lambda_N$. Детальное x -перечисление обозначается как $A(N, r; x)$ и определяется как величина

$$A(N, r; x) = \sum_{B \in \Lambda_{N,r}} x^{m(B)}.$$

Очевидно, что $\sum_r A(N, r; x) = A(N; x)$. Заметим, что в силу симметрии всего набора матриц чередующихся знаков относительно поворотов и отражений, вместо первой строки можно рассматривать последнюю строку, либо первый или последний столбцы.

Наш интерес к матрицам чередующихся знаков обусловлен тем, что существует взаимно-однозначное соответствие между этими матрицами и конфигурациями шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, которое было указано в работе [49] (см. также [8, 52]). А именно, каждой $N \times N$ матрице чередующихся знаков соответствует одна и только одна конфигурация шестивершинной модели на $N \times N$ решетке с граничными условиями типа доменной стенки. Взаимно-однозначное соответствие основано на идентификации элементами матриц чередующихся знаков вершинных конфигураций показанной на Рис. 1.5.

Таким образом, перечисление матриц чередующихся знаков сводится к вычислению статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки с весами

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_6 = 1, \quad w_5 = x.$$

Выполняя преобразование к модели с симметричными весами, получим, что x -перечисление матриц чередующихся знаков соответствуют отношению весов $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{x}$, и, следовательно, шестивершинной модели с параметром Δ , равным

$$\Delta = 1 - \frac{x}{2}. \quad (1.19)$$

Положительным значениям x соответствуют значения $\Delta \in (-\infty, 1)$. Для разупорядоченной фазы $\Delta \in (-1, 1)$, в которой веса (1.3) вещественны, и $x \in (0, 4)$, можно написать формулу

$$A(N; x) = x^{-N/2} (1 - x/4)^{-N^2/2} Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\arcsin(\sqrt{x}/2)}}, \quad (1.20)$$

где первый множитель учитывает асимметрию между весами w_5 и w_6 , второй — общую нормировку весов, а третий есть статистическая сумма однородной модели. На самом деле, как нетрудно видеть, формула (1.20) применима также и в случае антисегнетоэлектрической фазы $\Delta \in (-\infty, -1)$, что соответствует $x \in (4, \infty)$, поскольку в этом случае веса в (1.3) чисто мнимые.¹

Детальное x -перечисление матриц чередующихся знаков могут быть выражено как некоторая корреляционная функция шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, вычисленная вблизи границы решетки. Такие корреляционные функции мы будем называть *граничными*. Вычислению граничных корреляционных функций посвящена Глава 2, а их приложения к перечислениям матриц чередующихся знаков рассмотрены в Главе 3.

1.2.3. Некоторые результаты о перечислениях матриц чередующихся знаков

Приведем некоторые явные формулы о x -перечислениях и детальных x -перечислениях матриц чередующихся знаков для $x = 1, 2, 3$.

Начнем с самого простого с технической точки зрения случая $x = 2$. Как следует из (1.19) в этом случае $\Delta = 0$, и значит 2-перечисления матриц чередующихся знаков выражаются через статистическую сумму шестивершинной модели в точке свободных фермионов, вычисленную выше в связи с замощениями ацтекского диаманта. Из (1.16), (1.20) и (1.17) следует, что

$$A(N; 2) = 2^{N(N-1)/2} = \frac{1}{2^N} AD(N). \quad (1.21)$$

Этот результат был угадан в работе [53], и впоследствии доказан в связи с замощениями ацтекского диаманта [49, 50]. В этих же работах также был получен следующий результат для детальных 2-перечислений:

$$A(N, r; 2) = \frac{1}{2^{N-1}} \binom{N-1}{N-r} A(N; 2), \quad (1.22)$$

где $\binom{N-1}{N-r}$ биномиальный коэффициент.

Одним из наиболее важных и знаменитых результатов о матрицах чередующихся знаков является формула для их числа, что соответствует случаю $x = 1$. В шестивершинной модели

¹ В этой фазе $\lambda = \frac{\pi}{2} + i\tilde{\lambda}$ и $\eta = \frac{\pi}{2} + i\tilde{\eta}$, где $\tilde{\lambda} \in (-\tilde{\eta}, \tilde{\eta})$ и $\tilde{\eta} \in (0, \infty)$, причем $\Delta = -\cosh 2\tilde{\eta}$.

это соответствует значению $\Delta = 1/2$, и, более явно, равенству весов $a = b = c$, что известно как точка *льда* модели. В работах [53, 54] была угадана следующая формула, которая впоследствии была доказана чисто комбинаторными методами в работе [55]:

$$A(N; 1) = \prod_{k=1}^N \frac{(3k-2)!(k-1)!}{(2k-1)!(2k-2)!} = \prod_{k=1}^N \frac{(3k-2)!}{(2N-k)!}. \quad (1.23)$$

Доказательство этой формулы на основании связи с шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки было впервые дано в работе [8]. При этом использовалась формула Изергина–Корепина (1.9) для неоднородной модели (в сочетании с некоторыми тождествами для определителей). В работе [9] обобщение этого подхода было применено для доказательства предсказанного в работах [53, 54] следующего результата для детальных 1-перечислений:

$$A(N, r) = \frac{\binom{N+r-2}{N-1} \binom{2N-1-r}{N-1}}{\binom{3N-2}{N-1}} A(N). \quad (1.24)$$

Наконец, в случае $x = 3$, что соответствует $\Delta = -1/2$, перечисление матриц чередующихся знаков даются следующими формулами, которые также были угаданы в работах [53, 54], и доказаны в работе [8]:

$$\begin{aligned} A(2m+1; 3) &= 3^{m(m+1)} \prod_{k=1}^m \left[\frac{(3k-1)!}{(m+k)!} \right]^2, \\ A(2m+2; 3) &= 3^m \frac{(3m+2)! m!}{[(2m+1)!]^2} A(2m+1; 3). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Результаты для детальных 3-перечислений ограничиваются гипотезой выдвинутой в работе [52], что они имеют вид

$$\begin{aligned} A(r, 2m+2; 3) &= \frac{B_{2m}^{(r-1)} + B_{2m}^{(r-2)}}{2} A(2m+2; 3) \\ A(r, 2m+3; 3) &= \frac{2B_{2m}^{(r-1)} + 5B_{2m}^{(r-2)} + 2B_{2m}^{(r-3)}}{9} A(2m+3; 3) \end{aligned} \quad (1.26)$$

где B_{2m}^r , $r = 1, \dots, 2m$, есть некоторые положительные целые числа. Некоторые результаты для детальных 3-перечислений, в виде двойных рекуррентных соотношений, которые следуют из формулы Изергина–Корепина для неоднородной модели, были получены Строгановым [56].

В Главе 3 мы покажем, что все формулы приведенные выше для перечислений матриц чередующихся знаков могут быть получены из формулы Изергина–Корепина для однородной модели и ее аналога для некоторой граничной корреляционной функции, с использованием связи с классическими ортогональными полиномами. Кроме того, что этот метод позволяет доказать формулы (1.26), он также позволяет получить явное выражение для чисел $B_{2m}^{(r)}$, $r =$

$1, \dots, 2m$ (см. раздел 3.2.4, теорему 3.1 о детальных 3-перечислениях матриц чередующихся знаков).

1.2.4. Явления разделения фаз

Используя формулу Изергина–Корепина (1.12) можно исследовать статистическую сумму Z_N в термодинамическом пределе, $N \rightarrow \infty$. Основной макроскопической величиной является свободная энергия на узел f , определяемая формулой

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N}{N^2}.$$

Как было показано в работах [57, 58], свободная энергия шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, вообще говоря, не равна таковой для модели с периодическими граничными условиями, а именно, если для модели в сегнетоэлектрической фазе

$$f_{\text{domain wall}} = f_{\text{periodic}}, \quad \Delta \in [1, \infty),$$

то для таковой в разупорядоченной и антисегнетоэлектрической фазах

$$f_{\text{domain wall}} > f_{\text{periodic}}, \quad \Delta \in (-\infty, 1).$$

Этот результат можно объяснить тем, что в этих двух фазах допустимые конфигурации, в силу правила льда, существенно ограничены граничными условиями типа доменной стенки, причем эти эффекты являются макроскопическими и модель демонстрирует явления *разделения фаз*.

Явления разделения фаз в шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки можно рассматривать как проявление результата, известного в контексте замощений домино как теорема об арктическом круге [49, 50]. А именно, в статистически доминирующих конфигурациях замощений домино больших ацтекских диамантов домино разделены кругом вписанным в диамант: домино упорядочены («заморожены») вне круга и разупорядочены («разогреты») внутри него.

Действительно, как показывает численное моделирование [59, 60], присутствие явлений разделения фаз в шестивершинной модели существенно зависит от того какой фазе (области значений параметров) соответствуют веса модели. В случае, если веса модели соответствуют сегнетоэлектрической фазе, то имеет место согласование между конфигурациями на границе и глубоко внутри решетки — вся система сегнетоэлектрически упорядочена. Однако, если веса модели соответствуют разупорядоченной или антисегнетоэлектрической фазам, то тогда имеет место конкуренция между состояниями внутри решетки и сегнетоэлектрическим упорядочением индуцированного границами, и в результате возникает разделение фаз.

Задача изучения этого круга явлений связана, в первую очередь с нахождением пространственных кривых разделения фаз. Такие кривые будем называть *арктическими* кривыми. Для определения этих кривых термодинамический предел должен рассматриваться как непрерывный предел, при котором решетка отображается на непрерывную область конечного размера; для шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, это предел $N \rightarrow \infty$, причем вся решетка масштабируется до квадрата со сторонами, например, длины 1.

Как уже упоминалось, в задаче замощений домино ацтекского диаманта арктической кривой является окружность; в случае асимметрии между двумя ориентациями домино, описываемой шестивершинной моделью с весами (1.18), таковой является эллипс [12, 50, 61, 62]:

$$\frac{(1-x-y)^2}{\alpha} + \frac{(x-y)^2}{1-\alpha} = 1, \quad x, y \in [0, 1]. \quad (1.27)$$

Как будет показано в Главе 5, решение задачи о нахождении арктической кривой для произвольного значения $\Delta \in (-\infty, 1)$ удастся достигнуть благодаря некоторым особым свойствам представления в терминах многократного контурного интеграла для нелокальной корреляционной функции — вероятности образования пустоты. В случае $\Delta = 0$ воспроизводится уравнение (1.27), а в ситуации общего положения (за исключением счетного набора значений) арктическая кривая оказывается трансцендентной (не алгебраической) кривой.

Стоит также упомянуть, что в литературе явления разделения фаз часто фигурируют под другими названиями, например, такими как *предельная форма* (в статистике диаграмм Юнга [11] и замощений ромбами [17]), или *интерфейс* (в моделях случайного роста двумерных кристаллов [63]). В весьма общем плане задача изучения явлений разделения фаз заключается в нахождении предельных форм и флуктуаций случайных двумерных поверхностей, как, например, в плоских разбиениях (в трехмерных диаграмм Юнга, или при плавлении граненого кристалла) [64–66], а также в моделях димеров на плоских двудольных графах с фиксированными граничными условиями при описании в терминах функции высоты [18, 67–69]. В этих контекстах арктическую кривую обычно называют *замороженной границей* предельной формы.

1.3. Эквивалентные представления для статистической суммы

В этом разделе мы приведем результаты работ [25, 26], где были получены эквивалентные представления для статистической суммы Z_N , путем преобразования определителя в формуле (1.12). Одно из этих представлений впоследствии оказалось ключевым в доказательстве дру-

гими авторами некоторого комбинаторного утверждения, остававшееся гипотезой в течении долгого времени (см. обсуждение в конце раздела).

1.3.1. Некоторые сведения из теории ортогональных полиномов

Здесь мы приведем несколько полезных формул из теории ортогональных полиномов, которые позволяют решать задачи вычисления определителя ганкелевой матрицы, нахождения элементов обратной матрицы, а также вычисления определителей с несколькими модифицированными столбцами (строками). Эти формулы будут нами часто использоваться при различных преобразованиях получаемых выражений почти во всех последующих главах.

Пусть T_x есть некоторый линейный функционал на наборе полиномов по переменной x (см., например, [9] и ссылки в этой работе), и пусть

$$c_n = T_x(x^n), \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (1.28)$$

есть так называемые *моменты* этого функционала. В преобразованиях в контексте шестивершинной модели, которые будут встречаться в дальнейшем

$$T_x(f(x)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x), \quad (1.29)$$

где $d\mu(x)$ есть мера, либо непрерывная всюду (разупорядоченная фаза), либо дискретная, с носителем на \mathbb{Z} (антисегнетоэлектрическая фаза) или на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (сегнетоэлектрическая фаза).

Введем обозначение

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}. \quad (1.30)$$

Теорема 1.1. *Если $\Delta_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, то тогда существует единственный (с точностью до нормировки) набор полиномов $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $P_n(x)$ есть полином степени n , которые ортогональны относительно функционала T_x :*

$$T_x(P_n(x)P_m(x)) = h_n \delta_{nm}, \quad h_n \neq 0.$$

Кроме того,

$$P_n(x) = \frac{\kappa_n}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}, \quad (1.31)$$

где κ_n — коэффициент при старшей степени полинома $P_n(x)$, и

$$h_n = \kappa_n^2 \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Доказательство и обсуждение теоремы может быть найдено в [70, 71], см. также комментарии в [9].

Нам понадобятся три простых следствия. Во-первых, если набор полиномов может быть идентифицирован по заданной мере ортогональности, то тогда определитель (1.30) вычисляется по формуле

$$\Delta_n = \prod_{m=0}^n \frac{h_m}{\kappa_m^2}. \quad (1.32)$$

Во-вторых, вновь предполагая, что набор полиномов известен в явном виде, то тогда соответствующее этим полиномам ядро Кристоффеля–Дарбу

$$K(x, y) = \sum_{m=0}^n \frac{P_m(x)P_m(y)}{h_m}$$

является производящей функцией элементов матрицы, которая является обратной матрице в определителе (1.30). Действительно, по построению

$$T_y(K(x, y)y^m) = x^m, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Используя определение (1.28), непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{1}{(j-1)!(k-1)!} \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} K(x, y) \Big|_{x,y=0} \right] T_z(z^{k+m-2}) \\ = \frac{1}{(j-1)!} \partial_x^{j-1} T_z(K(x, z)z^{m-1}) \Big|_{x=0} = \frac{1}{(j-1)!} \partial_x^{j-1} x^{m-1} = \delta_{jm}, \end{aligned}$$

где $j, m = 1, \dots, n+1$, откуда и следует, что выражение в квадратных скобках есть элементы обратной матрицы.

Наконец, в-третьих, рассмотрим следующее обобщение определителей (1.30) и (1.31):

$$\Delta_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-k} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-k+1} & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-k} & x_1^n & x_2^n & \dots & x_k^n \end{vmatrix}.$$

Очевидно, имеем

$$\frac{\Delta_n^{(1)}(x)}{\Delta_n} = \frac{\kappa_n}{h_n} P_n(x). \quad (1.33)$$

В ситуации общего положения, справедлива следующая формула в терминах $k \times k$ определителя:

$$\frac{\Delta_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)}{\Delta_n} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\kappa_{n-j}}{h_{n-j}} \begin{vmatrix} P_{n-k+1}(x_1) & P_{n-k+1}(x_2) & \dots & P_{n-k+1}(x_k) \\ P_{n-k+2}(x_1) & P_{n-k+2}(x_2) & \dots & P_{n-k+2}(x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n(x_1) & P_n(x_2) & \dots & P_n(x_k) \end{vmatrix}. \quad (1.34)$$

Эта формула следует из обсуждавшейся выше формулы для элементов обратной матрицы через ядро Кристоффеля–Дарбу.

1.3.2. Преобразование определителя в формуле Изергина–Корепина

Всюду далее в этом разделе нам будет удобно полагать, что индексы $N \times N$ матриц пробегают значения $0, 1, \dots, N-1$. Обозначим через H матрицу в определителе в формуле Изергина–Корепина для однородной модели, $H_{jk} = \partial_\lambda^{j+k} \varphi(\lambda)$, где функция $\varphi(\lambda)$ определена в (1.13). Используя тождество

$$\frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda - \eta) \sin(\lambda + \eta)} = \cot(\lambda - \eta) - \cot(\lambda + \eta)$$

матрица H может быть записана как разность двух матриц

$$H = A_- - A_+, \quad A_\pm = A|_{\phi=\phi_\pm}, \quad \phi_\pm \equiv \lambda \pm \eta, \quad (1.35)$$

где матрица A может быть выбрана в виде:

$$A_{jk} = \frac{\partial^{j+k}}{\partial \phi^{j+k}} [\cot \phi - i]. \quad (1.36)$$

Выбор константы $-i$, как будет показано ниже, необходим для обратимости матрицы (1.36) для произвольного $\phi \in \mathbb{C}$. Структура (1.35) подсказывает факторизовать определитель матрицы H , например, следующим образом

$$\det_N H = \det_N(A_-) \det_N(I - A_-^{-1} A_+), \quad (1.37)$$

где \det_N обозначает взятие определителя матрицы $N \times N$. Различные эквивалентные представления для статистической суммы однородной модели которые будут получены ниже, основаны на том, что матрица (1.36) является ганкелевой матрицей, которая обладает тем полезным свойством, что ее определитель и обратная матрица могут вычислены явно. Стоит отметить, что в случае матрицы H , которая является также ганкелевой, эта техника оказывается неэффективной, поскольку ассоциированные полиномы в ситуации общего положения неизвестны. Специальные случаи, когда такие полиномы могут быть найдены среди известных

классических полиномов из таблицы Аски–Вильсона, и определитель матрицы H вычисляется явно, описаны в Главе 3.

Исследуем свойства матрицы A подробно. Поскольку это ганкелевая матрица, попробуем явно построить связанный с ней функционал T_x , моменты которого (1.28) задают ее матричные элементы. Предположим, что элементы этой матрицы могут быть записаны в виде

$$A_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{j+k} \omega(x) dx. \quad (1.38)$$

Чтобы определить весовую функцию $\omega(x)$, воспользуемся тем, что, поскольку элементы матрицы (1.36) являются периодическими функциями по переменной $\operatorname{Re} \phi$, можно, без ограничения общности, рассмотреть значения ϕ лежащие в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \phi < \pi$ (с выколотой точкой $\phi = 0$). Для этих значений имеет место представление

$$\cot \phi = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\phi x}}{1 - e^{\pi x}} dx. \quad (1.39)$$

Отсюда следует, что элементы матрицы A определенные формулой (1.36), записываются в виде моментов (1.38), где весовая функция равна

$$\omega(x) = \frac{e^{\phi x}}{1 - e^{\pi x} + i0}. \quad (1.40)$$

Введем полиномы, ортогональные на вещественной оси с весом $\omega(x)$, которые нам будет удобно выбрать нормированными на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_j(x) p_k(x) \frac{e^{\phi x}}{1 - e^{\pi x} + i0} dx = \delta_{jk}. \quad (1.41)$$

Чтобы найти эти полиномы, преобразуем условие ортогональности сдвигая контур интегрирования $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - i$ и делая замену переменных $x \rightarrow x - i$. Условие ортогональности тогда примет вид

$$e^{-i\phi} \int_{-\infty}^{\infty} p_j(x - i) p_k(x - i) \frac{e^{\phi x}}{1 + e^{\pi x}} dx = \delta_{jk}. \quad (1.42)$$

Перепишывая весовую функцию в виде

$$\frac{e^{\phi x}}{1 + e^{\pi x}} = \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1 - ix}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + ix}{2}\right) e^{(\phi - \pi/2)x}$$

и сравнивая (1.42) с условием ортогональности для полиномов Мейкснера–Поллачка (см. например [72]),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) P_m^{(\lambda)}(x; \phi) |\Gamma(\lambda + ix)|^2 e^{(2\phi - \pi)x} dx = \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{n!(2 \sin \phi)^{2\lambda}} \delta_{nm} \quad (1.43)$$

где

$$P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \lambda + ix \\ 2\lambda \end{matrix} \middle| 1 - e^{-2i\phi}\right), \quad (1.44)$$

не составляет труда идентифицировать искомые полиномы в терминах полиномов Мейкнера–Поллачка, с параметром λ (который не следует путать с переменной λ входящей в параметризацию вершинных весов) принимающем значение $\lambda = 1/2$. В результате, полиномы $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяющие условию ортогональности (1.41) имеют вид

$$p_n(x) = e^{i\phi/2} \sqrt{\sin \phi} P_n^{(1/2)}\left(\frac{x+i}{2}; \phi\right). \quad (1.45)$$

Из (1.44) и (1.45) следует выражение для старшего коэффициента κ_n полинома $p_n(x)$:

$$\kappa_n = \frac{e^{i\phi/2} (\sin \phi)^{n+1/2}}{n!}. \quad (1.46)$$

Учитывая, что $h_n = 1$, в силу формулы (1.32), получим

$$\det_N A = \frac{e^{-iN\phi}}{(\sin \phi)^{N^2}} \prod_{n=1}^{N-1} (n!)^2. \quad (1.47)$$

Это выражение показывает, что если матрица A существует (все ее элементы конечны), то тогда она обратима, поскольку ее определитель не равен нулю. Отметим, что отсюда также легко понять наш исходный выбор аддитивной константы $-i$ в определении элементов матрицы (1.36). Действительно, рассматривая линейную комбинацию выражения (1.47) и его формально комплексно-сопряженного, $i \mapsto -i$, получим

$$\det \left[\frac{\partial^{j+k}}{\partial \phi^{j+k}} (\cot \phi + \alpha) \right]_{j,k=0,\dots,N-1} = \frac{\cos N\phi + \alpha \sin N\phi}{(\sin \phi)^{N^2}} \prod_{n=1}^{N-1} (n!)^2.$$

Выражение $\cos N\phi + \alpha \sin N\phi$ имеет нули комплексной плоскости переменной ϕ , если $\alpha \neq \pm i$. Таким образом, при $\alpha = -i$ (или $\alpha = i$) гарантируется обратимость матрицы A , для всех значений N .

Наконец, полагая $\phi = \phi_-$ и подставляя (1.47) в (1.37), получим следующее эквивалентное представлению для статистической суммы:

$$Z_N = [\sin \phi_+]^{N^2} e^{-iN\phi_-} \det_N (I - A_-^{-1} A_+). \quad (1.48)$$

Эта формула справедлива для значений параметров, таких что $\phi_{\pm} \neq 0$ и $\operatorname{Re} \phi_{\pm} \in [0, \pi)$.

1.3.3. Представления в терминах определителей Фредгольма линейных интегральных операторов

Рассмотрим определитель в (1.48). Чтобы построить элементы матрицы $A_-^{-1} = A^{-1}|_{\phi=\phi_-}$ воспользуемся конструкцией использующей ассоциированные ортогональные полиномы. Обо-

значим через $K_N(x, y)$ соответствующее ядро Кристоффеля–Дарбу

$$K_N(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x)p_n(y), \quad (1.49)$$

где $p_n(x)$ обозначает нормированный полином, $p_n(x) \equiv P_n(x)/\sqrt{h_n}$, а $P_n(x)$ строятся из моментов согласно (1.31). Для элементов матрицы A^{-1} можем написать

$$A_{jk}^{-1} = \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k} K_N(x, y) \Big|_{x,y=0}. \quad (1.50)$$

Уточним, что для матрицы A заданной в (1.36), элементы обратной матрицы вычисляются по формуле (1.50), где функция $K_N(x, y)$ строится в терминах полиномов $p_n(x)$, явный вид которых приведен в (1.45), по формуле (1.49).

Для элементов матрицы $A_-^{-1}A_+$ получим

$$[A_-^{-1}A_+]_{jm} = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \int_{-\infty}^{\infty} K_N^-(x, z) z^m \omega^+(z) dz \Big|_{x=0}.$$

Здесь знаки \pm указывают на зависимость функций от параметров $\phi = \phi_{\pm}$, соответственно. Определитель в (1.48) может быть переписан следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln \det_N (I - A_-^{-1} A_+) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr}_N (A_-^{-1} A_+)^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} K_N^-(x_1, x_2) K_N^-(x_2, x_3) \cdots K_N^-(x_n, x_1) \prod_{l=1}^n \omega^+(x_l) dx_l \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr} (\hat{V}_N)^n = \ln \det (1 - \hat{V}_N), \end{aligned} \quad (1.51)$$

где \hat{V}_N — это линейный интегральный оператор на вещественной оси, с ядром

$$V_N(x, y) = K_N^-(x, y) \omega^+(y).$$

В силу тождества Кристоффеля–Дарбу, ядро этого оператора может быть также записано в виде

$$V_N(x, y) = \frac{\kappa_{N-1}^-}{\kappa_N^-} \frac{p_N^-(x)p_{N-1}^-(y) - p_{N-1}^-(x)p_N^-(y)}{x - y} \omega^+(y), \quad (1.52)$$

откуда следует, что оператор \hat{V}_N принадлежит к классу так называемых интегрируемых интегральных операторов [73]. Интегральные ядра вида (1.52) также известны как корреляционные ядра, поскольку они возникают в выражениях для корреляционных функций в теории случайных матриц. Обсуждению роли и важности этого особого класса интегральных операторов в связи с корреляционными функциями интегрируемых моделей и теорией случайных матриц уделено заметное внимание в монографиях [2, 74].

Принимая во внимание формулы (1.40), (1.45), (1.46), получим для статистической суммы следующее представление в терминах определителя Фредгольма:

$$Z_N = (\sin \phi_+)^{N^2} e^{-iN\phi_-} \det \left(1 - \hat{V}_N \right). \quad (1.53)$$

Ядро оператора \hat{V}_N , записанное в наиболее явном виде, дается выражением

$$V_N(x, y) = \frac{N e^{2iN\phi_-}}{x - y} \left\{ {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, ix/2 \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 - e^{-2i\phi_-} \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N + 1, iy/2 \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 - e^{-2i\phi_-} \right) - {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N + 1, ix/2 \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 - e^{-2i\phi_-} \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, iy/2 \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 - e^{-2i\phi_-} \right) \right\} \frac{e^{\phi_+ y}}{1 - e^{\pi y} + i0}.$$

Представление (1.53) справедливо для $\text{Re } \phi_{\pm} \in [0, \pi)$. Стоит также отметить, что в этом представлении N не обязательно должно быть целым (при определенных ограничениях на область значений ϕ_-), в отличие от исходного представления в терминах ганкелевого определителя.

Обсудим теперь эквивалентные формы полученного представления. Сдвигая контур интегрирования и переобозначая переменные интегрирования в каждом из интегралов в (1.51), результат может быть записан в виде

$$Z_N = (\sin \phi_+)^{N^2} e^{-iN\phi_-} \det \left(1 - \zeta \hat{W}_N \right), \quad \zeta \equiv e^{i(\phi_- - \phi_+)}, \quad (1.54)$$

где \hat{W}_N — оператор на вещественной оси с ядром

$$W_N(x, y) = N \frac{P_N^{(1/2)}(x; \phi_-) P_{N-1}^{(1/2)}(y; \phi_-) - P_{N-1}^{(1/2)}(x; \phi_-) P_N^{(1/2)}(y; \phi_-)}{x - y} \frac{e^{2\phi_+ y}}{1 + e^{2\pi y}}. \quad (1.55)$$

Поскольку ядро (1.55) является вещественно-значной функцией при $\phi_{\pm} \in (0, \pi)$, представление (1.54) можно рассматривать как адаптированное для модели в разупорядоченной фазе.

Чтобы получить представления, аналогичным образом адаптированные для модели в сегнетоэлектрической и антисегнетоэлектрической фазах, нужно рассмотреть случай чисто мнимых значений параметров ϕ_{\pm} в (1.53). В случае комплексных значений ϕ_+ интегралы в (1.51) по каждой из переменных интегрирования x_1, \dots, x_n вычисляются в виде сумм по вычетам в простых полюсах функции $\omega(x)$ лежащих в верхней (нижней) полуплоскости при $\text{Im } \phi_+ > 0$ (соответственно, $\text{Im } \phi_+ < 0$). В случае, если $\text{Im } \phi_+ > 0$ (случай $\text{Im } \phi < 0$ ведет к эквивалентному результату) статистическая сумма запишется в виде

$$Z_N = (\text{sh } \tilde{\phi}_+)^{N^2} e^{N\tilde{\phi}_-} \det \left(1 - \hat{U}_N \right), \quad (1.56)$$

где \hat{U}_N — это интегральный оператор с дискретным ядром, $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, которое при $x \neq y$

дается выражением

$$U_N(x, y) = -\frac{Ne^{-2N\tilde{\phi}_-}}{x-y} \left\{ M_N(x; 1, e^{-2\tilde{\phi}_-}) M_{N-1}(y; 1, e^{-2\tilde{\phi}_-}) - M_{N-1}(x; 1, e^{-2\tilde{\phi}_-}) M_N(y; 1, e^{-2\tilde{\phi}_-}) \right\} e^{-2\tilde{\phi}_+ y}, \quad (1.57)$$

а при $x = y$ ядро понимается в смысле тождества Кристоффеля–Дарбу. В (1.57) использовано стандартное обозначение для полиномов Мейкснера

$$M_n(x; \beta, c) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -x \\ \beta \end{matrix} \middle| 1 - \frac{1}{c}\right).$$

«Тильдованные» параметры определены так, что $\phi_{\pm} = i\tilde{\phi}_{\pm}$. Представление (1.56) справедливо при $\operatorname{Re} \tilde{\phi}_+ > 0$, причем вещественные значения параметров такие, что $\tilde{\phi}_{\pm} > 0$, соответствуют сегнетоэлектрическому режиму, а $\tilde{\phi}_+ > 0, \tilde{\phi}_- < 0$ — антисегнетоэлектрическому.

Стоит также отметить, что представление (1.56) может быть получено напрямую, путем повторений всех предшествующих рассуждений, если вместо формулы (1.39) использовать формулу

$$\operatorname{cth} \tilde{\phi} = 2 \sum_{x=0}^{\infty} e^{-2\tilde{\phi}x}, \quad \operatorname{Re} \tilde{\phi} > 0.$$

Появление полиномов Мейкснера в ядре тогда становится очевидным, поскольку при $|c| < 1$ они удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_{x=0}^{\infty} M_j(x; \beta, c) M_k(x; \beta, c) \frac{(\beta)_x}{x!} c^x = \frac{c^{-j}}{1-c} \delta_{jk}.$$

Полагая здесь $\beta = 1$ и $c = e^{-2\tilde{\phi}}$, нетрудно идентифицировать ассоциированный набор полиномов в этом случае.

Наконец, закончим обсуждение рассмотрением специального случая, когда веса модели связаны соотношением $a \pm b = c$, что соответствует $\Delta = \pm 1$. В этом случае веса параметризуются рациональными функциями, вместо тригонометрических. В зависимости от знака в этом соотношении, указанная параметризация достигается заменой $\lambda, \eta \rightarrow \epsilon\lambda, \epsilon\eta$ (для знака плюс) или заменой $\lambda, \eta \rightarrow \pi/2 - \epsilon\lambda, \pi/2 - \epsilon\eta$ (для знака минус) в (1.3), и взятием предела $\epsilon \rightarrow 0$, с одновременной перенормировкой весов на $1/\epsilon$. Статистическая сумма модели с рациональными весами дается формулой Изергина–Корепина (1.12) с рациональными функциями от λ, η , вместо синусов: $\sin(*) \mapsto (*)$. Представление в терминах определителя Фредгольма для статистической суммы в этом случае выражается через ядро, выраженное через полиномы Лагерра; рациональный предел ядра (1.55) может быть легко вычислен с помощью формул

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_n^{(1/2)}(x/\epsilon; \epsilon\phi) = L_n(-2\phi x), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\epsilon\phi_+(y/\epsilon)}}{1 + e^{\pi(y/\epsilon)}} = e^{\phi_+ y \theta(-y)},$$

где $L_n(x)$ — полином Лагерра, а $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Этот же результат следует также и из (1.57), где дискретная мера интегрирования заменяется непрерывной в рациональном пределе. В результате, статистическая сумма выражается через определитель Фредгольма интегрального оператора на положительной полуоси, с ядром

$$V_N(x, y) = -N \frac{L_N(\xi x) L_{N-1}(\xi y) - L_{N-1}(\xi x) L_N(\xi y)}{x - y} e^{-y},$$

где $\xi \equiv \phi_-/\phi_+$, что воспроизводит результат работы [75].

1.3.4. Представление в виде определителя Фредгольма конечной матрицы

Определитель в (1.53) может быть также записан в виде определителя некоторой $N \times N$ симметричной матрицы, у которой матричные элементы просто связаны с ядром интегрального оператора в представлении в терминах определителя Фредгольма. Подставляя (1.49) в вторую строчку в (1.51), получим

$$\begin{aligned} \ln \det_N(I - A_-^{-1} A_+) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} K_N^-(x_1, x_2) K_N^-(x_2, x_3) \cdots K_N^-(x_n, x_1) \prod_{l=1}^n \omega^+(x_l) dx_l \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{N-1} V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_3} \cdots V_{k_n k_1} = \ln \det_N(I - V) \end{aligned}$$

где элементы матрицы V даются формулой

$$V_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} p_j^-(x) p_k^-(x) \omega^+(x) dx .$$

Таким образом, статистическая сумма допускает представление

$$Z_N = [\sin(\lambda + \eta)]^{N^2} e^{-i(\lambda - \eta)N} \det_N(I - V). \quad (1.58)$$

Интересным свойством этого представления является то, что в отличие от элементов матрицы H , определитель которой входит в формулу Изергина–Корепина однородной модели (1.12), элементы матрицы V в (1.58) могут быть вычислены явно.

Введем матрицу W ,

$$V =: \zeta W, \quad \zeta = e^{i(\phi_- - \phi_+)} = e^{-2i\eta} .$$

Элементы W определяются формулой

$$W_{jk} = 2 \sin \phi_- \int_{-\infty}^{\infty} P_j^{(1/2)}(x; \phi_-) P_k^{(1/2)}(x; \phi_-) \frac{e^{2x\phi_+}}{1 + e^{2\pi x}} dx. \quad (1.59)$$

Предложение 1.2. Для элементов матрицы W имеет место представление

$$W_{jk} = \beta \gamma^{j+k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -j, -k \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta^2}{\gamma^2} \right) = \gamma^{j+k+1} \sum_{n=0}^{\min(j,k)} \binom{j}{n} \binom{k}{n} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{2n+1}. \quad (1.60)$$

где

$$\beta = \frac{\sin \phi_-}{\sin \phi_+} = \frac{\sin(\lambda - \eta)}{\sin(\lambda + \eta)}, \quad \gamma = \frac{\sin(\phi_+ - \phi_-)}{\sin \phi_+} = \frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda + \eta)}.$$

Доказательство. Интеграл в (1.59) является частным случаем интеграла²

$$I_{nm}^{(\lambda)}(\tau, \omega; \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \tau) P_m^{(\lambda)}(x; \omega) |\Gamma(\lambda + ix)|^2 e^{(2\phi - \pi)x} dx, \quad (1.61)$$

где $\phi \in (0, \pi)$ и $\lambda > 0$, что гарантирует сходимость интеграла. Докажем, что при произвольных вещественных значениях параметров τ и ω величина $I_{nm}^{(\lambda)}(\tau, \omega; \phi)$ дается выражением

$$I_{nm}^{(\lambda)}(\tau, \omega; \phi) = \frac{\Gamma(n + 2\lambda) \Gamma(m + 2\lambda)}{(2 \sin \phi)^{2\lambda} \Gamma(2\lambda) n! m!} \left[\frac{\sin(\tau - \phi)}{\sin \phi} \right]^n \left[\frac{\sin(\omega - \phi)}{\sin \phi} \right]^m \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -m \\ 2\lambda \end{matrix} \middle| \frac{\sin \tau \sin \omega}{\sin(\tau - \phi) \sin(\omega - \phi)} \right). \quad (1.62)$$

Представление (1.62) есть следствие условия ортогональности полиномов Мейкснера–Поллачка, а также тождества

$$P_n^{(\lambda)}(x; \tau) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(k + 2\lambda) (n - k)!} \frac{[\sin(\tau - \phi)]^{n-k} (\sin \tau)^k}{(\sin \phi)^n} P_k^{(\lambda)}(x; \phi), \quad (1.63)$$

которое является обобщением аналогичной формулы для полиномов Лагерра (см., например [76], §10.12, (40)). Действительно, используя (1.63) для каждого из двух полиномов по интегралом (1.61) и используя условие ортогональности (1.43), получим

$$I_{nm}^{(\lambda)}(\tau, \omega; \phi) = \frac{[\sin(\tau - \phi)]^n [\sin(\omega - \phi)]^m}{2^{2\lambda} (\sin \phi)^{n+m+2\lambda}} \times \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \frac{\Gamma(n + 2\lambda) \Gamma(m + 2\lambda)}{\Gamma(k + 2\lambda) (n - k)! (m - k)! k!} \left(\frac{\sin \tau \sin \omega}{\sin(\tau - \phi) \sin(\omega - \phi)} \right)^k.$$

Отсюда, переписывая сумму как обрывающийся гипергеометрический ряд, получим формулу (1.62).

Докажем теперь тождество (1.63). Рассмотрим трехчленное рекуррентное соотношение для полиномов Мейкснера–Поллачка:

$$(n + 1) P_{n+1}^{(\lambda)}(x; \phi) - 2[x \sin \phi + (n + \lambda) \cos \phi] P_n^{(\lambda)}(x; \phi) + (n + 2\lambda - 1) P_{n-1}^{(\lambda)}(x; \phi) = 0. \quad (1.64)$$

² Напомним, что здесь λ обозначает стандартный параметр полиномов Мейкснера–Поллачка, который не следует путать с параметром λ весов шестивершинной модели.

Введем величины

$$S_n(x; \phi) = (\sin \phi)^{-n} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) . \quad (1.65)$$

Рекуррентное соотношение (1.64) примет вид

$$(n+1)S_{n+1}(x; \phi) - 2(n+\lambda) \cot \phi S_n(x; \phi) + (n+2\lambda-1)(1+\cot^2 \phi) S_{n-1}(x; \phi) = 2x S_n(x; \phi). \quad (1.66)$$

Из это соотношения видно, что $S_n(x; \phi)$ зависит от ϕ через $\cot \phi$, и является полиномом порядка n по $\cot \phi$. Полезно рассмотреть свободный член этого полинома, т.е., случай $\phi = \pi/2$ или $\cot \phi = 0$. Обозначая $S_n(x) = S_n(x; \pi/2)$, имеем

$$(n+1)S_{n+1}(x) + (n+2\lambda-1)S_{n-1}(x) = 2xS_n(x). \quad (1.67)$$

Рассмотрим полубесконечные матрицы

$$(K_-)_{nm} = (n+1) \delta_{n+1,m}, \quad (K_0)_{nm} = (n+\lambda) \delta_{n,m}, \quad (K_+)_{nm} = (n+2\lambda-1) \delta_{n-1,m}, \quad (1.68)$$

где $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Матрицы (1.68), с точностью до диагонального преобразования подобия, соответствуют положительному дискретному представлению $\mathcal{D}^{(+)}(\lambda)$ алгебры $\mathfrak{su}(1, 1)$,

$$[K_-, K_+] = 2K_0, \quad [K_{\pm}, K_0] = \mp K_{\pm}. \quad (1.69)$$

В терминах матриц (1.68), соотношения (1.66) и (1.67) имеют вид

$$\begin{aligned} [K_- - 2 \cot \phi K_0 + (1 + \cot^2 \phi) K_+] \vec{S}(x; \phi) &= 2x \vec{S}(x; \phi), \\ [K_- + K_+] \vec{S}(x) &= 2x \vec{S}(x), \end{aligned}$$

где n -я компонента $\vec{S}(x, \phi)$ есть $S_n(x, \phi)$, и $\vec{S}(x) \equiv \vec{S}(x, \pi/2)$. Используя коммутационные соотношения (1.69), нетрудно заметить, что

$$e^{\alpha K_+} [K_- + K_+] = [K_- - 2\alpha K_0 + (1 + \alpha^2) K_+] e^{\alpha K_+}.$$

Полагая $\alpha = \cot \phi$, получим

$$\vec{S}(x; \phi) = e^{\cot \phi K_+} \vec{S}(x). \quad (1.70)$$

Это соотношение является ключевым для вывода тождества (1.63). Действительно, соотношение (1.70) означает, что

$$\vec{S}(x; \tau) = e^{(\cot \tau - \cot \phi) K_+} \vec{S}(x; \phi).$$

Принимая во внимание, что

$$(e^{\alpha K_+})_{nm} = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(m+2\lambda)(n-m)!} \alpha^{n-m},$$

получим

$$S_n(x; \tau) = \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(m+2\lambda)(n-m)!} (\cot \tau - \cot \phi)^{n-m} S_m(x; \phi).$$

Вспоминая определение (1.65) и переходя к полиномам Мейкснера–Поллачка, получаем тождество (1.63). \square

Обсудим полученное представление для элементов матрицы W . Из первого равенства в (1.60) следует, что эти элементы выражаются полиномы Мейкснера, однако весьма интересно, что из второго равенства следует, что матрица W равна произведению более простых матриц. Действительно, рассмотрим $N \times N$ матрицы

$$(J_+)_{nm} = n\delta_{n-1,m}, \quad (J_0)_{nm} = (n+1/2)\delta_{nm}, \quad (J_-)_{nm} = (n+1)\delta_{n+1,m}$$

и принимая во внимание, что

$$(e^{\gamma J_+})_{nm} = \gamma^{n-m} \binom{n}{m}, \quad J_- = (J_+)^T,$$

получим

$$W = e^{\gamma J_+} \beta^{2J_0} e^{\gamma J_-}. \quad (1.71)$$

Таким образом, матрица W имеет вид произведения нижнетреугольной, диагональной и верхнетреугольной матриц.

Как было показано в работах Бехренда, Ди Франческо и Зинн-Жюстена [77, 78], формулы (1.58), (1.60) и (1.71) играют одну из ключевых ролей в доказательстве равенства числа так называемых нисходящих плоских разбиений (descending plane partitions) и матриц чередующихся знаков порядка N .

Представления вида (1.58) возникают также при изучении основных состояний квантовых интегрируемых цепочек старшего спина, с диагональным и антидиагональным твистами, что позволяет устанавливать комбинаторные связи этих векторов с взвешенными перечислениями матриц чередующихся знаков [79].

Глава 2

Граничные корреляционные функции шестивершинной модели

В этой главе вычисляются корреляционные функции шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, описывающие вероятности локальных состояний вблизи границы. Раздел 1 посвящен формулировке модели в рамках квантового метода обратной задачи — основного метода вычисления корреляционных функций модели. Разделы 2 и 3 посвящены вычислению одноточечных и двухточечных граничных корреляционных функций, соответственно. Глава основана на результатах автора опубликованных в работах [24, 29].

2.1. Формулировка модели в терминах квантового метода обратной задачи

В этом разделе приводятся основные элементы формулировки шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в рамках квантового метода обратной задачи: L -оператор, матрица монодромии, алгебра Янга–Бакстера и концепция двуузельной модели. Последняя играет важную роль в вычислении корреляционных функций.

2.1.1. L -оператор и матрица монодромии

Определим основные объекты квантового метода обратной задачи относящиеся к модели. Во-первых, рассмотрим векторное пространство \mathbb{C}^2 и обозначим его базисные векторы как состояния спин-вверх и спин-вниз

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждой горизонтальной и вертикальной прямой решетки сопоставим векторное пространство \mathbb{C}^2 . Мы также будем использовать соглашение, что стрелки вверх и вправо соответствуют проекции на состояние (вектор) спин-вверх, а стрелки вниз и влево — на состояние спин-вниз.

Мы будем помечать вертикальные линии решетки греческими символами (α, β, \dots) и нумеровать справа налево, а строки латинскими символами (j, k, \dots) и нумеровать сверху вниз. Каждой вершине лежащей на пересечении α -ой вертикальной и k -ой горизонтальной прямых

сопоставим оператор $L_{\alpha,k}(\lambda_\alpha, \nu_k)$, который действует нетривиально в прямом произведении двух векторных пространств \mathbb{C}^2 , а именно, в «горизонтальном» пространстве $\mathcal{H}_k = \mathbb{C}^2$ (сопоставленном k -ой горизонтальной прямой) и «вертикальном» пространстве $\mathcal{V}_\alpha = \mathbb{C}^2$ (сопоставленном α -ой вертикальной прямой). Пользуясь аналогией с матрицей рассеяния, стрелочные состояния на верхнем и правом ребрах вершины могут рассматриваться как входящие индексы L -оператора, а таковые на нижнем и левых ребрах как исходящие, что дает

$$L_{\alpha,k}(\lambda_\alpha, \nu_k) = a_{\alpha,k} \frac{1 + \tau_\alpha^z \sigma_k^z}{2} + b_{\alpha,k} \frac{1 - \tau_\alpha^z \sigma_k^z}{2} + c_{\alpha,k} (\tau_\alpha^- \sigma_k^+ + \tau_\alpha^+ \sigma_k^-).$$

Здесь τ_α^l and σ_k^l ($l = +, -, z$) обозначают операторы действующие как матрицы Паули в \mathcal{V}_α и \mathcal{H}_k , соответственно, и тождественно в остальных пространствах.

Упорядоченное произведение L -операторов вдоль вертикальной (или горизонтальной) прямой решетки соответствует в формализме квантового метода обратной задаче матрице монодромии. Чтобы построить, например, матрицу монодромии вдоль вертикальной прямой, полезно рассматривать L -оператор как 2×2 матрицу, действующую в пространстве \mathcal{V}_α , с операторными матричными элементами действующими в пространстве $\mathcal{H}_{1,\dots,N} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k$, а именно

$$L_{\alpha,k}(\lambda, \nu) = \begin{pmatrix} a(\lambda, \nu) \pi_k^+ + b(\lambda, \nu) \pi_k^- & c \cdot \sigma_k^- \\ c \cdot \sigma_k^+ & b(\lambda, \nu) \pi_k^+ + a(\lambda, \nu) \pi_k^- \end{pmatrix}_{[\mathcal{V}_\alpha]}, \quad (2.1)$$

где мы использовали следующее обозначение:

$$\pi_k^\pm = \frac{1 \pm \sigma_k^z}{2}. \quad (2.2)$$

В (2.1) нижний индекс в скобках указывает, что это матрица в \mathcal{V}_α . Упорядоченное произведение вдоль α -ой вертикальной прямой дает «вертикальную» матрицу монодромии:

$$\begin{aligned} T_\alpha^V(\lambda_\alpha) &= L_{\alpha,N}(\lambda_\alpha, \nu_N) \cdots L_{\alpha,2}(\lambda_\alpha, \nu_2) L_{\alpha,1}(\lambda_\alpha, \nu_1) \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,\dots,N}^V(\lambda_\alpha) & B_{1,\dots,N}^V(\lambda_\alpha) \\ C_{1,\dots,N}^V(\lambda_\alpha) & D_{1,\dots,N}^V(\lambda_\alpha) \end{pmatrix}_{[\mathcal{V}_\alpha]}. \end{aligned}$$

Операторы $A_{1,\dots,N}^V(\lambda) = A_{1,\dots,N}^V(\lambda; \nu_1, \dots, \nu_N)$, и т.д., действуют в $\mathcal{H}_{1,\dots,N}$ и они не зависят от α . Каждый из этих операторов соответствует вертикальной прямой решетки, с фиксированными направлениями самой верхней и самой нижней вертикальных стрелок, см. Рис. 2.1.

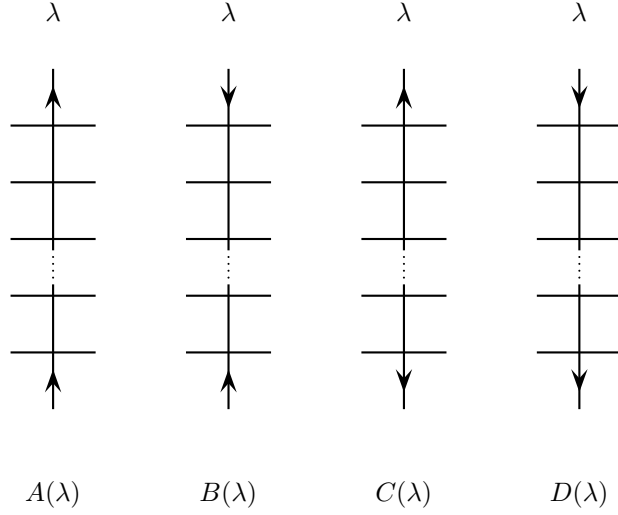


Рис. 2.1. Графическая интерпретация операторов — элементов матрицы монодромии вертикального ряда.

Аналогично, можно рассмотреть «горизонтальную» матрицу монодромии,

$$\begin{aligned}
 T_k^{\text{H}}(\nu_k) &= L_{N,k}(\lambda_N, \nu_k) \cdots L_{2,k}(\lambda_2, \nu_k) L_{1,k}(\lambda_1, \nu_k) \\
 &= \begin{pmatrix} A_{1,\dots,N}^{\text{H}}(\nu_k) & B_{1,\dots,N}^{\text{H}}(\nu_k) \\ C_{1,\dots,N}^{\text{H}}(\nu_k) & D_{1,\dots,N}^{\text{H}}(\nu_k) \end{pmatrix}_{[\mathcal{H}_k]},
 \end{aligned}$$

где операторы $A_{1,\dots,N}^{\text{H}}(\nu) = A_{1,\dots,N}^{\text{H}}(\nu; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$, и т.д., действуют в $\mathcal{V}_{1,\dots,N} := \bigotimes_{\alpha=1}^N \mathcal{V}_\alpha$. Каждый из этих операторов соответствует горизонтальной прямой решетки, с фиксированными направлениями самой правой и самой левой горизонтальных стрелок.

Введенные объекты позволяют сформулировать модель в рамках квантового метода обратной задачи. Обозначая $|\uparrow_k^{\text{V}}\rangle$ и $|\downarrow_k^{\text{V}}\rangle$ базисные векторы пространства \mathcal{H}_k , введем состояния

$$|\uparrow_{1,\dots,N}^{\text{V}}\rangle := \bigotimes_{k=1}^N |\uparrow_k^{\text{V}}\rangle, \quad |\downarrow_{1,\dots,N}^{\text{V}}\rangle := \bigotimes_{k=1}^N |\downarrow_k^{\text{V}}\rangle.$$

Эти состояния являются состояниями «все спины вверх» и «все спины вниз», соответственно, в пространстве $\mathcal{H}_{1,\dots,N}$. Принимая во внимание, что граничные условия доменной стенки сопоставляют для α -ой вертикальной прямой оператор $B_{1,\dots,N}^{\text{V}}(\lambda_\alpha)$, мы можем записать статистическую сумму как матричный элемент:

$$Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N) = \langle \downarrow_{1,\dots,N}^{\text{V}} | B_{1,\dots,N}^{\text{V}}(\lambda_N) \cdots B_{1,\dots,N}^{\text{V}}(\lambda_1) | \uparrow_{1,\dots,N}^{\text{V}} \rangle. \quad (2.3)$$

Мы также напомним, что $B_{1,\dots,N}^{\text{V}}(\lambda) = B_{1,\dots,N}^{\text{V}}(\lambda; \nu_1, \dots, \nu_N)$.

Существенно аналогично, статистическая сумма может быть построена с помощью операторов ассоциированных с горизонтальными прямыми. Обозначая через $|\uparrow_\alpha^{\text{H}}\rangle$ и $|\downarrow_\alpha^{\text{H}}\rangle$

базисные векторы пространства \mathcal{V}_α , мы можем ввести состояния

$$|\uparrow_{1,\dots,N}^H\rangle := \bigotimes_{\alpha=1}^N |\uparrow_\alpha^H\rangle, \quad |\downarrow_{1,\dots,N}^H\rangle := \bigotimes_{\alpha=1}^N |\downarrow_\alpha^H\rangle,$$

которые являются состояниями «все спины вверх» и «все спины вниз» пространства $\mathcal{V}_{1,\dots,N}$.

Статистическая сумма тогда запишется в виде:

$$Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N) = \langle \uparrow_{1,\dots,N}^H | C_{1,\dots,N}^H(\nu_1) \cdots C_{1,\dots,N}^H(\nu_N) | \downarrow_{1,\dots,N}^H \rangle, \quad (2.4)$$

и напомним, что $C_{1,\dots,N}^H(\nu) = C_{1,\dots,N}^H(\nu; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

2.1.2. Алгебра Янга–Бакстера

Значимость операторов — матричных элементов матрицы монодромии — заключается в том, что они удовлетворяют квадратичной алгебре, называемой алгеброй матрицы монодромии или алгеброй Янга–Бакстера. В обозначениях и терминологии будем следовать в основном монографии [2].

Базовым соотношением является соотношение сплетения L -операторов [1, 2, 80]:

$$R_{\alpha\alpha'}(\lambda, \lambda') [L_{\alpha k}(\lambda, \nu) \otimes L_{\alpha' k}(\lambda', \nu)] = [L_{\alpha k}(\lambda', \nu) \otimes L_{\alpha' k}(\lambda, \nu)] R_{\alpha\alpha'}(\lambda, \lambda'). \quad (2.5)$$

Здесь $R_{\alpha\alpha'}(\lambda, \lambda')$ является матрицей действующей в прямом произведении двух вспомогательных пространств $\mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{V}_{\alpha'}$, и как 4×4 матрица, где первое пространство относится к 2×2 блокам, а второе к элементам внутри блоков, имеет следующий вид:

$$R_{\alpha\alpha'}(\lambda, \lambda') = \begin{pmatrix} f(\lambda', \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\lambda', \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\lambda', \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda', \lambda) \end{pmatrix}_{[\mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{V}_{\alpha'}]}. \quad (2.6)$$

Здесь

$$f(\lambda', \lambda) = \frac{\sin(\lambda - \lambda' + 2\eta)}{\sin(\lambda - \lambda')}, \quad g(\lambda', \lambda) = \frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda - \lambda')}. \quad (2.7)$$

В литературе R -матрица (2.6) часто называется XXZ R -матрицей, в силу связи шестивершинной модели с квантовой XXZ спиновой цепочкой Гейзенберга, или тригонометрической R -матрицей, в силу вида параметризующих ее функций (2.7).

Существование соотношения сплетения (2.5) и невырожденность R -матрицы означают, что справедливо аналогичное соотношение для матрицы монодромии:

$$R_{\alpha\alpha'}(\lambda, \lambda') [T_\alpha(\lambda) \otimes T_{\alpha'}(\lambda')] = [T_\alpha(\lambda') \otimes T_{\alpha'}(\lambda)] R_{\alpha\alpha'}(\lambda, \lambda'). \quad (2.8)$$

Это соотношение содержит все коммутационные соотношения между операторами $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$. Из 16 коммутационных соотношений содержащихся в (2.8) в дальнейшем нам понадобятся только некоторые из них, а именно,

$$B(\lambda) B(\lambda') = B(\lambda') B(\lambda), \quad (2.9)$$

$$A(\lambda) B(\lambda') = f(\lambda, \lambda') B(\lambda') A(\lambda) + g(\lambda', \lambda) B(\lambda) A(\lambda'), \quad (2.10)$$

$$D(\lambda) B(\lambda') = f(\lambda', \lambda) B(\lambda') D(\lambda) + g(\lambda, \lambda') B(\lambda) D(\lambda'), \quad (2.11)$$

$$C(\lambda) B(\lambda') = B(\lambda') C(\lambda) + g(\lambda, \lambda') [A(\lambda) D(\lambda') - A(\lambda') D(\lambda)], \quad (2.12)$$

где $A(\lambda) = A_{1, \dots, N}^V(\lambda; \nu_1, \dots, \nu_N)$, и т.д., а функции $f(\lambda', \lambda)$ и $g(\lambda', \lambda)$ даются (2.7). За списком всех коммутационных соотношений мы отсылаем к главе VIII книги [2].

2.1.3. «Двуузельная» модель

Рассмотрим следующее разложение матрицы монодромии:

$$T(\lambda) = T_2(\lambda) T_1(\lambda), \quad (2.13)$$

где матрица $T_1(\lambda)$ определена упорядоченное произведение нескольких первых L -операторов, а $T_2(\lambda)$ как произведение остальных L -операторов. В рамках квантового метода обратной задачи разложение (2.13) иногда называется «двуузельной» моделью [2]. Мы будем рассматривать здесь случай когда $T_1(\lambda)$ состоит только из одного L -оператора:

$$T_2(\lambda) = L_{\alpha N}(\lambda, \nu_N) \cdots L_{\alpha 2}(\lambda, \nu_2), \quad T_1(\lambda) = L_{\alpha 1}(\lambda, \nu_1). \quad (2.14)$$

Обозначим через $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$, и т.д., операторы — матричные элементы матриц монодромии $T_1(\lambda)$, $T_2(\lambda)$, соответственно,

$$T_i(\lambda) = \begin{pmatrix} A_i(\lambda) & B_i(\lambda) \\ C_i(\lambda) & D_i(\lambda) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Принимая во внимание, что $B(\lambda) = A_2(\lambda) B_1(\lambda) + B_2(\lambda) D_1(\lambda)$, и используя (2.1), получим

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= A_2(\lambda) c \sigma_1^- + B_2(\lambda) [b(\lambda, \nu_1) \pi_1^+ + a(\lambda, \nu_1) \pi_1^-] \\ &= \begin{pmatrix} b(\lambda, \nu_1) B_2(\lambda) & 0 \\ c A_2(\lambda) & a(\lambda, \nu_1) B_2(\lambda) \end{pmatrix}_{[\mathcal{H}_1]}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Нижнетреугольная структура оператора $B(\lambda)$ как матрицы в \mathcal{H}_1 означает, что произведение нескольких B -операторов имеет аналогичный вид:

$$B(\lambda_n) \cdots B(\lambda_1) = \begin{pmatrix} E_{11}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) & 0 \\ E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) & E_{22}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{pmatrix}_{[\mathcal{H}_1]}. \quad (2.16)$$

Диагональные элементы, $E_{11}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $E_{22}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, с точностью до простых множителей равны оператору $B_2(\lambda_n) \cdots B_2(\lambda_1)$,

$$\begin{aligned} E_{11}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \left(\prod_{\alpha=1}^n b(\lambda_\alpha, \nu_1) \right) B_2(\lambda_n) \cdots B_2(\lambda_1), \\ E_{22}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \left(\prod_{\alpha=1}^n a(\lambda_\alpha, \nu_1) \right) B_2(\lambda_n) \cdots B_2(\lambda_1), \end{aligned} \quad (2.17)$$

а внедиагональный элемент, $E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\beta=\alpha+1}^n a(\lambda_\beta, \nu_1) \cdot c \cdot \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} b(\lambda_\beta, \nu_1) \\ &\quad \times B_2(\lambda_n) \cdots B_2(\lambda_{\alpha+1}) A_2(\lambda_\alpha) B_2(\lambda_{\alpha-1}) \cdots B_2(\lambda_1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Полезно отметить, что в силу коммутационного соотношения (2.9) все матричные элементы в (2.16) инвариантны относительно перестановок параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. В то время как это свойство абсолютно очевидно для диагональных элементов (2.17), оно является нетривиальным для выражения (2.18), и выполняется в силу коммутационного соотношения (2.10) для операторов $B_2(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$.

При рассмотрении двуузельной модели полезно рассмотреть соответствующие разложения для состояний «все спины вверх» $|\uparrow\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle$ и «все спины вниз» $|\downarrow\rangle = |\downarrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle$. Для этих векторов, в соответствии с (2.14), мы положим

$$|\uparrow_1\rangle = |\uparrow_1^V\rangle \equiv |\uparrow_1^V\rangle, \quad |\uparrow_2\rangle = |\uparrow_{2,\dots,N}^V\rangle \equiv \bigotimes_{k=2}^N |\uparrow_k^V\rangle$$

и

$$|\downarrow_1\rangle = |\downarrow_1^V\rangle \equiv |\downarrow_1^V\rangle, \quad |\downarrow_2\rangle = |\downarrow_{2,\dots,N}^V\rangle \equiv \bigotimes_{k=2}^N |\downarrow_k^V\rangle,$$

соответственно.

Из (2.16) имеем

$$\langle \downarrow_1 | B(\lambda_n) \cdots B(\lambda_1) | \uparrow \rangle = E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) | \uparrow_2 \rangle. \quad (2.19)$$

Принимая во внимание, что

$$A_2(\lambda) | \uparrow_2 \rangle = \prod_{k=2}^N a(\lambda, \nu_k) | \uparrow_2 \rangle \quad (2.20)$$

можно воспользоваться коммутационным соотношением (2.10) чтобы выразить правую часть (2.19) в терминах только B_2 -операторов (действующих на вектор $|\uparrow_2\rangle$). Результат вычисления

имеет следующий вид:

$$E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) |\uparrow_2\rangle = c \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n b(\lambda_\beta, \nu_1) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{k=2}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) \\ \times B_2(\lambda_n) \cdots B_2(\lambda_{\alpha+1}) B_2(\lambda_{\alpha-1}) \cdots B_2(\lambda_1) |\uparrow_2\rangle. \quad (2.21)$$

Для того, чтобы увидеть справедливость этой формулы, достаточно взглянуть на член $\alpha = n$ в (2.18), который содержит оператор $A_2(\lambda_n) B_2(\lambda_{n-1}) \cdots B_2(\lambda_1)$. Это единственный член который дает вклад в член с $\alpha = n$ в (2.21) (содержащий $B_2(\lambda_{n-1}) \cdots B_2(\lambda_1)$) после применения коммутационного соотношения (2.10); более того, только первый член в правой части (2.10) дает вклад в указанный член с $\alpha = n$ в (2.21). Остальные члены в (2.21) следуют в силу симметрии относительно перестановок параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.

Формулы (2.19) и (2.21) выражают вектор построенный действием B -операторов в терминах векторов построенных действием B_2 -операторов, и поэтому эти формулы могут рассматриваться как рекуррентные соотношения по N , числу узлов решетки. Выбирая подходящее значение n (числа B -операторов) и компоненту этого вектора, можно получать рекуррентные соотношения для различных скалярных величин, таких как статистическая сумма или корреляционные функции. В каждом конкретном случае явное решение этих рекуррентных соотношений обусловлено тем, что начальными условиями рекурсий оказываются статистические суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки на решетке меньшего размера.

2.1.4. Рекуррентное соотношение для статистической суммы

В качестве иллюстрации только что описанного вкратце подхода рассмотрим рекуррентное соотношение для статистической суммы Z_N . Это рекуррентное соотношение возникает в случае скалярного произведения вектора (2.21) с вектором $\langle \downarrow_2 |$ при $n = N$ и имеет следующий вид:

$$Z_N = c \sum_{\alpha=1}^N \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N b(\lambda_\beta, \nu_1) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{k=2}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) Z_{N-1}[\lambda_\alpha; \nu_1]. \quad (2.22)$$

Здесь через $Z_{N-1}[\lambda_\alpha; \nu_1]$ обозначена статистическая сумма на $(N-1) \times (N-1)$ решетке, у которой из наборов параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и ν_1, \dots, ν_N удалены параметры λ_α и ν_1 , а именно

$$Z_{N-1}[\lambda_\alpha; \nu_1] \equiv Z_{N-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_N; \nu_2, \dots, \nu_N).$$

(Другими словами, квадратные скобки указывают на независимость от указанных переменных из «оригинальных» наборов $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и ν_1, \dots, ν_N .) Соотношение (2.22), очевидно,

представляет собой рекуррентное соотношение для статистической суммы по размеру решетки. Начальным условием рекурсии является $Z_1 = c$. Следует подчеркнуть, что в (2.22) значения всех параметров полностью произвольны, поэтому это соотношение может быть использовано для доказательства формулы Изергина–Корепина.

Для того чтобы доказать, что формула Изергина–Корепина (1.9) действительно справедлива, ее можно подставить в обе части (2.22), и проверить, является ли это соотношение тождеством. После подстановки (1.9) в обе части (2.22) и сокращения очевидных множителей, задача сводится к проверке равенства

$$\det \mathcal{M} = \frac{\prod_{k=2}^N d(\nu_1, \nu_k)}{\prod_{\alpha=1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1)} \sum_{\alpha=1}^N (-1)^{\alpha-1} g(\lambda_\alpha) \det \mathcal{M}_{[\alpha;1]}. \quad (2.23)$$

Здесь \mathcal{M} обозначает $N \times N$ матрицу с элементами $\mathcal{M}_{\alpha k} = \varphi(\lambda_\alpha, \nu_k)$, где функция $\varphi(\lambda, \nu)$ определена в (1.11), а $\mathcal{M}_{[\alpha;1]}$ обозначает $(N-1) \times (N-1)$ матрицу, полученную из \mathcal{M} удалением α -ой строки и первого столбца. Функция $g(\lambda) = g(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N)$ определяется формулой

$$g(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha=1}^N e(\lambda_\alpha, \lambda)}{\prod_{k=1}^N b(\lambda, \nu_k)}, \quad (2.24)$$

где использовано следующее обозначение:

$$e(\lambda, \lambda') = \sin(\lambda - \lambda' + 2\eta). \quad (2.25)$$

Очевидно, что сумма в (2.23) может быть записана в виде детерминанта:

$$\sum_{\alpha=1}^N (-1)^{\alpha-1} g(\lambda_\alpha) \det \mathcal{M}_{[\alpha;1]} = \begin{vmatrix} g(\lambda_1) & \varphi(\lambda_1, \nu_2) & \dots & \varphi(\lambda_1, \nu_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(\lambda_N) & \varphi(\lambda_N, \nu_2) & \dots & \varphi(\lambda_N, \nu_N) \end{vmatrix},$$

поэтому (2.23) наверняка выполняется, если значение функции $g(\lambda)$ в точках $\lambda = \lambda_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, N$, может быть представлено в виде

$$g(\lambda_\alpha) = \sum_{k=1}^N \Lambda_k \varphi(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad (2.26)$$

где величины Λ_k не зависят от значения индекса $\alpha = 1, \dots, N$, и, кроме того, Λ_1^{-1} равно множителю перед суммой в правой части (2.23). Действительно, указанное представление имеет место в силу тождества

$$\frac{\prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N e(\lambda_\beta, \lambda_\alpha)}{\prod_{k=1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_k)} = \sum_{k=1}^N \frac{\prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N a(\lambda_\beta, \nu_k)}{\prod_{j=1, j \neq k}^N d(\nu_k, \nu_j)} \frac{1}{b(\lambda_\alpha, \nu_k)}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (2.27)$$

которое напоминает разложение мероморфной функции в сумму по простым полюсам; тождество (2.27) может быть доказано различными методами (например, по индукции). Из (2.27) следует, что коэффициенты Λ_k в (2.26) равны

$$\Lambda_k = \frac{\prod_{\beta=1}^N a(\lambda_\beta, \nu_k)}{\prod_{j=1, j \neq k}^N d(\nu_k, \nu_j)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

и, таким образом, имеет место равенство обеих частей в (2.23).

2.2. Одноточечные граничные корреляционные функции

В этом разделе рассматривается задача вычисления граничных одноточечных корреляционных функций [24]. Основной результат состоит в том, что они выражаются через определители $N \times N$ матриц, которые являются матрицами Изергина–Корепина с одним модифицированным столбцом.

2.2.1. Определение граничных корреляционных функций

Будем рассматривать две тесно связанные корреляционные функции, которые будут обозначаться как $H_N^{(r)}$ и $G_N^{(r)}$, где $r = 1, \dots, N$. Эти корреляционные функции определяются как вероятности стрелочных конфигураций на ребрах примыкающих к первому сверху ряду узлов решетки, см. Рис. 2.2. По этой причине их естественно называть *граничными* корреляционными функциями.

Первая корреляционная функция, $H_N^{(r)}$, может быть определена как вероятность того, что r -ый узел справа в первом сверху горизонтальном ряду решетки является вершиной шестого типа (см. Рис. 1.1). Заметим, что в силу граничных условий типа доменной стенки, любой ряд примыкающий к границе (верхней, нижней, левой, или правой) содержит одну и только вершину шестого типа, что обусловлено правилом сохранения числа входящих и исходящих стрелок (правилом льда). Это свойство выражается формулой

$$\sum_{r=1}^N H_N^{(r)} = 1.$$

Поскольку функция $H_N^{(r)}$ описывает сумму по конфигурациям шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки у которых вершина шестого типа граничного ряда (по нашему определению, верхнего) находится в заданной позиции, эта функция имеет важный комбинаторный смысл, а именно, описывает *детальные перечисления* матриц чередующихся знаков.

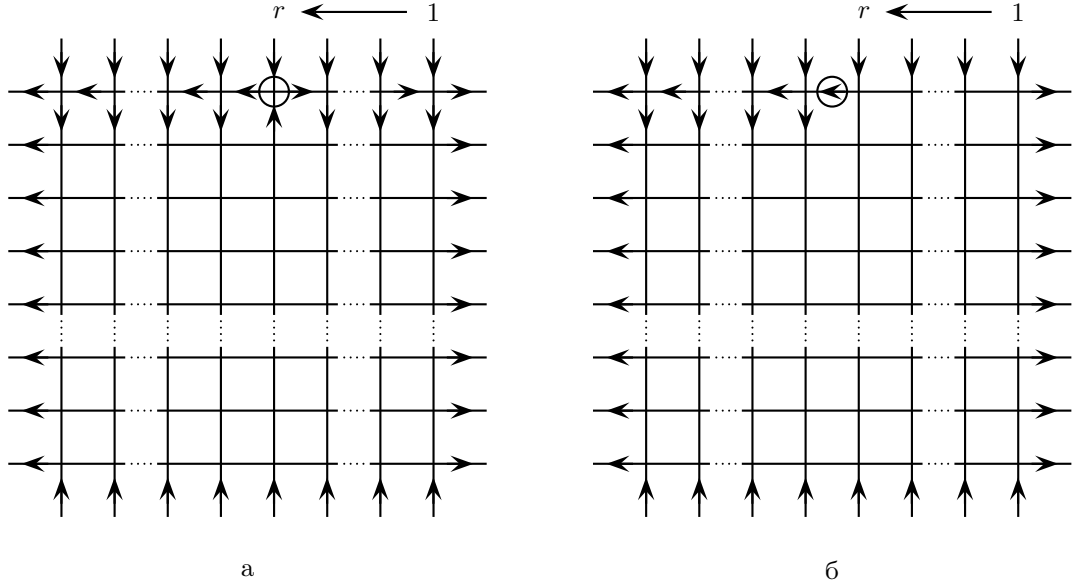


Рис. 2.2. Граничные одноточечные корреляционные функции: а) функция $H_N^{(r)}$, б) функция $G_N^{(r)}$.

Функцию $H_N^{(r)}$ можно также определять в терминах стрелочных конфигураций граничного (верхнего) ряда, см. Рис. 2.2а. В терминах стрелок на горизонтальных ребрах, $H_N^{(r)}$ описывает конфигурации в которых все стрелки до r -го узла справа направлены вправо, а после этого узла — все влево, и поэтому эту функцию можно интерпретировать как вероятность переворота стрелки. В терминах стрелок на вертикальных ребрах, $H_N^{(r)}$ описывает вероятность состояния «стрелка вверх» на r -ом справа вертикальном ребре между первой и второй горизонтальной линиями решетки, и поэтому эту функцию можно также интерпретировать как частный случай одноточечной функции описывающей поляризацию на вертикальных ребрах.

В терминах объектов квантового метода обратной задачи, например, с использованием операторов соответствующим вертикальным рядам решетки, функция $H_N^{(r)}$ определяется формулой:

$$H_N^{(r)} = Z_N^{-1} \langle \Downarrow | B(\lambda_N) \dots B(\lambda_{r+1}) \pi_1^- B(\lambda_r) \pi_1^+ B(\lambda_{r-1}) \dots B(\lambda_1) | \Uparrow \rangle \quad (2.28)$$

где операторы π_1^\pm , определенные в (2.2), соответствуют фиксированию состояний стрелок на горизонтальных ребрах первого ряда, и нами использованы упрощенные обозначения введенные выше: $|\Uparrow\rangle \equiv |\uparrow_{1,\dots,N}^V\rangle$, $\langle \Downarrow| \equiv \langle \downarrow_{1,\dots,N}^V|$, и $B(\lambda) \equiv B_{1,\dots,N}^V(\lambda; \nu_1, \dots, \nu_N)$.

Вторая корреляционная функция, $G_N^{(r)}$, является граничной горизонтальной поляризацией, см. Рис. (2.2)б. Более точно, $G_N^{(r)}$ для $r = 1, \dots, N - 1$ определяется как вероятность того, что стрелка на горизонтальном ребре первого ряда расположенного между r -ой и $(r + 1)$ -ой вертикальными линиями (как всегда, нумеруемыми справа) направлена влево. Это определение может быть также дополнено для стрелок на внешних ребрах, для значений $r = 0, N$,

если положить:

$$G_N^{(N)} = 1, \quad G_N^{(0)} = 0.$$

Как будет показано ниже, функция $G_N^{(r)}$ удобна для изучения эффектов разделения фаз в окрестности границы, поскольку имеет нетривиальное значение в термодинамическом пределе.

В терминах квантового метода обратной задачи функция $G_N^{(r)}$ может быть определена формулой

$$G_N^{(r)} = Z_N^{-1} \langle \downarrow | B(\lambda_N) \dots B(\lambda_{r+1}) \pi_1^- B(\lambda_r) \dots B(\lambda_1) | \uparrow \rangle. \quad (2.29)$$

Обе функции, $H_N^{(r)}$ и $G_N^{(r)}$, как нетрудно видеть из их графической интерпретации показанной на Рис. 2.2, удовлетворяют соотношениям:

$$G_N^{(r)} = \sum_{\alpha=1}^r H_N^{(\alpha)}, \quad H_N^{(r)} = G_N^{(r)} - G_N^{(r-1)}. \quad (2.30)$$

Эти соотношения также могут быть получены из (2.28) и (2.29).

2.2.2. Вычисление для неоднородной модели

Общая идея вычисления корреляционных функций $H_N^{(r)}$ и $G_N^{(r)}$ состоит в том, чтобы выразить их сначала через статистические суммы на $(N-1) \times (N-1)$ решетках, а затем воспользоваться формулой Изергина–Корепина.

В случае функции $H_N^{(r)}$, используя тот факт, что $\pi_1^+ = |\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1|$ и $\pi_1^- = |\downarrow_1\rangle\langle\downarrow_1|$, и, как следует из (2.15) и (2.16),

$$\begin{aligned} \langle \downarrow_1 | B(\lambda_r) | \uparrow_1 \rangle &= c A_2(\lambda_r), \\ \langle \uparrow_1 | B(\lambda_{r-1}) \dots B(\lambda_1) | \uparrow_1 \rangle &= E_{11}(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}), \\ \langle \downarrow_1 | B(\lambda_N) \dots B(\lambda_{r+1}) | \downarrow_1 \rangle &= E_{22}(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_N), \end{aligned}$$

где операторы E_{11} и E_{22} даются формулами (2.17), имеем следующее выражение в терминах операторов — элементов матрицы $T_2(\lambda)$:

$$H_N^{(r)} = Z_N^{-1} c \prod_{\alpha=r+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=1}^{r-1} b(\lambda_\alpha, \nu_1) \cdot \langle \downarrow_2 | \left(\prod_{j=r+1}^N B_2(\lambda_j) \right) A_2(\lambda_r) \left(\prod_{j=1}^{r-1} B_2(\lambda_j) \right) | \uparrow_2 \rangle. \quad (2.31)$$

(Заметим, что это выражение можно также получить используя тот факт, что все вершины первого ряда фиксированны на Рис. 2.2а, и применяя графическую интерпретацию операторов показанную на Рис. 2.2.) Используя (2.10) и (2.20), стандартное вычисление (см., например, [2], разделы VII.2 и XXII.2) дает

$$A_2(\lambda_r) \prod_{\alpha=1}^{r-1} B_2(\lambda_\alpha) | \uparrow_2 \rangle = \sum_{\alpha=1}^r \prod_{k=2}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) \frac{g(\lambda_\alpha, \lambda_r)}{f(\lambda_\alpha, \lambda_r)} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r B_2(\lambda_\beta) | \uparrow_2 \rangle.$$

Это соотношение приводит к следующему выражению для функции $H_N^{(r)}$ через статистические суммы на $(N-1) \times (N-1)$ решетках:

$$H_N^{(r)} = Z_N^{-1} c \prod_{\alpha=r+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=1}^{r-1} b(\lambda_\alpha, \nu_1) \times \sum_{\beta=1}^r \prod_{k=2}^N a(\lambda_\beta, \nu_k) \frac{g(\lambda_\beta, \lambda_r)}{f(\lambda_\beta, \lambda_r)} \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \beta}}^r f(\lambda_\beta, \lambda_\gamma) Z_{N-1}[\lambda_\alpha; \nu_1]. \quad (2.32)$$

Напомним, что квадратные скобки обозначают независимость от указанных параметров.

В случае функции $G_N^{(r)}$, аналог формулы (2.31) содержит оператор вида (2.18), поэтому соответствующее вычисление сводится к выводу рекуррентного соотношения, которое возникает при вычислении скалярного произведения вектора (2.21) с вектором $\langle \uparrow_2 | B_2(\lambda_N) \cdots B_2(\lambda_{N-r})$. В результате, приходим к следующему представлению:

$$G_N^{(r)} = Z_N^{-1} \prod_{\alpha=r+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=1}^r b(\lambda_\alpha, \nu_1) \sum_{\beta=1}^r \frac{c}{b(\lambda_\beta, \nu_1)} \prod_{k=2}^N a(\lambda_\beta, \nu_k) \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \beta}}^r f(\lambda_\beta, \lambda_\gamma) Z_{N-1}[\lambda_\alpha, \nu_1], \quad (2.33)$$

которое есть аналог (2.32).

Результат состоит в том, что корреляционные функции $H_N^{(r)}$ и $G_N^{(r)}$ выражаются в виде отношений двух детерминантов.

Использование формулы Изергина–Корепина в (2.32) приводит к следующему выражению для функции $H_N^{(r)}$:

$$H_N^{(r)} = \frac{c \prod_{k=2}^N d(\nu_1, \nu_k)}{\prod_{\alpha=1}^r a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=r}^N b(\lambda_\alpha, \nu_1) \det \mathcal{M}} \begin{vmatrix} v_r(\lambda_1) & \varphi(\lambda_1, \nu_2) & \cdots & \varphi(\lambda_1, \nu_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_r(\lambda_N) & \varphi(\lambda_N, \nu_2) & \cdots & \varphi(\lambda_N, \nu_N) \end{vmatrix}, \quad (2.34)$$

где функция $v_r(\lambda)$ дается формулой

$$v_r(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha=r+1}^N d(\lambda_\alpha, \lambda) \prod_{\alpha=1}^{r-1} e(\lambda_\alpha, \lambda)}{\prod_{k=2}^N b(\lambda, \nu_k)}. \quad (2.35)$$

Функции $d(\lambda, \lambda')$ и $e(\lambda, \lambda')$ определены в (1.10) и (2.25), соответственно.

Аналогично, подставляя формулу Изергина–Корепина в (2.33), для функции $G_N^{(r)}$ получим:

$$G_N^{(r)} = \frac{\prod_{k=2}^N d(\nu_1, \nu_k)}{\prod_{\alpha=1}^r a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=r+1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_1) \det \mathcal{M}} \begin{vmatrix} g_r(\lambda_1) & \varphi(\lambda_1, \nu_2) & \cdots & \varphi(\lambda_1, \nu_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_r(\lambda_N) & \varphi(\lambda_N, \nu_2) & \cdots & \varphi(\lambda_N, \nu_N) \end{vmatrix}, \quad (2.36)$$

где функция $g_r(\lambda)$ дается формулой

$$g_r(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha=r+1}^N d(\lambda_\alpha, \lambda) \prod_{\alpha=1}^r e(\lambda_\alpha, \lambda)}{\prod_{k=1}^N b(\lambda, \nu_k)}.$$

Заметим, что $G_N^{(N)} = 1$, поскольку $g_N(\lambda) = g(\lambda)$, где функция $g(\lambda)$ определена в (2.24), и которая также имеет вид (2.26).

2.2.3. Явные выражения в точке свободных фермионов

Рассмотрим задачу вычисления однородного предела (1.8) в полученных выражениях для граничных корреляционных функций в технически простом случае точки свободных фермионов $\Delta = 0$, что соответствует значению параметра $\eta = \frac{\pi}{4}$ в (1.3). В этом случае определитель в формуле Изергина–Корепина вычисляется явно, поскольку является определителем Коши (см. обсуждение в разделе 1.2.1); статистическая сумма дается формулой (1.15).

Для вычисления корреляционных функций $H_N^{(r)}$ и $G_N^{(r)}$ в этом случае удобно использовать представления (2.32) и (2.33), соответственно. Например, для корреляционной функции $H_N^{(r)}$, в силу (1.15), при справедливо выражение

$$H_N^{(r)} = \frac{\prod_{\alpha=1}^{r-1} \sin(\lambda_\alpha - \nu_1 - \frac{\pi}{4}) \prod_{\alpha=r+1}^N \sin(\lambda_\alpha - \nu_1 + \frac{\pi}{4})}{\prod_{j=1}^N \cos(\nu_j - \nu_1)} \times \sum_{\beta=1}^r \frac{\prod_{j=2}^N \sin(\lambda_\beta - \nu_j + \frac{\pi}{4})}{\prod_{\alpha=r}^N \cos(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^r \frac{1}{\sin(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}. \quad (2.37)$$

Однородный предел в (2.37) по параметрам ν_1, \dots, ν_N легко вычисляется простой подстановкой $\nu_1 = \dots = \nu_N = 0$ и дает следующее выражение для $H_N^{(r)}$ в случае когда ν_1, \dots, ν_N все равны, но $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ все различны:

$$H_N^{(r)} = \prod_{\alpha=1}^{r-1} \sin(\lambda_\alpha - \frac{\pi}{4}) \prod_{\alpha=r+1}^N \sin(\lambda_\alpha + \frac{\pi}{4}) \sum_{\beta=1}^r \frac{\sin^{N-1}(\lambda_\beta + \frac{\pi}{4})}{\prod_{\alpha=r}^N \cos(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^r \frac{1}{\sin(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}. \quad (2.38)$$

Чтобы вычислить однородный предел по переменным $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ заметим, что в терминах переменных

$$t_\alpha = \frac{\sin(\lambda_\alpha - \frac{\pi}{4})}{\sin(\lambda_\alpha + \frac{\pi}{4})}, \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

выражение (2.38) запишется в рациональном виде

$$H_N^{(r)} = (1 + t_r^2) \prod_{\alpha=1}^{r-1} t_\alpha \sum_{\beta=1}^r \prod_{\alpha=r}^N \frac{1}{1 + t_\alpha t_\beta} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^r \frac{1}{t_\alpha - t_\beta}. \quad (2.39)$$

Используя теорему Коши запишем сумму по β в (2.39) виде интеграла по комплексной переменной z по простому замкнутому контуру охватывающему полюса в точках $z = t_\beta$, $\beta = 1, \dots, r$ и затем перейдем к однородному пределу по параметрам $t_1, \dots, t_N \rightarrow t$:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^r \prod_{\alpha=r}^N \frac{1}{1+t_\alpha t_\beta} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^r \frac{1}{t_\alpha - t_\beta} &= \frac{(-1)^{r-1}}{2\pi i} \oint_{z=t_1, \dots, t_r} \prod_{\alpha=r}^N \frac{1}{1+t_\alpha z} \prod_{\alpha=1}^r \frac{1}{z - t_\alpha} dz \\ &\rightarrow \frac{(-1)^{r-1}}{2\pi i} \oint_{z=t} \frac{1}{(1+tz)^{N-r+1}(z-t)^r} dz = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{r-1} \frac{1}{(1+tz)^{N-r+1}} \Big|_{z=t} \\ &= \binom{N-1}{r-1} \frac{t^{r-1}}{(1+t^2)^N}. \end{aligned}$$

Таким образом, для корреляционной функции $H_N^{(r)}$ справедливо следующее выражение в однородном пределе (1.8):

$$H_N^{(r)} = \binom{N-1}{r-1} \frac{t^{2(r-1)}}{(1+t^2)^{N-1}} = \binom{N-1}{r-1} a^{2(N-r)} b^{2(r-1)}, \quad (2.40)$$

где a, b — веса модели в точке свободных фермионов, $a^2 + b^2 = c^2 \equiv 1$.

Полностью аналогичное вычисление в случае функции $G_N^{(M)}$ приводит к следующему выражению:

$$G_N^{(r)} = \sum_{k=1}^r \binom{N-1}{k-1} a^{2(N-k)} b^{2(k-1)}. \quad (2.41)$$

Легко видеть, что соотношения (2.30) удовлетворяются выражениями (2.41) и (2.40).

Полученные результаты полезно обсудить пределе $N, r \rightarrow \infty$, так что $r/N = x$ фиксированно, $x \in (0, 1)$. Будем рассматривать функцию $G_N^{(r)}$, которая, напомним, имеет смысл одноточечной функции описывающей вероятность стрелки направленной влево на заданном ребре первого горизонтального ряда решетки. Чтобы перейти к пределу, перепишем (2.41) через обрывающийся гипергеометрический ряд и воспользуемся интегральным представлением для гипергеометрической функции Эйлера:

$$\begin{aligned} G_N^{(r)} &= \binom{N-1}{r-1} a^{2(N-r)} b^{2(r-1)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -r+1, 1 \\ N-r+1 \end{matrix} \middle| -\frac{a^2}{b^2} \right) \\ &= \frac{(N-1)!}{(N-r-1)!(r-1)!} a^{2(N-r)} b^{2(r-1)} \int_0^1 (1-u)^{N-r-1} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} u \right)^{r-1} du. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Применяя метод перевала к интегралу (2.42), получим

$$\lim_{\substack{r, N \rightarrow \infty \\ r/N = x}} G_N^{(r)} = \begin{cases} 1 & x \in (b^2, 1) \\ 1/2 & x = b^2 \\ 0 & x \in (0, b^2). \end{cases} \quad (2.43)$$

Этот результат означает, что стрелки на первом ряду решетки статистически упорядочены, а именно, с вероятностью 1 направлены влево левее вертикального ряда с номером $[xN] = [b^2N]$ и направлены вправо справа от этого ряда; в окрестности $[b^2N]$ -го вертикального ряда состояния с левой и правой стрелками равновероятны. Другими словами, (2.43) есть одно из проявлений теоремы об арктическом круге (эллипсе) упоминавшейся в разделе 1.2.4, причем значение $x = b^2$ соответствует точке касания эллипса границы.

2.2.4. Результаты в однородном пределе

Вычисление однородного предела (1.8) для выражений (2.34) и (2.36) может быть проведено по полной аналогии с вычислением описанным в [48] для случая статистической суммы.

В однородном пределе, $H_N^{(r)}$ дается формулой

$$H_N^{(r)} = \frac{(N-1)! \sin 2\eta}{[\sin(\lambda + \eta)]^r [\sin(\lambda - \eta)]^{N-r+1} \det \mathcal{N}} \begin{vmatrix} \varphi & \dots & \partial_\lambda^{N-2} \varphi & \psi_0 \\ \partial_\lambda \varphi & \dots & \partial_\lambda^{N-1} \varphi & \psi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_\lambda^{N-1} \varphi & \dots & \partial_\lambda^{2N-3} \varphi & \psi_{N-1} \end{vmatrix}. \quad (2.44)$$

Здесь \mathcal{N} обозначает $N \times N$ матрицу с элементами $\mathcal{N}_{\alpha k} = \partial_\lambda^{\alpha+k-2} \varphi$, где функция $\varphi = \varphi(\lambda)$ определена в (1.13). Величины $\psi_k = \psi_k(\lambda; N, r)$ определяются из разложения в ряд Тейлора функции $\psi(\varepsilon) = \psi(\varepsilon, \lambda; N, r)$ в точке $\varepsilon = 0$,

$$\psi_k = \partial_\varepsilon^k \psi(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0},$$

где функция $\psi(\varepsilon)$, с точностью до множителя $(-1)^{N-1}$, определена как однородный предел функции (2.35):

$$\psi(\varepsilon) \equiv (-1)^{N-1} v_r(\lambda + \varepsilon) \Big|_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_N = \lambda \\ \nu_1, \dots, \nu_N = 0}} = \frac{(\sin \varepsilon)^{N-r} [\sin(\varepsilon - 2\eta)]^{r-1}}{[\sin(\varepsilon + \lambda - \eta)]^{N-1}}.$$

Заметим, что $\psi_0 = \psi_1 = \dots = \psi_{N-r-1} = 0$.

Функция $G_N^{(r)}$ в однородном пределе дается следующим выражением:

$$G_N^{(r)} = \frac{(N-1)!}{[\sin(\lambda + \eta)]^r [\sin(\lambda - \eta)]^{N-r} \det \mathcal{N}} \begin{vmatrix} \varphi & \dots & \partial_\lambda^{N-2} \varphi & \theta_0 \\ \partial_\lambda \varphi & \dots & \partial_\lambda^{N-1} \varphi & \theta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_\lambda^{N-1} \varphi & \dots & \partial_\lambda^{2N-3} \varphi & \theta_{N-1} \end{vmatrix}.$$

Величины $\theta_k = \theta_k(\lambda; N, r)$ определяются из разложения в ряд Тейлора функции $\theta(\varepsilon) = \theta(\varepsilon, \lambda; N, r)$ точке $\varepsilon = 0$,

$$\theta_k = \partial_\varepsilon^k \theta(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0},$$

где функция $\theta(\varepsilon)$, с точностью до множителя $(-1)^{N-1}$, определена как однородный предел функции (4.6):

$$\theta(\varepsilon) = (-1)^{N-1} g_r(\lambda + \varepsilon) \Big|_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_N = \lambda \\ \nu_1, \dots, \nu_N = 0}} = - \frac{(\sin \varepsilon)^{N-r} [\sin(\varepsilon - 2\eta)]^r}{[\sin(\varepsilon + \lambda - \eta)]^N},$$

причем $\theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_{N-r-1} = 0$.

2.3. Двухточечные граничные корреляционные функции

В этом разделе рассматривается задача вычисления граничных двухточечных корреляционных функций [29]. Основной результат состоит в том, что они выражаются через одноточечные для модели на $N \times N$ и $(N-1) \times (N-1)$ решетках.

2.3.1. Определение и вычисление для неоднородной модели

Непосредственным обобщением рассмотренных выше граничных одноточечных корреляционных функций являются граничные двухточечные функции [29, 81]. Здесь мы детально рассмотрим вывод функции $H_N^{(r_1, r_2)}$, которая описывает вероятность обнаружения вершин шестого типа (см. Рис. 1.1) на противоположных, верхних и нижних границах.

Более точно, определим функцию $H_N^{(r_1, r_2)}$ как вероятность такой конфигурации вершин решетки, что r_1 -ом узел (справа) первого (сверху) ряда и r_2 -ой узел последнего ряда одновременно содержат вершины шестого типа, см. Рис. 2.3. Заметим, что как уже обсуждалось выше, граничные ряды с каждой из сторон всегда содержат одну и только одну вершину шестого типа, что есть следствие граничных условий и правила льда. Поэтому, функция $H_N^{(r_1, r_2)}$ является двухточечным аналогом функции $H_N^{(r)}$, рассмотренной в предыдущем разделе.

В формализме квантового метода обратной задачи корреляционная функция $H_N^{(r_1, r_2)}$ может быть определена, например, при $r_1 < r_2$, формулой

$$H_N^{(r_1, r_2)} = \frac{1}{Z_N} \langle \Downarrow \left(\prod_{j=r_2+1}^N B(\lambda_j) \right) \pi_N^- B(\lambda_{r_2}) \pi_N^+ \left(\prod_{j=r_1+1}^{r_2-1} B(\lambda_j) \right) \pi_1^- B(\lambda_{r_1}) \pi_1^+ \left(\prod_{j=1}^{r_1-1} B(\lambda_j) \right) | \Uparrow \rangle.$$

При $r_1 = r_2$ и $r_1 > r_2$ имеют место аналогичные формулы.

Помимо функции $H_N^{(r_1, r_2)}$, можно также рассмотреть функцию $G_N^{(r_1, r_2)}$, которая описывает вероятность конфигурации со стрелками направленными влево на первом и последнем ряду.

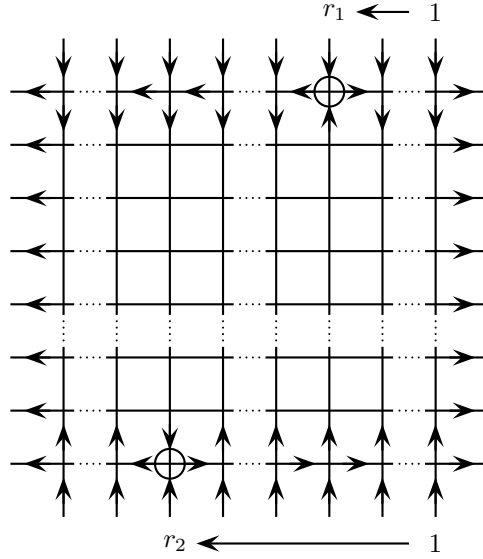


Рис. 2.3. Двухточечная корреляционная функция $H_N^{(r_1, r_2)}$.

Вычисление этой функции может быть проведено по полной аналогии с вычислением функции $H_N^{(r_1, r_2)}$, приведенном ниже. Также отметим, что функции $H_N^{(r_1, r_2)}$ и $G_N^{(r_1, r_2)}$ связаны между собой соотношениями, аналогичными (2.30) для одноточечных функций.

Для вычисления функции $H_N^{(r_1, r_2)}$ представим матрицу монодромии в виде «трехузельной» модели $T(\lambda) = T_3(\lambda)T_2(\lambda)T_1(\lambda)$, где

$$T_3(\lambda) = L_{\alpha N}(\lambda, \nu_N), \quad T_2(\lambda) = L_{\alpha, N-1}(\lambda, \nu_{N-1}) \cdots L_{\alpha 2}(\lambda, \nu_2), \quad T_1(\lambda) = L_{\alpha 1}(\lambda, \nu_1).$$

Рассмотрим соответствующее разложение для вектора $|\uparrow\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle \otimes |\uparrow_3\rangle$, где

$$|\uparrow_1\rangle = |\uparrow_1^V\rangle, \quad |\uparrow_2\rangle = |\uparrow_{2, \dots, N-1}^V\rangle, \quad |\uparrow_3\rangle = |\uparrow_N^V\rangle,$$

и, аналогично для вектора $\langle\downarrow|$. Следуя рассуждениям предыдущего раздела посвященном вычислению одноточечной функции, это позволит выразить корреляционную функцию $H_N^{(r_1, r_2)}$ в терминах матричных элементов операторов построенных из элементов матрицы $T_2(\lambda)$. Используя коммутационные соотношения для этих операторов и тот факт, что

$$A_2(\lambda)|\uparrow_2\rangle = \prod_{k=2}^{N-1} a(\lambda, \nu_k)|\uparrow_2\rangle, \quad D_2(\lambda)|\uparrow_2\rangle = \prod_{k=2}^{N-1} b(\lambda, \nu_k)|\uparrow_2\rangle, \quad (2.45)$$

в результате функция $H_N^{(r_1, r_2)}$ может быть выражена через статистические суммы на $(N-2) \times (N-2)$ решетках. Для последних может быть использована формула Изергина–Корепина.

В качестве примера рассмотрим детально случай, когда $r_1 < r_2$. Используя явные выражения для операторов — матричных элементов матриц монодромий $T_1(\lambda)$ и $T_3(\lambda)$ (или, например, используя графическую интерпретацию операторов, показанную на Рис. 2.1 в

применении к Рис. 2.3), для двухточечной функции $H_N^{(r_1, r_2)}$ получим

$$H_N^{(r_1, r_2)} = Z_N^{-1} c^2 \prod_{\alpha=r_1+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=1}^{r_1-1} b(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=r_2+1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_N) \prod_{\alpha=1}^{r_2-1} a(\lambda_\alpha, \nu_N) \\ \times \langle \Downarrow_2 | \left(\prod_{j=r_2+1}^N B_2(\lambda_j) \right) D_2(\lambda_{r_2}) \left(\prod_{j=r_1+1}^{r_2-1} B_2(\lambda_j) \right) A_2(\lambda_{r_1}) \left(\prod_{j=1}^{r_1-1} B_2(\lambda_j) \right) | \Uparrow_2 \rangle. \quad (2.46)$$

Вычисляя сначала действие оператора $A_2(\lambda_{r_1})$, используя следующее соотношение, которое следует из (2.9), (2.10) и (2.45),

$$A_2(\lambda_r) \prod_{\alpha=1}^{r-1} B_2(\lambda_\alpha) | \Uparrow_2 \rangle = \sum_{\alpha=1}^r \prod_{k=2}^{N-1} a(\lambda_\alpha, \nu_k) \frac{g(\lambda_\alpha, \lambda_r)}{f(\lambda_\alpha, \lambda_r)} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r B_2(\lambda_\beta) | \Uparrow_2 \rangle,$$

а затем оператора $D_2(\lambda_{r_2})$, используя соотношение, которое следует из (2.9), (2.11) и (2.45),

$$D_2(\lambda_r) \prod_{\alpha=1}^{r-1} B_2(\lambda_\alpha) | \Uparrow_2 \rangle = \sum_{\alpha=1}^r \prod_{k=2}^{N-1} b(\lambda_\alpha, \nu_k) \frac{g(\lambda_r, \lambda_\alpha)}{f(\lambda_r, \lambda_\alpha)} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r f(\lambda_\beta, \lambda_\alpha) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r B_2(\lambda_\beta) | \Uparrow_2 \rangle,$$

получим

$$H_N^{(r_1, r_2)} = Z_N^{-1} c^2 \prod_{\alpha=r_1+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=1}^{r_1-1} b(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=r_2+1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_N) \prod_{\alpha=1}^{r_2-1} a(\lambda_\alpha, \nu_N) \\ \times \sum_{\alpha=1}^{r_1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{r_2} \prod_{k=2}^{N-1} a(\lambda_\alpha, \nu_k) \frac{g(\lambda_\alpha, \lambda_{r_1})}{f(\lambda_\alpha, \lambda_{r_1})} \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^{r_1} f(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma) \prod_{k=2}^{N-1} b(\lambda_\beta, \nu_k) \frac{g(\lambda_{r_2}, \lambda_\beta)}{f(\lambda_{r_2}, \lambda_\beta)} \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^{r_2} f(\lambda_\gamma, \lambda_\beta) \\ \times Z_{N-2}[\lambda_\alpha, \lambda_\beta; \nu_1, \nu_N]. \quad (2.47)$$

Напомним, что квадратные скобки указывают на независимость от указанных переменных из «оригинальных» наборов $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и ν_1, \dots, ν_N .

В том случае, если $r_1 > r_2$, то сначала вычисляется действие оператора $D(\lambda_{r_2})$, а затем оператора $A(\lambda_{r_1})$. Прямое вычисление в этом случае приводит в точности к тому же самому выражению, что и было получено выше для $r_1 < r_2$. Таким образом, формула (2.47) справедлива для $r_1 \neq r_2$.

Рассмотрим теперь случай когда $r_1 = r_2 = r$. В этом случае, вместо (2.46), мы получим

$$H_N^{(r, r)} = Z_N^{-1} c^2 \prod_{\alpha=r+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1) b(\lambda_\alpha, \nu_N) \prod_{\alpha=1}^{r-1} b(\lambda_\alpha, \nu_1) a(\lambda_\alpha, \nu_N) \\ \times \langle \Downarrow_2 | \left(\prod_{j=r+1}^N B_2(\lambda_j) \right) C_2(\lambda_r) \left(\prod_{j=1}^{r-1} B_2(\lambda_j) \right) | \Uparrow_2 \rangle.$$

Используя коммутационное соотношение (2.12) нетрудно получить следующую формулу (см. также [2], раздел VII.2.2):

$$C_2(\lambda_r) \prod_{\alpha=1}^{r-1} B_2(\lambda_\alpha) |\uparrow_2\rangle = \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^r \prod_{k=2}^{N-1} a(\lambda_\alpha, \nu_k) \prod_{k=2}^{N-1} b(\lambda_\beta, \nu_k) \\ \times \frac{g(\lambda_\alpha, \lambda_r) g(\lambda_r, \lambda_\beta)}{f(\lambda_\alpha, \lambda_r) f(\lambda_r, \lambda_\beta)} f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^r f(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma) f(\lambda_\gamma, \lambda_\beta) \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^r B_2(\lambda_\gamma) |\uparrow_2\rangle.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае получим

$$H_N^{(r,r)} = Z_N^{-1} c^2 \prod_{\alpha=r+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1) b(\lambda_\alpha, \nu_N) \prod_{\alpha=1}^{r-1} b(\lambda_\alpha, \nu_1) a(\lambda_\alpha, \nu_N) \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^r \prod_{k=2}^{N-1} a(\lambda_\alpha, \nu_k) \prod_{k=2}^{N-1} b(\lambda_\beta, \nu_k) \\ \times \frac{g(\lambda_\alpha, \lambda_r) g(\lambda_r, \lambda_\beta)}{f(\lambda_\alpha, \lambda_r) f(\lambda_r, \lambda_\beta)} f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^r f(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma) f(\lambda_\gamma, \lambda_\beta) Z_{N-2}[\lambda_\alpha, \lambda_\beta; \nu_1, \nu_N].$$

Это формула показывает, что выражение (2.47) на самом деле справедливо для всех значений $r_1, r_2 = 1, \dots, N$, без ограничений.

Подставляя теперь формулу Изергина–Корепина (1.9) для статистических сумм Z_N и Z_{N-2} в (2.47), и проводя всевозможные сокращения, получим

$$H_N^{(r_1, r_2)} = \frac{c^2 d(\nu_1, \nu_N) \prod_{k=2}^{N-1} d(\nu_1, \nu_k) d(\nu_k, \nu_N)}{\prod_{\alpha=1}^{r_1} a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=r_1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=1}^{r_2} b(\lambda_\alpha, \nu_N) \prod_{\alpha=r_2}^N a(\lambda_\alpha, \nu_N) \det \mathcal{M}} \\ \times \sum_{\alpha=1}^{r_1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{r_2} (-1)^{N+\alpha+\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \frac{w_{r_1}(\lambda_\alpha) \tilde{w}_{r_2}(\lambda_\beta)}{e(\lambda_\beta, \lambda_\alpha)} \det \mathcal{M}_{[\alpha, \beta; 1, N]}. \quad (2.48)$$

Здесь $\mathcal{M}_{[\alpha, \beta; 1, N]}$ обозначает $(N-2) \times (N-2)$ матрицу полученную из \mathcal{M} удалением α -ой и β -ой строк, и первого и последнего столбцов. Символ $\epsilon_{\alpha\beta}$ обозначает знаковую функцию

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha > \beta \\ 0 & \alpha = \beta \\ -1 & \alpha < \beta. \end{cases}$$

Функции $w_r(\lambda)$ и $\tilde{w}(\lambda)$ даются следующими выражениями (ср. с (2.35)):

$$w_r(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha=r+1}^N d(\lambda_\alpha, \lambda) \prod_{\alpha=1}^{r-1} e(\lambda_\alpha, \lambda)}{\prod_{k=2}^{N-1} b(\lambda, \nu_k)}, \\ \tilde{w}_r(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha=r+1}^N d(\lambda, \lambda_\alpha) \prod_{\alpha=1}^{r-1} e(\lambda, \lambda_\alpha)}{\prod_{k=2}^{N-1} a(\lambda, \nu_k)}.$$

Заметим, что величины $w_r(\lambda_\alpha)$ и $\tilde{w}_r(\lambda_\alpha)$ тождественно равны нулю при $r < \alpha$; таким образом, область каждого из суммирований в (2.48) может быть расширена вплоть до N .

2.3.2. Результаты в однородном пределе

Рассмотрим теперь переход к однородному пределу в полученном выражении для двухточечной функции. При этом следует отметить, что, в отличие от формул для статистической суммы и одноточечных корреляционных функций, граничная двухточечная корреляционная функция в неоднородной модели не выражается явно в виде детерминанта некоторой матрицы. Тем не менее, как мы сейчас покажем, однородный предел может быть вычислен с помощью простого трюка.

Прежде всего отметим, что задача на самом деле состоит в том, чтобы найти однородный предел для следующей двойной суммы

$$W = \sum_{\alpha, \beta=1}^N (-1)^{N+\alpha+\beta} \epsilon_{\alpha\beta} F(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \det \mathcal{M}_{[\alpha, \beta; 1, N]}$$

где $F(\lambda, \lambda')$ есть некоторая функция. Рассмотрим подстановку

$$\lambda_\alpha = \lambda + \xi_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Впоследствии, при взятии однородного предела, все параметры ξ_α , $\alpha = 1, \dots, N$ (а также ν_k , $k = 1, \dots, N$) будут стремиться к нулю. Однако, перед взятием однородного предела мы можем написать

$$F(\lambda + \xi_1, \lambda + \xi_2) = \exp(\xi_\alpha \partial_{\epsilon_1}) \exp(\xi_\beta \partial_{\epsilon_2}) F(\lambda + \epsilon_1, \lambda + \epsilon_2) \Big|_{\epsilon_1, \epsilon_2=0},$$

и тогда двойная сумма запишется в виде

$$W = \begin{vmatrix} \exp(\xi_1 \partial_{\epsilon_1}) & \varphi(\lambda + z_1, \nu_2) & \dots & \varphi(\lambda + z_1, \nu_{N-1}) & \exp(\xi_1 \partial_{\epsilon_2}) \\ \exp(\xi_2 \partial_{\epsilon_1}) & \varphi(\lambda + z_2, \nu_2) & \dots & \varphi(\lambda + z_2, \nu_{N-1}) & \exp(\xi_2 \partial_{\epsilon_2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \exp(\xi_N \partial_{\epsilon_1}) & \varphi(\lambda + \xi_N, \nu_2) & \dots & \varphi(\lambda + z_N, \nu_{N-1}) & \exp(\xi_N \partial_{\epsilon_2}) \end{vmatrix} F(\lambda + \epsilon_1, \lambda + \epsilon_2) \Big|_{\epsilon_1, \epsilon_2=0}.$$

Очевидно, что взятие однородного предела в выражении (2.48) может быть выполнено точно также, как и в случае статистической суммы и одноточечных корреляционных функций, для которых ответы для неоднородной модели записываются в виде детерминантов.

Чтобы сделать вычисление прозрачнее, при взятии однородного предела полезно воспользоваться процедурой детально описанной в работе [48]. А именно, мы будем приравнивать к нулю все параметры в порядке $\nu_1, \dots, \nu_N, \xi_1, \dots, \xi_N$, на каждом шаге удерживая лишь главный член. Для множителя, стоящего перед двойной суммой в (2.48), получим

$$\frac{\sin^2 2\eta}{[\sin(\lambda + \eta)]^{N+r_1-r_2+1} [\sin(\lambda - \eta)]^{N+r_2-r_1+1} \det \mathcal{N}} \frac{(N-1)!(N-2)!}{\left(\xi_2 \cdot \frac{\xi_3^2}{2!} \cdot \frac{\xi_4^3}{3!} \dots \frac{\xi_N^{N-1}}{(N-1)!} \right) \left(\nu_3 \cdot \frac{\nu_4^2}{2!} \dots \frac{\nu_{N-1}^{N-2}}{(N-3)!} \right)}.$$

Для двойной суммы получим

$$\left(\xi_2 \cdot \frac{\xi_3^2}{2!} \cdot \frac{\xi_4^3}{3!} \cdots \frac{\xi_N^{N-1}}{(N-1)!} \right) \left(\nu_3 \cdot \frac{\nu_4^2}{2!} \cdots \frac{\nu_{N-1}^{N-2}}{(N-3)!} \right) \begin{vmatrix} \varphi(\lambda) & \cdots & \partial_\lambda^{N-3} \varphi(\lambda) & 1 & 1 \\ \partial_\lambda \varphi(\lambda) & \cdots & \partial_\lambda^{N-2} \varphi(\lambda) & \partial_{\varepsilon_2} & \partial_{\varepsilon_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_\lambda^{N-1} \varphi(\lambda) & \cdots & \partial_\lambda^{2N-4} \varphi(\lambda) & \partial_{\varepsilon_1}^{N-1} & \partial_{\varepsilon_1}^{N-1} \end{vmatrix} \\ \times \frac{(\sin \varepsilon_1)^{N-r_1} [\sin(\varepsilon_1 - 2\eta)]^{r_1-1} (\sin \varepsilon_2)^{N-r_2} [\sin(\varepsilon_2 + 2\eta)]^{r_2-1}}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 2\eta) [\sin(\varepsilon_1 + \lambda - \eta)]^{N-2} [\sin(\varepsilon_2 + \lambda + \eta)]^{N-2}} \Big|_{\varepsilon_1, \varepsilon_2=0}.$$

Таким образом, для двухточечной функции в однородном пределе справедливо следующее выражение:

$$H_N^{(r_1, r_2)} = \frac{(N-1)! (N-2)! \sin^2 2\eta}{[\sin(\lambda + \eta)]^{N+r_1-r_2+1} [\sin(\lambda - \eta)]^{N+r_2-r_1+1}} \\ \times \frac{1}{\det \mathcal{N}} \begin{vmatrix} \varphi(\lambda) & \cdots & \partial_\lambda^{N-3} \varphi(\lambda) & 1 & 1 \\ \partial_\lambda \varphi(\lambda) & \cdots & \partial_\lambda^{N-2} \varphi(\lambda) & \partial_{\varepsilon_2} & \partial_{\varepsilon_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_\lambda^{N-1} \varphi(\lambda) & \cdots & \partial_\lambda^{2N-4} \varphi(\lambda) & \partial_{\varepsilon_1}^{N-1} & \partial_{\varepsilon_1}^{N-1} \end{vmatrix} \\ \times \frac{(\sin \varepsilon_1)^{N-r_1} [\sin(\varepsilon_1 - 2\eta)]^{r_1-1} (\sin \varepsilon_2)^{N-r_2} [\sin(\varepsilon_2 + 2\eta)]^{r_2-1}}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 2\eta) [\sin(\varepsilon_1 + \lambda - \eta)]^{N-2} [\sin(\varepsilon_2 + \lambda + \eta)]^{N-2}} \Big|_{\varepsilon_1, \varepsilon_2=0}. \quad (2.49)$$

Это представление аналогично таковому, для полученным в предыдущем разделе для одноточечных функций.

2.3.3. Представление через ортогональные полиномы

Выражение (2.49) подсказывает, что корреляционные функции могут быть выражены в терминах ортогональных полиномов, порождаемых определителем в формуле Изергина–Корепина однородной модели. Моменты $c_n = c_n(\lambda)$ даются формулой

$$c_n = \partial_\lambda^n \varphi(\lambda). \quad (2.50)$$

Явное выражение для функционала T_x в (1.28), как упоминается в комментарии после формулы (1.29), зависит от фазы модели. Например, для разупорядоченной фазы, для которой веса даются формулами (1.3) и (1.4), можно воспользоваться представлением функции $\varphi(\lambda)$ в виде обратного преобразования Лапласа

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} \tilde{\varphi}(x) dx, \quad \lambda \in (\eta, \pi - \eta), \quad (2.51)$$

где функция $\tilde{\varphi}(x)$ дается формулой

$$\tilde{\varphi}(x) = e^{-x\pi/2} \frac{\sinh \eta x}{\sinh(\pi x/2)}, \quad \eta \in (0, \pi/2). \quad (2.52)$$

Из (2.51) следует, что функционал T_x задается формулой (1.29), где мера интегрирования имеет вид

$$d\mu(x) = e^{\lambda x} \tilde{\varphi}(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Формулы, аналогичные (2.51) и (2.52) имеют место также и для сегнетоэлектрической и антисегнетоэлектрической фаз [58]. Как будет ясно ниже, однако, представления в терминах ортогональных полиномов для корреляционных функций не будут зависеть от выбора фазы модели, поскольку различные фазы связаны с помощью аналитического продолжения по параметрам λ и η .

В качестве простого примера полезно рассмотреть случай одноточечной функции $H_N^{(r)}$. Используя (1.33), выражение (2.44) для этой функции в однородном пределе можно переписать в виде

$$H_N^{(r)} = \frac{(N-1)! \sin 2\eta}{[\sin(\lambda+\eta)]^r [\sin(\lambda-\eta)]^{N-r+1}} \frac{\kappa_{N-1}}{h_{N-1}} P_{N-1}(\partial_\varepsilon) \frac{(\sin \varepsilon)^{N-r} [\sin(\varepsilon-2\eta)]^{r-1}}{[\sin(\varepsilon+\lambda-\eta)]^{N-1}} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (2.53)$$

где $\kappa_{N-1} = \kappa_{N-1}(\lambda, \eta)$ и $h_{N-1} = h_{N-1}(\lambda, \eta)$ есть старший коэффициент и нормировочная константа полинома $P_{N-1}(x) = P_{N-1}(x; \lambda, \eta)$, соответственно. На первый взгляд, выражение (2.53) ничем не лучше (2.44). Однако, если мы введем функции

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\sin(\lambda+\eta)}{\sin(\lambda-\eta)} \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon-2\eta)}, \quad \varrho(\varepsilon) = \frac{\sin(\lambda-\eta)}{\sin 2\eta} \frac{\sin(\varepsilon-2\eta)}{\sin(\varepsilon+\lambda-\eta)}, \quad (2.54)$$

которые, как нетрудно видеть, связаны соотношением

$$\varrho(\varepsilon) = \frac{1}{\omega(\varepsilon) - 1}, \quad (2.55)$$

то тогда (2.53) запишется в следующем виде:

$$H_N^{(r)} = \frac{(N-1)! \sin^N 2\eta}{[\sin(\lambda+\eta) \sin(\lambda-\eta)]^N} \frac{\kappa_{N-1}}{h_{N-1}} P_{N-1}(\partial_\varepsilon) [\omega(\varepsilon)]^{N-r} [\varrho(\varepsilon)]^{N-1} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Из этой формулы видно, что если мы введем полиномы

$$K_n(x) = n! \varphi^{n+1} \frac{\kappa_n}{h_n} P_n(x) = n! \varphi^{n+1} \frac{\Delta_n^{(1)}(x)}{\Delta_n}, \quad (2.56)$$

где $\varphi = \varphi(\lambda)$ есть функция (1.13), то тогда одноточечная функция $H_N^{(r)}$ примет особенно компактный вид.

Предложение 2.1. *Одноточечная функция $H_N^{(r)}$ допускает представление в виде:*

$$H_N^{(r)} = K_{N-1}(\partial_\varepsilon) [\omega(\varepsilon)]^{N-r} [\varrho(\varepsilon)]^{N-1} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (2.57)$$

где полином $K_{N-1}(x)$ определяется формулами (1.31), (1.33), (2.50) и (2.56).

Полиномы $K_n(x)$ будут играть важную роль в дальнейшем; отметим, что второе равенство в (2.56) задает эти полиномы полностью в терминах функции $\varphi = \varphi(\lambda)$ и ее производных, в силу формулы для моментов (2.50).

Применим теперь аналогичную процедуру к двухточечной функции $H_N^{(r_1, r_2)}$. Используя формулу (1.34) при $k = 2$, выражение (2.49) для двухточечной функции переписывается в виде

$$H_N^{(r_1, r_2)} = \frac{(N-1)!(N-2)! \sin^2 2\eta}{[\sin(\lambda + \eta)]^{N+r_1-r_2+1} [\sin(\lambda - \eta)]^{N+r_2-r_1+1}} \frac{\kappa_{N-1} \kappa_{N-2}}{h_{N-1} h_{N-2}} \left| \begin{array}{cc} P_{N-2}(\partial_{\varepsilon_2}) & P_{N-2}(\partial_{\varepsilon_1}) \\ P_{N-1}(\partial_{\varepsilon_2}) & P_{N-1}(\partial_{\varepsilon_1}) \end{array} \right| \times \frac{(\sin \varepsilon_1)^{N-r_1} [\sin(\varepsilon_1 - 2\eta)]^{r_1-1} (\sin \varepsilon_2)^{N-r_2} [\sin(\varepsilon_2 + 2\eta)]^{r_2-1}}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 2\eta) [\sin(\varepsilon_1 + \lambda - \eta)]^{N-2} [\sin(\varepsilon_2 + \lambda + \eta)]^{N-2}} \Big|_{\varepsilon_1, \varepsilon_2=0}. \quad (2.58)$$

Аналогично (2.54), введем функции

$$\tilde{\omega}(\varepsilon) = \frac{\sin(\lambda - \eta)}{\sin(\lambda + \eta)} \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + 2\eta)}, \quad \tilde{\varrho}(\varepsilon) = \frac{\sin(\lambda + \eta)}{\sin 2\eta} \frac{\sin(\varepsilon + 2\eta)}{\sin(\varepsilon + \lambda + \eta)} \quad (2.59)$$

которые, в свою очередь, см. (2.55), связаны соотношением

$$\tilde{\varrho}(\varepsilon) = \frac{1}{1 - \tilde{\omega}(\varepsilon)}. \quad (2.60)$$

Кроме того, используя тождество

$$\sin 2\eta \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 2\eta) = \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 - \sin(\varepsilon_1 - 2\eta) \sin(\varepsilon_2 + 2\eta)$$

нетрудно видеть, что имеет место соотношение

$$\frac{\sin(\varepsilon_1 + \lambda - \eta) \sin(\varepsilon_2 + \lambda + \eta)}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 2\eta)} = \frac{1}{\varphi(\varepsilon_1) \tilde{\varrho}(\varepsilon_2)} \frac{1}{\omega(\varepsilon_1) \tilde{\omega}(\varepsilon_2) - 1}, \quad (2.61)$$

и, таким образом, все функции зависящие от ε_1 и ε_2 в (2.58) выражаются через функции $\omega(\varepsilon_1)$ и $\tilde{\omega}(\varepsilon_2)$. В результате, переходя к полиномам (2.56), получим следующий результат:

Предложение 2.2. *Двухточечная функция $H_N^{(r_1, r_2)}$ допускает представление*

$$H_N^{(r_1, r_2)} = \left| \begin{array}{cc} K_{N-2}(\partial_{\varepsilon_2}) & K_{N-2}(\partial_{\varepsilon_1}) \\ K_{N-1}(\partial_{\varepsilon_2}) & K_{N-1}(\partial_{\varepsilon_1}) \end{array} \right| \frac{[\omega(\varepsilon_1)]^{N-r_1} [\varrho(\varepsilon_1)]^{N-2} [\tilde{\omega}(\varepsilon_2)]^{N-r_2} [\tilde{\varrho}(\varepsilon_2)]^{N-2}}{\omega(\varepsilon_1) \tilde{\omega}(\varepsilon_2) - 1} \Big|_{\varepsilon_1, \varepsilon_2=0}, \quad (2.62)$$

где функции $\omega(\varepsilon)$, $\varrho(\varepsilon)$ и $\tilde{\omega}(\varepsilon)$, $\tilde{\varrho}(\varepsilon)$ даются формулами (2.54) и (2.59), соответственно.

Представление (2.62) является аналогом представления (2.57) одноточечной функции $H_N^{(r)}$. Очевидное свойство представления (2.62) состоит в том, зависимость от ε_1 содержится только в функциях $\omega(\varepsilon)$ и $\varrho(\varepsilon)$, а от ε_2 — только в функциях $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ и $\tilde{\varrho}(\varepsilon)$.

2.3.4. Представление через одноточечные функции

Сравнение формул (2.62) и (2.57) подсказывает, что двухточечная функция может быть выражена через одноточечные функции. Это оказывается действительно возможно, благодаря тому, что существует представление для одноточечной функции $H_N^{(r)}$, аналогичное (2.57), но с функциями $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ и $\tilde{\rho}(\varepsilon)$ вместо $\omega(\varepsilon)$ и $\rho(\varepsilon)$, соответственно.

Чтобы получить это представление, воспользуемся симметрией шестивершинной модели, которая известна как кроссинг-симметрия. Эта симметрия заключается в инвариантности вершинных весов при отражении стрелочных конфигураций вершины относительно вертикальной оси и одновременной перестановки весовых функций a и b . Поскольку решетка с граничными условиями типа доменной стенки очевидно инвариантна относительно отражения относительно вертикальной оси, то для одноточечной функции имеет место следующее свойство симметрии, вытекающее из ее определения:

$$H_N^{(r)}(a, b, c) = H_N^{(N-r+1)}(b, a, c),$$

где мы указали явно зависимость от весовых функций a , b и c .

В используемой нами параметризации (1.3) перестановка весов a и b соответствует преобразованию $\lambda \mapsto \pi - \lambda$. Указывая явно зависимость от параметра λ , заметим, что имеют место соотношения

$$\tilde{\omega}(\varepsilon; \lambda) = \omega(-\varepsilon; \pi - \lambda), \quad \tilde{\rho}(\varepsilon; \lambda) = -\rho(-\varepsilon; \pi - \lambda), \quad (2.63)$$

которые означают, что функции $\omega(\varepsilon)$ и $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ (а также $\rho(\varepsilon)$ и $\tilde{\rho}(\varepsilon)$) связаны преобразованием кроссинг-симметрии. Используя свойство веса ортогональности

$$\mu(x) = \mu(x; \lambda) = e^{x(\lambda - \pi/2)} \frac{\sinh(\eta x)}{\sinh(\pi x/2)} = \mu(-x; \pi - \lambda, \eta)$$

легко видеть, что старшие коэффициенты $\kappa_n = \kappa_n(\lambda)$ и нормировочные константы полиномов $h_n = h_n(\lambda)$ инвариантны относительно замены $\lambda \mapsto \pi - \lambda$. Полиномы $P_n(x) = P_n(x; \lambda)$, как следует из формулы (1.31), удовлетворяют соотношению

$$P_n(x; \lambda) = (-1)^n P_n(-x; \pi - \lambda). \quad (2.64)$$

Поскольку $\varphi = \varphi(\lambda) = \varphi(\pi - \lambda)$, то соотношение, аналогичное (2.64), справедливо также и для полиномов $K_n(x) = K_n(x; \lambda)$ определенных в (2.56),

$$K_n(x; \lambda) = (-1)^n K_n(-x; \pi - \lambda). \quad (2.65)$$

Таким образом, применяя преобразования $r \mapsto N - r + 1$ и $\lambda \mapsto \pi - \lambda$ к представлению (2.57) и используя (2.63) и (2.65), получим, что одноточечная функция $H_N^{(r)}$ допускает представление

$$H_N^{(r)} = K_{N-1}(\partial_\varepsilon) [\tilde{\omega}(\varepsilon)]^{r-1} [\tilde{\rho}(\varepsilon)]^{N-1} \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (2.66)$$

Иначе говоря, представление (2.66) означает, что в формуле (2.57) можно положить $\varepsilon \rightarrow 2\eta$, вместо $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теперь мы можем выразить двухточечную функцию через одноточечные. Принимая во внимание, что $\omega(\varepsilon), \tilde{\omega}(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы можем разложить знаменатель в (2.62) в ряд Тейлора. Легко видеть, что в этом разложении будут давать вклад не более чем N первых членов. Используя также соотношения (2.55) и (2.60), элементарные вычисления приводят к следующему результату:

Теорема 2.3. *Граничная двухточечная функция допускает представление*

$$H_N^{(r_1, r_2)} = \sum_{j=1}^N (H_N^{(r_1-j+1)} H_{N-1}^{(N-r_2+j)} - H_N^{(r_1-j)} H_{N-1}^{(N-r_2+j)} - H_{N-1}^{(r_1-j)} H_N^{(N-r_2+j+1)} + H_{N-1}^{(r_1-j)} H_N^{(N-r_2+j)}), \quad (2.67)$$

где $H_N^{(r)}$, $r = 1, \dots, N$, является граничной одноточечной функцией (2.57), и $H_N^{(r)} \equiv 0$, $r \neq 1, \dots, N$.

В качестве комментария к этому результату, полезно переписать его в терминах производящих функций. Введем производящую функцию одноточечной корреляционной функции

$$h_N(z) = \sum_{r=1}^N H_N^{(N-r+1)} z^{r-1}.$$

Аналогично, определим производящую функцию двухточечной корреляционной функции формулой

$$h_{N,2}(z_1, z_2) = \sum_{r_1, r_2=1}^N H_N^{(N-r_1+1, r_2)} z_1^{r_1-1} z_2^{r_2-1}.$$

Тогда формула (2.67) означает, что

$$\begin{aligned} h_{N,2}(z_1, z_2) &= \frac{(z_1 - 1)h_N(z_1) \cdot z_2 h_{N-1}(z_2) - z_1 h_{N-1}(z_1) \cdot (z_2 - 1)h_N(z_2)}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{1}{z_1 - z_2} \begin{vmatrix} z_2 h_{N-1}(z_2) & z_1 h_{N-1}(z_1) \\ (z_2 - 1)h_N(z_2) & (z_1 - 1)h_N(z_1) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Эта формула обобщает на произвольные значения весов модели результат работы [82], где такое представление для производящей функции двухточечной корреляционной функции было получено для значений параметров $\lambda = \pi/2$ и $\eta = \pi/6$, что соответствует так называемой «точке льда» — случаю равных весов $a = b = c$.

Приложения к задачам перечислений матриц чередующихся знаков

В этой главе показано как формула Изергина–Корепина для однородной модели, выражающая статистическую сумму модели через определитель ганкелевой матрицы, может быть использована для вывода известных результатов перечислений матриц чередующихся знаков. Основой метода является связь ганкелевой матрицы, при определенных значениях параметров модели, с известными классическими полиномами из таблицы Аски–Вильсона (полиномами Мейкснера–Поллачка, непрерывными полиномами Хана и непрерывными дуальными полиномами Хана). В случае одноточечных граничных корреляционных функций, применение этой связи с классическими ортогональными полиномами позволяет выводить формулы для детальных перечислений матриц чередующихся знаков. Основным новым результатом здесь является теорема о детальных 3-перечислениях. Глава основана на результатах автора опубликованных в работах [27, 28, 30].

3.1. Статистическая сумма и перечисления матриц чередующихся знаков

В этом разделе мы рассмотрим основные свойства ганкелевой матрицы входящей в формулу Изергина–Корепина для статистической суммы однородной модели и покажем ее связь с некоторыми классическими ортогональными полиномами. Используя эту связь, мы даем простое доказательство формул для x -перечислений матриц чередующихся знаков для $x = 1, 2, 3$.

3.1.1. Некоторые свойства формулы Изергина–Корепина

Для приложений к комбинаторным задачам шестивершинную модель с граничными условиями типа доменной стенки достаточно рассматривать с однородными весами. Весьма интересно, что в комбинаторных доказательствах использующих формулу Изергина–Корепина в качестве стартовой точки часто используется неоднородная модель. В этих доказательствах однородный предел можно рассматривать, по сути, в качестве наиболее сложной части на пути к результату. Следовательно, можно ожидать, что извлечение полезной информации

непосредственно из однородной модели должно быть технически проще. Мы покажем, что это действительно так, поскольку некоторые стандартные классические ортогональные полиномы могут быть естественным образом связаны (для некоторых конкретных значениях параметров) с ганкелевой матрицей в формуле Изергина–Корепина для однородной модели.

Напомним, см. обсуждение в разделе 1.2.2, что x -перечисления матриц чередующихся знаков выражаются через статистическую сумму шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки по формуле

$$A(N; x) = (1 - x/4)^{-N^2/2} x^{-N/2} Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\arcsin(\sqrt{x}/2)}}.$$

В этой главе будем обозначать $N \times N$ матрицу формуле Изергина–Корепина для однородной модели как \mathcal{Z} , так что (1.12) запишется в виде

$$Z_N = \frac{[\sin(\lambda - \eta) \sin(\lambda + \eta)]^{N^2}}{\prod_{k=1}^{N-1} (k!)^2} \det_N \mathcal{Z}, \quad (3.1)$$

причем будем здесь следовать соглашению, что что индексы $N \times N$ матриц пробегает значения $j, k = 0, 1, \dots, N - 1$. Таким образом, \mathcal{Z} есть $N \times N$ матрица с элементами

$$\mathcal{Z}_{jk} = \frac{\partial^{j+k}}{\partial \lambda^{j+k}} \frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda - \eta) \sin(\lambda + \eta)} \quad j, k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.2)$$

Для того, чтобы воспользоваться методом изучения ганкелевых матриц, основанном на теории ортогональных полиномов [76, 83], основные сведения которого были приведены в разделе 1.3.1, предположим, что элементы матрицы \mathcal{Z} записываются в виде

$$\mathcal{Z}_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{j+k} \mu(x) dx, \quad (3.3)$$

Если функция $\mu(x)$ положительно определена на всей области интегрирования, то тогда существует полный набор полиномов $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяющих условию ортогональности на вещественной оси с весом $\mu(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_j(x) p_k(x) dx = h_j \delta_{jk}.$$

Обозначая через κ_n коэффициент члена старшей степени полинома $p_n(x)$, имеем следующую формулу:

$$\det \mathcal{Z} = \det \left[\frac{1}{\kappa_j \kappa_k} \int_{-\infty}^{\infty} p_j(x) p_k(x) \mu(x) dx \right]_{j,k=0,\dots,N-1} = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{h_n}{\kappa_n^2}. \quad (3.4)$$

Разумеется, на практике эта формула полезна, если набор полиномов ортогональных с заданным весом $\mu(x)$ может быть идентифицирован.

Для значений параметров соответствующих разупорядоченной фазе, а именно, когда η и λ вещественные и удовлетворяют условиям (1.4), функция $\mu(x)$ определяется как подынтегральное выражение в интегральном представлении

$$\frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda - \eta) \sin(\lambda + \eta)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda - \pi/2)x} \frac{\sinh \eta x}{\sinh \frac{\pi}{2} x} dx. \quad (3.5)$$

Для произвольных λ и η соответствующие полиномы неизвестны. Тем не менее, для частных значений этих параметров соответствующие ортогональные полиномы могут быть обнаружены в рамках схемы гипергеометрических ортогональных полиномов Аски–Вильсона [72, 84].

А именно, есть три случая, указанные на диаграмме модели, см Рис. 3.1, которые укладываются в схему:

- «Точка свободных фермионов», на диаграмме дуга окружности $\Delta = 0$, соответствующая значениям $\eta = \pi/4$ и $\lambda \in (\pi/4, 3\pi/4)$;
- «Точка льда», на диаграмме точка $a = b = c$, которая является точкой пересечения кривой $\Delta = 1/2$ и прямой $a = b$, что соответствует значениям $\eta = \pi/6$ и $\lambda = \pi/2$;
- «Дуальная точка льда», на диаграмме точка $a = b = c/\sqrt{3}$, которая является точкой пересечения кривой $\Delta = -1/2$ и прямой $a = b$, что соответствует значениям $\eta = \pi/3$ и $\lambda = \pi/2$.

В таблице Аски–Вильсона указанным трем случаям соответствуют: полиномы Мейкснера–Поллачка, непрерывные полиномы Хана и дуальные непрерывные полиномы Хана. Ниже в этом разделе приведены детали вычислений для каждого из этих случаев.

Формулы, аналогичные (3.5) также имеют место когда параметры модели соответствуют сегнетоэлектрической и антисегнетоэлектрической фазам [58]. В этих случаях, однако, мера интегрирования дискретная и ортогональные полиномы не известны в общем виде (не принадлежат схеме Аски–Вильсона) ни при каких частных значениях параметров.

Интересно отметить, что перечисленный выше набор значений параметров когда ганкелевый определитель в формуле Изергина–Корепина оказывается связан с некоторым набором классических ортогональных полиномов, в точности покрывает x -перечисления матриц чередующихся знаков при $x = 1, 2, 3$. С другой стороны, тот факт, что не существует никаких других наборов полиномов из схемы Аски–Вильсона, кроме как указанных, которые бы

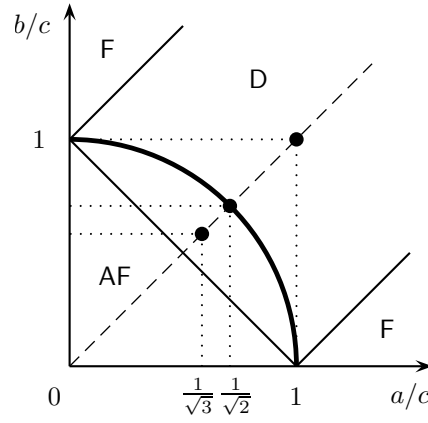


Рис. 3.1. Фазовая диаграмма модели с сегнетоэлектрической (F), антисегнетоэлектрической (AF) и разупорядоченной (D) фазами, разделенными сплошными линиями. Выделены три точки соответствующие x -перечислениям матриц чередующихся знаков для $x = 1, 2, 3$ ($a/c = b/c = 1/\sqrt{x}$) и линия свободных фермионов $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$.

соответствовали каким-либо значениям параметров η и λ , по всей видимости, может рассматриваться как причина отсутствия факторизованных выражений для x -перечислений, кроме как для $x = 1, 2, 3$.

3.1.2. Линия свободных фермионов

Начнем с случая $\eta = \pi/4$ которые является технически самым простым, хотя параметр λ не предполагается фиксированным, $\lambda \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. В этом случае вес ортогональности $\mu(x)$ может быть записан в виде

$$\mu(x) = e^{(\lambda-\pi/2)x} \frac{\sinh \frac{\pi}{4}x}{\sinh \frac{\pi}{2}x} = \frac{e^{(\lambda-\pi/2)x}}{2 \cosh \frac{\pi}{4}x} = \frac{e^{(\lambda-\pi/2)x}}{2\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{x}{4}\right) \right|^2.$$

Сравнивая эту формулу с условием ортогональности полиномов Майкснера-Поллачка (см., например, [84])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_m^{(\alpha)}(x; \phi) P_n^{(\alpha)}(x; \phi) |\Gamma(\alpha + ix)|^2 e^{(2\phi-\pi)x} dx = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{(2 \sin \phi)^{2\alpha} n!} \delta_{nm}$$

где

$$P_n^{(\alpha)}(x; \phi) = \frac{(2\alpha)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \alpha + ix \\ 2\alpha \end{matrix} \middle| 1 - e^{-2i\phi}\right),$$

получим, что полиномы, ассоциированные с ганкелевым определителем, имеют вид

$$p_n(x) = P_n^{(1/2)}\left(\frac{x}{4}; 2\lambda - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.6)$$

Вводя для удобства параметр $\phi = 2\lambda - \pi/2 \in (0, \pi)$, имеем

$$h_n = \frac{2}{\sin \phi}, \quad \kappa_n = \frac{(\sin \phi)^n}{2^n n!}.$$

Подставляя эти выражения в (3.4), мы получим следующий результат для статсуммы

$$Z_N \Big|_{\eta=\pi/4} = \frac{(\sin \phi)^{N^2}}{2^{N^2} \prod_{k=0}^{N-1} (k!)^2} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{2}{\sin \phi} \left[\frac{2^n n!}{(\sin \phi)^n} \right]^2 = 1.$$

В силу (1.20), из этого результата немедленно следует формула (1.21) для 2-перечислений матриц чередующихся знаков.

3.1.3. Точка льда и число матриц чередующихся знаков

В точке льда вычисление по сути аналогично предыдущему случаю. При $\eta = \pi/6$ и $\lambda = \pi/2$ вес ортогональности может быть записан в виде

$$\mu(x) = \frac{\sinh \frac{\pi}{6} x}{\sinh \frac{\pi}{2} x} = \frac{1}{4\pi^2} \left| \Gamma\left(\frac{1}{3} + i\frac{x}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3} + i\frac{x}{6}\right) \right|^2, \quad (3.7)$$

где была использована формула утроения аргумента Γ -функции:

$$\Gamma(3x) = \frac{3^{3x-1/2}}{2\pi} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(x + \frac{2}{3}\right) \quad (3.8)$$

Условие ортогональности непрерывных полиномов Хана имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x; a, b, c, d) p_m(x; a, b, c, d) \Gamma(a + ix) \Gamma(b + ix) \Gamma(c - ix) \Gamma(d - ix) dx \\ = \frac{\Gamma(n + a + c) \Gamma(n + a + d) \Gamma(n + b + c) \Gamma(n + b + d)}{(2n + a + b + c + d - 1) \Gamma(n + a + b + c + d - 1) n!} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (3.9)$$

и полиномы даются формулой

$$p_n(x; a, b, c, d) = i^n \frac{(a + c)_n (a + d)_n}{n!} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, n + a + b + c + d - 1, a + ix \\ a + c, a + d \end{matrix} \middle| 1 \right).$$

Условие ортогональности (3.9) справедливо, когда параметры a, b, c, d удовлетворяют условиям: $\operatorname{Re}(a, b, c, d) > 0$, $a = \bar{c}$ и $b = \bar{d}$. Сравнивая (3.7) с (3.9), получим, что ганкелев определитель в этом случае ассоциирован с непрерывными полиномами Хана у которых $a = c = 1/3$ и $b = d = 2/3$,

$$p_n(x) = p_n \left(\frac{x}{6}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = i^n (2/3)_n {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, n + 1, 1/3 + ix/6 \\ 2/3, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (3.10)$$

Нормировочная константа и старший коэффициент даются формулами

$$h_n = \frac{2(3n + 1)!}{(2n + 1) 3^{3n+1/2} n!}, \quad \kappa_n = \frac{(2n)!}{6^n (n!)^2},$$

где была использована формула (3.8) для упрощения выражения для h_n .

Подставляя полученные выражения для h_n и κ_n в (3.4) и учитывая значение префактора в (3.1) при $\lambda = \pi/2$, $\eta = \pi/6$, для статистической суммы в точке льда получим

$$Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\pi/6}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{N^2} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{(3n+1)! n!}{(2n)! (2n+1)!}.$$

В этом выражении произведение дает в точности число матриц чередующихся знаков $A(N) \equiv A(N; 1)$, поскольку префактор связывает $A(N)$ с статистической суммой,

$$A(N) = (3/4)^{-N^2/2} Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\pi/6}}.$$

Таким образом, формула (1.23) для числа матриц чередующихся знаков следует непосредственно из формулы (3.1) для статистической суммы в виде определителя ганкелевой матрицы.

3.1.4. Дуальная точка льда и 3-перечисления

В этом случае $\lambda = \pi/2$ и $\eta = \pi/3$, и, используя (3.8), вес $\mu(x)$ можно записать в виде

$$\mu(x) = \frac{\sinh \frac{\pi}{3}x}{\sinh \frac{\pi}{2}x} = \frac{1}{8\pi^2} \left| \frac{\Gamma(i\frac{x}{6})\Gamma(\frac{1}{3} + i\frac{x}{6})\Gamma(\frac{2}{3} + i\frac{x}{6})}{\Gamma(i\frac{x}{3})} \right|^2. \quad (3.11)$$

Это выражение напоминает вес ортогональности непрерывных дуальных полиномов Хана, $S_n(x^2; a, b, c)$, которые даются выражением

$$S_n(x^2; a, b, c) = (a+b)_n (a+c)_n {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, a+ix, a-ix \\ a+b, a+c \end{matrix} \middle| 1 \right),$$

и при неотрицательных значениях параметров a, b, c удовлетворяют условию ортогональности

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_m(x^2; a, b, c) S_n(x^2; a, b, c) \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 dx \\ = \Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+b+c) n! \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

На первый взгляд, однако, непрерывные дуальные полиномы Хана не подходят для вычисления интересующего нас ганкелевого определителя: они являются полиномами по переменной x^2 , а не x , и кроме того, область интегрирования в (3.12) ограничена положительной полуосью. Тем не менее, имеет место следующее свойство матрицы \mathcal{Z} , выполняющееся при $\lambda = \pi/2$ и произвольного значения η : при $j+k$ нечетном, матричный элемент \mathcal{Z}_{jk} равен нулю. Другими словами, матрица \mathcal{Z} при $\lambda = \pi/2$ имеет «шахматный» вид с нулевыми и ненулевыми элементами; такая структура матрицы означает, что ее определитель представим в виде произведения двух определителей ганкелевых матриц со всеми ненулевыми элементами.

Обозначим

$$D_N := \det \mathcal{Z} \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\pi/3}} = \det \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^{j+k} \mu(x) dx \right]_{j,k=0,\dots,N-1}$$

где $\mu(x)$ дается (3.11). Поскольку вес ортогональности является четной функцией, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{j+k} \mu(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^{\infty} x^{j+k} \mu(x) dx & \text{если } j+k \text{ четное} \\ 0 & \text{если } j+k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

и, следовательно, имеет место следующая факторизация

$$D_N = \begin{cases} D_m^{(0)} D_m^{(1)} & N = 2m \\ D_{m+1}^{(0)} D_m^{(1)} & N = 2m + 1, \end{cases} \quad (3.13)$$

где $D_m^{(0)}$ и $D_m^{(1)}$ являются определителями $m \times m$ ганкелевых матриц, построенных из четных моментов веса $\mu(x)$,

$$D_m^{(\sigma)} = \det \left[2 \int_0^{\infty} x^{2(j+k)+2\sigma} \mu(x) dx \right]_{j,k=0,\dots,m-1}, \quad \sigma = 0, 1. \quad (3.14)$$

Введем новые веса

$$\mu^{(\sigma)}(x) = 2x^{2\sigma} \mu(x), \quad \sigma = 0, 1. \quad (3.15)$$

Пусть $p_n^{(\sigma)}(x)$ есть полиномы удовлетворяющие условию ортогональности

$$\int_0^{\infty} p_j^{(\sigma)}(x^2) p_k^{(\sigma)}(x^2) \mu^{(\sigma)}(x) dx = h_j^{(\sigma)} \delta_{jk}, \quad \sigma = 0, 1,$$

тогда, аналогично (3.4), имеет место следующая формула

$$D_m^{(\sigma)} = \det \left[\int_0^{\infty} \frac{p_j^{(\sigma)}(x^2)}{\kappa_j^{(\sigma)}} \frac{p_k^{(\sigma)}(x^2)}{\kappa_k^{(\sigma)}} \mu^{(\sigma)}(x) dx \right]_{j,k=0,\dots,m-1} = \prod_{n=0}^{m-1} \frac{h_n^{(\sigma)}}{(\kappa_n^{(\sigma)})^2}, \quad (3.16)$$

где $\kappa_n^{(\sigma)}$ есть коэффициент старшего члена полинома $p_n^{(\sigma)}(x^2)$. В результате, непрерывные дуальные полиномы Хана могут быть связаны с ганкелевыми определителями $D_m^{(\sigma)}$, при подходящим выборе значений параметров a, b, c в каждом из двух случаев: $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$.

Сравнивая (3.15) и (3.11) с выражением для веса (3.12), получим, что $a = 0, b = 1/3, c = 2/3$ при $\sigma = 0$, и $a = 1, b = 1/3, c = 2/3$ при $\sigma = 1$. Таким образом,

$$p_n^{(0)}(x^2) = S_n \left(\frac{x^2}{36}; 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{1}{3} \right)_n \left(\frac{2}{3} \right)_n {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, ix/6, -ix/6 \\ 1/3, 2/3 \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad (3.17)$$

и

$$p_n^{(1)}(x^2) = S_n \left(\frac{x^2}{36}; 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{4}{3} \right)_n \left(\frac{5}{3} \right)_n {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, 1 + ix/6, 1 - ix/6 \\ 4/3, 5/3 \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (3.18)$$

Используя (3.8), из этих формул получаем следующие выражения для нормировочных констант и коэффициентов членов старших степеней:

$$h_n^{(0)} = 2 \frac{n!(3n)!}{3^{3n-1/2}}, \quad h_n^{(1)} = 8 \frac{n!(3n+2)!}{3^{3n-1/2}}, \quad \kappa_n^{(0)} = \kappa_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{6^{2n}}.$$

Отсюда, в силу (3.16), получим

$$D_m^{(0)} = 2^{2m^2-m} 3^{m^2/2} \prod_{k=0}^{m-1} k! (3k)!,$$

$$D_m^{(1)} = 2^{2m^2+m} 3^{m^2/2} \prod_{k=0}^{m-1} k! (3k+2)!.$$

Подставляя эти выражения в (3.13), принимая во внимание префактор в (3.1) и проводя всевозможные сокращения, получим, что статистической сумма при $\lambda = \pi/2$ и $\eta = \pi/6$, и четном N дается формулой

$$Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\pi/3}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{4m^2} 3^{m^2+m} \frac{m!}{(3m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(3k+2)!}{(m+k)!} \right]^2, \quad N = 2m,$$

а нечетном N — формулой

$$Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\pi/3}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{(2m+1)^2} 3^{m^2+2m+1/2} \prod_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(3k+2)!}{(m+k+1)!} \right]^2, \quad N = 2m+1.$$

Наконец, используя формулу (1.20), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$A(N; 3) = 2^{N^2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^N Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\pi/3}}$$

мы приходим к формулам (1.25) для 3-перечислений матриц чередующихся знаков.

3.2. Граничная корреляционная функция и деталильные перечисления матриц чередующихся знаков

В этом разделе мы покажем, как классические ортогональные полиномы связанные с ганкелевым определителем в формуле Изергина–Корепина могут быть использованы для получения явного выражения для одноточечной граничной корреляционной функции в каждом из трех рассмотренных случаев. Как следствие, нами будут получены результаты для детальных x -перечислений матриц чередующихся знаков для $x = 1, 2, 3$; результат для $x = 3$ является новым.

3.2.1. Свойства граничной корреляционной функции

Объектом нашего исследования будет граничная корреляционная функция $H_N^{(r)}$. Напомним, что значения этой функции равны вероятности обнаружения конфигураций модели у которых r -я вершина в первом ряду является вершиной шестого типа. При $\lambda = \pi/2$ эта корреляционная функция имеет непосредственную интерпретацию с точки зрения перечислений матриц чередующихся знаков. А именно, значения этой корреляционной функции описывает соотношение числа $N \times N$ матриц чередующихся знаков с единственным ненулевым элементом (равным 1) в первом ряду на r -ой позиции справа, к общему числу $N \times N$ матриц чередующихся знаков. Детальные x -перечисления $A(N, r; x)$ могут быть получены по формуле

$$\frac{A(N, r; x)}{A(N; x)} = H_N^{(r)} \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\arcsin(\sqrt{x}/2)}}. \quad (3.19)$$

Таким образом, вычисление $H_N^{(r)}$ при $\lambda = \pi/2$ позволяет получать детальные x -перечисления матриц чередующихся знаков.

В предыдущей главе (см. также [24]) нами было получено следующее выражение

$$H_N^{(r)} = \frac{(N-1)! \sin 2\eta}{[\sin(\lambda - \eta)]^r [\sin(\lambda + \eta)]^{N-r+1}} \frac{\det \mathcal{H}}{\det \mathcal{Z}} \quad (3.20)$$

где $N \times N$ матрица \mathcal{H} отличается от матрицы \mathcal{Z} последним столбцом

$$\mathcal{H}_{jk} = \begin{cases} \mathcal{Z}_{jk} & k = 0, \dots, N-2 \\ \left. \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} \frac{[\sin \varepsilon]^{r-1} [\sin(\varepsilon - 2\eta)]^{N-r}}{[\sin(\varepsilon + \lambda - \eta)]^{N-1}} \right|_{\varepsilon=0} & k = N-1. \end{cases}$$

Поскольку в конфигурациях модели с первый ряд всегда содержит одну и только одну вершину шестого типа, имеет место соотношение

$$\sum_{r=1}^N H_N^{(r)} = 1. \quad (3.21)$$

В дальнейшем нам часто будет удобно иметь дело с выражениями для этой корреляционной функцией заданными с точность до общего множителя, который всегда может быть восстановлен из условия (3.21).

Основная идея вычислений очень проста, вытекающая по сути из того факта (см., например, [76, 83]), что полиномы ортогональные с заданным весом $\mu(x)$ могут быть в свою очередь представлены в виде определителей

$$p_{N-1}(x) = \text{const} \times \det \mathcal{W},$$

где $N \times N$ матрица \mathcal{W} отличается от \mathcal{Z} , определенная в (3.3), только элементами последнего столбца,

$$\mathcal{W}_{jk} = \begin{cases} \mathcal{Z}_{jk} & k = 0, \dots, N-2 \\ x^j & k = N-1. \end{cases} \quad (3.22)$$

Граничная одноточечная функция (3.20) таким образом имеет вид

$$H_N^{(r)} = \text{const} \times \left[\frac{\sin(\lambda + \eta)}{\sin(\lambda - \eta)} \right]^r \left\{ p_{N-1}(\partial_\varepsilon) \frac{(\sin \varepsilon)^{r-1} [\sin(\varepsilon - 2\eta)]^{N-r}}{[\sin(\varepsilon + \lambda - \eta)]^{N-1}} \right\} \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (3.23)$$

Это представление верно при произвольном значении параметров, однако в практическом плане оно полезно лишь тогда, когда полином известен. Это как раз имеет место в каждом из трех рассмотренных случаев, описанных в предыдущем разделе.

В каждом из этих трех случаев аргументы полиномов являются параметрами гипергеометрических рядов, и потому полиномы удовлетворяют конечно-разностным уравнениям [72, 84]. А именно, обозначая $y(x) = P_n^{(\alpha)}(x; \phi)$, для полиномов Майкснера-Поллачка справедливо уравнение

$$e^{i\phi}(\alpha - ix)y(x + i) + 2i[x \cos \phi - (n + \alpha) \sin \phi]y(x) - e^{-i\phi}(\alpha + ix)y(x - i) = 0. \quad (3.24)$$

Непрерывные полиномы Хана удовлетворяют уравнению

$$B(x)y(x + i) - [B(x) + D(x) + n(n + a + b + c + d - 1)]y(x) + D(x)y(x - ix) = 0 \quad (3.25)$$

где $y(x) = p_n(x; a, b, c, d)$ и

$$B(x) = (c - ix)(d - ix), \quad D(x) = (a + ix)(b + ix).$$

Непрерывные дуальные полиномы Хана удовлетворяют уравнению

$$B(x)y(x + i) - [B(x) + D(x) + n]y(x) + D(x)y(x - ix) = 0 \quad (3.26)$$

где $y(x) = S_n(x^2; a, b, c)$ и

$$B(x) = \frac{(a - ix)(b - ix)(c - ix)}{2ix(2ix - 1)}, \quad D(x) = \frac{(a + ix)(b + ix)(c + ix)}{2ix(2ix + 1)}.$$

Подход который будет применен ниже к вычислению граничной корреляционной функции основан на наблюдении, что каждое из этих разностных уравнений для полиномов приводит к рекуррентному соотношению для граничной корреляционной функции, которое, в свою очередь, может быть решено в явном виде.

Вывод рекуррентных соотношений для граничной корреляционной функции в каждом из трех случаев очень похож, и будет объяснен ниже подробно в каждом конкретном случае. Основная идея, лежащая в основе процедуры получения рекуррентного соотношения

основана на соотношении $y(\partial_\varepsilon \pm i) = e^{\mp i\varepsilon} y(\partial_\varepsilon) e^{\pm i\varepsilon}$, которое позволяет вывести из каждого конечно-разностного уравнения соотношение вида

$$y(\partial_\varepsilon) K_\varepsilon f(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.27)$$

Здесь K_ε является некоторым линейным дифференциальным оператором, явный вид которого определяется конечно-разностным уравнением, а $f(\varepsilon)$ — пробная функция. При специальном выборе этой функции соотношение (3.27) становится линейным рекуррентным соотношением для граничной корреляционной функции.

Чтобы найти функцию $f(\varepsilon)$ будет использован тот факт, что формула (3.23) может быть переписана следующим образом

$$H_N^{(r)} = \text{const} \times \left\{ p_{N-1}(\partial_\varepsilon) [g(\varepsilon)]^{N-1} [\omega(\varepsilon)]^{r-1} \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (3.28)$$

где функции $\omega(\varepsilon)$ и $g(\varepsilon)$ имеют вид

$$\omega(\varepsilon) := \frac{\sin(\lambda + \eta) \sin \varepsilon}{\sin(\lambda - \eta) \sin(\varepsilon - 2\eta)}, \quad g(\varepsilon) := \frac{\sin(\lambda - \eta) \sin(\varepsilon - 2\eta)}{\sin(2\eta) \sin(\varepsilon + \lambda - \eta)},$$

и связаны друг с другом соотношением

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{\omega(\varepsilon) - 1}.$$

Ясно, что для того чтобы переписать уравнение (3.27) как рекуррентное соотношение для функции $H_N^{(r)}$, функцию $f(x)$ следует выбрать в виде

$$f(\varepsilon) = [g(\varepsilon)]^{N-1} [\omega(\varepsilon)]^{r-1} \tau(\varepsilon)$$

где функция $\tau(\varepsilon)$ не зависит от r и N . Переписывая оператор K_ε в терминах дифференциального оператора

$$D_\varepsilon := \omega \partial_\omega = -\frac{\sin \varepsilon \sin(\varepsilon - 2\eta)}{\sin 2\eta} \partial_\varepsilon$$

и выражая все величины в терминах переменной ω , функция $\tau(\varepsilon)$ в каждом конкретном случае легко угадывается исходя из требования, чтобы уравнение (3.27) приняло вид линейного однородного рекуррентного соотношения по r для $H_N^{(r)}$. Как будет видно из дальнейшего, во всех трех случаях функция $\tau(\varepsilon)$ имеет очень простой вид.

Линейное рекуррентное соотношение для функции $H_N^{(r)}$ также может быть сформулировано как обыкновенное дифференциальное уравнение для производящей функции

$$H_N(z) := \sum_{r=1}^N H_N^{(r)} z^{r-1}, \quad H_N(1) = 1. \quad (3.29)$$

Таким образом, задача нахождения решения рекуррентного соотношения может быть сведена к нахождению полиномиального решения некоторого линейного обыкновенного дифференциального уравнения. В обсуждаемых случаях дифференциальное уравнение оказывается уравнением порядка не выше второго.

3.2.2. Линия свободных фермионов

Граничная корреляционная функция в этом случае дается формулой (3.28), где функции $\omega(\varepsilon)$ и $g(\varepsilon)$ даются формулами

$$\omega(\varepsilon) = -\cot(\phi/2) \tan \varepsilon, \quad g(\varepsilon) = -\frac{\sin(\phi/2) \cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \phi/2)}, \quad (3.30)$$

а полином $p_{N-1}(x)$ является частным случаем полиномов Майкснера–Поллачка и дается формулой (3.6). Конечно-разностное уравнение (3.24) в этом случае записывается в виде

$$e^{i\phi} \left(\frac{1}{2} - \frac{ix}{4} \right) p_{N-1}(x + 4i) + 2i \left[\frac{x}{4} \cos \phi - \left(N - \frac{1}{2} \right) \sin \phi \right] p_{N-1}(x) - e^{-i\phi} \left(\frac{1}{2} + \frac{ix}{4} \right) p_{N-1}(x - 4i) = 0.$$

Используя тождество $p_{N-1}(\partial_\varepsilon \pm 4i) = e^{\mp 4i\varepsilon} p_{N-1}(\partial_\varepsilon) e^{\pm 4i\varepsilon}$, получим уравнение

$$p_{N-1}(\partial_\varepsilon) K_\varepsilon [g(\varepsilon)]^{N-1} [\omega(\varepsilon)]^{r-1} \tau(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.31)$$

где K_ε — линейный дифференциальный оператор первого порядка:

$$K_\varepsilon = -\frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sin \phi} \partial_\varepsilon \sin(2\varepsilon + \phi) + N - 1.$$

Функция $\tau(\varepsilon)$ в (3.31) произвольна, и будет выбрана ниже таким образом, чтобы уравнение (3.31) стало линейным рекуррентным соотношением для граничной корреляционной функции.

Введем оператор

$$D_\varepsilon = \sin \varepsilon \cos \varepsilon \partial_\varepsilon = \omega \partial_\omega$$

и переходя в уравнении к переменной ω , используя соотношения

$$\frac{\sin(2\varepsilon + \phi)}{\sin \phi} = -\frac{(\omega - 1)(\alpha\omega + 1)}{\alpha\omega^2 + 1}, \quad \alpha := \tan^2(\phi/2),$$

получим

$$K_\varepsilon = \left\{ D_\varepsilon(\omega - 1)(\alpha\omega + 1) + (N - 1)(\alpha\omega^2 + 1) \right\} \frac{1}{\alpha\omega^2 + 1}.$$

Определим оператор \tilde{K}_ε соотношением

$$K_\varepsilon g^{N-1} = g^{N-1} \tilde{K}_\varepsilon$$

где g дается формулой (3.30). Используя соотношение

$$g^{-1}(D_\varepsilon g) = -\frac{\omega}{\omega - 1},$$

получим

$$\tilde{K}_\varepsilon = \{D_\varepsilon(\alpha\omega + 1) - N + 1\} \frac{\omega - 1}{\alpha\omega^2 + 1}. \quad (3.32)$$

Теперь выбор функции $\tau(\varepsilon)$ очевиден, поскольку в терминах оператора \tilde{K}_ε уравнение (3.31) записывается в виде

$$p_{N-1}(\partial_\varepsilon) g^{N-1} \tilde{K}_\varepsilon \omega^{r-1} \tau \Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Действительно, если выбрать функцию $\tau(\varepsilon)$ таким образом, чтобы сократить множитель стоящий вне фигурных скобок в (3.32), то тогда немедленно получим

$$p_{N-1}(\partial_\varepsilon) g^{N-1} \{D_\varepsilon(\alpha\omega + 1) - N + 1\} \omega^{r-1} \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.33)$$

Наконец, напоминая, что $D_\varepsilon = \omega \partial_\omega$, и используя (3.28), приходим к рекуррентному соотношению

$$\alpha r H_N^{(r+1)} - (N - r) H_N^{(r)} = 0. \quad (3.34)$$

Обратим внимание, что выбор функции $\tau(\varepsilon)$ был продиктован стремлением получить все коэффициенты в фигурных скобках в (3.33) в виде полиномов (желательно, наименьшей возможной степени) по ω . Этому предшествует приведение дифференциального оператора к «анти-нормальной» форме. Ниже, в других случаях, вывод рекуррентного соотношения проводится аналогичным методом.

Решая соотношение (3.34), и подходящим образом нормируя функцию в соответствии с условием (3.21), получим

$$H_N^{(r)} = \binom{N-1}{r-1} \frac{[\tan^2(\phi/2)]^{N-r}}{[1 + \tan^2(\phi/2)]^{N-1}}. \quad (3.35)$$

Этот же результат, другим методом, был также получен в работе [24].

Формула (1.22) для детальных 2-перечислений матриц чередующихся знаков (см. [49, 50, 53]) немедленно следует из (3.35) при $\lambda = \pi/2$ ($\tan(\phi/2) = 1$).

3.2.3. Точка льда и детальные 1-перечисления

Обратимся теперь к интересному случаю точки льда, которая соответствует значениям параметров $\lambda = \pi/2$, $\eta = \pi/6$. В этом случае граничная корреляционная функция эквивалентна детальным 1-перечислениям матриц чередующихся знаков.

Граничная корреляционная функция дается формулой (3.28), где функции $\omega(\varepsilon)$ и $g(\varepsilon)$ имеют следующий явный вид

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \pi/3)}, \quad g(\varepsilon) = \frac{\sin(\varepsilon - \pi/3)}{\sin(\varepsilon + \pi/3)},$$

а полином $p_{N-1}(x)$ является непрерывным полиномом Хана (3.10). Конечно-разностное уравнение (3.25) имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - \frac{ix}{6}\right) \left(\frac{2}{3} - \frac{ix}{6}\right) p_{N-1}(x + 6i) + \left[\frac{x^2}{18} - \frac{4}{9} - N(N-1)\right] p_{N-1}(x) \\ + \left(\frac{1}{3} + \frac{ix}{6}\right) \left(\frac{2}{3} + \frac{ix}{6}\right) p_{N-1}(x - 6i) = 0 \end{aligned}$$

Используя тождество $p_{N-1}(\partial_\varepsilon \pm 6i) = e^{\mp 6i\varepsilon} p_{N-1}(\partial_\varepsilon) e^{\pm 6i\varepsilon}$, получим

$$p_{N-1}(\partial_\varepsilon) K_\varepsilon [g(\varepsilon)]^{N-1} [\omega(\varepsilon)]^{r-1} \tau(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.36)$$

где оператор K_ε является дифференциальным оператором второго порядка

$$K_\varepsilon = \frac{1}{9} \sin 3\varepsilon \partial_\varepsilon^2 \sin 3\varepsilon + \frac{1}{9} \sin^2 3\varepsilon - N(N-1).$$

Наша задача заключается в том, чтобы вывести линейное рекуррентное соотношение для функции $H_N^{(r)}$ и найти его решение.

Оператор $D_\varepsilon \equiv \omega \partial_\omega$ в этом случае имеет вид

$$D_\varepsilon = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varepsilon \sin(\varepsilon - \pi/3) \partial_\varepsilon.$$

Принимая во внимание тождество

$$\sin 3\varepsilon = -4 \sin \varepsilon \sin(\varepsilon + \pi/3) \sin(\varepsilon - \pi/3)$$

и

$$\sin \varepsilon = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega + 1}}, \quad \sin(\varepsilon + \pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\omega - 1}{\sqrt{\omega^2 - \omega + 1}},$$

выразим оператор K_ε в терминах функции ω и оператора D_ε в виде

$$K_\varepsilon = \left[D_\varepsilon^2 (\omega - 1)^2 - D_\varepsilon (\omega^2 - 1) - N(N-1) (\omega^2 - \omega + 1) \right] \frac{1}{\omega^2 - \omega + 1}.$$

Используя тот факт, что

$$g^{-1}(D_\varepsilon g) = -\frac{\omega}{\omega - 1},$$

для оператора $\tilde{K}_\varepsilon := g^{-N+1} K_\varepsilon g^{N-1}$ получим следующее выражение

$$\tilde{K}_\varepsilon = \left\{ D_\varepsilon^2 (\omega - 1) - D_\varepsilon [(2N-1)\omega + 1] + N(N-1) \right\} \frac{\omega - 1}{\omega^2 - \omega + 1}.$$

Выбирая в (3.36) функцию $\tau(\varepsilon)$ в виде $\tau(\varepsilon) = (\omega^2 - \omega + 1)/(\omega - 1)$, получим соотношение

$$p_{N-1}(\partial_\varepsilon) g^{N-1} \left\{ D_\varepsilon^2(\omega - 1) - D_\varepsilon[(2N - 1)\omega + 1] + N(N - 1) \right\} \omega^{r-1} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

которое, с учетом выражения для оператора $D_\varepsilon = \omega \partial_\omega$ и формулы (3.28), немедленно приводит к искомому рекуррентному соотношению

$$r(r - 2N + 1)H_N^{(r+1)} - (r - N)(N + r - 1)H_N^{(r)} = 0. \quad (3.37)$$

Решение рекуррентного соотношения (3.37), с точностью до общего множителя (независящего от r), имеет вид

$$H_N^{(r)} = \text{const} \times \frac{(N + r - 2)! (2N - 1 - r)!}{(r - 1)! (N - r)!}.$$

Чтобы зафиксировать нормировочный множитель с помощью соотношения (3.21) рассмотрим производящую функцию $H_N(z)$ определенную формулой (3.29). Результат имеет вид

$$H_N(z) = \frac{(2N - 1)! (2N - 2)!}{(N - 1)! (3N - 2)!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1 - N, N \\ 2 - 2N \end{matrix} \middle| z \right), \quad (3.38)$$

где нормировочный множитель легко проверяется с помощью тождества Чу-Вандермонда

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, b \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(c - b)_m}{(c)_m}, \quad (a)_m \equiv a(a + 1) \cdots (a + m - 1). \quad (3.39)$$

Из (3.38) окончательно получим

$$H_N^{(r)} = \frac{\binom{N+r-2}{N-1} \binom{2N-1-r}{N-1}}{\binom{3N-2}{N-1}}. \quad (3.40)$$

В силу (3.19), формула (3.40) приводит к выражению (1.24) для детальных 1-перечислений матриц чередующихся знаков.

Стоит отметить, что приведенное здесь доказательство формулы (1.24) для детальных 1-перечислений матриц чередующихся знаков значительно проще приведенных в работах [9, 82], которые основаны на формуле Изергина–Корепина для статистической суммы неоднородной шестивершинной модели.

3.2.4. Дуальная точка льда и детальные 3-перечисления

Рассмотрим теперь граничную корреляционную функцию в случае дуальной точки льда соответствующей значениям $\eta = \pi/3$ и $\lambda = \pi/2$. В этом случае $H_N^{(r)}$ описывает детальные 3-перечисления матриц чередующихся знаков.

Как было показано в разделе 3.1.4, в этом случае определитель ганкелевой матрицы \mathcal{Z} (см. (3.2)) может быть ассоциирован с двумя наборами непрерывных дуальных полиномов

Хана, (3.17) и (3.18). Появление двух наборов полиномов обусловлено факторизацией определителя матрицы $\det \mathcal{Z}$. Аналогичная факторизация имеет место также и для детерминанта матрицы \mathcal{W} , матричные элементы которой даются формулой (3.22). Обозначим

$$D_m^{(\sigma)}(x) = \det \left[\begin{array}{cc} \int_0^\infty x^{2(j+k)} \mu^{(\sigma)}(x) dx & k = 0, \dots, m-2 \\ x^{2j} & k = m-1 \end{array} \right]_{j,k=0,\dots,m-1} \quad (3.41)$$

где веса $\mu^{(\sigma)}$, $\sigma = 0, 1$, даются формулами (3.11) и (3.15). Исключая из дальнейшего рассмотрения простейший случай $N = 1$, при котором $\det \mathcal{W} = 1$ (и, следовательно, $H_1^{(r)} = 1$, $r = 1$, и $H_1^{(r)} = 0$, $r \neq 1$), для $N \geq 2$ имеем

$$\det \mathcal{W} = \begin{cases} D_{m+1}^{(0)} D_{m+1}^{(1)}(x^2) x & N = 2m + 2 \\ D_m^{(1)} D_{m+1}^{(0)}(x^2) & N = 2m + 3, \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

где величины $D_m^{(\sigma)}$, $\sigma = 0, 1$, даются формулами (3.14). Определители (3.41), как функции x , с точностью до нормировочных множителей есть не что иное как непрерывные дуальные полиномы Хана обсуждавшиеся выше, а именно,

$$D_{n+1}^{(\sigma)}(x^2) \sim p_n^{(\sigma)}(x^2), \quad \sigma = 0, 1,$$

где полиномы $p_n^{(\sigma)}(x^2)$, $\sigma = 0, 1$, даются формулами (3.17) и (3.18). Из представления (3.28) следует, что корреляционная функция $H_N^{(r)}$ имеет вид

$$H_{2m+2}^{(r)} = \text{const} \times p_m^{(1)}(\partial_\varepsilon^2) \partial_\varepsilon g^{2m+1} \omega^{r-1} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (3.42)$$

$$H_{2m+3}^{(r)} = \text{const} \times p_{m+1}^{(0)}(\partial_\varepsilon^2) g^{2m+2} \omega^{r-1} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (3.43)$$

где функции $\omega = \omega(\varepsilon)$ и $g = g(\omega)$ имеют вид

$$\omega = -\frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \pi/3)}, \quad g = \frac{1}{\omega - 1}.$$

Нормировочные константы в (3.43) и (3.42) зависят от m (но не зависят от r).

Стартуя с выражений (3.42) и (3.43), можно получить рекуррентные соотношения для $H_N^{(r)}$ в случаях, когда N четное и нечетное, соответственно. Здесь мы будем действовать иначе, используя тот факт, что можно выразить граничную корреляционную функцию с точки зрения одного набора многочленов, и, таким образом, рассматривать обоих случая в едином и упрощенном виде. Введем обозначение

$$u_{2m}^{(\sigma)}(x) := p_m^{(\sigma)}(x^2), \quad \sigma = 0, 1,$$

и рассмотрим полиномы

$$\tilde{u}_{2m}(x) = S_m \left(\frac{x^2}{36}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right). \quad (3.44)$$

Эти полиномы возникают при изучении действия оператора прямого сдвига для непрерывных дуальных полиномов Хана (см., например, [84], формулу (1.3.7)),

$$\tilde{u}_{2m+2}(x + 3i) - \tilde{u}_{2m+2}(x - 3i) = -i \frac{m+1}{3} x u_{2m}^{(1)}(x). \quad (3.45)$$

Весьма забавно, что меняя знак в левой части этого соотношения мы получим вновь непрерывные дуальные полиномы Хана, которые оказываются в точности таковыми, обозначенными выше как $u_{2n}^{(0)}(x)$, т.е.,

$$\tilde{u}_{2m}(x + 3i) + \tilde{u}_{2m}(x - 3i) = 2u_{2m}^{(0)}(x). \quad (3.46)$$

Это соотношение легко проверяется путем выражения все полиномов в терминах обрывающихся гипергеометрических рядов. Стоит отметить, что соотношение (3.46), в отличие от (3.45), не является частным случаем некоторого общего соотношения для непрерывных дуальных полиномов Хана, а специфично для конкретного выбора параметров полиномов.

Соотношения (3.45) и (3.46) позволяют переписать корреляционную функцию в виде

$$\begin{aligned} H_{2m+2}^{(r)} &= \text{const} \times \tilde{u}_{2m+2}(\partial_\varepsilon) \sin 3\varepsilon g^{2m+1} \omega^{r-1} \Big|_{\varepsilon=0}, \\ H_{2m+3}^{(r)} &= \text{const} \times \tilde{u}_{2m+2}(\partial_\varepsilon) \cos 3\varepsilon g^{2m+2} \omega^{r-1} \Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\sin 3\varepsilon = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\omega(\omega+1)}{(\omega^2 + \omega + 1)^{3/2}}, \quad \cos 3\varepsilon = -\frac{(\omega-1)(2\omega+1)(\omega+2)}{2(\omega^2 + \omega + 1)^{3/2}}$$

и используя соотношение $g = 1/(\omega-1)$, нетрудно видеть, что корреляционная функция имеет структуру

$$H_{2m+2}^{(r)} = \frac{B_{2m}^{(r-1)} + B_{2m}^{(r-2)}}{2}, \quad (3.47)$$

$$H_{2m+3}^{(r)} = \frac{2B_{2m}^{(r-1)} + 5B_{2m}^{(r-2)} + 2B_{2m}^{(r-3)}}{9}, \quad (3.48)$$

где величины $B_{2m}^{(r)}$ определены таким образом, что $B_{2m}^{(r)} = 0$, если $r \neq 0, 1, \dots, 2m$, и

$$B_{2m}^{(r)} = b_{2m} \tilde{u}_{2m+2}(\partial_\varepsilon) \frac{g^{2m+1} \omega^{r+2}}{(\omega^2 + \omega + 1)^{3/2}} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad r = 0, 1, \dots, 2m. \quad (3.49)$$

Здесь b_{2m} нормировочная константа, фиксируемая соотношением

$$\sum_{r=0}^{2m} B_{2m}^{(r)} = 1, \quad (3.50)$$

которое следует из (3.21), (3.47), (3.48).

Вывод величин $B_{2m}^{(r)}$ достаточно громоздок, но важен, и поэтому приведен ниже отдельно. Здесь мы лишь сформулируем окончательный результат, в терминах детальных 3-перечислений матриц чередующихся знаков.

Теорема 3.1. *Детальные 3-перечисления матриц чередующихся знаков $A(r, N; 3)$ даются формулами*

$$\begin{aligned} A(r, 2m + 2; 3) &= \frac{B_{2m}^{(r-1)} + B_{2m}^{(r-2)}}{2} A(2m + 2; 3) \\ A(r, 2m + 3; 3) &= \frac{2B_{2m}^{(r-1)} + 5B_{2m}^{(r-2)} + 2B_{2m}^{(r-3)}}{9} A(2m + 3; 3) \end{aligned} \quad (3.51)$$

где $B_{2m}^{(r)} = 0$, если $r \neq 0, 1, \dots, 2m$, и

$$\begin{aligned} B_{2m}^{(r)} &= \frac{(2m + 1)! m!}{3^m (3m + 2)!} \sum_{\ell=\max(0, r-m)}^{\lfloor r/2 \rfloor} (2m + 2 - r + 2\ell) \binom{3m + 3}{r - 2\ell} \\ &\quad \times \binom{2m + \ell - r + 1}{m + 1} \binom{m + \ell + 1}{m + 1} 2^{r-2\ell}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

если $r = 0, 1, \dots, 2m$.

Подробному доказательству посвящен следующий раздел.

3.3. Доказательство теоремы о детальных 3-перечислениях матриц чередующихся знаков

В этом разделе мы докажем Теорему 3.1. Поскольку формулы (3.51) очевидно следуют из (3.47) и (3.48), задача состоит в выводе формулы (3.52).

3.3.1. Вывод рекуррентного соотношения

Объектом нашего исследования являются величины $B_{2m}^{(r)}$, которые определены формулой (3.49). Поскольку эта формула имеет ту же структуру, что и для корреляционной функции $H_N^{(r)}$, мы можем применить метод предыдущего раздела. Начнем с того, что получим рекуррентное соотношение по r для величин $B_{2m}^{(r)}$. Как следует из (3.26) и (3.44), полиномы $\tilde{u}_{2m+2}(x)$ удовлетворяют конечно-разностному уравнению

$$(1 + x^2) \left[\tilde{u}_{2m+2}(x + 6i) - \tilde{u}_{2m+2}(x - 6i) \right] - 24i(m + 1)x\tilde{u}_{2m+2}(x) = 0.$$

Из этого уравнения следует, что имеет место соотношение

$$\tilde{u}_{2m+2}(\partial_\varepsilon) K_\varepsilon f(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.53)$$

где K_ε является дифференциальным оператором второго порядка

$$K_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3\varepsilon \cos 3\varepsilon (\partial_\varepsilon^2 + 1) - \frac{6(m+1)}{\sqrt{3}} \partial_\varepsilon,$$

а $f(\varepsilon)$ — пробная функция. Чтобы (3.53) приобрело вид рекуррентного соотношения для величин $B_{2m}^{(r)}$, функцию $f(\varepsilon)$ необходимо выбрать в виде

$$f = \frac{g^{2m+1} \omega^{r+2}}{(1 + \omega + \omega^2)^{3/2}} \tau$$

где функция τ , не зависящая от r и m , будет найдена позже.

Принимая во внимание, что дифференциальный оператор D_ε в рассматриваемом случае имеет вид

$$D_\varepsilon \equiv \omega \partial_\omega = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varepsilon \sin(\varepsilon + \pi/3) \partial_\varepsilon, \quad \omega = -\frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \pi/3)},$$

и переходя к переменной ω , получим

$$K_\varepsilon = D_\varepsilon^2 \frac{(2\omega^2 + 5\omega + 2)(\omega^2 - 1)}{\omega(\omega^2 + \omega + 1)} + D_\varepsilon \left[\frac{(\omega^2 + 4\omega + 1)(2\omega^2 + 5\omega + 2)(\omega - 1)^2}{\omega(\omega^2 + \omega + 1)^2} + 4m \frac{(\omega^2 + \omega + 1)}{\omega} \right] - \frac{(8\omega^4 + 4\omega^3 + 57\omega^2 + 4\omega + 8)(2\omega^2 + 5\omega + 2)(\omega^2 - 1)}{4\omega(\omega^2 + \omega + 1)^3} - 4m \frac{\omega^2 - 1}{\omega}.$$

Определяя оператор \tilde{K}_ε формулой

$$K_\varepsilon \frac{g^{2m+1}}{(\omega^2 + \omega + 1)^{3/2}} = \frac{g^{2m+1}}{(\omega^2 + \omega + 1)^{3/2}} \tilde{K}_\varepsilon$$

мы можем переписать соотношение (3.53) в виде

$$\tilde{u}_{2m+2}(\partial_\varepsilon) \frac{g^{2m+1}}{(\omega^2 + \omega + 1)^{3/2}} \tilde{K}_\varepsilon \omega^{r+2} \tau \Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\varepsilon = & \{ D_\varepsilon^2 (2\omega^2 + 5\omega + 2)(\omega^2 - 1) \\ & - D_\varepsilon [(2\omega^2 + 5\omega + 2)(7\omega^2 - 2\omega - 1) + 4m(\omega^4 + 5\omega^3 + 4\omega^2 - 1)] \\ & + 2(2\omega^2 + 5\omega + 2)(5\omega^2 - 2\omega + 1) + 2m(4\omega^4 + 26\omega^3 + 17\omega^2 + 5\omega + 2) \\ & + 4m^2 \omega(3\omega^2 + 4\omega + 2) \} \frac{1}{\omega(\omega^2 + \omega + 1)}. \end{aligned}$$

Выбирая $\tau = \omega + 1 + \omega^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{2m+2}(\partial_\varepsilon) \frac{g^{2m+1}}{(\omega^2 + \omega + 1)^{3/2}} \{ & D_\varepsilon^2 (2\omega^4 + 5\omega^3 - 5\omega - 2) \\ & - D_\varepsilon [(14\omega^4 + 31\omega^3 + 2\omega^2 - 9\omega - 2) + 4m(\omega^4 + 5\omega^3 + 4\omega^2 - 1)] \\ & + 2(10\omega^4 + 21\omega^3 + 2\omega^2 + \omega + 2) + 2m(4\omega^4 + 26\omega^3 + 17\omega^2 + 5\omega + 2) \\ & + 4m^2(3\omega^3 + 4\omega^2 + 2\omega) \} \omega^r \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение немедленно ведет к рекуррентному соотношению для величин $B_{2m}^{(r)}$. Поскольку эти величины должны обладать свойством $B_{2m}^{(r)} = B_{2m}^{(2m-r)}$, которая означает выполнение соотношения $H_N^{(r)} = H_N^{(N-r+1)}$, справедливого, если $\lambda = \pi/2$, полезно записать это соотношение вводя величины $E_m^{(r)} \equiv B_{2m}^{(m+r)}$, где $r = -m, \dots, m$, в терминах которых оно имеет симметричный вид

$$2(r-m-2)(r+m+1)E_m^{(r-2)} + (5r^2 + 10rm + r - 3m^2 - 9m - 6)E_m^{(r-1)} + 2(1+8m)rE_m^{(r)} - (5r^2 - 10rm - r - 3m^2 - 9m - 6)E_m^{(r+1)} - 2(r-m-1)(r+m+2)E_m^{(r+2)} = 0. \quad (3.54)$$

Симметрия этого соотношения относительно замены $r \mapsto -r$, $E_m^{(r)} \mapsto E_m^{(-r)}$ будет существенно использована ниже.

Соотношение (3.54) позволяет последовательно вычислить все величины $E_m^{(r)}$ для любого заданного $r \in \{-m, \dots, m\}$, начиная с $r = m$ (или $r = -m$) и полагая $E_m^{(r)} = 0$, если $|r| > m$. На формальном уровне, справедливость теоремы 3.1 может быть установлена путем проверки того факта, что величины $E_m^{(r)} \equiv B_{2m}^{(m+r)}$, где последние даются формулой (3.52), действительно являются решением соотношения (3.54). На практическом уровне, однако, интерес представляет конструктивный вывод формулы (3.52). Как показано ниже, такой вывод может быть дан путем построения явного выражения для производящей функции величин $E_m^{(r)}$.

3.3.2. Производящая функция как решение линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим производящую функцию

$$E_m(z) = \sum_{r=-m}^m E_m^{(r)} z^r = z^{-m} \sum_{r=0}^{2m} B_{2m}^{(r)} z^r, \quad E_m(z) = E_m(z^{-1}). \quad (3.55)$$

В силу (3.54), это функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left\{ (z - z^{-1})(2z + 5 + 2z^{-1})(z\partial_z)^2 + [(2z + 5 + 2z^{-1})(3z - 2 + 3z^{-1}) + 2m(5z + 8 + 5z^{-1})] z\partial_z - (z - z^{-1}) [m(6z - 1 + 6z^{-1}) + m^2(2z + 3 + 2z^{-1})] \right\} E_m(z) = 0. \quad (3.56)$$

Мы будем искать производящую функцию как решение этого уравнения вида $z^{-m}B_{2m}(z)$, где $B_{2m}(z)$ — полином степени $2m$.

Рассмотрим замену переменных

$$z = -\frac{x-q}{qx-1}, \quad q = \exp(i\pi/3),$$

которая отображает шесть сингулярных точек уравнения (3.56) лежащих на вещественной оси в комплексной z -плоскости, $z = -1, 0, 1/2, 1, 2, \infty$, на шесть корней уравнения $x^6 = 1$, а именно, $x = 1, q, q^2, q^3, q^4, q^5$, соответственно, лежащих на единичной окружности в комплексной x -плоскости. Отметим тривиальное, но полезное тождество $1 + q^2 = q$. Принимая во внимание свойство (3.55) функции $E_m(z)$, а также тождество $(qx - 1)(x - q) = (qx)(x - 1 + x^{-1})$, нетрудно видеть, что функция

$$V_m(x) := (x - 1 + x^{-1})^m E_m\left(-\frac{x - q}{qx - 1}\right) \quad (3.57)$$

имеет вид полинома степени $2m$ по x , умноженного на x^{-m} , который инвариантен относительно замены $x \rightarrow 1/x$. Другими словами, функция $V_m(e^{i\varphi})$ является четным тригонометрическим полиномом степени m по φ . Исследуя соответствующее уравнение, которое следует из (3.56), нетрудно увидеть, что рекуррентное соотношение для коэффициентов этого полинома содержит семь членов, и поэтому, на первый взгляд, нет никакого практического смысла в использовании функции $V_m(x)$. Однако, если мы рассмотрим функцию

$$h_m(x) = (x - x^{-1})^{2m+1} (x + 2 + x^{-1})V_m(x) \quad (3.58)$$

то тогда окажется, что дифференциальное уравнение которому удовлетворяет эта функция, содержит в своих коэффициентах только целые степени переменной x^3 . В терминах переменной φ , это уравнение имеет вид

$$\left\{ \partial_\varphi^2 - 3 \left[(2m + 1) \cot 3\varphi - \frac{1}{\sin 3\varphi} \right] \partial_\varphi - (3m + 1)(3m + 2) \right\} h_m(e^{i\varphi}) = 0. \quad (3.59)$$

Как следует из (3.58), функция $h_m(e^{i\varphi})$ является нечетным тригонометрическим полиномом степени $3m + 2$ по φ ,

$$h(e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{2m+1} \gamma_k \sin[(3m + 2 - 3k)\varphi].$$

Из (3.59) следует, что коэффициенты γ_k должны удовлетворять соотношению

$$(3k + 2)(3k + 3)\gamma_{k+1} + (3m + 2 - 3k)\gamma_k - [3(2m - k) + 7][3(2m - k) + 6]\gamma_{k-1} = 0.$$

Решение дается формулами

$$\gamma_{2l} = \gamma_0 (-1)^l \frac{(-m - 2/3)_l}{(1/3)_l} \binom{m}{l}, \quad \gamma_{2l+1} = \gamma_0 (-1)^l \frac{(-m - 2/3)_{l+1}}{(1/3)_{l+1}} \binom{m}{l}.$$

В результате, для функции $h_m(x)$ получим выражение

$$h_m(x) = c_m \left(g_m(x) + \frac{3m + 2}{3m + 1} f_m(x) \right), \quad (3.60)$$

где функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$ даются формулами

$$g_m(x) := \sum_{k=0}^m \binom{m+2/3}{k} \binom{m-2/3}{m-k} (x^{3m+2-6k} - x^{-3m-2+6k}), \quad (3.61)$$

$$f_m(x) := \sum_{k=0}^m \binom{m+1/3}{k} \binom{m-1/3}{m-k} (x^{3m+1-6k} - x^{-3m-1+6k}), \quad (3.62)$$

а c_m — некоторая константа, которая, как следует из условия (3.50), такая, что $V_m(1) = E_m(1) = 1$.

Проделанное вычисление сводит доказательство к нахождению функции $E_m(z)$, исходя из известного явного вида функции $h_m(x)$. По существу, задача теперь состоит в том, что нужно выделить явно множители $(x - x^{-1})^{2m+1}$ и $(x + 2 + x^{-1})$ у функции $h_m(x)$, чтобы найти функцию $V_m(x)$, а затем перейти обратно к начальной переменной $z = (x - q)/(1 - qx)$, чтобы восстановить функцию $E_m(z)$.

Стоит отметить, что функция $h_m(x)$, задаваемая выражениями (3.60), (3.61), (3.62), также была найдена Строгановым [56, 85], в рамках другого подхода, основанного на некотором линейном функциональном уравнении для статистической суммы частично неоднородной модели. Это же функциональное уравнение также возникает как T-Q уравнение Бакстера для основного состояния XXZ цепочки Гейзенберга спина 1/2 при значении параметра анизотропии $\Delta = -1/2$ и нечетного числа узлов $N = 2m + 1$ [86].

3.3.3. Кубическое преобразование производящей функции

Найдем теперь явное выражение для функции $V_m(x)$. Начнем с того, что перепишем функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$ в терминах обрывающихся гипергеометрических рядов,

$$\begin{aligned} g_m(x) &= \frac{\Gamma(m+1/3)}{m! \Gamma(1/3)} \left[x^{3m+2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, -m-2/3 \\ 1/3 \end{matrix} \middle| x^{-6} \right) \right. \\ &\quad \left. - x^{-3m-2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, -m-2/3 \\ 1/3 \end{matrix} \middle| x^6 \right) \right], \\ f_m(x) &= \frac{\Gamma(m+4/3)}{m! \Gamma(4/3)} \left[x^{-3m+1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, -m+1/3 \\ 4/3 \end{matrix} \middle| x^6 \right) \right. \\ &\quad \left. - x^{3m-1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, -m+1/3 \\ 4/3 \end{matrix} \middle| x^{-6} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Полезное наблюдение, которое может быть сделано из этой формы записи заключается в том, что поскольку параметры гипергеометрических функций в этих выражениях отличаются лишь сдвигами на единицу, естественно ожидать, что функции $g_m(x)$ и $f_m(x)$ связаны друг с другом некоторыми линейными соотношениями посредством соотношений Гаусса для гипергеометрической функции (см., например, §2.8 в [76]). Действительно, например, имеет

место соотношение

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, -m - 2/3 \\ 1/3 \end{matrix} \middle| \zeta\right) = \frac{3m+4}{2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m-1, -m-2/3 \\ 4/3 \end{matrix} \middle| \zeta\right) - \frac{3m+2}{2} (1+\zeta) {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, -m+1/3 \\ 4/3 \end{matrix} \middle| \zeta\right)$$

и поэтому функция $g_m(x)$ может быть выражена через $f_m(x)$ и $f_{m+1}(x)$,

$$g_m(x) = \frac{3m+2}{2(3m+1)} (x^3 + x^{-3}) f_m(x) - \frac{3(m+1)}{2(3m+1)} f_{m+1}(x). \quad (3.64)$$

Подставляя (3.64) в (3.60) получим аналогичную формулу для функции $h_m(x)$, а именно

$$h_m(x) = c_m \frac{3m+2}{2(3m+1)} \left[(x^3 + 2 + x^{-3}) f_m(x) - \frac{3m+3}{3m+2} f_{m+1}(x) \right]. \quad (3.65)$$

Вводя новую функцию $Q_m(x)$, такую что

$$f_m(x) = (x - x^{-1})^{2m+1} Q_m(x),$$

нетрудно видеть, что множитель $(x - x^{-1})^{2m+1}(x + 2 + x^{-1})$ может быть формально выделен в выражении (3.65) для $h_m(x)$. Это дает в результате представление для функции $V_m(x)$ в терминах функций $Q_m(x)$ и $Q_{m+1}(x)$,

$$V_m(x) = c_m \frac{3m+2}{2(3m+1)} \left[(x - 1 + x^{-1})^2 Q_m(x) - \frac{3m+3}{3m+2} (x - 2 + x^{-1}) Q_{m+1}(x) \right]. \quad (3.66)$$

Смысл всей процедуры заключается в том, что функция $Q_m(x)$ может быть найдена явно из выражения (3.63) для функции $f_m(x)$, посредством так называемого кубического преобразования гипергеометрической функции.

Предложение 3.2. *Функция $Q_m(x)$ имеет следующий явный вид*

$$Q_m(x) = \frac{(2m)!}{3^m (m!)^2} \left(\frac{qx^{-1} - q^{-1}x}{q - q^{-1}} \right)^m {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, m+1 \\ -2m \end{matrix} \middle| \frac{qx - q^{-1}x^{-1}}{qx^{-1} - q^{-1}x}\right). \quad (3.67)$$

Доказательство. Ключевое тождество используемое в доказательстве это кубическое преобразование гипергеометрической функции (см., например, [76]), которое в наиболее симметричной форме записи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2/3)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1/3, a \\ 2/3 \end{matrix} \middle| \zeta^3\right) - \omega^{-1}\zeta \frac{\Gamma(a+2/3)}{\Gamma(4/3)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1/3, a+2/3 \\ 4/3 \end{matrix} \middle| \zeta^3\right) \\ = 3^{-3a+1} \left(\frac{1-\zeta}{1-\omega} \right)^{-3a} \frac{\Gamma(3a)}{\Gamma(2a+2/3)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1/3, 3a \\ 2a+2/3 \end{matrix} \middle| \omega \frac{\zeta-\omega}{1-\zeta}\right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

где ω примитивный кубический корень из единицы, $\omega = \exp(\pm 2i\pi/3)$, а a — произвольный параметр. Чтобы показать, что кубическое преобразование действительно имеет отношение к

нашему случаю, перепишем (3.63) в виде выражения, стоящего в левой части (3.68). Принимая во внимание, что

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, -m + 1/3 \\ 4/3 \end{matrix} \middle| \zeta\right) = \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(4/3)}{\Gamma(-m + 1/3)\Gamma(m + 4/3)} (-\zeta)^m {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, -m - 1/3 \\ 2/3 \end{matrix} \middle| \zeta^{-1}\right)$$

и используя тождества

$$\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(m + 4/3)} = (-1)^{m+1} \frac{\Gamma(-m - 1/3)}{\Gamma(2/3)}, \quad \frac{\Gamma(m + 4/3)}{\Gamma(-m + 1/3)} = (-1)^m \frac{(3m + 1)!}{3^{3m+1} m!},$$

нетрудно увидеть, что (3.63) может быть переписано в виде

$$f_m(x) = \frac{(-1)^{m+1}(3m + 1)!}{3^{3m+1} (m!)^2} x^{3m+1} \left[\frac{\Gamma(-m - 1/3)}{\Gamma(2/3)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, -m - 1/3 \\ 2/3 \end{matrix} \middle| x^{-6}\right) + x^{-2} \frac{\Gamma(-m + 1/3)}{\Gamma(4/3)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, -m + 1/3 \\ 4/3 \end{matrix} \middle| x^{-6}\right) \right]. \quad (3.69)$$

Очевидно, что выражение в квадратных скобках совпадает с левой частью (3.68), если мы положим $a = -m - 1/3$.

Обозначим

$$W(a; \zeta) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2/3)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a + 1/3, a \\ 2/3 \end{matrix} \middle| \zeta^3\right) + \zeta \frac{\Gamma(a + 2/3)}{\Gamma(4/3)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a + 1/3, a + 2/3 \\ 4/3 \end{matrix} \middle| \zeta^3\right).$$

Тогда

$$f_m(x) = \frac{(-1)^{m+1}(3m + 1)!}{3^{3m+1} (m!)^2} x^{3m+1} W(-m - 1/3; x^{-2}). \quad (3.70)$$

Используя тот факт, что для любого q имеет место тождество

$$X + Y = \frac{q}{q - q^{-1}} (X - q^{-2}Y) - \frac{q^{-1}}{q - q^{-1}} (X - q^2Y)$$

и, если $q = \exp(i\pi/3)$, что есть в точности наш случай, мы можем положить $\omega = q^2$ для первой группы членов и $\omega = q^{-2}$ для второй. Этот позволяет применить кубическое преобразование к (3.69), что дает

$$W(a; \zeta) = \frac{3^{-3a+1} \Gamma(3a)}{\Gamma(2a + 2/3)} \frac{(1 - \zeta)^{-3a}}{q(1 - q^2)^{-3a+1}} \left[{}_2F_1\left(\begin{matrix} a + 1/3, 3a \\ 2a + 2/3 \end{matrix} \middle| q^2 \frac{\zeta - q^2}{1 - \zeta}\right) + q^{3a+1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a + 1/3, 3a \\ 2a + 2/3 \end{matrix} \middle| q^{-2} \frac{\zeta - q^{-2}}{1 - \zeta}\right) \right]. \quad (3.71)$$

Что бы получить новую формулу для $f_m(x)$ из (3.70), рассмотрим предел $a \rightarrow -m - 1/3$ в (3.71). Значение предела префактора легко вычисляется,

$$\lim_{a \rightarrow -m-1/3} \frac{\Gamma(3a)}{\Gamma(2a + 2/3)} = \frac{2}{3} \frac{(-1)^{m+1}(2m)!}{(3m + 1)!}.$$

Чтобы найти предел выражения стоящего в квадратных скобках в (3.71), заметим, что

$$q^2 \frac{\zeta - q^2}{1 - \zeta} \equiv s, \quad q^{-2} \frac{\zeta - q^{-2}}{1 - \zeta} = 1 - s,$$

и поэтому может быть использована формула

$$\lim_{a \rightarrow -m-1/3} \left[{}_2F_1 \left(\begin{matrix} a + 1/3, 3a \\ 2a + 2/3 \end{matrix} \middle| s \right) + q^{3a+1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a + 1/3, 3a \\ 2a + 2/3 \end{matrix} \middle| 1-s \right) \right] = \frac{3}{2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, -3m-1 \\ -2m \end{matrix} \middle| s \right),$$

которая может быть доказана с помощью стандартных формул для аналитического продолжения гипергеометрической функции (см, например, §2.10 в [76], формулы (1) и (2)). Результат вычисления предела $a \rightarrow -m - 1/3$ в (3.71) имеет вид

$$W(-m - 1/3; \zeta) = -\frac{3^{2m+1} (2m)! (1 - \zeta)^{3m+1}}{(3m + 1)! (q - q^{-1})^m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, -3m-1 \\ -2m \end{matrix} \middle| q^2 \frac{\zeta - q^2}{1 - \zeta} \right).$$

Окончательно, подставляя это выражение в (3.70) и используя тождество

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \zeta \right) = (1 - \zeta)^{-a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, c - b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{\zeta}{\zeta - 1} \right),$$

получим

$$f_m(x) = \frac{(2m)!}{3^m (m!)^2} (x - x^{-1})^{2m+1} \left(\frac{qx^{-1} - q^{-1}x}{q - q^{-1}} \right)^m {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, m+1 \\ -2m \end{matrix} \middle| \frac{qx - q^{-1}x^{-1}}{qx^{-1} - q^{-1}x} \right).$$

Это выражение немедленно ведет к (3.67). \square

Таким образом, подставляя (3.67) в (3.66), получаем для функции $V_m(x)$ следующее явное выражение

$$\begin{aligned} V_m(x) = & \frac{(2m)! (2m+1)!}{m! (3m+1)!} \left[(x-1+x^{-1})^2 \left(\frac{qx^{-1} - q^{-1}x}{q - q^{-1}} \right)^m {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, m+1 \\ -2m \end{matrix} \middle| \frac{qx - q^{-1}x^{-1}}{qx^{-1} - q^{-1}x} \right) \right. \\ & - \frac{2(2m+1)}{3m+2} (x-2+x^{-1}) \left(\frac{qx^{-1} - q^{-1}x}{q - q^{-1}} \right)^{m+1} \\ & \left. \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m-1, m+2 \\ -2m-2 \end{matrix} \middle| \frac{qx - q^{-1}x^{-1}}{qx^{-1} - q^{-1}x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Общая нормировка выбрана так, что $V_m(1) = 1$, что может быть проверено с помощью тождества Чу-Вандермонда (3.39) и соответствует следующему значению константы c_m в (3.60) и (3.66):

$$c_m = (3m+1) \frac{3^{m+1} m! (2m+2)!}{(3m+3)!}.$$

Стоит также отметить, что функции $Q_m(x)$ и $V_m(x)$, см. (3.67) и (3.72), являются первым и вторым решениями (согласно классификации работы [87]), соответственно, Т-Q уравнения Бакстера для основного состояния XXZ цепочки Гейзенберга спина $1/2$ в случае нечетного числа узлов $N = 2m + 1$ и значении параметра анзотропии $\Delta = -1/2$ [56, 82, 86].

3.3.4. Явный вид производящей функции

Как следует из (3.57), искомая производящая функция $E_m(z)$ может быть найдена из полученного выше выражения для функции $V_m(x)$ по формуле

$$E_m(z) = 3^{-m}(z+1+z^{-1})^m V_m\left(\frac{z+q}{zq+1}\right).$$

Применяя это преобразование к (3.72), получим

$$E_m(z) = \frac{(2m)!(2m+1)!}{3^m m!(3m+1)!} \frac{1}{(z+1+z^{-1})^2} \left[9(z+2)^m {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, m+1 \\ -2m \end{matrix} \middle| \frac{1+2z}{z(z+2)}\right) + \frac{2(2m+1)}{3m+2} (z-2+z^{-1})(z+2)^{m+1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m-1, m+2 \\ -2m-2 \end{matrix} \middle| \frac{1+2z}{z(z+2)}\right) \right]. \quad (3.73)$$

Это выражение еще не является окончательным ответом, поскольку множитель $(z+1+z^{-1})^2$ стоящий в знаменателе должен быть сокращен явно таким же множителем из числителя (напомним, что производящая функция имеет вид $E_m(z) = z^{-m} B_{2m}(z)$, где $B_{2m}(z)$ полином степени $2m$).

Предложение 3.3. *Функция $E_m(z)$ допускает следующее представление*

$$E_m(z) = \frac{(2m)!(2m+2)!}{3^m (m+1)!(3m+2)!} \left[(2m+1)(z+2)^m {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, m+2 \\ -2m-1 \end{matrix} \middle| \frac{1+2z}{z(z+2)}\right) - 3m(z+2)^{m-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m+1, m+2 \\ -2m \end{matrix} \middle| \frac{1+2z}{z(z+2)}\right) \right]. \quad (3.74)$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании соотношений Гаусса для гипергеометрической функции. Введем обозначение

$$\Psi_m^{(k)}(u) = (z+2)^m {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, k+1 \\ -m-k \end{matrix} \middle| \frac{z^{-1}+2}{z+2}\right), \quad u \equiv z+1+z^{-1}.$$

Заметим, что обрывающийся гипергеометрический ряд обладает симметрией

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, k+1 \\ -m-k \end{matrix} \middle| \zeta\right) = \zeta^m {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, k+1 \\ -m-k \end{matrix} \middle| \frac{1}{\zeta}\right), \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что $\Psi_m^{(k)}(u)$ является полиномом степени m по u .

Используя соотношения Гаусса можно доказать соотношения

$$\Psi_{m+1}^{(k)}(u) = (u+3) \Psi_m^{(k)}(u) - \frac{m(m+2k+1)}{(m+k+1)(m+k)} (2u+3) \Psi_{m-1}^{(k)}(u) \quad (3.75)$$

$$\Psi_m^{(k+1)}(u) = \frac{m+2k+2}{2(m+k+1)} \Psi_m^{(k)}(u) + \frac{m}{2(m+k+1)} (u+3) \Psi_{m-1}^{(k+1)}(u). \quad (3.76)$$

Переписывая (3.73) в терминах функции $\Psi_m^{(k)}$, для производящей функции $E_m(z)$ имеем выражение

$$E_m(z) = \frac{(2m)!(2m+1)!}{3^m m!(3m+1)!} \frac{1}{u^2} \left\{ 9 \Psi_m^{(m)}(u) + \frac{2(2m+1)}{3m+2} (u-3) \Psi_{m+1}^{(m+1)}(u) \right\}.$$

Применяя (3.75) при $k = m + 1$, получим

$$E_m(z) = \frac{(2m)!(2m+1)!}{3^m m! (3m+1)!} \left\{ \frac{2(2m+1)}{3m+2} \Psi_m^{(m+1)}(u) - \frac{6m}{3m+2} \Psi_{m-1}^{(m+1)}(u) + \frac{9}{u^2} \left[-\frac{2(2m+1)}{3m+2} \Psi_m^{(m+1)}(u) + \frac{m}{3m+2} (u+3) \Psi_{m-1}^{(m+1)}(u) + \Psi_m^{(m)}(u) \right] \right\}.$$

Соотношение (3.76) при $k = m$ показывает, что выражение стоящее в квадратных скобках равно нулю. Таким образом, мы получили

$$E_m(z) = \frac{(2m)!(2m+2)!}{3^m (m+1)! (3m+2)!} \left[(2m+1) \Psi_m^{(m+1)}(u) - 3m \Psi_{m-1}^{(m+1)}(u) \right].$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, приходим к (3.74). □

Теперь мы можем извлечь из выражения для производящей функции $E_m(z)$ явную формулу для коэффициентов $B_{2m}^{(r)}$, используя (3.55). Вначале, разлагая (3.74) в ряд по z , нетрудно получить выражение для $E_m(z)$ в виде тройной суммы. Далее, используя тождество Чу-Вандермонда, оказывается возможным выполнить суммирование по индексу, который определяет гипергеометрический ряд в формуле (3.74), и в итоге $E_m(z)$ записывается в виде двойной суммы. Наконец, два оставшиеся суммирования могут быть реорганизованы таким образом, что одно из них выполняется по r , а второе определяет коэффициенты разложения в ряд по z . Для полученных коэффициентов имеет место формула (3.52), что и заканчивает доказательство теоремы 3.1.

Глава 4

Нелокальные корреляционные функции шестивершинной модели

Цель этой главы — дать вывод различных представлений для некоторых нелокальных корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. Основное внимание уделено вероятности образования пустоты, которая является корреляционной функцией описывающей вероятность сегнетоэлектрического порядка в части решетки. Для неоднородной модели для этой корреляционной функции получено детерминантное представление обобщающее таковое для одно- и двухточечной граничных корреляционных функций обсуждавшихся выше. В однородном пределе получены представления в терминах ортогональных полиномов и в терминах кратных контурных интегралов. Также обсуждаются аналогичные вычисления для другой нелокальной корреляционной функции — вероятности конфигурации ряда, которая позволяет в принципе вычислять различные корреляционные функции, и, в частности, вероятность образования пустоты. Глава основана на результатах автора опубликованных в работах [32, 38].

4.1. Вероятность образования пустоты

Этот раздел посвящен вычислению вероятности образования пустоты — нелокальной корреляционной функции описывающей вероятность сегнетоэлектрического упорядочивания. Приводятся определение, рекуррентное соотношение и его решение для неоднородной модели, вывод выражения в однородном пределе, а также представление через ортогональные полиномы.

4.1.1. Определение вероятности образования пустоты

Следуя работе [32], рассмотрим шестивершинную модель на $N \times N$ решетке с граничными условиями типа доменной стенки (см. главу 1), и определим *вероятность образования пустоты*, которую будем обозначать через $F_N^{(r,s)}$, как вероятность обнаружения конфигурации, такой что стрелки на первых s горизонтальных ребрах (нумеруемых сверху) лежащих между r -ой и $(r + 1)$ -ой вертикальными прямыми (нумеруемыми справа) все направлены влево, см. Рис. 4.1а.

Данное определение может быть эквивалентно заменено, в силу правила льда и граничных условий типа доменной стенки, определением, в котором зафиксированы конфигурации стрелок на определенной подрешетке (части исходной решетки). А именно, нетрудно видеть, что вероятность образования пустоты описывает вероятность конфигурации у которой все вершины на $s \times (N - r)$ подрешетке примыкающей к левому верхнему углу $N \times N$ решетки содержат на всех примыкающих горизонтальных ребрах стрелки направленные влево, а на все вертикальных ребрах — стрелки направленные вниз, см. Рис. 4.1б. Иными словами, вероятность образования пустоты есть вероятность конфигурации со всеми вершинами на указанной $s \times (N - r)$ подрешетке являющимися вершинами второго типа (см. Рис. 1.1).

Из указанной интерпретации вероятности образования пустоты в терминах вершин второго типа легко получить два элементарных свойства этой вероятности. Во-первых, вероятность образования пустоты, в силу граничных условий доменной стенки, не равна тождественно нулю только если $0 \leq s \leq r \leq N$, или, иначе

$$F_N^{(r,s)} = 0, \quad s > r.$$

Во-вторых, вероятность образования пустоты удовлетворяет соотношению

$$F_N^{(r,s)} = F_N^{(N-s, N-r)},$$

которое есть следствие симметрии весов и $N \times N$ решетки с граничными условиями доменной стенки при отражении относительно «главной» диагонали (см. Рис. 1.1 и 4.1).

Возвращаясь к исходному определению, которое описывает вероятность образования пустоты в виде вертикальной «струны» из s стрелок направленных влево, нетрудно видеть, что это определение тесно связано с операторным формализмом элементов матрицы монодромии. А именно, как следует из графической интерпретации элементов матрицы монодромии связанной с вертикальным рядом решетки, см. Рис. 2.1, вероятность образования пустоты может быть определена в виде матричного элемента:

$$F_N^{(r,s)} = \frac{1}{Z_N} \langle \Downarrow | B(\lambda_N) \cdots B(\lambda_{r+1}) \pi_1 \cdots \pi_s B(\lambda_r) \cdots B(\lambda_1) | \Uparrow \rangle. \quad (4.1)$$

Здесь π_j обозначает проектор на состояние спин-вниз

$$\pi_j = \frac{1}{2}(1 - \sigma_j^z).$$

Выбор корреляционной функции (4.1) в существенной степени мотивирован удобством ее использования к исследованию предельных форм шестивершинной модели. Действительно, в силу свойств как граничных условий типа доменной стенки, так и правила льда, вероятность образования пустоты (4.1) по сути описывает вероятность конфигурации в которой

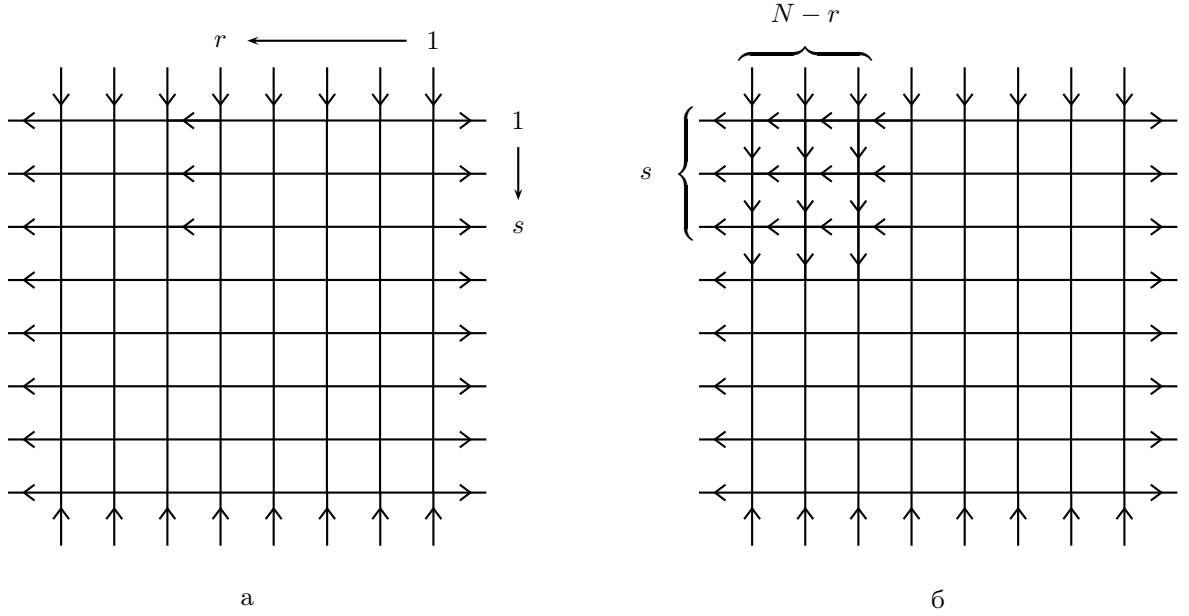


Рис. 4.1. Определение вероятности образования пустоты: а) в терминах «струны» из s стрелок, б) в терминах $s \times (N - r)$ подрешетки из вершин второго типа.

все вершины принадлежащие верхне-левой $(N - r) \times s$ части решетки имеют одинаковую конфигурацию стрелок. А именно, все стрелки на ребрах, примыкающих к этим вершинам являются стрелками направленными влево или вниз. Таким образом, вероятность образования пустоты описывает вероятность сегнетоэлектрического порядка или «замерзания» состояний. Арктическая кривая (граница предельной формы) возникает в подходящем скейлинговом пределе и соответствует кривой на которой вероятность образования пустоты имеет скачок, с единицы к нулю, при увеличении этой $(N - r) \times s$ части решетки. Более детальное обсуждение свойств вероятности пустоты в скейлинговом пределе будет дано в следующей главе.

4.1.2. Рекуррентное соотношение и частные значения

На начальном этапе вычислений нам будет удобно рассматривать только «числитель» корреляционной функции (матричный элемент в (4.1)), для которого введем обозначение:

$$\tilde{F}_N^{(r,s)} = Z_N F_N^{(r,s)}.$$

Вычисляя скалярное произведение вектора $\langle \downarrow_2 | B_2(\lambda_N) \cdots B_2(\lambda_{r+1})$ с вектором (2.19) при $n = r$, нетрудно получить, что в этом случае (2.21) приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$\tilde{F}_N^{(r,s)} = \prod_{\beta=r+1}^N a(\lambda_\beta, \nu_1) c \sum_{\alpha=1}^r \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r b(\lambda_\beta, \nu_1) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{k=2}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) \cdot \tilde{F}_{N-1}^{(r-1,s-1)}[\lambda_\alpha; \nu_1]. \quad (4.2)$$

Как и в Главе 2, мы используем соглашение, что квадратные скобки означают, что содержащиеся в них переменные удалены из наборов параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и ν_1, \dots, ν_N , параметризующих соответствующую величину.

В случае $s = 1$ вероятность образования пустоты есть не что иное, как граничная поляризация, $F_N^{(r,1)} = G_N^{(r)}$, которая вычислялась в разделе 2.2.2. Напомним, что в этом случае для всех $r = 1, \dots, N$, имеем

$$\tilde{F}_{N-1}^{(r-1,0)}[\lambda_\alpha; \nu_1] = Z_{N-1}[\lambda_\alpha; \nu_1] \quad (4.3)$$

и поэтому мы можем попросту подставить формулу Изергина–Корепина в правую часть (4.2), чтобы получить вероятность образования пустоты при $s = 1$. Действительно, поскольку

$$\frac{Z_{N-1}[\lambda_\alpha, \nu_1]}{Z_N} = \frac{(-1)^{\alpha-1}}{a(\lambda_\alpha, \nu_1)b(\lambda_\alpha, \nu_1)} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha)}{a(\lambda_\beta, \nu_1)b(\lambda_\beta, \nu_1)} \prod_{k=2}^N \frac{d(\nu_1, \nu_k)}{a(\lambda_\alpha, \nu_k)b(\lambda_\alpha, \nu_k)} \frac{\det \mathcal{M}_{[\alpha;1]}}{\det \mathcal{M}} \quad (4.4)$$

мы получим

$$F_N^{(r,1)} = \frac{\prod_{k=2}^N d(\nu_1, \nu_k)}{\prod_{\alpha=1}^r a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=r+1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_1) \det \mathcal{M}} \sum_{\alpha=1}^r (-1)^{\alpha-1} g_r(\lambda_\alpha) \det \mathcal{M}_{[\alpha;1]}. \quad (4.5)$$

Функция $g_r(\lambda) = g_r(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N)$ дается формулой

$$g_r(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha=r+1}^N d(\lambda_\alpha, \lambda) \prod_{\alpha=1}^r e(\lambda_\alpha, \lambda)}{\prod_{k=1}^N b(\lambda, \nu_k)}, \quad (4.6)$$

где функции $d(\lambda, \lambda')$ и $e(\lambda, \lambda')$ определены в (1.10) и (2.25), соответственно.

Рассмотрим случай $s = 2$. Используя (4.2) и (4.5), для $\alpha = 1, \dots, r$ можно написать

$$\begin{aligned} F_{N-1}^{(r-1,1)}[\lambda_\alpha; \nu_1] &= \frac{1}{\det \mathcal{M}_{[\alpha;1]}} \prod_{k=3}^N d(\nu_2, \nu_k) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r \frac{1}{a(\lambda_\beta, \nu_2)} \prod_{\beta=r+1}^N \frac{1}{b(\lambda_\beta, \nu_2)} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r (-1)^{\beta-1+\chi(\beta,\alpha)} \frac{b(\lambda_\beta, \nu_1)}{e(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)} g_r(\lambda_\beta) \det \mathcal{M}_{[\alpha,\beta;1,2]}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь

$$\chi(\beta, \alpha) = \begin{cases} 1 & \beta > \alpha \\ 0 & \beta \leq \alpha. \end{cases}$$

Подставляя в (4.7) выражение для $\det \mathcal{M}_{[\alpha;1]}$ которое следует из (4.4), и переходя к ненорми-

рованной величине, получим

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{N-1}^{(r-1,1)}[\lambda_\alpha; \nu_1] &= \frac{Z_N}{\det \mathcal{M}} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha)}{a(\lambda_\beta, \nu_1)b(\lambda_\beta, \nu_1)} \prod_{k=2}^N \frac{d(\nu_1, \nu_k)}{a(\lambda_\alpha, \nu_k)b(\lambda_\alpha, \nu_k)} \\ &\quad \times \prod_{k=3}^N d(\nu_2, \nu_k) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r \frac{1}{a(\lambda_\beta, \nu_2)} \prod_{\beta=r+1}^N \frac{1}{b(\lambda_\beta, \nu_2)} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r (-1)^{\beta-1+\chi(\beta,\alpha)} \frac{b(\lambda_\beta, \nu_1)}{e(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)} g_r(\lambda_\beta) \det \mathcal{M}_{[\alpha,\beta;1,2]}. \end{aligned}$$

Подставляя далее это выражение в рекуррентное соотношение, после многочисленных сокращений, получим

$$\begin{aligned} F_N^{(r,2)} &= \frac{1}{\det \mathcal{M}} \cdot \frac{\prod_{k=2}^N d(\nu_1, \nu_k) \prod_{k=3}^N d(\nu_2, \nu_k)}{\prod_{\alpha=1}^r a(\lambda_\alpha, \nu_1)a(\lambda_\alpha, \nu_2) \prod_{\alpha=r+1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_1)b(\lambda_\alpha, \nu_2)} \\ &\quad \times \sum_{\alpha=1}^r \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r (-1)^{\alpha+\beta+\chi(\beta,\alpha)} \frac{a(\lambda_\alpha, \nu_2)b(\lambda_\beta, \nu_1)}{e(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)} g_r(\lambda_\alpha)g_r(\lambda_\beta) \det \mathcal{M}_{[\alpha,\beta;1,2]}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Выражение (4.8) может быть использовано для вычисления вероятности образования пустоты при $s = 3$, путем повторения только что рассмотренной процедуры. Опуская детали, приведем результат:

$$\begin{aligned} F_N^{(r,3)} &= \frac{1}{\det \mathcal{M}} \prod_{j=1}^3 \frac{\prod_{k=j+1}^N d(\nu_j, \nu_k)}{\prod_{\alpha=1}^r a(\lambda_\alpha, \nu_j) \prod_{\alpha=r+1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_j)} \\ &\quad \times \sum_{\alpha=1}^r \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \beta, \alpha}}^r (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+1+\chi(\gamma,\alpha)+\chi(\gamma,\beta)+\chi(\beta,\alpha)} g_r(\lambda_\alpha)g_r(\lambda_\beta)g_r(\lambda_\gamma) \\ &\quad \times \frac{a(\lambda_\alpha, \nu_2)a(\lambda_\alpha, \nu_3)a(\lambda_\beta, \nu_3)b(\lambda_\beta, \nu_1)b(\lambda_\gamma, \nu_1)b(\lambda_\gamma, \nu_2)}{e(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)e(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma)e(\lambda_\beta, \lambda_\gamma)} \det \mathcal{M}_{[\alpha,\beta,\gamma;1,2,3]}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

4.1.3. Выражение для неоднородной модели

Сравнивая формулы (4.5), (4.8) и (4.9) довольно просто угадать результат для общих значений s . А именно, для вероятности образования пустоты справедливо выражение:

$$\begin{aligned} F_N^{(r,s)} &= \frac{1}{\det \mathcal{M}} \prod_{j=1}^s \frac{\prod_{k=j+1}^N d(\nu_j, \nu_k)}{\prod_{\beta=1}^r a(\lambda_\beta, \nu_j) \prod_{\beta=r+1}^N b(\lambda_\beta, \nu_j)} \\ &\quad \times \sum_{\alpha_1=1}^r \sum_{\substack{\alpha_2=1 \\ \alpha_2 \neq \alpha_1}}^r \cdots \sum_{\substack{\alpha_s=1 \\ \alpha_s \neq \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}}}^r (-1)^{s+\sum_{k=1}^s \alpha_k + \sum_{1 \leq j < k \leq s} \chi(\alpha_k, \alpha_j)} \prod_{j=1}^s g_r(\lambda_{\alpha_j}) \\ &\quad \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{a(\lambda_{\alpha_j}, \nu_k)b(\lambda_{\alpha_k}, \nu_j)}{e(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{\alpha_k})} \det \mathcal{M}_{[\alpha_1, \dots, \alpha_s; 1, \dots, s]}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Можно показать, что формула (4.1) действительно удовлетворяет рекуррентному соотношению (4.2). Вычисление по сути повторяет такое приведенное выше для случая $s = 2$.

Для этого сосредоточимся на написании выражения для вероятности образования пустоты для случая $(N - 1) \times (N - 1)$ решетки, $F_{N-1}^{(r-1, s-1)}[\lambda_{\alpha_1}, \nu_1]$. Чтобы быть более точным, в процессе адаптации выражения (4.1) к этому случаю, кроме того факта, что сумма этом случае $(s - 1)$ -кратная, важно также учитывать, что функция $g_r(\lambda)$ неявно зависит от N , так что переход от N к $(N - 1)$ подразумевает некоторый дополнительный множитель. В целом, после всех подготовительных шагов, которые необходимы для удовлетворения обозначениям, получим, что выражение которое должно быть подставлено в правую часть (4.2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
F_{N-1}^{(r-1, s-1)}[\lambda_{\alpha_1}, \nu_1] &= \frac{1}{\det \mathcal{M}_{[\alpha_1; 1]}} \prod_{j=2}^s \frac{\prod_{k=j+1}^N d(\nu_j, \nu_k)}{\prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha_1}^r a(\lambda_{\beta}, \nu_j) \prod_{\beta=r+1}^N b(\lambda_{\beta}, \nu_j)} \\
&\times \sum_{\substack{\alpha_2=1 \\ \alpha_2 \neq \alpha_1}}^r \cdots \sum_{\substack{\alpha_s=1 \\ \alpha_s \neq \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}}}^r (-1)^{s-1 + \sum_{k=2}^s \alpha_k + \sum_{1 \leq j < k \leq s} \chi(\alpha_k, \alpha_j)} \prod_{j=1}^s \frac{g_r(\lambda_{\alpha_j}) b(\lambda_{\alpha_j}, \nu_1)}{e(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_j})} \\
&\times \prod_{2 \leq j < k \leq s} \frac{a(\lambda_{\alpha_j}, \nu_k) b(\lambda_{\alpha_k}, \nu_j)}{e(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{\alpha_k})} \cdot \det \mathcal{M}_{[\alpha_1, \dots, \alpha_s; 1, \dots, s]}. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Как и в случае $s = 2$ рассмотренном выше, необходимо использовать соотношение (4.4) чтобы выразить $\det \mathcal{M}_{[\alpha_1; 1]}$ через $\det \mathcal{M}$ в (4.11). После этого шага, сокращение различных множителей показывает, что соотношение (4.2) действительно является выполненным.

Помимо того, что (4.10) является решением (4.2), также необходимо отметить, что соответствующие начальные условия также удовлетворяются. Действительно, при $s \leq r$, таковыми являются обобщения условия (4.3) следующего вида:

$$\tilde{F}_{N-s}^{(r-s, 0)}[\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_s}; \nu_1, \dots, \nu_s] = Z_{N-s}[\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_s}; \nu_1, \dots, \nu_s].$$

При $s > r$, начальными условиями являются следующие:

$$F_{N-r}^{(0, s-r)}[\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_r}; \nu_1, \dots, \nu_r] = 0.$$

Заметим, что эти условия означают, что вероятность образования пустоты всех $s > r$ обладает свойством $F_N^{(r, s)} = 0$, которое также следует из определения (4.1).

Начнем с того, что напомним

$$\lambda_{\alpha} = \lambda + \xi_{\alpha},$$

так что в пределе все параметры ξ_1, \dots, ξ_N (а также параметры ν_1, \dots, ν_N) стремятся к нулю. Полагая, что все ξ_1, \dots, ξ_N не равны нулю и отличны друг от друга, и используя тот факт, что

для всякой функции $f(x)$, регулярной в точке $x = \lambda$, можно написать $\exp(\xi \partial_\varepsilon) f(\lambda + \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = f(\lambda + \xi)$, перепишем (4.10) выражая многократную сумму в виде определителя:

$$F_N^{(r,s)} = \frac{1}{\det \mathcal{M}} \prod_{j=1}^s \frac{\prod_{k=j+1}^N d(\nu_j, \nu_k)}{\prod_{\beta=1}^r a(\lambda_\beta, \nu_j) \prod_{\beta=r+1}^N b(\lambda_\beta, \nu_j)} \times \begin{vmatrix} \exp(\xi_1 \partial_{\varepsilon_1}) & \dots & \exp(\xi_1 \partial_{\varepsilon_s}) & \varphi(\lambda_1, \nu_{s+1}) & \dots & \varphi(\lambda_1, \nu_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \exp(\xi_N \partial_{\varepsilon_1}) & \dots & \exp(\xi_N \partial_{\varepsilon_s}) & \varphi(\lambda_N, \nu_{s+1}) & \dots & \varphi(\lambda_N, \nu_N) \end{vmatrix} \times \prod_{j=1}^s g_r(\lambda + \varepsilon_j) \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{a(\lambda + \varepsilon_j, \nu_k) b(\lambda + \varepsilon_k, \nu_j)}{e(\lambda + \varepsilon_j, \lambda + \varepsilon_k)} \Big|_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s=0}. \quad (4.12)$$

Выражение (4.12) справедливо для неоднородной модели и является эквивалентным способом записи формулы (4.10).

4.1.4. Выражение в однородном пределе

Вычисление однородного предела может быть проведено методами работ [29, 48]. Рассмотрим пределы $\nu_1 \rightarrow 0, \nu_2 \rightarrow 0, \dots, \nu_N \rightarrow 0$, в указанном порядке, на каждом шаге удерживая вклад только ведущего члена по соответствующей переменной; затем, аналогично, пределы $\xi_1 \rightarrow 0, \xi_2 \rightarrow 0, \dots, \xi_N \rightarrow 0$, вновь удерживая только вклады ведущего порядка. Выражение в первой строке (4.12) дает

$$\frac{(-1)^{\frac{(N-s-1)(N-s)}{2}} \prod_{j=1}^s (N-j)!}{a^{rs} b^{(N-r)s} \det \mathcal{N}} \cdot \frac{1}{\frac{\nu_{s+2}}{1!} \cdot \frac{\nu_{s+3}^2}{2!} \dots \frac{\nu_N^{N-s-1}}{(N-s-1)!}} \cdot \frac{1}{\frac{\xi_2}{1!} \cdot \frac{\xi_3^2}{2!} \dots \frac{\xi_N^{N-1}}{(N-1)!}},$$

где $a := a(\lambda, 0)$, $b := b(\lambda, 0)$. Выражение во второй строке (4.12) дает

$$(-1)^{\frac{(N-s-1)(N-s)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-s-1} \varphi(\lambda) \\ \partial_{\varepsilon_1} & \dots & \partial_{\varepsilon_s} & \partial_\lambda \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-s} \varphi(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{\varepsilon_1}^{N-1} & \dots & \partial_{\varepsilon_s}^{N-1} & \partial_\lambda^{N-1} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{2N-s-2} \varphi(\lambda) \end{vmatrix} \times \left(\frac{\nu_{s+2}}{1!} \cdot \frac{\nu_{s+3}^2}{2!} \dots \frac{\nu_N^{N-s-1}}{(N-s-1)!} \right) \cdot \left(\frac{\xi_2}{1!} \cdot \frac{\xi_3^2}{2!} \dots \frac{\xi_N^{N-1}}{(N-1)!} \right). \quad (4.13)$$

Члены третьей строки (4.12) дают

$$\prod_{j=1}^s \frac{[-\sin(\varepsilon_j - 2\eta)]^r (-\sin \varepsilon_j)^{N-r}}{[\sin(\varepsilon_j + \lambda - \eta)]^N} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{\sin(\varepsilon_j + \lambda + \eta) \sin(\varepsilon_k + \lambda - \eta)}{\sin(\varepsilon_j - \varepsilon_k + 2\eta)}.$$

В итоге, после очевидных сокращений, получим, что вероятность образования пустоты в однородном пределе имеет вид

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^s \prod_{j=1}^s (N-j)!}{a^{rs} b^{(N-r)s} \det \mathcal{N}} \begin{vmatrix} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-s-1} \varphi(\lambda) & 1 & \dots & 1 \\ \partial_\lambda \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-s} \varphi(\lambda) & \partial_{\varepsilon_1} & \dots & \partial_{\varepsilon_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_\lambda^{N-1} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{2N-s-2} \varphi(\lambda) & \partial_{\varepsilon_1}^{N-1} & \dots & \partial_{\varepsilon_s}^{N-1} \end{vmatrix} \times \prod_{j=1}^s \frac{(\sin \varepsilon_j)^{N-r} [\sin(\varepsilon_j - 2\eta)]^r}{[\sin(\varepsilon_j + \lambda - \eta)]^N} \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{\sin(\varepsilon_j + \lambda + \eta) \sin(\varepsilon_k + \lambda - \eta)}{\sin(\varepsilon_j - \varepsilon_k + 2\eta)} \Bigg|_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = 0}. \quad (4.14)$$

Для дальнейшего удобства, при записи этого выражения был изменен порядок столбцов в определителе, по сравнению с (4.12) или (4.13).

Представление (4.14) для вероятности образования пустоты однородной модели, которое содержит определитель $N \times N$ матрицы, может быть также переписано в терминах $s \times s$ определителя. Матричными элементами этого определителя являются полиномы связанные с моментами $c_n = \partial_\lambda^n \phi$. Процедура перехода к представлению через ортогональные полиномы в случае вероятности образования пустоты обобщает преобразования рассмотренные в разделе в случае граничной двухточечной корреляционной функции и сводится к использованию тождества (1.34).

Таким образом, из (4.14) следует, что вероятность образования пустоты в однородном пределе допускает представление:

$$F_N^{(r,s)} = (-1)^s \begin{vmatrix} K_{N-s}(\partial_{\varepsilon_1}) & \dots & K_{N-s}(\partial_{\varepsilon_s}) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{N-1}(\partial_{\varepsilon_1}) & \dots & K_{N-1}(\partial_{\varepsilon_s}) \end{vmatrix} \prod_{j=1}^s \{ [\omega(\varepsilon_j)]^{N-r} [\varrho(\varepsilon_j)]^N \} \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{\tilde{\varrho}(\varepsilon_j) \varrho(\varepsilon_k) [\tilde{\omega}(\varepsilon_j) \omega(\varepsilon_k) - 1]} \Bigg|_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = 0}. \quad (4.15)$$

Здесь $K_n(x)$ — полиномы определенные в (2.56) (см. также формулы (1.31), (1.33), (2.50)), а функции $\omega(\varepsilon)$, $\varrho(\varepsilon)$ и $\tilde{\omega}(\varepsilon)$, $\tilde{\varrho}(\varepsilon)$ даются формулами (2.54) и (2.59), соответственно. При выводе представления (4.15) также было использовано тождество (2.61).

4.2. Представление для вероятности образования пустоты в виде многократного интеграла

В этом разделе выводится представление для вероятности образования пустоты в терминах многократного контурного интеграла. Также вводится многоточечная производящая функция, связанная с статистической суммой частично неоднородной модели и выводятся эквивалентные интегральные представления для вероятности образования пустоты описываемые этой функцией.

4.2.1. Преобразование к интегральному представлению

Рассмотрим производящую функцию

$$h_N(z) = \sum_{r=1}^N H_N^{(r)} z^{r-1}, \quad (4.16)$$

где, как и предыдущих главах, $H_N^{(r)}$ обозначает одноточечную функцию описывающую вероятность конфигурации с вершиной s -веса в первом (сверху) ряду в r -ом (справа) узле. Для этой величины было получено представление (2.57), которое в силу (2.55), также может быть записано в следующем виде:

$$H_N^{(r)} = K_{N-1}(\partial_\varepsilon) \frac{[\omega(\varepsilon)]^{N-r}}{[\omega(\varepsilon) - 1]^{N-1}} \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (4.17)$$

Для дальнейшего нам понадобятся лишь тот факт, что $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и что $K_{N-1}(x)$ является полиномом степени $N - 1$ по x .

Ключевым свойством производящей функции (4.16) в контексте рассматриваемой нами задачи о вычислении вероятности образования пустоты является следующее.

Лемма 4.1. Пусть $f(z)$ есть некоторая функция, регулярная в окрестности точки $z = 0$, тогда имеет место тождество

$$K_{N-1}(\partial_\varepsilon) f(\omega(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{(z-1)^{N-1}}{z^N} h_N(z) f(z) dz, \quad (4.18)$$

где C_0 простой замкнутый контур, обходящий точку $z = 0$ против часовой стрелки и лежащий в ее малой окрестности.

Доказательство. Чтобы доказать тождество, заметим вначале, что поскольку функция $f(z)$ предполагается регулярной в точке $z = 0$, достаточно рассмотреть случай полинома степени $(N - 1)$, так как члены более высоких степеней по z не дают вклад в каждую из частей (4.18).

В силу линейности тождества (4.18) по функции $f(z)$, достаточно рассмотреть случай когда $f(z)$ является мономом. Введем вспомогательные величины

$$V_N^{(p)} = K_{N-1}(\partial_\varepsilon) [\omega(\varepsilon)]^{N-p} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (p = 1, \dots, N). \quad (4.19)$$

Вычисляя интеграл в правой части (4.18), нетрудно видеть, что (4.18) есть не что иное как соотношение

$$\vec{v} = (-1)^{N-1} \mathcal{A} \vec{h}, \quad (4.20)$$

где векторы \vec{v} и \vec{h} имеют компоненты $v_p = V_N^{(p)}$ и $h_r = H_N^{(r)}$, а матрица \mathcal{A} имеет элементы $\mathcal{A}_{pr} = (-1)^{p-r} \binom{N-1}{p-r}$. Очевидно, что матрица \mathcal{A} является нижнетреугольной матрицей, причем может быть записана в виде

$$\mathcal{A} = (I - \mathcal{E})^{N-1}, \quad (4.21)$$

где \mathcal{E} обозначает нижнетреугольную матрицу с элементами $\mathcal{E}_{pr} = \delta_{p,r+1}$. Представление (4.21) позволяет легко обратить матрицу \mathcal{A} . Вычисление компонент вектора \vec{h} из (4.20), с помощью (4.21), приводит к выражению для величин $H_N^{(r)}$ в терминах величин $V_N^{(p)}$, которое совпадает с таковым, следующим из формулы (4.17) и определения (4.19), что и доказывает справедливость тождества (4.18). \square

В результате, применяя тождество (4.18) к (4.15) и принимая во внимание формулы (2.55), (2.54) и (2.59), для вероятности образования пустоты получим следующее представление:

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^s}{(2\pi i)^s} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \left| \begin{array}{ccc} \frac{h_N(z_1)}{z_1^r(z_1-1)} & \cdots & \frac{h_N(z_s)}{z_s^r(z_s-1)} \\ \frac{h_{N-1}(z_1)}{z_1^{r-1}(z_1-1)^2} & \cdots & \frac{h_{N-1}(z_s)}{z_s^{r-1}(z_s-1)^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{h_{N-s+1}(z_1)}{z_1^{r-s+1}(z_1-1)^s} & \cdots & \frac{h_{N-s+1}(z_s)}{z_s^{r-s+1}(z_s-1)^s} \end{array} \right| \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{(\tilde{z}_j - 1)(z_k - 1)}{\tilde{z}_j z_k - 1} dz_1 \dots dz_s. \quad (4.22)$$

Здесь переменные \tilde{z}_j являются функциями соответствующих переменных z_j ,

$$\tilde{z}_j = \frac{b^2 z_j}{(a^2 + b^2 - c^2) z_j - a^2} = \frac{t^2 z_j}{2\Delta t z_j - 1}, \quad t \equiv \frac{b}{a}, \quad (4.23)$$

где a , b , и c веса шестивершинной модели; формула (4.23) следует из выражений для функций $\omega(\varepsilon)$ и $\tilde{\omega}(\varepsilon)$, определенных в (2.54) и (2.59), соответственно, и представлений для весов (1.3).

4.2.2. Многоточечная производящая функция

Для дальнейшего преобразования полученного выражения для вероятности образования пустоты нам понадобится формула для статистической суммы частично неоднородной модели в виде многоточечного аналога производящей функции граничных корреляционных функций однородной модели.

А именно, важную роль в ситуации общего положения будут играть следующие функции многих аргументов:

$$h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) = \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{z_k - z_j} \begin{vmatrix} z_1^{s-1} h_{N-s+1}(z_1) & \dots & z_s^{s-1} h_{N-s+1}(z_s) \\ z_1^{s-2}(z_1 - 1) h_{N-s+2}(z_1) & \dots & z_s^{s-2}(z_s - 1) h_{N-s+2}(z_s) \\ \dots & \dots & \dots \\ (z_1 - 1)^{s-1} h_N(z_1) & \dots & (z_s - 1)^{s-1} h_N(z_s) \end{vmatrix}. \quad (4.24)$$

В используемых обозначениях второй нижний индекс указывает на число переменных, $s = 1, \dots, N$. Функции (4.24) являются симметрическими полиномами степени $(N - 1)$ по каждой из переменных. Функции (4.24) удовлетворяют соотношению (напомним, что $h_N(1) = 1$):

$$h_{N,s}(z_1, \dots, z_{s-1}, 1) = h_{N,s-1}(z_1, \dots, z_{s-1}). \quad (4.25)$$

Еще одно соотношение аналогичного типа имеет вид

$$\lim_{z_s \rightarrow 0} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) = h_N(0) h_{N-1,s-1}(z_1, \dots, z_{s-1}), \quad (4.26)$$

где

$$h_N(0) = H_N^{(1)} = \frac{ca^{2N-2} Z_{N-1}}{Z_N}.$$

Эти соотношения позволяют строить функции (4.24) начиная с функции $h_{N,N}(z_1, \dots, z_N)$; кроме того, $h_{N,1}(z_1) \equiv h_N(z_1)$.

Рассмотрим теперь частично неоднородную шестивершинную модель на $N \times N$ решетке, статистическую сумму которой будем обозначать как $Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Веса модели этой даются формулами (1.6) и (1.7), где $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_N = 0$, а параметры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ в ситуации общего положения являются различными. Выбирая некоторое значение λ как значение для параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ в однородном пределе, введем параметры $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ такие, что

$$\lambda_\alpha = \lambda + \xi_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (4.27)$$

Однородный предел таким образом соответствует тому, что $\xi_\alpha \rightarrow 0$, $\alpha = 1, \dots, N$. Чтобы упростить обозначения, будем также писать $a(\lambda_\alpha) := a(\lambda_\alpha, 0)$ и $b(\lambda_\alpha) := b(\lambda_\alpha, 0)$. Поскольку

здесь однородная и неоднородная модели будут рассматриваться одновременно, будем обозначать веса однородной модели как $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, где параметр λ совпадает с таковым в (4.27), нежели просто как a и b . Ниже, однако, после того как вернемся к рассмотрению вероятности образования пустоты однородной модели, будут вновь использованы обозначения без явного указания аргумента.

Важную роль в рассматриваемой ниже конструкции играют переменные u_1, \dots, u_N , определяемые формулами

$$u_j = \gamma(\xi_j), \quad \gamma(\xi) = \frac{a(\lambda) b(\lambda + \xi)}{b(\lambda) a(\lambda + \xi)}. \quad (4.28)$$

Для последующего использования полезно отметить здесь, что функция $\gamma(\xi)$ связана с функцией $\omega(\xi)$ определенной в (2.54) соотношением $\gamma(\xi) = \omega(-\lambda + \eta - \xi)$.

Наша целью будет исследовать величину

$$\tilde{Z}_N(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}{Z_N(\lambda, \dots, \lambda)},$$

где параметры связаны соотношениями (4.27). Отметим, что $\tilde{Z}_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$ также зависит от η и λ как параметров. Ниже мы покажем, что $\tilde{Z}_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$ имеет естественное представление в виде полинома по переменным (4.28).

Чтобы проиллюстрировать идею вывода новой формулы для статистической суммы неоднородной модели, полезно рассмотреть вначале случай только одной неоднородности. Без ограничения общности можно считать, что это неоднородность первого горизонтального ряда решетки ξ_1 , и $\xi_2 = \dots = \xi_N = 0$. Напомним, что граничные условия типа доменной стенки допускают существование одной и только одной вершины с весом c в первом горизонтальном ряду решетки. Если эта вершина оказывается на r -ой позиции справа, то тогда первые $(r - 1)$ узлов содержат вершины с весом b , а остальные $(N - r)$ узлов содержат вершины с весом a . Это означает, что статистическая сумма с одной неоднородностью записывается в виде

$$Z_N(\lambda_1, \lambda, \dots, \lambda) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{a(\lambda_1)}{a(\lambda)} \right]^{N-r} \left[\frac{b(\lambda_1)}{b(\lambda)} \right]^{r-1} H_N^{(r)}(\lambda, \dots, \lambda) Z_N(\lambda, \dots, \lambda). \quad (4.29)$$

Здесь $H_N^{(r)}(\lambda, \dots, \lambda)$ обозначает граничную корреляционную функцию однородной модели которая описывает вероятность обнаружения вершины пятого типа (с c весом) на r -ом узле первого ряда). Используя определение (4.16), выражение (4.29) может быть записано в виде

$$\tilde{Z}_N(\xi_1, 0, \dots, 0) = \left[\frac{a(\lambda_1)}{a(\lambda)} \right]^{N-1} h_N(u_1). \quad (4.30)$$

Необходимо помнить, что переменные ξ_1 , λ_1 и u_1 связаны между как указано в формулах (4.27) и (4.28); все величины также зависят от параметра λ , который также входит в определение функции $\gamma(\xi)$ в (4.28).

Следующий результат для статистической суммы $\tilde{Z}_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$, для случая $\lambda = \pi/2$ который имеет комбинаторные приложения, был представлен в работе [30], и доказан для произвольных значений λ в работе [32].

Предложение 4.2. *Статистическая сумма $\tilde{Z}_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$ допускает представление*

$$\tilde{Z}_N(\xi_1, \dots, \xi_N) = \prod_{j=1}^N \left[\frac{a(\lambda_j)}{a(\lambda)} \right]^{N-1} h_{N,N}(u_1, \dots, u_N), \quad (4.31)$$

где переменные ξ_j , λ_j , u_j , $j = 1, \dots, N$ связаны соотношениями (4.27) и (4.28).

Доказательство. Рассмотрим статистическую сумму в случае, когда параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ все различны, но $\nu_1 = \dots = \nu_N = 0$. Формула Изергина–Корепина в этом случае имеет вид:

$$Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{\prod_{j=1}^N [a(\lambda_j)b(\lambda_j)]^N}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} d(\lambda_k, \lambda_j) \prod_{n=0}^{N-1} n!} \begin{vmatrix} \varphi(\lambda_1) & \dots & \varphi(\lambda_N) \\ \partial_{\lambda_1} \varphi(\lambda_1) & \dots & \partial_{\lambda_N} \varphi(\lambda_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{\lambda_1}^{N-1} \varphi(\lambda_1) & \dots & \partial_{\lambda_N}^{N-1} \varphi(\lambda_N) \end{vmatrix}.$$

Используя тот факт, что $\varphi(\lambda) = c/a(\lambda)b(\lambda)$ и переходя к представлению в терминах ортогональных полиномов (см., формулы (1.34) и (2.56)), получим

$$\tilde{Z}_N(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{[\varphi(\lambda)]^{N(N-1)/2}}{\prod_{j=1}^N [\varphi(\lambda_j)]^N \prod_{1 \leq j < k \leq N} d(\lambda_k, \lambda_j)} \begin{vmatrix} K_0(\partial_{\lambda_1}) & \dots & K_0(\partial_{\lambda_N}) \\ K_1(\partial_{\lambda_1}) & \dots & K_1(\partial_{\lambda_N}) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{N-1}(\partial_{\lambda_1}) & \dots & K_{N-1}(\partial_{\lambda_N}) \end{vmatrix} \prod_{j=1}^N \varphi(\lambda_j).$$

Принимая во внимание, что

$$u_k - u_j = \frac{[a(\lambda)]^2}{a(\lambda_j)a(\lambda_k)} \varphi(\lambda) d(\lambda_k, \lambda_j) \quad (4.32)$$

и

$$\frac{\varphi(\lambda)a(\lambda)}{\varphi(\lambda_j)a(\lambda_j)} = \frac{a(\lambda_j)}{a(\lambda)} u_j, \quad (4.33)$$

получим

$$\tilde{Z}_N(\xi_1, \dots, \xi_N) = \prod_{j=1}^N \left[\frac{a(\lambda_j)}{a(\lambda)} \right]^{N-1} \frac{\prod_{j=1}^N u_j^{N-1}}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} (u_k - u_j)} \times \frac{1}{\prod_{j=1}^N \varphi(\lambda_j)} \begin{vmatrix} K_0(\partial_{\lambda_1}) & \dots & K_0(\partial_{\lambda_N}) \\ K_1(\partial_{\lambda_1}) & \dots & K_1(\partial_{\lambda_N}) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{N-1}(\partial_{\lambda_1}) & \dots & K_{N-1}(\partial_{\lambda_N}) \end{vmatrix} \prod_{j=1}^N \varphi(\lambda_j). \quad (4.34)$$

Сравнение с (4.31) показывает, что для завершения доказательства достаточно выражение во второй строке выразить через переменные u_j .

Для этой цели вернемся опять к случаю одной неоднородности. В этом случае формула Изергина–Корепина сводится к выражению

$$Z_N(\lambda_1, \lambda, \dots, \lambda) = \frac{[a(\lambda_1)b(\lambda_1)]^N [a(\lambda)b(\lambda)]^{N(N-1)}}{(N-1)! \prod_{n=0}^{N-2} (n!)^2 [d(\lambda_1, \lambda)]^{N-1}} \begin{vmatrix} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-2} \varphi(\lambda) & \varphi(\lambda_1) \\ \partial_\lambda \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-s} \varphi(\lambda) & \partial_{\lambda_1} \varphi(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_\lambda^{N-1} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{2N-3} \varphi(\lambda) & \partial_{\lambda_1}^{N-1} \varphi(\lambda_1) \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\tilde{Z}_N(\xi_1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{[\varphi(\lambda_1)]^N [d(\lambda_1, \lambda)]^{N-1}} K_{N-1}(\partial_{\lambda_1}) \varphi(\lambda_1).$$

Принимая во внимание, что (4.32) означает соотношение $d(\lambda_1, \lambda) = (u_1 - 1)a(\lambda_1)[a(\lambda)\varphi(\lambda)]^{-1}$ и используя (4.33), получим

$$\tilde{Z}_N(\xi_1, 0, \dots, 0) = \left[\frac{a(\lambda_1)}{a(\lambda)} \right]^{N-1} \left(\frac{u_1}{u_1 - 1} \right)^{N-1} \frac{1}{\varphi(\lambda_1)} K_{N-1}(\partial_{\lambda_1}) \varphi(\lambda_1).$$

Сравнивая последнее выражение с (4.30), находим, что

$$\frac{1}{\varphi(\lambda_j)} K_n(\partial_{\lambda_j}) \varphi(\lambda_j) = \left(\frac{u_j - 1}{u_j} \right)^n h_{n+1}(u_j).$$

В итоге, подставляя эту формулу в (4.34), приходим к формуле (4.31), которая таким образом доказана. \square

Наконец, отметим, что функция $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$, определенная в (4.24), кроме того, что она описывает статистическую сумму s неоднородностями, совпадает, с точностью до простого множителя, с определителем в подынтегральном представлении в (4.22). Это наблюдение будет также использовано ниже при обсуждении эквивалентных интегральных представлений для вероятности образования пустоты.

4.2.3. Симметризация подынтегрального выражения

Подынтегральное выражение представления для вероятности образования пустоты в виде многократного интеграла (4.22) содержит определитель, который антисимметричен относительно перестановок переменных интегрирования z_1, \dots, z_s . В силу этой антисимметрии, вклад в интеграл дает только антисимметричная часть двойного произведения относительно перестановок этих переменных. Задача, таким образом, состоит в том, чтобы вывести из (4.22) новое представление, с симметричным подынтегральным выражением.

Будем использовать параметризацию

$$z_j = \frac{a}{b} \frac{\sin \xi_j}{\sin(\xi_j - 2\eta)} = \omega(\xi_j), \quad \tilde{z}_j = \frac{b}{a} \frac{\sin \xi_j}{\sin(\xi_j + 2\eta)} = \tilde{\omega}(\xi_j) \quad (4.35)$$

где функции $\omega(\varepsilon) = \omega(\varepsilon; \lambda, \eta)$ и $\tilde{\omega}(\varepsilon) = \tilde{\omega}(\varepsilon; \lambda, \eta)$ были введены в (2.54) и (2.59). Замечательным фактом является то, что при выбранной нами параметризации соотношение (4.23) удовлетворено автоматически и поэтому двойное произведение в подынтегральном выражении в (4.22) в точности совпадает с выражением, антисимметричная часть которого была найдена в работе [88]. А именно, используя смешанные обозначения, для антисимметричной части двойного произведения, относительно перестановок переменных z_1, \dots, z_s , имеет место следующее выражение:

$$\begin{aligned} \text{Asym} \prod_{z_1, \dots, z_s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{(\tilde{z}_j - 1)(z_k - 1)}{\tilde{z}_j z_k - 1} &= \frac{1}{s!} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j) \prod_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^s \frac{1}{b^2 z_j z_k - (a^2 + b^2 - c^2) z_j + a^2} \\ &\times \frac{a^{s(s-1)} c^{s(s-2)}}{\prod_{j=1}^s [\sin(\xi_j - 2\eta)]^{s-1}} Z_s(\lambda + \xi_1, \dots, \lambda + \xi_s). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Здесь $Z_s(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ обозначает статистическую сумму частично неоднородной шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки на $s \times s$ решетке; под частично неоднородной имеется ввиду, что веса этой модели даются выражениями (1.6) и (1.7), но со всеми ν_1, \dots, ν_s равными нулю.

Как ясно из обсуждения в предыдущем подразделе, выражение стоящее в последней строчке в (4.36) является некоторым симметричным полиномом по переменным z_1, \dots, z_s , которые определены формулами (4.35). Более точно, используя (4.31), а также формулы (4.35), (4.28), и (2.55), имеет место следующее выражение

$$\frac{Z_s(\lambda + \xi_1, \dots, \lambda + \xi_s)}{\prod_{j=1}^s [\sin(\xi_j - 2\eta)]^{s-1}} = \frac{Z_s}{c^{s(s-1)}} \prod_{j=1}^s \left(\frac{z_j - 1}{u_j} \right)^{s-1} h_{s,s}(u_1, \dots, u_s). \quad (4.37)$$

Здесь $Z_s \equiv Z_s(\lambda, \dots, \lambda)$ и также использованы упрощенные обозначения $a = a(\lambda, 0)$, $b = b(\lambda, 0)$. Кроме того, из (2.54) и (4.28) нетрудно получить явное выражение для u_j в терминах z_j :

$$u_j = -\frac{z_j - 1}{(t^2 - 2t\Delta)z_j + 1}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (4.38)$$

Это формула, кроме того, показывает, что правая часть в (4.37) есть некоторый полином по переменным z_1, \dots, z_s (напомним, что функция $h_{N,s}(u_1, \dots, u_s)$ является симметричным полиномом степени $(N - 1)$ по каждой из переменных). В целом, для антисимметричной

части двойного произведения в (4.22), имеет место следующее выражение:

$$\text{Asym}_{z_1, \dots, z_s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{(\tilde{z}_j - 1)(z_k - 1)}{\tilde{z}_j z_k - 1} = \frac{Z_s}{s! a^{s(s-1)} c^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j) \times \frac{\prod_{j=1}^s [(t^2 - 2t\Delta)z_j + 1]^{s-1} h_{s,s}(u_1, \dots, u_s)}{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s (t^2 z_j z_k - 2t\Delta z_j + 1)}. \quad (4.39)$$

Эта формула завершает решение задачи о симметризации подынтегрального выражения в представлении для вероятности образования пустоты.

Наконец, полезно отметить, что рассмотренная здесь задача об нахождении антисимметричной части может быть сформулирована в следующем виде:

Лемма 4.3. *Имеет место соотношение*

$$\text{Asym}_{u_1, \dots, u_s} \left(\prod_{j=1}^s u_j^{j-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (1 - 2\Delta t u_j + t^2 u_j u_k) \right) = \frac{Z_s}{s! a^{s(s-1)} c^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (u_k - u_j) h_{s,s}(u_1, \dots, u_s), \quad (4.40)$$

где Z_s есть статистическая сумма однородной шестивершинной модели на $s \times s$ решетке с весами a, b, c , и $h_{s,s}(u_1, \dots, u_s)$ — функция (4.24), построенная из производящих функций граничных корреляционных функций этой модели $h_1(u), \dots, h_s(u)$. Параметр Δ в (4.40) связан с весами формулой (1.2), и $t \equiv b/a$.

4.2.4. Эквивалентные интегральные представления

Вернемся к интегральному представлению (4.22) для вероятности образования пустоты. Наша задача будет обсудить эквивалентные интегральные представления.

Во-первых, перепишем (4.22) используя наблюдение, что определитель в подынтегральном выражении выражается через функцию $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$, определенной в (4.24). В использовании этой функции, первое полученное представление записывается в виде:

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^s}{(2\pi i)^s} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1]^{s-j}}{z_j^r (z_j - 1)^{s-j+1}} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{z_j - z_k}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \times h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) dz_1 \dots dz_s. \quad (4.41)$$

Напомним, что C_0 обозначает простой замкнутый контур обходящий точку $z = 0$ против часовой стрелки и лежащий в ее малой окрестности (не содержащий других сингулярностей подынтегрального выражения, кроме как полюса в точке $z = 0$).

Во-вторых, симметризация подынтегрального выражения относительно перестановок переменных интегрирования z_1, \dots, z_s позволяет написать еще одно представление, которое и является одним из основных результатов настоящей главы.

Теорема 4.4. *Вероятность образования пустоты в шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки допускает представление*

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{s(s+1)/2} Z_s}{s! a^{s(s-1)} c^s (2\pi i)^s} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2t\Delta)z_j + 1]^{s-1}}{z_j^r (z_j - 1)^s} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s \frac{1}{t^2 z_j z_k - 2t\Delta z_j + 1} \\ \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j)^2 h_{s,s}(u_1, \dots, u_s) h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) dz_1 \cdots dz_s, \quad (4.42)$$

где u_1, \dots, u_s даются формулой (4.28), а функции $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$ определены в (4.24).

Напомним, что утверждение теоремы нами было получено в несколько этапов. На первом этапе, описанном в предыдущем разделе, для вероятности образования пустоты было выведено, методом основанном на использовании алгебры матрицы монодромии, представление (4.15). В настоящем разделе, это представление вначале было переписано как интегральное представление (4.22), в силу леммы 4.1. Наконец, использование связи функций (4.24) с статистической суммой частично неоднородной модели, описываемое предложением 4.2, позволяет использовать формулу симметризации (4.36) к подынтегральному выражению в (4.22). Используемая процедура симметризации на этом, заключительном, этапе вывода формулы (4.42) сформулирована в лемме 4.3. Отметим также, что связь представлений (4.41) и (4.42) есть результат тождества

$$\text{Asym}_{z_1, \dots, z_s} \left(\prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1]^{s-j}}{(z_j - 1)^{s-j}} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{t^2 z_j z_k - 2t\Delta z_j + 1} \right) = \frac{Z_s}{s! a^{s(s-1)} c^s} \\ \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j) \prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2t\Delta)z_j + 1]^{s-1}}{(z_j - 1)^{s-1}} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s \frac{1}{t^2 z_j z_k - 2t\Delta z_j + 1} h_{s,s}(u_1, \dots, u_s), \quad (4.43)$$

которое следует из (4.23) и (4.39), а также (4.28).

Наконец, в-третьих, в силу (4.31), из представления (4.42) (или из представления (4.22), с использованием (4.36)) можно получить еще одно представление, в котором подынтегральное выражение записано через статистические суммы. Действительно, переменные z_j и u_j , $j = 1, \dots, s$, определенные формулами (4.35) и (4.28), выражаются через функции $\omega(\xi)$ и $\gamma(\xi)$, соответственно. Учитывая, что эти функции связаны соотношением $\gamma(\xi) = \omega(-\lambda + \eta - \xi)$, представляется естественным перейти в интеграле к переменным ξ_1, \dots, ξ_s , и, кроме того, воспользоваться следующим соотношением, которое следует из (4.31):

$$h_{N,s}(\omega(\xi_1), \dots, \omega(\xi_s)) = \frac{Z_N(\eta - \xi_1, \dots, \eta - \xi_s, \lambda, \dots, \lambda)}{Z_N(\lambda, \dots, \lambda)} \prod_{j=1}^s \left[\frac{a(\lambda)}{a(\eta - \xi_j)} \right]^{N-1}.$$

В результате, приходим к следующему эквивалентному представлению для вероятности образования пустоты:

$$\begin{aligned}
F_N^{(r,s)} &= \frac{(-1)^{Ns+s(s+1)/2} a^{(N-r)s} b^{rs}}{s!(2\pi i)^s c^s Z_N} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \prod_{1 \leq j < k \leq s} [\sin(\xi_k - \xi_j)]^2 \\
&\times \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s \frac{1}{\sin(\xi_j - \xi_k + 2\eta)} \prod_{j=1}^s \frac{1}{[\sin(\xi_j - 2\eta)]^{N-r} [\sin(\xi_j + \lambda - \eta)]^s (\sin \xi_j)^r} \\
&\times Z_N(\eta - \xi_1, \dots, \eta - \xi_s, \lambda, \dots, \lambda) Z_s(\lambda + \xi_1, \dots, \lambda + \xi_s) d\xi_1 \cdots d\xi_s. \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Эта формула интересна тем, что она напоминает представления, которые возникают при вычислении корреляционных функций в квантовых спиновых цепочках, см., например, [3, 21, 88, 89]. Отличие от спиновых цепочек, однако, заключается в присутствии в подынтегральном выражении в (4.44) статистической суммы частично неоднородной модели Z_N , с s сдвинутыми аргументами. В то время как присутствие второй статистической суммы, Z_s , есть общее свойство всех таких представлений, и обусловлено алгеброй Янга-Бакстера (и связано, как уже было показано выше, с симметризацией определенных выражений), первая статистическая сумма, Z_N , обусловлена спецификой граничных условий (граничными условиями доменной стенки), и конкретной рассматриваемой корреляционной функцией (вероятностью образования пустоты).

В заключение этого раздела вернемся к формуле (4.42). Это представление может показаться не вполне явным, поскольку существенно основано на использовании производящей функции $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$. Тем не менее, как это обсуждается в Главе 5, именно это представление оказывается наиболее полезным для изучения задачи об арктической кривой модели. В случае весов удовлетворяющих условию свободных фермионов функция $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$ явно вычисляется. В Главе 6 этот факт будет использован для дальнейшего вывода из (4.42) различных представлений для вероятности образования пустоты, которые, в свою очередь, позволяют полностью решить задачу об асимптотическом разложении в термодинамическом (скейлиговом) пределе.

4.3. Вероятность конфигурации ряда

В этом разделе мы рассматриваем корреляционную функцию описывающую конфигурацию стрелок выделенного ряда решетки, так называемую вероятность конфигурации ряда. Эта корреляционная функция интересна тем, что из нее могут быть получены различные локальные и нелокальные корреляционные функции, в частности, вероятность образования

пустоты.

4.3.1. Определение вероятности конфигурации ряда

Чтобы дать определение вероятности конфигурации ряда, полезно отметить вначале, что в шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки все конфигурации таковы, что на s -ом ряду (т.е. на N вертикальных ребрах расположенных между s -ой и $(s+1)$ -ой горизонтальными прямыми, нумеруемыми сверху, по нашим соглашениям) в точности s стрелок направлены вверх. Таким образом, естественно исследовать вероятность нахождения заданной конфигурации стрелок на заданном ряду, или, кратко, вероятность конфигурации ряда. А именно, мы обозначим через $H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)}$ вероятность того, что s стрелок направленных вверх s -го ряда находятся в точности в позициях r_1, \dots, r_s (нумеруемых справа), см. Рис. 4.2.

Поскольку вероятность конфигурации ряда описывает типичные конфигурации модели, эта величина может быть использована как строительный блок для вычисления других корреляционных функций. Например, суммируя подходящим образом по позициям стрелок направленных вверх, можно воспроизвести представления для вероятности образования пустоты полученные в работе [32], и которые детально обсуждались выше в настоящей главе.

Чтобы вычислить вероятность конфигурации ряда, разделим начальную $N \times N$ решетку на две меньшие решетки: верхнюю решетку, с s горизонтальными и N вертикальными прямыми, и нижнюю решетку, с $N - s$ горизонтальными и N вертикальными прямыми. Будем обозначать через $Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}}$ и $Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}}$ статистические суммы шестивершинной модели на верхней и нижней подрешетках, соответственно (см. Рис. 4.2). Вероятность конфигурации ряда существенно дается как произведение статистических сумм шестивершинной модели на этих двух меньших решетках,

$$H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)} = \frac{Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}} Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}}}{Z_N}. \quad (4.45)$$

Таким образом, нашей основной задачей в настоящей работе является вывод некоторых полезных представлений для статистических сумм $Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}}$ и $Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}}$. Более точно, мы предъядим представления через многократные (s -кратные) интегралы для этих величин.

В терминах объектов квантового метода обратной задачи статистическая сумма на верхней, $s \times N$, подрешетке может быть записана, аналогично представлению (2.4), следующим образом:

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}} = \langle \Downarrow_{1, \dots, N}^{\text{H}} | \tau_{r_s}^- \cdots \tau_{r_2}^- \tau_{r_1}^- \prod_{k=1}^s C_{1, \dots, N}^{\text{H}}(\nu_k) | \Downarrow_{1, \dots, N}^{\text{H}} \rangle, \quad (4.46)$$

где τ_j^- ($j = 1, \dots, N$), как и выше, обозначает матрицы Паули действующие в пространствах \mathcal{V}_j .

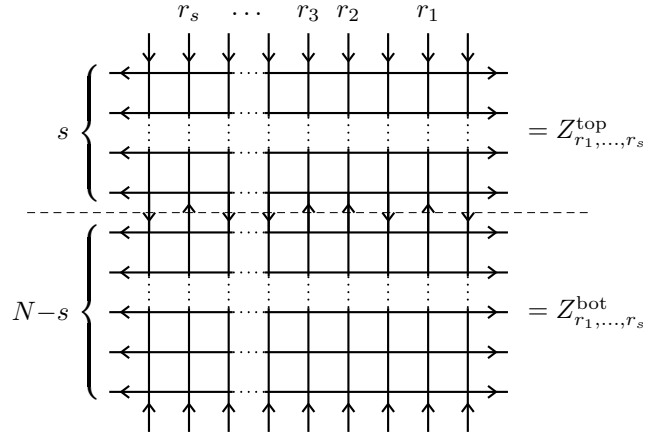


Рис. 4.2. Конфигурация ряда с s стрелками направленными вверх, лежащими между s -ой и $(s+1)$ -ой горизонтальными прямыми сверху, и результирующие статистические суммы верхней и нижней частей оригинальной решетке.

Для того чтобы записать статистическую сумму нижней, $(N-s) \times N$, подрешетки как матричный элемент, определим векторы:

$$|\uparrow_{s+1, \dots, N}^V\rangle = \bigotimes_{k=s+1}^N |\uparrow_k^V\rangle, \quad |\downarrow_{s+1, \dots, N}^V\rangle = \bigotimes_{k=s+1}^N |\downarrow_k^V\rangle.$$

Эти векторы являются «все спины вверх» и «все спины вниз» состояниями пространства $\mathcal{H}_{s+1, \dots, N}$. Соответственно, рассмотрим матричные элементы «укороченной» вертикальной матрицы монодромии определенной в виде произведения $L_{\alpha, N}(\lambda_\alpha, \nu_N) \cdots L_{\alpha, s+1}(\lambda_\alpha, \nu_{s+1})$. Эти матричные элементы являются операторами $A_{s+1, \dots, N}^V(\lambda_\alpha) = A_{s+1, \dots, N}^V(\lambda_\alpha; \nu_{s+1}, \dots, \nu_N)$, и т.д., действующими в пространстве $\mathcal{H}_{s+1, \dots, N}$. Статистическая сумма $Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}}$ может быть записана в виде

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}} = \langle \downarrow_{s+1, \dots, N}^V | \prod_{\alpha=r_s+1}^N B(\lambda_\alpha) \cdot A(\lambda_{r_s}) \cdot \prod_{\alpha=r_{s-1}+1}^{r_s-1} B(\lambda_\alpha) \\ \times \cdots \times A(\lambda_{r_2}) \prod_{\alpha=r_1+1}^{r_2-1} B(\lambda_\alpha) \cdot A(\lambda_{r_1}) \cdot \prod_{\alpha=1}^{r_1-1} B(\lambda_\alpha) | \uparrow_{s+1, \dots, N}^V \rangle, \quad (4.47)$$

где $A(\lambda) := A_{s+1, \dots, N}^V(\lambda)$ и $B(\lambda) := B_{s+1, \dots, N}^V(\lambda)$.

4.3.2. Статистическая сумма на верхней подрешетке

Матричный элемент в (4.46) может быть формально вычислен (как функция $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и ν_1, \dots, ν_s) используя эквивалентность алгебраической и координатной версий анзатца Бете. Эта эквивалентность была впервые доказана, как вспомогательный результат, в работе [90] (см. приложение D указанной работы); см. также книгу [2], главу VII.

Для простоты, мы начнем сразу со случая когда параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ приравнены к одному и тому же значению λ , однако параметры ν_1, \dots, ν_s остаются произвольными (и не равными друг другу). Формула (D.4) работы [90] в этом случае означает, что

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}} &= c^s \prod_{k=1}^s [a(\lambda, \nu_k)]^{N-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{t_k - t_j} \\ &\times \sum_{P \in \Omega_s} (-1)^{[P]} \prod_{j=1}^s t_{P_j}^{r_j-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (t_{P_j} t_{P_k} - 2\Delta t_{P_j} + 1), \end{aligned} \quad (4.48)$$

где

$$t_k = \frac{b(\lambda, \nu_k)}{a(\lambda, \nu_k)},$$

и сумма вычисляется по элементам симметрической группы Ω_s , т.е. перестановкам $P : 1, \dots, s \mapsto P_1, \dots, P_s$, где $[P]$ обозначают четность P . Очевидно, выражение стоящее во второй строке в (4.48) является в точности подстановкой для s -частичной волновой функции координатного анзаца Бете.

Для того, чтобы исследовать однородный предел выражения (4.48) для остального набора параметров, преобразуем сначала немного это выражение. Положим $t_k = t + x_k$ ($k = 1, \dots, s$), где t является произвольным параметром, и новые параметры x_1, \dots, x_s все различны. Используя тот факт, что для функции $f(x)$, регулярной в окрестности точки $x = t$ всегда можно написать $f(t + x) = \exp(x \partial_z) f(t + z)|_{z=0}$, приведем (4.48) к виду

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}} &= c^s \prod_{k=1}^s [a(\lambda, \nu_k)]^{N-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{x_k - x_j} \det_{1 \leq j, k \leq s} \{ \exp(x_j \partial_{z_k}) \} \\ &\times \prod_{j=1}^s (t + z_j)^{r_j-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} [(t + z_j)(t + z_k) - 2\Delta(t + z_j) + 1] \Big|_{z_1, \dots, z_s=0} \end{aligned} \quad (4.49)$$

что представляет попросту эквивалентный способ записи формулы (4.48).

Рассмотрим теперь однородный предел по параметрам ν_1, \dots, ν_s . Поскольку t произвольно, мы можем выполнить этот предел так, чтобы $t_1 = \dots = t_s = t$, и положить $t = b/a$, где a и b являются весами однородной модели, см. (1.7). Таким образом, мы должны рассмотреть (4.48) при $x_1 = \dots = x_s = 0$. Этот предел в (4.49) может быть вычислен при помощи соотношения

$$\frac{\det_{1 \leq j, k \leq s} \{ \exp(x_j \partial_{z_k}) \}}{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (x_k - x_j)} \Big|_{x_1, \dots, x_s=0} = \det_{1 \leq j, k \leq s} \left\{ \frac{1}{(j-1)!} \partial_{z_k}^{j-1} \right\}.$$

Выражая значения производных при $z_1 = \dots = z_s = 0$ как вычеты в полюсах, получим представление многократным интегралом

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}} &= c^s a^{s(N-1)} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \prod_{j=1}^s (t + z_j)^{r_j-1} \det_{1 \leq j, k \leq s} \{ z_k^{-j} \} \\ &\times \prod_{1 \leq j < k \leq s} [(t + z_j)(t + z_k) - 2\Delta(t + z_j) + 1] \frac{d^s z}{(2i\pi)^s}. \end{aligned}$$

Здесь C_0 обозначает малый, простой, замкнутый, положительно ориентированный контур обходящий точку $z = 0$. Вычисляя определитель Вандермонда и выполняя замену $z_k \mapsto w_k = (z_k + t)/t$, мы окончательно получим:

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}} &= c^s a^{s(N-1)} \prod_{j=1}^s t^{r_j-j} \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^{r_j-1}}{(w_j-1)^s} \\ &\times \prod_{1 \leq j < k \leq s} [(w_j - w_k)(t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1)] \frac{d^s w}{(2\pi i)^s}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Здесь C_1 обозначает замкнутый контур обходящий точку $z = 1$.

Формулы (4.48) и (4.50) могут быть также выведены другими методами (т.е. без использования эквивалентности алгебраического и координатного анзацев Бете), например, начиная с формулировки в терминах вертикальной матрицы монодромии для $Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{top}}$, аналогичной (4.47) для $Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}}$, и, далее, применяя технику работы [91] для вычисления матричного элемента. Также упомянем, что формула (4.49), в другой форме и для специальных значениях t и Δ , была обнаружена в контексте перечислительной комбинаторики в работе [92].

4.3.3. Статистическая сумма на нижней подрешетке

Принимая во внимание коммутативность B -операторов и используя соотношение (2.10), нетрудно получить, в обычном стиле вычислений в алгебраическом анзаце Бете (подробности см., например, в [2]), соотношение:

$$A(\lambda_r) \prod_{\beta=1}^{r-1} B(\lambda_\beta) = \sum_{\alpha=1}^r \frac{g(\lambda_\alpha, \lambda_r)}{f(\lambda_\alpha, \lambda_r)} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^r B(\lambda_\beta) A(\lambda_\alpha).$$

Используя это соотношение и принимая во внимание, что

$$A_{s+1, \dots, N}^V(\lambda) |\uparrow_{s+1, \dots, N}^V\rangle = \prod_{k=s+1}^N a(\lambda, \nu_k) |\uparrow_{s+1, \dots, N}^V\rangle,$$

а также используя (2.3), мы получим

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}} &= \sum_{\alpha_1=1}^{r_1} \sum_{\substack{\alpha_2=1 \\ \alpha_2 \neq \alpha_1}}^{r_2} \dots \sum_{\substack{\alpha_s=1 \\ \alpha_s \neq \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}}}^{r_s} \prod_{j=1}^s \prod_{k=s+1}^N a(\lambda_{\alpha_j}, \nu_k) \prod_{j=1}^s \frac{g(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{r_j})}{f(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{r_j})} \\ &\times \prod_{\substack{\beta_1=1 \\ \beta_1 \neq \alpha_1}}^{r_1} f(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_1}) \prod_{\substack{\beta_2=1 \\ \beta_2 \neq \alpha_1, \alpha_2}}^{r_2} f(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_2}) \dots \prod_{\substack{\beta_s=1 \\ \beta_s \neq \alpha_1, \dots, \alpha_s}}^{r_s} f(\lambda_{\alpha_s}, \lambda_{\beta_s}) \\ &\times Z_{N-s}(\lambda_{\bar{\alpha}_1}, \dots, \lambda_{\bar{\alpha}_{N-s}}; \nu_{s+1}, \dots, \nu_N), \end{aligned} \quad (4.51)$$

где $\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{N-s}\} := \{1, \dots, N\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$.

Для дальнейшего удобно ввести функцию:

$$v_r(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha=r+1}^N d(\lambda_\alpha, \lambda) \prod_{\alpha=1}^{r-1} e(\lambda_\alpha, \lambda)}{\prod_{k=s+1}^N b(\lambda, \nu_k)},$$

где $d(\lambda, \lambda') := \sin(\lambda - \lambda')$ и $e(\lambda, \lambda') := \sin(\lambda - \lambda' + 2\eta)$. Выражая функции $f(\lambda, \lambda')$ и $g(\lambda, \lambda')$ фигурирующие в (4.51) в терминах функций $d(\lambda, \lambda')$ и $e(\lambda, \lambda')$, и подставляя детерминантную формулу Изергина–Корепина, см. (1.9), для статистической суммы стоящей в (4.51), придем к выражению:

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}} &= \frac{\prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=s+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) b(\lambda_\alpha, \nu_k)}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha) \prod_{s+1 \leq j < k \leq N} d(\nu_j, \nu_k)} \\ &\quad \times \sum_{\alpha_1}^{r_1} \sum_{\substack{\alpha_2=1 \\ \alpha_2 \neq \alpha_1}}^{r_2} \cdots \sum_{\substack{\alpha_s=1 \\ \alpha_s \neq \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}}}^{r_s} (-1)^{\sum_{j=1}^s (\alpha_j - 1) - \sum_{1 \leq j < k \leq s} \chi(\alpha_k, \alpha_j)} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^s v_{r_j}(\lambda_{\alpha_j}) \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{e(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{\alpha_k})} \det_{1 \leq j, k \leq N-s} \{\varphi(\lambda_{\bar{\alpha}_j}, \nu_{s+k})\}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Здесь $\chi(\beta, \alpha) = 1$ если $\beta > \alpha$, и $\chi(\beta, \alpha) = 0$ в противном случае.

Очевидно, многократная сумма в (4.52) напоминает разложение Лапласа некоторого $N \times N$ определителя. Это также согласуется с тем фактом, что, поскольку $v_r(\lambda_\alpha) = 0$ ($\alpha = r+1, \dots, N$), все суммирования в (4.52) могут быть распространены вплоть до значения N . Для того, чтобы получить эту детерминантную формулу, положим $\lambda_\alpha = \lambda + \xi_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, N$), где λ некоторый произвольный параметр и параметры ξ_1, \dots, ξ_N все различны. Вновь используя тот факт, что для функции $f(\xi)$, регулярной в окрестности точки $\xi = \lambda$, можно написать $f(\lambda + \xi) = \exp(\xi \partial_\varepsilon) f(\lambda + \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$, приведем (4.52) к виду

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}} &= \frac{\prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=s+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) b(\lambda_\alpha, \nu_k)}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha) \prod_{s+1 \leq j < k \leq N} d(\nu_j, \nu_k)} \\ &\quad \times \begin{vmatrix} \exp(\xi_1 \partial_{\varepsilon_1}) & \cdots & \exp(\xi_1 \partial_{\varepsilon_s}) & \varphi(\lambda_1, \nu_{s+1}) & \cdots & \varphi(\lambda_1, \nu_N) \\ \exp(\xi_2 \partial_{\varepsilon_1}) & \cdots & \exp(\xi_2 \partial_{\varepsilon_s}) & \varphi(\lambda_2, \nu_{s+1}) & \cdots & \varphi(\lambda_2, \nu_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(\xi_N \partial_{\varepsilon_1}) & \cdots & \exp(\xi_N \partial_{\varepsilon_s}) & \varphi(\lambda_N, \nu_{s+1}) & \cdots & \varphi(\lambda_N, \nu_N) \end{vmatrix} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^s v_{r_j}(\lambda + \varepsilon_j) \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{e(\lambda + \varepsilon_j, \lambda + \varepsilon_k)} \Big|_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s=0}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Подчеркнем, что это выражение справедливо для неоднородной модели.

Рассмотрим теперь однородный предел. Будем рассматривать параметр λ как параметр весов однородной модели, так что параметры ξ_1, \dots, ξ_N и ν_{s+1}, \dots, ν_N должны быть устремлены к нулю в этом пределе. Процедура взятия предела может быть выполнена следуя работе

[48] и она детально изложена в работе [32]. В результате, мы получим

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}} = \frac{(ab)^{N(N-s)}}{\prod_{j=1}^{N-s-1} j! \prod_{k=1}^{N-1} k!} \begin{vmatrix} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-s-1} \varphi(\lambda) & 1 & \dots & 1 \\ \partial_\lambda \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-s} \varphi(\lambda) & \partial_{\varepsilon_1} & \dots & \partial_{\varepsilon_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_\lambda^{N-1} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{2N-s-2} \varphi(\lambda) & \partial_{\varepsilon_1}^{N-1} & \dots & \partial_{\varepsilon_s}^{N-1} \end{vmatrix} \times \prod_{j=1}^s \frac{(\sin \varepsilon_j)^{N-r_j} [\sin(\varepsilon_j - 2\eta)]^{r_j-1}}{[\sin(\varepsilon_j + \lambda - \eta)]^{N-s}} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{\sin(\varepsilon_j - \varepsilon_k + 2\eta)} \Bigg|_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s=0}, \quad (4.54)$$

где в записи определителя мы изменили порядок вертикальных рядов, по сравнению с (4.53).

Для того, чтобы выразить (4.54) через многократный интеграл, мы сначала преобразуем $N \times N$ детерминантное представление (4.54) в $s \times s$ детерминантное, задаваемое в терминах ортогональных полиномов $K_n(x)$ определенных в (2.56),

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}} = \frac{Z_N}{a^{\frac{s(2N-s+1)}{2}} b^{\frac{s(s-3)}{2}} c^s} \left(\frac{a}{b}\right)^{r_1 + \dots + r_s} \det_{1 \leq j, k \leq s} \{K_{N-s+j-1}(\partial_{\varepsilon_k})\} \times \prod_{j=1}^s \frac{[\omega(\varepsilon_j)]^{N-r_j-s+j} [\tilde{\omega}(\varepsilon_j)]^{s-j}}{[\omega(\varepsilon_j) - 1]^{N-s}} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{\tilde{\omega}(\varepsilon_j) \omega(\varepsilon_k) - 1} \Bigg|_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s=0}. \quad (4.55)$$

В выводе этой формулы мы также использовали (1.12), чтобы выразить подходящий множитель через статистическую сумму Z_N . Используя лемму 4.1 и определение (4.24) для производящей функции $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$, представление (4.55) переписывается как следующий многократный интеграл:

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}} = Z_N \frac{\prod_{j=1}^s t^{j-r_j}}{a^{s(N-1)} c^s} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \prod_{j=1}^s \frac{1}{z_j^{r_j}} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{z_k - z_j}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) \frac{d^s z}{(2\pi i)^s}. \quad (4.56)$$

Эта формула и есть желаемое представление для $Z_{r_1, \dots, r_s}^{\text{bot}}$, справедливое для однородной модели.

4.3.4. Связь с вероятностью образования пустоты

Важном примером корреляционной функции, которая может быть построена из вероятности конфигурации ряда, является вероятность образования пустоты. Как и в [32], будем обозначать через $F_N^{(r,s)}$ вероятность того, что стрелки на первых s горизонтальных ребрах (нумеруемых, как обычно, сверху) лежащих между r -ой и $(r+1)$ -ой вертикальными прямыми (нумеруемыми, как обычно, справа) все направлены влево. Эквивалентно, в силу граничных условий доменной стенки и правила льда, мы можем определить эту величину как вероятность того, что последние $N-r$ вертикальных стрелок расположенные между s -ой и $(s+1)$ -ой

горизонтальными прямыми все направлены вниз, и следовательно (см. также Рис. 4.2), имеем соотношение:

$$F_N^{(r,s)} = \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_s \leq r} H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)}. \quad (4.57)$$

Нашей целью здесь будет исследовать задачу выполнения этого суммирования для вероятности конфигурации ряда, даваемой (4.45), (4.50) и (4.56), чтобы воспроизвести представления многократными интегралами для вероятности образования пустоты (4.41) и (4.42).

Обсудим теперь представление для вероятности образования пустоты получаемое из (4.45), (4.50) и (4.56), согласно соотношению (4.57). Прямая подстановка дает

$$F_N^{(r,s)} = \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \prod_{j=1}^s \frac{1}{(w_j - 1)^s} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_s \leq r} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^{r_j-1}}{z_j^{r_j}} \\ \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{(w_j - w_k)(t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1)(z_k - z_j)}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) \frac{d^s z}{(2\pi i)^s}, \quad (4.58)$$

так что, вычисляя многократную сумму и интегрируя по одному из наборов переменных (например, по w_1, \dots, w_s), мы должны воспроизвести, с точностью до симметризации подынтегрального выражения, s -кратное интегральное представление (4.42).

Чтобы исследовать эту задачу, рассмотрим вначале многократную сумму в (4.58). Замечая, что интеграл по переменной z_j равен нулю, если $r_j \leq 0$, поскольку в этом случае подынтегральное выражение регулярно в точке $z_j = 0$, мы можем в (4.58) заменить сумму по значениям $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_s \leq r$ суммой по значениям $-\infty < r_1 < r_2 < \dots < r_s \leq r$. Тогда, обозначая $X_j = z_j/w_j$, суммирование может быть выполнено с помощью тождества

$$\sum_{-\infty < r_1 < r_2 < \dots < r_s \leq r} \prod_{j=1}^s \frac{1}{X_j^{r_j}} = \prod_{j=1}^s \frac{1}{X_j^{r-s+j} (1 - \prod_{l=1}^j X_l)},$$

которое может быть легко проверено разложением знаменателей в правой части в ряды Тейлора. В результате, получим, что (4.58) сводится к выражению:

$$F_N^{(r,s)} = \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^r}{(w_j - 1)^s z_j^{r-s+j} (\prod_{l=1}^j w_l - \prod_{l=1}^j z_l)} \\ \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{(w_j - w_k)(t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1)(z_k - z_j)}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \quad (4.59)$$

и нам осталось выполнить s -кратное интегрирование.

Будем выполнять интегрирование по переменным w_1, \dots, w_s в (4.59). Для этого рассмотрим эквивалентный интеграл, у которого подынтегральное выражение полностью симметрично относительно перестановок этих переменных. Определим функцию

$$\Phi_s(w_1, \dots, w_s; z_1, \dots, z_s) = \left(\prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{w_k - w_j} \right) \text{Asym}_{w_1, \dots, w_s} \left[\frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1)}{\prod_{j=1}^s (\prod_{l=1}^j w_l - \prod_{l=1}^j z_l)} \right].$$

Интегрирование по переменным w_1, \dots, w_s приводит к результату

$$\oint_{C_1} \cdots \oint_{C_1} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^r}{(w_j - 1)^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (w_j - w_k)^2 \Phi_s(w_1, \dots, w_s; z_1, \dots, z_s) \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \\ = (-1)^{s(s-1)/2} s! \Phi_s(1, \dots, 1; z_1, \dots, z_s),$$

который может быть легко получен, замечая, что при вычислении вычетов достаточно дифференцировать только множитель $\prod_{j < k} (w_j - w_k)^2$.

Окончательно, желаемый результат для вероятности образования пустоты сводится к доказательству тождества:

$$s! \operatorname{Asym}_{z_1, \dots, z_s} \left[\Phi_s(1, \dots, 1; z_1, \dots, z_s) \prod_{1 \leq j < k \leq s} [z_j(t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1)] \right] \\ = \frac{(-1)^{s(s+1)/2}}{\prod_{j=1}^s (z_j - 1)} \operatorname{Asym}_{z_1, \dots, z_s} \left[\prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1](t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1)}{(z_j - 1)} \right]. \quad (4.60)$$

Это тождество должно быть использовано совместно с тождеством (4.43), чтобы воспроизвести (4.42). Оказывается, что тождество (4.60) весьма трудно доказать непосредственно, и в настоящее время нам удалось лишь проверить его с помощью компьютерных вычислений для небольших значений s . Отметим, что весьма похожие тождества обсуждались в [93–95].

В заключение, мы ввели и вычислили нелокальную корреляционную функцию шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки, — вероятность конфигурации ряда. Она дается в виде произведения двух сомножителей, которые могут быть рассмотрены как статистические суммы на верхней и нижней подрешетках начальной решетки (см. Рис. 4.2). Мы выразили эти статистические суммы через многократные интегралы, см. (4.50) и (4.56). Вероятность конфигурации ряда может быть использована для вычисления других корреляционных функций, при условии что могут быть выполнены суммирования, аналогичные суммированию присутствующему в (4.57). Чтобы проиллюстрировать это, мы рассмотрели задачу воспроизведения известного результата для вероятности образования пустоты. Мы показали, что в этом случае задача сводится к тождеству (4.60). Прямое доказательство этого тождества, к дополнению к непрямому, следующему из известного равенства между (4.42) и (4.58), может оказаться полезным для вычисления других корреляционных функций.

Арктическая кривая шестивершинной модели и предельная форма матриц чередующихся знаков

Цель настоящей главы — дать вывод арктической кривой шестивершинной модели с граничными условиями типа стенки. Основным объектом исследования является представление для вероятности образования пустоты в терминах многократного контурного интеграла. Вывод арктической кривой основан на гипотезе конденсации решений уравнений седловой точки для этого представления, а именно, что арктическая кривая есть уравнение на параметры многократного интеграла, при котором почти все решения системы уравнений седловой точки конденсируются в одно, известное, значение. Гипотеза конденсации основана на скачкообразном (в виде функции Хевисайда) поведении вероятности образования пустоты в термодинамическом пределе при переходе из области разупорядочивания глубоко внутри решетки к области сегнетоэлектрического порядка у угла (границы) решетки. Уравнение арктической кривой получено в параметрическом виде; в ситуации общего положения арктическая кривая является трансцендентной (не алгебраической) кривой. Рассмотрены различные частные случаи, при которых эта кривая является алгебраической, также в контексте ее интерпретации как предельной формы матриц чередующихся знаков. Глава основана на результатах автора опубликованных в работах [31, 33, 35–37].

5.1. Разделение фаз и свойства вероятности образования пустоты

В этом разделе рассматриваются некоторые общие свойства арктической кривой (кривой разделения областей разупорядочивания и сегнетоэлектрического порядка). Обсуждаются некоторые элементы подхода к ее выводу, основанные на использовании представления для вероятности образования пустоты в терминах многократного контурного интеграла.

5.1.1. Разделение фаз и арктическая кривая

Шестивершинная модель может демонстрировать разделение фаз при достаточно широком выборе фиксированных граничных условий [96]. Как уже упоминалось в разделе 1.2.4, явления разделения фаз обусловлены правилом льда, которое может индуцировать макроскопически большие области порядка внутри решетки, если, например, граничные условия выбраны согласованными с сегнетоэлектрическим порядком, а параметры модели

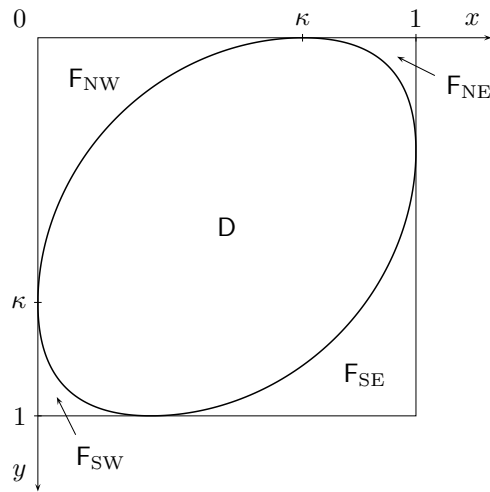


Рис. 5.1. Четыре области сегнетоэлектрического порядка и одна область разупорядочивания в скейлинговом пределе, в случае модели в разупорядоченной фазе.

соответствуют разупорядоченной фазе.

При обсуждении явлений пространственного разделения фаз важно помнить, что все эти явления имеют смысл только в скейлинговом пределе. А именно, речь идет о термодинамическом пределе, который должен выполняться как непрерывный предел, при котором число как вертикальных и так и горизонтальных линий стремиться к бесконечности, а расстояние между ними стремиться к нулю, причем линейный размер всей решетки предполагается фиксированным.

Для шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки заданной по определению на $N \times N$ решетке, нужный предел достигается, когда $N \rightarrow \infty$, а решетка масштабируется на квадрат с длиной стороны 1. Типичные конфигурации ограничены граничными условиями таким образом, что имеют макроскопические области сегнетоэлектрического порядка около границ. Необходимо отметить, что современное понимание явлений разделения фаз в модели в многом основано на результатах численных симуляций случайных конфигураций модели [59, 60, 97–100]; существуют также теоретические обоснования этого рода явлений, основанные на вариационном принципе [14, 101–104].

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства арктической кривой — кривой разделения областей разупорядочивания и сегнетоэлектрического порядка, а также введем некоторые обозначения. Здесь мы приведем рассуждения на примере весов соответствующих разупорядоченной фазе; эти же рассуждения применимы также и для весов в антисегнетоэлектрической фазе, с точностью до переопределения параметров и факта существования еще одной кривой разделения фаз (см. комментарии ниже).

В случае разупорядоченной фазы, имеются пять областей в скейлинговом пределе:

четыре области сегнетоэлектрического порядка $F_{NW}, F_{NE}, F_{SE}, F_{SW}$ в четырех углах квадрата, и одна область разупорядочивания D в центре квадрата, см. Рис. 5.1. Кривая, отделяющая область разупорядочивания является некоторой гладкой кривой \mathcal{A} , называемой арктической кривой. Арктическая кривая и единичный квадрат имеют четыре точки касания, по одной на сторону квадрата. Арктическая кривая состоит из четырех кривых (дуг),

$$\mathcal{A} = \Gamma_{NW} \cup \Gamma_{NE} \cup \Gamma_{SE} \cup \Gamma_{SW},$$

где Γ_i отделяет область F_i ($i = NW, NE, SE, SW$) от внутренней области разупорядочивания D .

Чтобы описать, например, кривую Γ_{NW} можно рассмотреть функцию $\Upsilon(x, y; \lambda)$ где x и y координаты в скейлинговом пределе и λ стандартный параметр весов,

$$\Gamma_{NW} : \Upsilon(x, y; \lambda) = 0, \quad x, y \in [0, \kappa].$$

Необходимо отметить, что явный вид функции $\Upsilon(x, y; \lambda)$ существенно зависит от значения параметра Δ . В силу симметрий модели и решетки с граничными условиями типа доменной стенки, по заданной функции $\Upsilon(x, y; \lambda)$ строятся все остальные части арктической кривой. В силу кроссинг-симметрии

$$\Gamma_{NE} : \Upsilon(1 - x, y; \pi - \lambda) = 0, \quad x \in [1 - \kappa, 1], \quad y \in [0, \kappa].$$

Применяя преобразования отражения относительно диагонали, имеем

$$\Gamma_{SE} : \Upsilon(1 - x, 1 - y; \lambda) = 0, \quad x, y \in [1 - \kappa, 1].$$

Комбинирование преобразований кроссинг-симметрии и отражения относительно диагонали дает

$$\Gamma_{SW} : \Upsilon(x, 1 - y; \pi - \lambda) = 0, \quad x \in [0, \kappa], \quad y \in [1 - \kappa, 1].$$

Таким образом, функция $\Upsilon(x, y; \lambda)$ полностью определяет все арктическую кривую \mathcal{A} .

В ситуации общего положения, а именно произвольных значений $\Delta \in (-\infty, 1)$, при которых существует арктическая кривая, функция $\Upsilon(x, y; \lambda)$ трансцендентна; только при специальных значениях $\Delta = \cos 2\eta \in (-1, 1)$, соответствующих рациональным значениям η/π функция $\Upsilon(x, y; \lambda)$ является алгебраической (например, при $\Delta = 0$ является квадратичной по x и y). По этой причине, при описании кривой Γ_{NW} удобно вместо явного вида функции $\Upsilon(x, y; \lambda)$ использовать параметрическую форму для этой кривой:

$$x = X(\zeta), \quad y = Y(\zeta), \quad \zeta \in [0, \zeta_0],$$

где функции $X(\zeta)$, $Y(\zeta)$ и величина ζ_0 зависят от параметров модели (λ и η). Функции $X(\zeta)$ и $Y(\zeta)$ монотонно убывающая и растущая, соответственно, причем, $X(0) = \kappa$, $Y(0) = 0$ и $X(\zeta_0) = 0$, $Y(\zeta_0) = \kappa$. Более того, в силу симметрии относительно отражения относительно диагонали, эти две функции связаны соотношением $X(\zeta) = Y(\zeta_0 - \zeta)$. Явные выражения для этих функций приводятся в разделе 5.3.2; некоторые частные случаи, в частности, когда функция $\Upsilon(x, y; \lambda)$ алгебраическая рассмотрены в разделе 5.3.3.

В заключение отметим кратко, что в случае антисегнетоэлектрической фазы картина разделения фаз, хотя и напоминает ситуацию разупорядоченной фазы, но является более сложной. В этой фазе конкуренция между антисегнетоэлектрической центральной областью и сегнетоэлектрическими пограничными областями индуцирует появление промежуточной разупорядоченной области. В результате, существует две кривые разделения фаз: внешняя, арктическая кривая, разделяющая области сегнетоэлектрического порядка и области разупорядочивания, и внутренняя, разделяющая области разупорядочивания и антисегнетоэлектрического порядка [59, 60].

5.1.2. Вероятность образования пустоты и термодинамический предел

Рассмотрим теперь подходы к решению проблемы нахождения арктической кривой \mathcal{A} для шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. Самый прямой путь должен был бы состоять в том, чтобы рассмотреть одноточечную корреляционную функцию, а именно, такую как поляризация всех горизонтальных (или вертикальных) ребер на решетке, вывести для этой функции замкнутое представление, и, наконец, исследовать ее поведение в термодинамическом (скейлинговом) пределе. Это дало бы доступ не только к арктической кривой \mathcal{A} , но в целом и к предельной форме модели, в формулировке в терминах так называемой функции высоты [103]. Основным препятствием при реализации такого подхода является проблема вычисления явно этой одноточечной корреляционной функции, которая представляет из себя весьма сложную техническую задачу. Если ограничиться арктической кривой, то тогда можно использовать какую-либо другую корреляционную функцию, возможно, более грубую, чем поляризация, но тем не менее достаточно чувствительную, чтобы различать пространственный переход между упорядочиванием и разупорядочиванием, и которую было бы возможно вычислить в достаточно явной форме.

Действительно, рассмотрим вероятность образования пустоты, а именно, вероятность $F_N^{(r,s)}$ того, что переменные на ребрах лежащих на s первых (сверху) горизонтальных прямых и между r -ой и $(r + 1)$ -ой вертикальных прямых, все равны 1. Очевидно, что вероятность

образования пустоты есть частный случай некоторой общей s -точечной функции, однако она обладает определенными специфическими свойствами, отмеченными ниже, которые делают эту корреляционную функцию удобным инструментом для решения задачи о нахождении арктической кривой модели. Напомним, что, как следует напрямую из определения шести-вершинной модели и граничных условий типа доменной стенки, вероятность образования пустоты может быть определена как вероятность того, что все стрелки на ребрах верхней левой $(N - r) \times s$ части решетки являются стрелками влево (на горизонтальных ребрах) и вниз (на вертикальных ребрах). Другими словами, вероятность образования пустоты описывает вероятность того, что на верхней левой $(N - r) \times s$ части решетки имеется полный сегнетоэлектрический порядок, см. Рис. 4.1б.

Чтобы найти арктическую кривую, необходимо исследовать асимптотическое поведение вероятности образования пустоты в скейлинговом пределе. А именно, нас будет интересовать предел $N, r, s \rightarrow \infty$, при сохранении отношений между этими целыми параметрами. Положим

$$x = \frac{N - r}{N}, \quad y = \frac{s}{N}, \quad x, y \in [0, 1]. \quad (5.1)$$

В указанном пределе координаты x и y будут параметризовать единичный квадрат, на который отображается решетка в скейлинговом пределе. Соответственно, вероятность образования пустоты стремиться к некоторой предельной функции

$$F(x, y) = \lim_{N, r, s \rightarrow \infty} F_N^{(r, s)},$$

где x и y определены в (5.1).

Поскольку вероятность образования пустоты описывает вероятность сегнетоэлектрического порядка в верхней левой $(N - r) \times s$ части решетки, естественно ожидать, функция $F(x, y)$ равна единице при $(x, y) \in F_{NW}$. С другой стороны, в области разупорядочивания число ребер нарушающих сегнетоэлектрический порядок макроскопически велико в скейлинговом пределе. Это означает, что функция $F(x, y)$ должна быть тождественно равна нулю для всех значений $(x, y) \in D$. Иными словами, предельная $F(x, y)$ является ступенчатой функцией:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in D \cup F_{NE} \cup F_{SE} \cup F_{SW} \\ 1 & (x, y) \in F_{NW}, \end{cases} \quad (5.2)$$

где нами использованы обозначения Рис. 5.1.

Отсюда следует, что вероятность образования пустоты может быть использована для нахождения кривой Γ_{NW} , которая выделяет область F_{NW} из единичного квадрата. Как уже обсуждалось выше в начале настоящей главы, по известному уравнению для кривой Γ_{NW} , в

силу симметрий модели, можно построить остальные кривые Γ_{NE} , Γ_{SE} , Γ_{SW} , и таким образом, полностью решить задачу о нахождении арктической кривой модели.

Естественно ожидать, что кривая Γ_{NW} может быть найдена путем анализа подходящего представления для вероятности образования пустоты в скейлинговом пределе. В дальнейшем мы будем основывать рассуждения на представлении вероятности формулировки пустоты в терминах s -кратного интеграла, полученного в Главе 4. Нам понадобятся два эквивалентных интегральных представления, которые отличаются подынтегральными выражениями, причем второе из них является симметризованным вариантом первого, а именно, представления (4.41) и (4.42), соответственно. При этом первое представление окажется удобным для обсуждения происхождения предельной функции (5.2), в то время как второе является естественным для применения метода перевала.

Поскольку мы интересуемся поведением вероятности образования пустоты в скейлинговом пределе, при котором дискретные параметры, а именно, r , s и N , велики, причем значения отношений r/N и s/N является фиксированным (и меньше 1), то в этом пределе, в принципе, вероятность образования пустоты может быть исследована методом перевала, примененного к многократному интегралу (4.42). Чтобы найти соответствующую систему уравнений перевала, применим к подынтегральному выражению интеграла (4.42) стандартные рассуждения, используемые в контексте моделей случайных матриц. Нам потребуется использовать тот факт, что при больших s величины типа $\ln h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$ могут быть оценены как порядка s^2 , а их производные по переменным z_j , $j = 1, \dots, s$, как величины порядка s . В результате, мы придем к следующей системе связанных уравнений перевала:

$$\begin{aligned}
& -\frac{s}{z_j - 1} - \frac{r}{z_j} + \frac{s(t^2 - 2\Delta t)}{(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^s \left(\frac{t^2 z_k - 2\Delta t}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{t^2 z_k}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1} + \frac{2}{z_k - z_j} \right) + \frac{\partial \ln h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)}{\partial z_j} \\
& \quad - \frac{t^2 - 2\Delta t + 1}{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1]^2} \frac{\partial \ln h_{s,s}(u_1, \dots, u_s)}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

При записи этих уравнений мы пренебрегли всеми вкладками которые могут быть оценены как $o(s)$.

Как будет видно ниже, хотя детальный анализ уравнений перевала для представления вероятности образования пустоты не может быть выполнен в строгости в ситуации общего положения, нам удастся, тем не менее, найти условие на значения величин r/N и s/N , которые соответствуют скачку от 0 до 1 вероятности образования пустоты в скейлинговом пределе. Иными словами, нам удастся получить уравнение для арктической кривой. Во

многих отношениях, процедура вывода этой кривой будет напоминать исследование условия перевала для однократного интеграла (5.7) ниже, и который описывает положение точек касания арктической кривой границы.

5.1.3. Точки касания границы арктической кривой

Прежде чем исследовать общую задачу о нахождении арктической кривой, полезно сначала рассмотреть ее частный случай, о вычислении параметра κ , описывающего положения точек касания этой кривой с границей.

Следующий результат играет ключевую роль в решении задачи о точках касания, и, как будет видно ниже, о нахождении всей арктической кривой, для случая модели в разупорядоченной фазе.

Предложение 5.1. *Для модели в разупорядоченной фазе (λ и η вещественные и удовлетворяют (1.4)) функция $\ln h_N(z)$, для $z \in (0, \infty)$ имеет следующую $N \rightarrow \infty$ асимптотику:*

$$\ln h_N(\gamma(\xi)) = N \ln \left(\frac{\sin \alpha(\lambda - \eta) \sin(\xi + \lambda - \eta) \sin \alpha \xi}{\alpha \sin(\lambda - \eta) \sin \alpha(\xi + \lambda - \eta) \sin \xi} \right) + o(N), \quad (5.4)$$

где

$$\gamma(\xi) = \frac{\sin(\lambda + \eta) \sin(\xi + \lambda - \eta)}{\sin(\lambda - \eta) \sin(\xi + \lambda + \eta)} \quad (5.5)$$

и

$$\alpha := \frac{\pi}{\pi - 2\eta}. \quad (5.6)$$

Доказательство приведено отдельно, в разделе 5.1.4.

Чтобы вычислить κ , рассмотрим корреляционную функцию $G_N^{(r)} = F_N^{(r,1)}$ в скейлинговом пределе. Введем функцию $G(x)$ ($0 \leq G(x) \leq 1$) определяя ее как значение функции $G_N^{(r)}$ в этом пределе:

$$G(x) := \lim_{r, N \rightarrow \infty} G_N^{(r)}, \quad x = \frac{N - r}{N}, \quad x \in [0, 1].$$

В скейлинговом пределе статистически доминирующие конфигурации таковы, что все стрелки на горизонтальных ребрах первого ряда решетки направлены влево в области F_{NW} , и вправо в области F_{NE} . Иначе говоря, функция $G(x)$ имеет ступенчатый вид, со скачком в точке касания арктической кривой границы:

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \kappa) \\ 0 & x \in (\kappa, 1). \end{cases}$$

Таким образом, значение κ может быть найдено путем поиска ответа на вопрос о том, в силу какой причины корреляционная функция $G_N^{(r)}$ может демонстрировать скачкообразное поведение в пределе $N, r \rightarrow \infty$.

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим интегральное представление

$$G_N^{(r)} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{h_N(z)}{(z-1)z^r} dz. \quad (5.7)$$

Как и выше, C_0 является простым замкнутым положительно-ориентированным контуром, который охватывает точку $z = 0$ и лежит в ее малой окрестности. Применяя к интегралу (5.7) метод перевала, чтобы проанализировать его поведение в скейлинговом пределе, получим следующее уравнение на седловую точку

$$-\frac{1-x}{z} + \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln h_N(z)}{N} \right)' = 0. \quad (5.8)$$

В принципе, чтобы найти все решения уравнения (5.8) требуется знать последний член для всех z лежащих в комплексной плоскости. Тем не менее, оказывается, что в решении задачи о точках касания полного анализа уравнения (5.8) можно избежать, если понять механизм в происхождении ступенчатого поведения функции $G(x)$. Кроме того, формула (5.4), которая была получена в предположении z вещественном и положительным, оказывается достаточной для вывода значения величины κ .

Действительно, давайте сначала ограничиться случаем $\Delta = 0$, в котором, как уже нами было установлено двумя разными способами в разделах 2.2.3 и 3.2.2 (см. работы [24] и [28], соответственно) функция $h_N(z)$ имеет следующее явное выражение:

$$h_N(z) = [\sin^2(\lambda + \pi/4) + z \sin^2(\lambda - \pi/4)]^{N-1}, \quad \Delta = 0. \quad (5.9)$$

Из этого выражения следует, что уравнение на седловую точку (5.8) имеет только одно решение, которое мы обозначим $z_{s.p.}$. Нетрудно видеть, что $z_{s.p.}$, которое зависит от значения $x \in [0, 1]$, является вещественным и положительным, причем контур наискорейшего спуска перпендикулярен к действительной оси. Положение точки перевала относительно полюса в точке $z = 1$ подынтегрального выражения, очевидно, имеет решающее значение при деформации контура C_0 в (5.7) к контуру наискорейшего спуска. А именно, при $z_{s.p.} < 1$ полюс в точке $z = 1$ оказывается несущественен при вычислении интеграла методом наискорейшего спуска, значение которого равно нулю в скейлинговом пределе, $G(x) = 0$. С другой стороны, при $z_{s.p.} > 1$, деформация контура к контуру наискорейшего спуска требует пересечение полюса в $z = 1$ и, в результате, интеграл в (5.7) в скейлинговом пределе равен вычету подынтегрального выражения (с знаком минус), откуда $G(x) = h_N(1) = 1$. Таким образом,

скачкообразное поведение функции $G(x)$ обусловлено прохождением точки перевала через полюс в точке $z = 1$ подынтегрального выражения. Иными словами, значение κ соответствует условию

$$z_{\text{s.p.}} \Big|_{x=\kappa} = 1. \quad (5.10)$$

Напомним, что это условие нами было получено в предположении что $\Delta = 0$, при котором уравнение (5.8) элементарно решается, в силу (5.9).

Чтобы рассмотреть случай произвольных значений $\Delta \in (-1, 1)$, напомним, что функция $h_N(z)$ является полиномом, и потому единственный полюс который присутствует в подынтегральном выражении (5.7) это полюс в точке $z = 1$; вычет в этом полюсе равен -1 (с учетом ориентации контура интегрирования), в силу условия $h_N(1) = 1$. Кроме того, нетрудно также видеть, что уравнение перевала (5.8) имеет единственное решение для z вещественных и положительных, для которых имеет место формула (5.4), причем это решение также вещественное и положительное. Скачкообразное поведение функции $G(x)$, таким образом, может быть объяснено тем фактом, что при некотором значении $x = \kappa \in (0, 1)$ седловая точка садится на полюс в точке $z = 1$. Иначе говоря, условие (5.10) является общим для произвольных значений Δ , где зависимость от Δ содержится только в значении κ . Из уравнения перевала (5.8) тогда следует формула:

$$\kappa = 1 - \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln h_N(z)}{N} \right)' \Big|_{z=1}. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.4) в (5.11), получим, что для произвольных значений Δ соответствующих критическому режиму, $\Delta = \cos 2\eta$, $\eta \in (0, \pi/2)$, значение величины κ , которая описывает положение точек касания, имеет следующее явное выражение:

$$\kappa = \frac{\alpha \cot \alpha(\lambda - \eta) - \cot(\lambda + \eta)}{\cot(\lambda - \eta) - \cot(\lambda + \eta)}.$$

Заметим, что $\kappa \mapsto 1 - \kappa$ при $\lambda \mapsto \pi - \lambda$, как и должно выполняться, в силу кроссинг симметрии. В частности, $\kappa = 1/2$ при $\lambda = \pi/2$, для всех значений η в интервале $\in (0, \pi/2)$.

5.1.4. Асимптотика производящей функции в разупорядоченной фазе

Формула (5.4), описывающая главный член асимптотики функции $h_N(z)$ при $N \rightarrow \infty$ играет важную роль не только для вычисления точек касания, но для решения всей задачи об арктической кривой. Здесь мы дадим ее вывод на основанный на использовании уравнение типа цепочки Тоды, приведенный в работе [35]. Еще один подход, более мощный и общий, основанный на использовании методов случайных матриц, обсуждается в разделе 5.3.4, где получена аналогичная формула для случая антисегнетоэлектрической фазы.

Вывод дифференциальных уравнений типа цепочки Тоды для определителей ганкелевых матриц и их модификаций, основан на так называемом детерминантном тождестве Сильвестра. Это тождество связывает определитель матрицы с определителем некоторой другой матрицы, элементами которой являются миноры исходной матрицы (см., например, монографию Гантмахера [105]). А именно, пусть A является $n \times n$ матрицей, с элементами $A_{j,k}$. Рассмотрим миноры степени p ($1 \leq p \leq n$) этой матрицы,

$$A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ k_1, k_2, \dots, k_p \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} A_{i_1, k_1} & A_{i_1, k_2} & \dots & A_{i_1, k_p} \\ A_{i_2, k_1} & A_{i_2, k_2} & \dots & A_{i_2, k_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_p, k_1} & A_{i_p, k_2} & \dots & A_{i_p, k_p} \end{vmatrix},$$

где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ и $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n$. Введем матрицу B , такую, что

$$B_{ik} := A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p, p+i \\ 1, 2, \dots, p, p+k \end{pmatrix}, \quad i, k = 1, \dots, n-p.$$

Таким образом, матричные элементы B являются минорами A степени $(p+1)$. Тождество Сильвестра имеет вид

$$\det A = \left[A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p \\ 1, 2, \dots, p \end{pmatrix} \right]^{-(n-p-1)} \det B.$$

Классическое доказательство тождества использует алгоритм Гаусса [105]. В примерах, которые встречаются ниже, мы полагаем $n = N+1$ и $p = N-1$, а именно, B является 2×2 матрицей.

Начнем с того, что рассмотрим вычисление главного члена асимптотики статистической суммы Z_N , следуя работе [57]. Полезно отметить, что для произвольного N статистическая сумма $Z_N = Z_N(\lambda)$ удовлетворяет соотношениям

$$Z_N(\lambda) = Z_N(\pi - \lambda), \quad Z_N(\lambda)|_{\lambda=\eta} = (\sin 2\eta)^{N^2}. \quad (5.12)$$

Здесь первое соотношение есть следствие кроссинг симметрии (тождества $b(\lambda) = a(\pi - \lambda)$), а второе следует из того факта, что если $b = 0$ (или $a = 0$), тогда существует только одна конфигурация дающая вклад в статистическую сумму. При $N \rightarrow \infty$, статистическая сумма имеет вид

$$Z_N = \exp(-N^2 f + O(N)), \quad (5.13)$$

где f есть свободная энергия на узел. Чтобы найти f , рассмотрим ганкелевый определитель в формуле Изергина–Корепина (1.12), для которого удобно здесь использовать обозначение:

$$D_N = \det \left[\partial_\lambda^{j+k-2} \varphi \right]_{j,k=1, \dots, N}.$$

Из (1.12) и (5.13) следует, что

$$D_N = \left[\prod_{n=1}^{N-1} (n!) \right]^2 \exp(N^2\phi + O(N)), \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.14)$$

где ϕ и f связаны соотношением

$$-f = \ln \sin(\lambda + \eta) + \ln \sin(\lambda - \eta) + \phi. \quad (5.15)$$

Что вычислить ϕ , рассмотрим D_{N+1} и применим тождество Сильвестра с $n = N + 1$ и $p = N - 1$, что дает

$$D_{N+1} = \frac{1}{D_{N-1}} \begin{vmatrix} \partial_\lambda^2 D_N & \partial_\lambda D_N \\ \partial_\lambda D_N & D_N \end{vmatrix}. \quad (5.16)$$

Тождество (5.16) может быть переписано в виде

$$\frac{D_{N+1} D_{N-1}}{D_N^2} = \partial_\lambda^2 \ln D_N. \quad (5.17)$$

Из (5.14) следует, что при $N \rightarrow \infty$, главные члены асимптотики обеих частей (5.17) порядка N^2 ; приравнивание главных членов дает:

$$e^{2\phi} = \partial_\lambda^2 \phi.$$

Это уравнение также может быть записано в виде

$$(\partial_\lambda W)^2 - W \partial_\lambda^2 W = 1, \quad W := \exp(-\phi).$$

Общее решение этого уравнение имеет вид

$$W = \frac{\sin(\alpha_1 \lambda + \alpha_2)}{\alpha_1},$$

где α_1 и α_2 константы интегрирования. Чтобы зафиксировать эти константы, обратимся к свойствам (5.12), которые, в силу (5.15) означают, что нам нужно решение такое, что $W(\lambda) = W(\pi - \lambda)$ и $W(\lambda)|_{\lambda=\eta} = 0$. Отсюда

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha_1), \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{\pi - 2\eta}.$$

В терминах параметра α определенного в (5.6), имеем $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = -\eta\alpha$, и, таким образом, получим

$$\phi = \ln \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha(\lambda - \eta)} \right). \quad (5.18)$$

Подставляя это выражение в (5.15), приходим к следующему результату полученному в работах [57, 58] для свободной энергии модели в разупорядоченной фазе:

$$f = -\ln \left(\frac{\alpha \sin(\lambda + \eta) \sin(\lambda - \eta)}{\sin \alpha(\lambda - \eta)} \right),$$

Также отметим, что детальное исследование с помощью матричной задачи Римана–Гильберта асимптотики статистической суммы при $N \rightarrow \infty$ для модели в разупорядоченной фазе было дано в работе [106], случаи других фаз рассмотрены в работах [107–111], обзор результатов был дан в монографии [112].

Обратимся теперь к функции $h_N(z)$. В силу формулы (4.30), имеем

$$\tilde{Z}_N(\xi, 0, \dots, 0) = \left[\frac{\sin(\lambda + \xi + \eta)}{\sin(\lambda + \eta)} \right]^{N-1} h_N(\gamma(\xi)), \quad (5.19)$$

где функция $\gamma(\xi)$ определена в (5.5), и поэтому асимптотика функции $h_N(z)$ при $N \rightarrow \infty$ может быть найдена из статистической суммы $\tilde{Z}_N(\xi, 0, \dots, 0)$. Эта величина дается формулой,

$$\tilde{Z}_N(\xi, 0, \dots, 0) = \frac{(N-1)!}{(\sin \xi)^{N-1}} \left[\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda + \xi)} \right]^N \frac{\tilde{D}_N(\xi)}{D_N} \quad (5.20)$$

где

$$\tilde{D}_N(\xi) = \begin{vmatrix} \varphi(\lambda) & \varphi'(\lambda) & \dots & \varphi^{(N-2)}(\lambda) & \varphi(\lambda + \xi) \\ \varphi'(\lambda) & \varphi''(\lambda) & \dots & \varphi^{(N-1)}(\lambda) & \varphi'(\lambda + \xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi^{(N-1)}(\lambda) & \varphi^{(N)}(\lambda) & \dots & \varphi^{(2N-3)}(\lambda) & \varphi^{(N-1)}(\lambda + \xi) \end{vmatrix}, \quad (5.21)$$

Удобно ввести обозначение

$$S_N(\xi) = \frac{\tilde{D}_N(\xi)}{D_N}. \quad (5.22)$$

Поскольку $\tilde{Z}_N(\xi, 0, \dots, 0)|_{\xi=0} = 1$, для любых конечных значений N имеет место свойство

$$S_N(\xi) \sim \frac{\xi^{N-1}}{(N-1)!}, \quad \xi \rightarrow 0. \quad (5.23)$$

Кроме того, из интерпретации $\tilde{Z}_N(\xi, 0, \dots, 0)$ как статистической суммы следует, что эта величина может расти не более чем экспоненциально при росте N , а именно

$$S_N(\xi) = \frac{1}{(N-1)!} \exp(N\psi(\xi) + o(N)), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.24)$$

Чтобы доказать формулу (5.4), требуется вычислить $\psi(\xi)$. Эта функция может быть найдена как решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка по переменной ξ .

Воспользуемся вновь тождеством Сильвестра с $n = N + 1$ и $p = N - 1$, применяя его к \tilde{D}_{N+1} и $\partial_\lambda \tilde{D}_{N+1}$ (см. (5.21)), что дает

$$\tilde{D}_{N+1}(\xi) = \frac{1}{D_{N-1}} \begin{vmatrix} \partial_\lambda \tilde{D}_N(\xi) & \partial_\lambda D_N \\ \tilde{D}_N(\xi) & D_N \end{vmatrix},$$

$$\partial_\lambda \tilde{D}_{N+1}(\xi) = \partial_\xi \tilde{D}_{N+1}(\xi) + \frac{1}{D_{N-1}} \begin{vmatrix} \partial_\lambda \tilde{D}_N(\xi) & \partial_\lambda^2 D_N \\ \tilde{D}_N(\xi) & \partial_\lambda D_N \end{vmatrix}.$$

В терминах функции (5.22) эти два соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{D_{N+1}D_{N-1}}{D_N^2} S_{N+1}(\xi) &= \partial_\lambda S_N(\xi), \\ \partial_\lambda S_{N+1}(\xi) + \frac{\partial_\lambda D_{N+1}}{D_{N+1}} S_{N+1}(\xi) &= \partial_\xi S_{N+1}(\xi) + \frac{D_N \partial_\lambda D_N}{D_{N+1} D_{N-1}} \partial_\lambda S_N(\xi) \\ &\quad + \frac{(\partial_\lambda D_N)^2 - D_N \partial_\lambda^2 D_N}{D_{N+1} D_{N-1}} S_N(\xi). \end{aligned}$$

Первое соотношение позволяет исключить $\partial_\lambda S_N(\xi)$ и $\partial_\lambda S_{N+1}(\xi)$ из второго соотношения. В результате, используя (5.17) и делая замену $N \mapsto N - 1$, получим следующее уравнение:

$$\frac{D_{N+1}D_{N-1}}{D_N^2} S_{N+1}(\xi) + \left(\partial_\lambda \ln \frac{D_N}{D_{N-1}} \right) S_N(\xi) + S_{N-1}(\xi) = \partial_\xi S_N(\xi). \quad (5.25)$$

Нетрудно видеть, что обе части уравнения (5.25) после деления на $S_N(\xi)$ имеют порядок N в пределе больших N ; выделение членов главного порядка приводит к следующему ОДУ первого порядка:

$$e^{2\phi} e^{\psi(\xi)} + 2\partial_\lambda \phi + e^{-\psi(\xi)} = \partial_\xi \psi(\xi).$$

Величина ϕ дается формулой (5.18); в явном виде уравнение записывается следующем образом:

$$\frac{\alpha^2}{\sin^2 \alpha(\lambda - \eta)} e^{\psi(\xi)} - 2\alpha \cot \alpha(\lambda - \eta) + e^{-\psi(\xi)} = \partial_\xi \psi(\xi).$$

В силу (5.23), нам нужно решение этого уравнения, такое что $\exp \psi(\xi) \sim \xi$ при $\xi \rightarrow 0$. Это решение дается формулой

$$e^{\psi(\xi)} = \frac{\sin \alpha(\lambda - \eta) \sin \alpha \xi}{\alpha \sin \alpha(\xi + \lambda - \eta)}.$$

Используя (5.20), (5.22) и (5.24), таким образом получим, что при $N \rightarrow \infty$,

$$\ln \tilde{Z}_N(\xi, 0, \dots, 0) = N \ln \left(\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda + \xi)} \frac{\sin \alpha(\lambda - \eta) \sin \alpha \xi}{\alpha \sin \alpha(\xi + \lambda - \eta) \sin \xi} \right) + o(N).$$

Окончательно, используя тот факт, что функция $\varphi(\lambda)$ дается формулой (1.13) и что функция $h_N(z)$ связана с величиной $\tilde{Z}_N(\xi, 0, \dots, 0)$ равенством (5.19), приходим в выражению (5.4), которое, таким образом, доказано.

5.2. Уравнения перевала и гипотеза конденсации

В этом разделе выдвигается гипотеза, что арктическая кривая соответствует специальному решению уравнений перевала, в котором почти все корни сконденсированы в точке $z = 1$. Эта гипотеза, в многом обобщающая описанный выше механизм соответствия точки касания пересечения решения уравнения перевала полюса в точке $z = 1$ на случай многих переменных, может быть доказана в случае точки свободных фермионов ($\Delta = 0$), а для

произвольных значений $\Delta \in (-\infty, 1)$ приводит к уравнению для арктической кривой, которое, как обсуждается в следующем разделе, согласуется с результатами полученными другими методами (численными и аналитическими).

5.2.1. Случай точки свободных фермионов

Прежде чем рассматривать общий случай, полезно рассмотреть технически простейший случай $\Delta = 0$. Подход описанный ниже этом разделе был рассмотрен детально в работе [31]. Нашей целью здесь будет напомнить основные ингредиенты этого подхода и сформулировать его модифицированную версию, которая оказывается достаточно простой и мощной, чтобы быть примененной в значительно более сложном случае произвольных значений Δ соответствующих разупорядоченной фазе ($|\Delta| < 1$).

В случае $\Delta = 0$, что соответствует $\eta = \pi/4$, функция $h_N(z)$ известна явно (см., например, [28]):

$$h_N(z) = \left(\frac{t^2 z + 1}{t^2 + 1} \right)^{N-1}, \quad t = \tan \left(\lambda - \frac{\pi}{4} \right).$$

В этом случае детерминант, входящий в определение функций $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$, сводится к определителю Вандермонда; прямое вычисление дает:

$$h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) = \prod_{j=1}^s \left(\frac{t^2 z_j + 1}{t^2 + 1} \right)^{N-s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{t^2 z_j z_k + 1}{t^2 + 1}.$$

Из этой формулы, используя $u_j = (1 - z_j)/(t^2 z_j + 1)$, мы также получим

$$h_{s,s}(u_1, \dots, u_s) = \prod_{j=1}^s \frac{1}{(t^2 z_j + 1)^{s-1}} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (t^2 z_j z_k + 1).$$

Принимая во внимание тот факт, что в рассматриваемом случае $Z_s = c^{N^2}$ (см., например, [24]), откуда $Z_s/a^{s(s-1)}c^s = (t^2 + 1)^{s(s-1)/2}$, получим, что представление (4.42) при $\Delta = 0$ имеет вид:

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{s(s+1)/2}}{s!(2\pi i)^s (t^2 + 1)^{s(N-s)}} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \prod_{j=1}^s \frac{(t^2 z_j + 1)^{N-s}}{z_j^r (z_j - 1)^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_j - z_k)^2 dz_1 \cdots dz_s. \quad (5.26)$$

Благодаря последнему множителю, который есть не что иное как квадрат определителя Вандермонда, формула (5.26) имеет структуру статистической суммы матричной модели, что будет использовано в дальнейшем.

Полезно отметить, что (5.26) также может быть записано в виде определителя:

$$F_N^{(r,s)} = \det \left[-\frac{1}{2\pi i (t^2 + 1)^{N-s}} \oint_{C_0} \frac{(t^2 z + 1)^{N-s}}{z^r (z - 1)^s} (z - \theta)^{j-k+s-1} dz \right]_{j,k=1,\dots,s}. \quad (5.27)$$

Здесь θ является произвольным параметром; нетрудно видеть, что определитель в (5.27) не зависит от этого параметра. Заметим, что определитель в (5.27) является теплицевым, т.к. элементы матрицы зависят от индексов только через их разность.

Детерминантная формула (5.27) имеет следующее важное применение. Рассмотрим величину

$$I_N^{(r,s)} := \frac{(-1)^{s(s+1)/2}}{s!(2\pi i)^s (t^2 + 1)^{s(N-s)}} \oint_{C_1^-} \cdots \oint_{C_1^-} \prod_{j=1}^s \frac{(t^2 z_j + 1)^{N-s}}{z_j^r (z_j - 1)^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_j - z_k)^2 dz_1 \cdots dz_s. \quad (5.28)$$

Здесь C_1^- является простым замкнутым отрицательно-ориентированным контуром охватывающим точку $z = 1$, и лежащим в ее малой окрестности. Выражение (5.28) отличается от (5.26) только контуром интегрирования; поскольку подынтегральное выражение осталось неизменным, аналогично (5.27), имеет место следующее представление:

$$I_N^{(r,s)} = \det \left[-\frac{1}{2\pi i (t^2 + 1)^{N-s}} \oint_{C_1^-} \frac{(t^2 z + 1)^{N-s}}{z^r (z - 1)^s} (z - \theta)^{j-k+s-1} dz \right]_{j,k=1,\dots,s}. \quad (5.29)$$

Здесь θ вновь произвольный параметр, значение которого не влияет на значение определителя в (5.29). Если мы положим $\theta = 1$ в (5.29), то тогда матрица в определителе окажется верхнетреугольной, причем все ее диагональные элементы равны 1, и следовательно

$$I_N^{(r,s)} = 1, \quad r, s = 1, \dots, N. \quad (5.30)$$

Тождество (5.30), совместно с некоторыми другими свойствами представления (5.26), оказывается одним из основных ингредиентов, входящих в вывод арктической кривой.

Рассмотрим теперь задачу об асимптотическом поведении многократного интеграла (5.26), который является представлением для вероятности образования пустоты в случае $\Delta = 0$, в скейлинговом пределе. Используя очевидную аналогию с пределом больших s для статистической суммы матричной модели для $s \times s$ случайных матриц, перепишем (5.26) в следующем виде:

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{s(s+1)/2}}{s!(1+t^2)^{(1/y-1)s^2} (2\pi i)^s} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \exp \left\{ -s \sum_{j=1}^s V(z_j) \right\} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_j - z_k)^2 dz_1 \cdots dz_s. \quad (5.31)$$

Здесь $V(z_j)$ — потенциал модели, который в нашем случае дается формулой

$$V(z_j) = \ln(z_j - 1) + \frac{1-x}{y} \ln z_j - \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \ln(t^2 z_j + 1).$$

При выводе этого выражения нами были использованы скейлинговые переменные x и y определенные в (5.1). Соответствующая система уравнений перевала имеет вид:

$$-\frac{1}{z_j - 1} - \frac{1-x}{yz_j} + \frac{(1-y)t^2}{y(t^2 z_j + 1)} + \frac{2}{s} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^s \frac{1}{z_j - z_k} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.32)$$

Для дальнейшего полезно воспользоваться физической интерпретацией уравнений перевала как условий равновесия для s частиц с зарядом $1/s$, с логарифмическим электростатическим отталкиванием во внешнем потенциале. В случае уравнений (5.32), потенциал состоит из трех логарифмов, с зарядами 1, $(1-x)/y$, и $-(1/y-1)$ в точках 1, 0, и $-1/t^2$, соответственно. Эту модель естественно называть тройной моделью Пеннера. Хотя матричная модель связанная с моделью Пеннера с одним логарифмом хорошо изучена [113], о моделях Пеннера с многими логарифмическими потенциалами известно мало. Тем не менее, для дальнейшего нам понадобится только явление известное как конденсация решений, являющиеся типичным для моделей Пеннера и детально описанное в работах [114, 115].

Чтобы исследовать структуру решений уравнений перевала (5.32) при больших s , удобно ввести в рассмотрение резольвенту (функцию Грина):

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \frac{1}{z - z_j}. \quad (5.33)$$

Здесь z_j являются решениями уравнений (5.32). Резольвента удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, которое может получено стандартным способом. В скейлинговом пределе это дифференциальное уравнение сводится к алгебраическому. Последнее в принципе может быть решено, и, следовательно, найдено выражение для резольвенты в пределе $s \rightarrow \infty$. В этом пределе полюса функции $\mathcal{G}(z)$ образуют разрезы в комплексной плоскости. Скачки резольвенты на этих разрезах определяют плотность решений уравнений перевала. В рассматриваемом случае, однако, резольвента в пределе $s \rightarrow \infty$ не определяется однозначно, поскольку содержит зависимость от некоторого параметра, значение которого может быть зафиксировано только неявно. Это обстоятельство является следствием того факта, что предельная резольвента формально содержит два разреза (см. обсуждение в работе [31]). Наличие формально двух разрезов приводит к тому, что задача нахождения явного выражения для плотности решений уравнений перевала (5.32) при $s \rightarrow \infty$, для произвольных значений x , y , является весьма сложной, не говоря уже о задачах вычисления соответствующей свободной энергии и вклада от точки перевала в интеграл (5.31).

Задача, которую мы решаем, к счастью, гораздо скромнее: в настоящее время мы заинтересованы только в выражении для кривой Γ_{NW} , которая есть не что иное, как кривая на которой в скейлинговом пределе вероятность образования пустоты имеет единичный скачок. Эта задача в многом обобщает задачу, рассмотренную выше в разделе 5.1.3 для случая граничной корреляционной функции $G_N^{(r)} = F_N^{(r,1)}$, для которой нами было получено, что ее скачкообразное поведение обусловлено положением решения уравнения перевала относительно полюса в точке $z = 1$. Легко проверить, что в точности этот же механизм имеет

место для $F_N^{(r,s)}$ для любых конечных s . Действительно, при $r, N \rightarrow \infty$ при s и $r/N = 1 - x$ фиксированных (причем, очевидно, $s/N = y \rightarrow 0$), уравнения (5.32) распадаются на s идентичных уравнения вида (5.8). В итоге, рассуждения раздела 5.1.3 остаются в силе и также в силу тождества (5.30). Единичный скачок определяющий положение точки касания теперь соответствует решению, такому, что все s переменных z_j , $j = 1, \dots, s$, совпадают с положением полюса в точке $z = 1$.

Перед тем как переходить к анализу ситуации когда s велико, полезно напомнить своеобразное свойство решений уравнений перевала для общих моделей Пеннера (см. детальное обсуждение в работах [114] и [115]). В этих моделях логарифмические ямы в потенциале могут вести себя как ростки для точек конденсации для решений уравнения перевала. Как было показано в указанных работах, конденсация может иметь место только для зарядов меньших или равных 1, причем значение заряда соответствует фракции сконденсированных решений. В рамках электростатической аналогии это соответствует тому, что логарифмическая потенциальная яма, создаваемая внешним потенциалом с зарядом Q , притягивает в точности Q -ую часть из s частиц заряда $1/s$.

В нашем случае, единственная возможность конденсации решений уравнений перевала связана с зарядом в точке $z = 1$ в тройном потенциале Пеннера. Действительно, заряд в точке $z = -1/t^2$ является отрицательным (отталкивающим), а в точке $z = 0$ заряд больше 1 для области в которой лежит кривая Γ_{NW} . Необходимо отметить также, что в нашем случае заряд в точке $z = 1$ равен 1, что означает, что этой точке возможна полная конденсация решений уравнений перевала. Все это, а также факт существования тождества (5.30), в существенной степени подсказывает, что механизм лежащий в основе скачкообразного поведения функции $F_N^{(r,s)}$ в скейлинговом пределе является таким же, как и в случае конечных значений s , и что таким образом кривая Γ_{NW} находится в соответствии с конденсацией (почти всех) решений уравнений седловой точки (5.32) в точке $z = 1$.

В рамках подхода основанного на использовании резольвенты (функции Грина) это утверждение может быть перефразировано следующим образом. Кривая Γ_{NW} может быть получена из условия, что на этой кривой резольвента (5.33) в скейлинговом пределе дается выражением

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{z-1}, \quad (x, y) \in \Gamma_{\text{NW}}. \quad (5.34)$$

Действительно, как было показано в работе [31], условие (5.34) эквивалентно тому, что $x, y \in [0, \kappa]$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$(1+t^2)(x+y-1)^2 + t^2(1+t^2)(x-y)^2 = t^2. \quad (5.35)$$

Это уравнение описывает кривую Γ_{NW} . Используя рецепт построения остальных частей арктической кривой (см. обсуждение в разделе 5.1.1), нетрудно убедиться, что уравнение (5.35) на самом деле описывает всю кривую \mathcal{A} , т.е. имеет место для всех $x, y \in [0, 1]$. При $\lambda = \pi/2$, или $t = 1$, уравнение (5.35) имеет вид

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 1, \quad (5.36)$$

и есть не что иное, как уравнение арктического круга, полученное впервые в контексте замощений домино в работе [50].

5.2.2. Конденсация корней и арктический эллипс

Как только что было отмечено, арктическая кривая Γ_{NW} при $\Delta = 0$ оказывается в соответствии со случаем (решением) когда почти все корни уравнений перевала (5.32) конденсируются в точке $z = 1$. Оказывается, это наблюдение может быть использовано, чтобы сформулировать более простой подход для вывода арктической кривой при $\Delta = 0$, который не задействует понятия резольвенты (функции Грина), и который может быть применен в ситуации более общего положения (вне случая $\Delta = 0$).

Происхождение наблюдаемого соответствия между арктической кривой Γ_{NW} и конденсации почти все корней уравнений перевала опирается на два следующих важных компонента. С одной стороны, по построению, вероятность образования пустоты в скейлинговом пределе имеет скачкообразное поведение, с единичным скачком на кривой Γ_{NW} . С другой стороны, обобщенные модели Пеннера (уравнения перевала которых имеют некоторые существенные свойства совпадающие с рассматриваемыми) допускают частичную или полную конденсацию корней. Роль потенциала единичного заряда в обобщенной модели Пеннера с полной конденсацией в нашем случае играет набор из s полюсов в точках $z_j = 1$, $j = 1, \dots, N$ в представлении (5.26), каждый из которых является полюсом порядка s .

Имея в виду эти особенности обобщенных моделей Пеннера, соответствие между арктической кривой и конденсацией корней можно рассматривать как следствие следующих свойств интегрального представления для вероятности образования пустоты:

- подынтегральное выражение содержит полюс в точке $z = 1$, по каждой из переменных интегрирования z_1, \dots, z_s , и совокупный вычет по всем переменным интегрирования в этом полюсе равен 1;
- полюс в точке $z = 1$ по каждой из переменных интегрирования z_1, \dots, z_s является полюсом порядка s .

Первое свойство означает, что в скейлинговом пределе значение вероятности образования пустоты определяется расположением корней уравнений седловой точки относительно полюса в точке $z = 1$. При этом, тождество (5.30) означает, что деформация всех контуров интегрирования с пересечением этого полюса в точности воспроизводит ожидаемое скачкообразное поведение предельного значения для вероятности образования пустоты. Второе свойство означает, что точка $z = 1$ является точкой, в которой может происходить конденсация почти всех решений уравнений седловой точки.

Свойства, перечисленные выше, вместе с ожидаемым предельным выражением (5.2), означают, что арктическая кривая может быть найдена с помощью условия конденсации практически всех корней уравнений перевала в точке $z = 1$. Пусть n_c и n_u обозначают число сконденсированных и не сконденсированных корней, соответственно, $n_c + n_u = s$. Конденсация *почти всех* корней попросту означает, что

$$\frac{n_c}{s} \sim 1, \quad \frac{n_u}{s} \sim 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (5.37)$$

Стоит отметить, что из конденсации почти всех корней при $z = 1$, очевидно, вытекает формула (5.34) и, также, что правая часть (5.32) упрощается к выражению $2/(z_j - 1)$, в ведущем порядке при больших s . Следовательно, система уравнений перевала упрощается и становится системой из n_u идентичных и несвязанных между собой уравнений. По сути, это одно уравнение, задающее положение n_u не сконденсировавшихся корней. Это уравнение может быть названо *редуцированным уравнением перевала*. Оказывается, что решения редуцированного уравнения перевала, в силу собственно явления конденсации, обладают определенным свойством.

В соответствии со стандартным сценарием процесса конденсации, описанным в работе [115], решения уравнений перевала формируют разрезы в пределе больших s и эти разрезы двигаются в комплексной плоскости при изменении параметров модели (в нашем случае это x и y). В частности, в нашем случае, когда $(x, y) \in D$ (см. Рис. 5.1), решения формируют разрез с комплексно-сопряженными концами, который лежит слева от сингулярности в точке $z = 1$, и пересекает вещественную ось на отрезке $(0, 1)$. При перемещении точки (x, y) ближе к замороженной области F_{NW} концы разреза, оставаясь комплексно-сопряженными, приближаются к вещественной оси, и имеют вещественную часть больше 1. Когда точка (x, y) достигает арктической кривой, концы разреза встречаются в точке w лежащей на вещественной оси, $w > 1$, и разрез охватывает сингулярность в точке $z = 1$. В этом случае, в силу (5.37), почти все решения сосредоточены около точки $z = 1$, а плотность решений (число которых n_u) лежащих вне точки $z = 1$ стремиться к нулю, что и означает полную конденсацию решений. Наконец, когда точка (x, y) оказывается в замороженной зоне, $(x, y) \in F_{NW}$, конечные

точки изначального разреза раздвигаются друг от друга на вещественной оси и от значения w , являясь конечными точками нового разреза, лежащего справа от сингулярности в точке $z = 1$. При этом, существует еще один разрез (возможно с комплексными концами) справа от сингулярности в точке $z = 1$, но левее точки $z = w$, который формирует полную конденсацию решений вокруг точки $z = 1$ при движении точки (x, y) в замороженной области F_{NW} по направлению к арктической кривой.

Как уже отмечено, в случае полной конденсации, т.е. когда $(x, y) \in F_{NW}$, разрез проходит из точки $z = w + i0$ над вещественной осью к сингулярности в точке $z = 1$, обходит ее, и возвращается под вещественной осью в точку $z = w - i0$. Две части разреза которые лежат друг на против друга над и под вещественной осью компенсируют друг друга в том смысле, что значение плотности корней уравнений перевала на этих частях стремится к нулю. Единственная точка дающая вклад в резольвенту это полюс в точке $z = 1$, описывающее полную конденсацию корней. Таким образом, в этом случае набор неконденсированных корней должен содержать как минимум пару совпадающих, которые соответствуют предельным значениям концов разреза, и которые равны w . Такая пара неконденсированных корней может лежать в произвольной точке правее точки конденсации $z = 1$, т.е., $w \in (1, \infty)$. Очевидно, что значение w зависит от положения точки (x, y) лежащей на кривой Γ_{NW} . Таким образом, значение w естественным образом параметризует кривую Γ_{NW} , от точки касания верхней границы $(\kappa, 0)$ до касания левой границы $(0, \kappa)$, при монотонном возрастании $w \in (1, \infty)$.

Подводя итог, мы приходим к следующей альтернативной процедуре вывода арктической кривой. На основе двух свойств представления для вероятности образования пустоты в виде многократного интеграла указанных выше, можно предположить, что они находятся в соответствии с условием конденсации корней. Тогда, исходя из системы уравнений перевала можно потребовать конденсацию почти всех корней (в смысле (5.37)) следует редуцированное уравнение перевала, определяющее положение неконденсированных корней. Существование конденсации требует наличия среди них двух совпадающих корней со значением $w \in [1, \infty)$, которое и параметризует точки на арктической кривой.

Для того, чтобы проиллюстрировать и проверить эту процедуру, вернемся к уравнениям перевала (5.38) и наложим условие конденсации почти всех корней в точке $z = 1$. При этом условии, как уже было замечено выше, последний член в левой части (5.32) в пределе больших s упрощается до выражения $2/(z_j - 1)$. Это выражение, комбинируясь с первым членом приводит к следующему уравнению

$$\frac{y}{z-1} - \frac{1-x}{z} + \frac{(1-y)t^2}{1+t^2z} = 0. \quad (5.38)$$

Это уравнение и есть редуцированное уравнение перевала которое, определяет положение неконденсированных корней. Среди этих корней должно быть как минимум два совпадающих и условие совпадения корней определяет арктическую кривую. Действительно, поскольку общий числитель в (5.38) является квадратичным по z , условие равенства нулю дискриминанта в точности совпадает с (5.35).

Эквивалентно, обозначая левую часть в (5.38) через $F(z)$, потребуем, чтобы это выражение имело вид $F(z) = (z - w)^2 \tilde{F}(z)$, где функция $\tilde{F}(z)$ является регулярной в окрестности точки $z = w$. Это требование означает выполнение системы из двух уравнений $F(w) = 0$, $F'(w) = 0$, которая является линейной по своим неизвестным x и y . Решение имеет вид

$$x = \frac{1}{t^2 w^2 + 1}, \quad y = \frac{t^2(w^2 - 2w + 1)}{(t^2 + 1)(t^2 w^2 + 1)}, \quad w \in [1, \infty). \quad (5.39)$$

Нетрудно видеть, что при w пробегающем значения на вещественной оси от $w = 1$ до $w = \infty$, точка (x, y) описывает кривую Γ_{NW} , между точками касания верхней и левой границ, $(\kappa, 0)$ и $(0, \kappa)$, соответственно. Исключение параметра w из выражений (5.39) ведет, очевидно, к явному уравнению для арктической кривой (5.35).

5.2.3. Гипотеза конденсации в общем случае

Как только что было показано на примере случая $\Delta = 0$, предположение о соответствии корней между конденсацией корней и арктической кривой Γ_{NW} позволяет вывести эту кривую в параметрической форме. Кривая возникает через требование пары совпадающих корней для редуцированного уравнения перевала. Соответствие между конденсацией корней и арктической кривой может быть проверена путем непосредственного вывода выражения для резольвенты, которая действительно сводится к выражение (5.34) для значений $(x, y) \in \Gamma_{\text{NW}}$.

Оказывается, что предположение о соответствии корней между конденсацией корней и арктической кривой может быть сформулировано для произвольных значений $\Delta \in (-\infty, 1)$. Основное наблюдение доказанное ниже, состоит в том, что два свойства представления для вероятности пустоты, указанные разделе 5.2.2, являются не зависящими от значения Δ . Это означает, что предположение о том что арктическая кривая возникает в соответствии с конденсацией почти всех корней уравнений перевала может быть использовано для вывода этой кривой и в ситуации общего положения. Следует подчеркнуть, что в общем случае, однако, такое соответствие не может быть проверено *a posteriori* аналитическими методами, например, вычислением резольвенты, поэтому мы называем его здесь *гипотезой конденсации*. Тем не менее, одним из аргументов справедливости этой является согласие получаемого аналитического выражения для арктической кривой с результатами симуля-

ций матриц чередующихся знаков больших размеров, см. обсуждение в следующем разделе настоящей главы.

Забегая вперед, стоит упомянуть, что определенную роль ниже при анализе редуцированного уравнения перевала играет формула (5.4), которая справедлива для только разупорядоченной фазы $|\Delta| < 1$. По этой причине мы так или иначе вынуждены будем ограничиться здесь рассмотрением случаев разупорядоченной фазы, хотя метод на самом деле применим также и для антисегнетоэлектрического режима. Аналог формулы (5.4) для антисегнетоэлектрического режима выводится в конце следующего раздела, где также обсуждается арктическая кривая в этом случае.

Как уже было упомянуто, гипотеза конденсации в сильной степени основана на явном виде подынтегрального выражения в представлении для вероятности образования пустоты в виде многократного интеграла (4.42), которое удовлетворяет двум свойствам приведенным в разделе 5.2.2. Например, второе свойство, а именно, что полюс в точке $z = 1$ каждой переменной интегрирования z_1, \dots, z_s является полюсом порядка s , элементарно очевиден из вида представления (4.42). Что касается первого свойства, то для его проверки рассмотрим интеграл

$$I_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{s(s+1)/2} Z_s}{s!(2\pi i)^s a^{s(s-1)} c^s} \oint_{C_1^-} \dots \oint_{C_1^-} \prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1]^{s-1}}{z_j^r (z_j - 1)^s} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s \frac{1}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \\ \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j)^2 h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) h_{s,s}(u_1, \dots, u_s) dz_1 \dots dz_s, \quad (5.40)$$

где r и s могут принимать любые значения из набора $\{1, \dots, N\}$. Здесь C_1^- обозначает замкнутый отрицательно-ориентированный контур содержащий точку $z = 1$ и лежащий в ее малой окрестности. Интеграл (5.40) отличается от (4.42) только контуром интегрирования, и его значение тождественно равно единице. Чтобы в этом убедиться, полезно перейти к полностью эквивалентной форме записи этого интеграла в следующем виде:

$$I_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^s}{(2\pi i)^s} \oint_{C_1^-} \dots \oint_{C_1^-} \prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1]^{s-j}}{z_j^r (z_j - 1)^{s-j+1}} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{z_j - z_k}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \\ \times h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) dz_1 \dots dz_s. \quad (5.41)$$

Эквивалентность формул (5.40) и (5.41) следует из того факта, что подынтегральное выражение в (4.42) является симметризованным относительно перестановок переменных интегрирования выражения подынтегрального выражения в (4.41), см. обсуждение в разделе 4.2.4. В силу свойства (4.25), вычисление вычета в простом полюсе $z_s = 1$ в подынтегральном

выражении (5.41) дает исходное выражение при $s \mapsto s - 1$, и, поскольку $I_N^{(r,1)} = 1$, имеет место цепочка равенств

$$I_N^{(r,s)} = I_N^{(r,s-1)} = \dots = I_N^{(r,1)} = 1. \quad (5.42)$$

Таким образом, из (5.42) следует выполнение также и первого свойства, а именно, что общий вычет подынтегрального выражения в представлении для вероятности образования пустоты по всем переменным z_1, \dots, z_s в точке $z = 1$ равен 1, для произвольных значений параметра Δ .

5.2.4. Редуцированное уравнение перевала

Предположим теперь выполнение гипотезы о конденсации решений уравнений перевала (5.3) и выведем соответствующее редуцированное уравнение перевала. Следуя гипотезе конденсации, положим, что из всех s переменных z_k , $k = 1, \dots, s$, из них n_c равны 1. Тогда уравнения перевала сводятся к системе из n_u уравнений для n_u неконденсированных корней. Обозначим эти корни как z_j , $j = 1, \dots, n_u$. В дальнейшем важную роль будет играть тот факт, что отношение n_u/s стремится к нулю в скейлинговом пределе, согласно (5.37).

Рассмотрим последний член в сумме по s в уравнении перевала (5.3). Как уже было выше отмечено, при конденсации этому члену соответствует вклад в уравнение перевала в виде выражения $2s/(z_j - 1)$, в ведущем порядке при больших s . Аналогично, для других двух членов в этой сумме при больших s имеют место выражения

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^s \frac{t^2 z_k - 2\Delta t}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \longrightarrow s \frac{(t^2 - 2\Delta t)}{(t^2 - 2\Delta t) z_j + 1} + o(s),$$

и

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^s \frac{t^2 z_k}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1} \longrightarrow s \frac{t^2}{t^2 z_j - 2\Delta t + 1} + o(s),$$

соответственно. Далее, в силу свойства (4.25) функция $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$, фигурирующая в члене после после суммы по s в (5.3), упрощается до функции $h_{N,n_u}(z_1, \dots, z_{n_u})$, которая, в свою очередь при $N, s \rightarrow \infty$ и $n_u/N \sim 0$, допускает оценку при больших s напрямую из своего определения (4.24), что дает

$$\begin{aligned} \ln h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) &\longrightarrow \ln h_{N,n_u}(z_1, \dots, z_{n_u}) \\ &= \sum_{j=1}^{n_u} \ln h_N(z_j) + o(s). \end{aligned}$$

Аналогично, используя определение (4.38) откуда следует, что $u_k \rightarrow 0$ при $z_j \rightarrow 1$, и используя свойство (4.26), получим, что функция $h_{s,s}(u_1, \dots, u_s)$ фигурирующая в последнем члене

в уравнении (5.3), упрощается, с точностью до несущественного множителя до функции $h_{n_u, n_u}(u_1, \dots, u_{n_u})$. Напоминая, что $h_{n_u, n_u}(u_1, \dots, u_{n_u})$ является полиномом степени n_u по каждой из своих переменных, получим, что логарифм этой функции при больших s имеет оценку $o(s)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \ln h_{s,s}(u_1, \dots, u_s) &\longrightarrow \ln h_{n_u, n_u}(u_1, \dots, u_{n_u}) + \sum_{j=n_u+1}^s \ln h_j(0) \\ &= C_1 s^2 + C_2 s + o(s). \end{aligned}$$

Здесь C_1 и C_2 являются некоторыми величинами, которые не зависят от u_j , $j = 1, \dots, n_u$. Дифференцирование по этим любой из этих переменных оставляет от последнего выражения член вида $o(s)$, который в наших выкладках может быть опущен, в пределе больших s .

В результате, система уравнений перевала (5.3) упрощается к набору из n_u идентичных и несвязанных уравнений:

$$F(z_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n_u. \quad (5.43)$$

Функция $F(z)$ дается выражением

$$F(z) = \frac{y}{z-1} - \frac{1-x}{z} - \frac{yt^2}{t^2z - 2\Delta t + 1} + \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln h_N(z)}{N} \right)', \quad (5.44)$$

где скейлинговые переменные x и y определены в (5.1).

Чтобы получить арктическую кривую из редуцированного уравнения перевала, нужно потребовать, как уже обсуждалось выше в разделе 5.2.3, чтобы функция $F(z)$ имела двойной нуль в точке $z = w$, где, кроме того, $w \in [1, \infty)$. Записывая это условие в виде $F(z) = (z-w)^2 \tilde{F}(z)$, где $\tilde{F}(z)$ есть некоторая функция регулярная в окрестности точки $z = w$, нужное нам условие можно сформулировать как требование выполнения системы из двух уравнений

$$F(w) = 0, \quad F'(w) = 0, \quad w \in [1, \infty), \quad (5.45)$$

где неизвестными являются x и y . Для каждого значения $w \in [1, \infty)$, скейлинговые координаты x и y (которые являются функциями w) соответствуют точке арктической кривой, $(x, y) \in \Gamma_{NW}$. Иными словами, решение системы (5.45) дает уравнение арктической кривой в параметрическом виде, где w играет роль параметра.

5.3. Арктическая кривая и ее частные случаи

В этом разделе выводятся явные выражения для арктической кривой для разупорядоченной и антисегнетоэлектрической фазах, $\Delta \in (-\infty, 1)$. Также обсуждаются различные частные случаи арктической кривой, в частности, в приложении к предельной форме матриц чередующихся знаков.

5.3.1. Предельная форма матриц чередующихся знаков

Прежде чем обсуждать арктическую кривую в ситуации общего положения, полезно рассмотреть вначале два частных случая, для которых известно явное выражение для функции $h_N(z)$ при конечном N , помимо случая точки свободных фермионов. Это случаи $\Delta = 1/2$ и $\Delta = -1/2$, при $t = 1$, и они интересны тем, что они соответствуют 1- и 3-перечислениям матриц чередующихся знаков. Явные выражения для функции $h_N(z)$ в этих случаях были выведены в Главе 3 в контексте вывода детальных перечислений матриц чередующихся знаков размера $N \times N$.

В первом случае, $\Delta = 1/2$ (при $t = 1$), арктическая кривая представляет особый интерес, поскольку имеет смысл предельной формы матриц чередующихся знаков.

Чтобы получить явное уравнение этой кривой, вычислим последний член в выражении (5.44) в этом случае. Начнем с того, заметим, что формула (3.38), которая дает явное выражение для функции $h_N(z)$ при $\Delta = 1/2$ и $t = 1$ (см. также [27, 28]), может быть также записана в следующем виде:

$$h_N(z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -N+1, N \\ 2N \end{matrix} \middle| 1-z\right).$$

Поскольку здесь у гипергеометрической функции третий параметр положителен и больше второго, можно воспользоваться интегральным представлением Эйлера для гипергеометрической функции. Поэтому, для функции $h_N(z)$ также справедлива формула

$$h_N(z) = \frac{\Gamma(2N)}{[\Gamma(N)]^2} \int_0^1 [\tau(1-\tau)(1-\tau+z\tau)]^{N-1} d\tau. \quad (5.46)$$

Поведение при $N \rightarrow \infty$ этого интеграла может быть найдено с помощью стандартного метода перевала. Поскольку метод перевала для интеграла в (5.46) дает равномерную асимптотику по z , при вычислении последнего члена в формуле (5.44) мы можем использовать свойство перестановочности логарифмической производной по z и предела $N \rightarrow \infty$ (это свойство может быть также напрямую проверено для интеграла (5.46)). В ведущем порядке получим

$$\ln h_N(z) = N \ln [4v(1-v)(1-v+zv)] + o(N), \quad N \rightarrow \infty,$$

где v есть положение седловой точки,

$$v = \frac{2-z-\sqrt{z^2-z+1}}{3(1-z)}.$$

Дифференцируя полученное выражение по z , получим, функция $F(z)$ в редуцированном уравнении перевала (5.43), которое определяет арктическую кривую, в рассматриваемом

случае имеет вид

$$F(z) = \frac{y}{z-1} - \frac{1-x+y}{z} + \frac{1-\sqrt{z^2-z+1}}{z(1-z)}. \quad (5.47)$$

Условие того, что функция (5.47) имеет два совпадающих корня, согласно (5.45), дает следующее параметрическое решение для арктической кривой (предельной формы больших матриц чередующихся знаков):

$$x = 1 - \frac{2\omega - 1}{2\sqrt{\omega^2 - \omega + 1}}, \quad y = 1 - \frac{\omega + 1}{2\sqrt{\omega^2 - \omega + 1}}, \quad \omega \in [1, \infty).$$

Исключая параметр ω из этих уравнений, найдем, что предельная форма описывается следующим явным уравнением:

$$4x(1-x) + 4y(1-y) + 4xy = 1, \quad x, y \in [0, \frac{1}{2}]. \quad (5.48)$$

Интересно отметить, что кривая описываемая уравнением в формуле (5.48) для произвольных значений координат может быть определена как эллипс, вписанный в квадрат $[0, 2] \times [0, 2]$, у которого заданы точки касания с квадратом $(x, y) = (1/2, 0)$ и $(x, y) = (0, 1/2)$. Предельная форма матриц чередующихся знаков строиться из дуги эллипса, лежащего между этими двумя точками касания.

Важная роль формулы (5.48) в нашем подходе состоит в том, что арктическая кривая описываемая эта формулой допускает прямое сравнение имеющимися численными данными для матриц чередующихся знаков большого размера. Ниже эти результаты обсуждаются подробно.

Рассмотрим теперь случай $\Delta = -1/2$ и $t = 1$, соответствующий 3-перечислениям матриц чередующихся знаков. Как было доказано в главе 3, для функции $h_N(z)$ имеет место формула (см. также [27, 28]):

$$h_N(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(z+1)B_{2m}(z) & N = 2m + 2 \\ \frac{1}{9}(2z+1)(z+2)B_{2m}(z) & N = 2m + 3, \end{cases}$$

где $B_{2m}(z)$ есть полином степени $2m$:

$$B_{2m}(z) = \frac{m+1}{3^{m-1}(2m+3)} z^m (z+2)^m {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, m+2 \\ 2m+4 \end{matrix} \middle| \frac{z^2-1}{z(z+2)} \right) - \frac{m}{3^{m-1}(2m+3)} z^m (z+2)^{m-1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m+1, m+2 \\ 2m+4 \end{matrix} \middle| \frac{z^2-1}{z(z+2)} \right).$$

Как и выше, гипергеометрические полиномы здесь представлены так, чтобы можно было воспользоваться интегральным представлением Эйлера.

Вычисляя соответствующие интегралы методом перевала, получим

$$\ln h_N(z) = N \ln \left[\frac{2(2z+1)(z+2)}{9(z+1)} \right] + o(N) \quad N \rightarrow \infty.$$

Функция $F(z)$ в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{y}{z-1} - \frac{1-x}{z} - \frac{y}{2+z} + \frac{2z^2+4z+3}{(1+z)(2+z)(1+2z)} = 0. \quad (5.49)$$

Условие, что функция (5.49) имеет два совпадающих корня дает следующее параметрическое решение для арктической кривой — предельной формы 3-перечисляемых матриц чередующихся знаков:

$$\begin{aligned} x &= \frac{7\omega^4 + 14\omega^3 + 19\omega^2 + 12\omega + 2}{(\omega^2 + 2)(2\omega + 1)^2(\omega + 1)^2}, \\ y &= \frac{(\omega - 1)^2(6\omega^4 + 16\omega^3 + 19\omega^2 + 16\omega + 6)}{3(\omega^2 + 2)(2\omega + 1)^2(\omega + 1)^2}, \quad \omega \in [1, \infty). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Исключение параметра позволяет получить явное уравнение для кривой, которое является уравнением шестого порядка:

$$\begin{aligned} &324x^6 + 1620x^5y + 3429x^4y^2 + 4254x^3y^3 + 3429x^2y^4 + 1620xy^5 + 324y^6 \\ &- 972x^5 - 1458x^4y - 2970x^3y^2 - 2970x^2y^3 - 1458xy^4 - 972y^5 \\ &- 6147x^4 - 9150x^3y - 17462x^2y^2 - 9150xy^3 - 6147y^4 \\ &+ 13914x^3 + 24086x^2y + 24086xy^2 + 13914y^3 \\ &- 11511x^2 - 17258xy - 11511y^2 \\ &+ 4392x + 4392y - 648 = 0, \quad x, y \in [0, \frac{1}{2}]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Доказательство состоит в прямой проверке, что уравнение (5.51) тождественно удовлетворяется при подстановке выражений (5.50).

Возвращаясь к уравнению (5.48), полезно упомянуть сравнение кривой описываемой этим уравнением с имеющимися результатами по численным симуляциям больших матриц чередующихся знаков. Представленные результаты были получены Виландом [116] для матриц размера вплоть до $N = 1500$. При увеличении размера матриц имеет место сходимость к кривой, описываемой уравнением (5.48). Несмотря на то, что сходимость медленная, наблюдаемое соответствие указывает на корректность полученного результата.

На Рис. 5.2 представлены численные данные по симуляциям [116] 10 случайных матриц чередующихся знаков размера $N = 1500$, сгенерированных с помощью алгоритма «связи с прошлым» (“coupling from the past”) Проппа-Вильсона [117]. Каждая точка рисунка соответствует матричному элементу принадлежащему (верхнему-левому квадранту) матрицы,

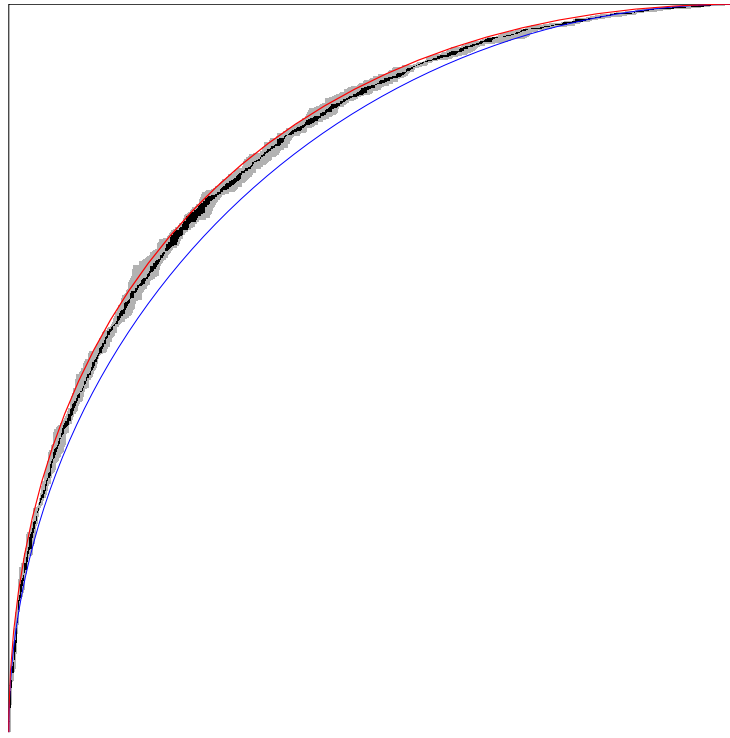


Рис. 5.2. Сравнение уравнения (5.48) для предельной формы матриц чередующихся знаков, внешняя кривая (в цвете — красная), с численными данными для $N = 1500$ [116]. Внутренняя кривая (в цвете — синяя) это окружность, описываемая уравнением (5.36), приведенная здесь для сравнения.

и относится к одной из пяти «корзин», в зависимости от частоты появления ненулевого значения этого матричного элемента в указанной случайной выборке матриц чередующихся знаков, для замороженной области. Пять «корзин» введены контрольными точками в 5%, 35%, 65%, и 95%. На рисунке изображены матричные элементы попавшие в три средние корзины, серым, черным, и вновь серым, цветами, соответственно. На рисунке также показана кривая определяемая аналитическим выражением (5.48) для предельной формы больших матриц чередующихся знаков (внешняя кривая, в цвете - красная), и, для сравнения, кривая задаваемая уравнением (5.36), которая описывает арктическую кривую для случая точки свободных фермионов (внутренняя кривая, в цвете - синяя).

5.3.2. Арктическая кривая в параметрической форме

Формула (5.4), описывающая главный член асимптотики функции $\ln h_N(z)$ в термодинамическом пределе ($N \rightarrow \infty$), фактически решает задачу о построении арктической кривой в разупорядоченной фазе модели. Для произвольных значений параметров арктическая кривая дается в параметрическом виде.

Чтобы получить явный вид уравнения определяющего положения неконденсированных корней, необходимо знать последний член в выражении для функции $F(z)$. В дальнейшем

нам понадобится рассматривать случай z вещественных и положительных. Для этих значений можно воспользоваться формулой (5.4), которая описывает главный член асимптотики функции $\ln h_N(z)$ при больших N , для случая $|\Delta| < 1$. Из этой формулы для последнего члена в (5.44) получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln h_N(\gamma(\xi))}{N} = \ln \left(\frac{\sin \alpha(\lambda - \eta) \sin \alpha \xi \sin(\xi + \lambda - \eta)}{\alpha \sin(\lambda - \eta) \sin \xi \sin \alpha(\xi + \lambda - \eta)} \right).$$

Принимая во внимание, что функция $\gamma(\xi)$, определенная в (5.5), является монотонно растущей функцией с значениями от $-\infty$ до $+\infty$, на интервале $\xi \in (-\lambda - \eta, \pi - \lambda - \eta)$, который является интервалом периода функции $\gamma(\xi)$ (заметим, что $\gamma(\xi)$ является рациональной функцией $\cot \xi$), нетрудно заметить, что удобно перейти от функции $F(z)$ к функции

$$f(\xi) = \gamma'(\xi)F(\gamma(\xi)). \quad (5.52)$$

Учитывая, что

$$\gamma'(\xi) = \frac{\sin(\lambda + \eta) \sin 2\eta}{\sin(\lambda - \eta) \sin^2(\xi + \lambda + \eta)}$$

непосредственное вычисление из (5.43) ведет к следующему компактному выражению для этой функции

$$f(\xi) = x \varphi(\xi + \lambda) + y \varphi(\xi + \eta) - \Psi(\xi), \quad (5.53)$$

где функция $\varphi(\xi)$ дается (1.13), а функция $\Psi(\xi)$ имеет вид

$$\Psi(\xi) = \cot \xi - \cot(\xi + \lambda + \eta) - \alpha \cot \alpha \xi + \alpha \cot \alpha(\xi + \lambda - \eta).$$

В силу свойств $\Psi(\pi - \lambda - \eta - \xi) = \Psi(\xi)$ и $\varphi(\pi - \xi) = \varphi(\xi)$, функция $f(\xi)$ инвариантна относительно подстановки $\xi \mapsto \pi - \lambda - \eta - \xi$ и одновременной перестановки координат, $x \leftrightarrow y$. Это означает, что функция $f(\xi)$ будет приводить к симметричной относительно отражения диагонали арктической кривой, в согласии с свойствами симметрии этой кривой приведенными в начале настоящей главы.

Принимая в внимание наблюдение выше, что в случае разупорядоченной фазы, $|\Delta| < 1$, удобно вместо функции $F(z)$ использовать функцию $f(\xi)$, введенную по формуле (5.52), получим, что система уравнений (5.45) переписывается в виде следующей системы

$$f(\zeta) = 0, \quad f'(\zeta) = 0, \quad \zeta \in [0, \pi - \lambda - \eta],$$

где ζ есть новый параметр, $w = \gamma(\zeta)$. Решение этой системы, с использованием (5.53), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varphi'(\zeta + \eta)\Psi(\zeta) - \varphi(\zeta + \eta)\Psi'(\zeta)}{\varphi(\zeta + \lambda)\varphi'(\zeta + \eta) - \varphi(\zeta + \eta)\varphi'(\zeta + \lambda)}, \\ y &= \frac{\varphi(\zeta + \lambda)\Psi'(\zeta) - \varphi'(\zeta + \lambda)\Psi(\zeta)}{\varphi(\zeta + \lambda)\varphi'(\zeta + \eta) - \varphi(\zeta + \eta)\varphi'(\zeta + \lambda)}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Выражения (5.54) для координат точек левой верхней части арктической кривой, $(x, y) \in \Gamma_{\text{NW}}$, описываются параметром ζ принимающем значения на интервале $[0, \pi - \lambda - \eta]$. Значение $\zeta = 0$ соответствует точке касания Γ_{NW} с x -осью, и при возрастании ζ кривая Γ_{NW} строится монотонно вплоть до точки касания с y -осью, которой соответствует значение $\zeta = \pi - \lambda - \eta$.

Используя свойства функций входящих в (5.54), полученный результат для арктической кривой можно записать также в виде:

$$x = X(\zeta), \quad y = Y(\zeta), \quad \zeta \in [0, \pi - \lambda - \eta], \quad (5.55)$$

где функции $X(\zeta) = X(\zeta; \lambda, \eta)$ и $Y(\zeta) = Y(\zeta; \lambda, \eta)$ связаны соотношением

$$X(\zeta) = Y(\pi - \lambda - \eta - \zeta). \quad (5.56)$$

Непосредственное вычисление дает следующий результат:

$$\begin{aligned} Y(\zeta) = & \frac{\sin^2 \zeta \sin^2(\zeta + 2\eta) \sin(\zeta + \lambda - \eta) \sin(\zeta + \lambda + \eta)}{\sin 2\eta \sin(\lambda - \eta) [\sin(\zeta + \lambda - \eta) \sin \zeta + \sin(\zeta + \lambda + \eta) \sin(\zeta + 2\eta)]} \\ & \times \left\{ \frac{\sin(\lambda - \eta) \sin(\lambda + \eta)}{\sin^2 \zeta \sin(\zeta + \lambda + \eta) \sin(\zeta + \lambda - \eta)} \right. \\ & + \frac{\sin(2\zeta + 2\lambda)}{\sin(\zeta + \lambda - \eta) \sin(\zeta + \lambda + \eta)} \frac{\alpha \sin \alpha(\lambda - \eta)}{\sin \alpha \zeta \sin \alpha(\zeta + \lambda - \eta)} \\ & \left. - \frac{\alpha^2 \sin \alpha(2\zeta + \lambda - \eta) \sin \alpha(\lambda - \eta)}{\sin^2 \alpha \zeta \sin^2 \alpha(\zeta + \lambda - \eta)} \right\}. \quad (5.57) \end{aligned}$$

Напомним, что формулы (5.55), (5.56), (5.57) описывают арктическую кривую шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в критическом режиме $|\Delta| < 1$. Эти формулы являются одним из основных результатов настоящей главы.

Полностью аналогично арктическая кривая может быть получена в случае антисегнетоэлектрической фазы $\Delta < -1$. Для этой фазы кроссинг параметр вводится так, что $\Delta = -\cosh \eta$ и веса параметризуются в виде

$$a = \sinh(\eta - \lambda), \quad b = \sinh(\eta + \lambda), \quad c = \sinh 2\eta, \quad (5.58)$$

где λ принимает значения в интервале $(-\eta, \eta)$. Введем также функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, так что $a = a(\lambda)$, $b = b(\lambda)$, и определим функции $\varphi(\lambda)$ и $\gamma(\xi) = \gamma(\xi; \lambda)$ по формулам, аналогичным случаю разупорядоченной фазы,

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sinh 2\eta}{\sinh(\eta - \lambda) \sinh(\eta + \lambda)} = \frac{c}{a(\lambda)b(\lambda)}, \quad (5.59)$$

и

$$\gamma(\xi) = \frac{\sinh(\eta - \lambda) \sinh(\eta + \lambda + \xi)}{\sinh(\eta + \lambda) \sinh(\eta - \lambda - \xi)} = \frac{a(\lambda) b(\xi + \lambda)}{b(\lambda) a(\xi + \lambda)}, \quad (5.60)$$

соответственно.

Теперь мы готовы вывести явную формулу для арктической кривой в антисегнетоэлектрической фазе. Как и в случае разупорядоченной фазы (см. также [35]), перейдем от функции $F(z)$, задаваемой формулой (5.44), к функции $f(\xi) = \gamma'(\xi)F(\gamma(\xi))$. Непосредственное вычисление дает

$$f(\xi) = x\varphi(\xi + \lambda) + y\varphi(\xi - \eta) - \Psi(\xi)$$

где функция $\varphi(\lambda)$ дается формулой (5.59) а функция $\Psi(\xi)$ определяется следующим образом:

$$\Psi(\xi) = \varphi(\xi + \lambda) - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln h_N(\gamma(\xi)).$$

Вычисление последнего члена для антисегнетоэлектрической фазы представляет отдельную задачу, решение которой в разделе 5.3.4; здесь мы приведем окончательный результат для функции $\Psi(\xi)$:

$$\Psi(\xi) = \coth \xi - \coth(\xi + \lambda - \eta) - \alpha \frac{\vartheta_1'(\alpha\xi)}{\vartheta_1(\alpha\xi)} + \alpha \frac{\vartheta_1'(\alpha(\xi + \lambda + \eta))}{\vartheta_1(\alpha(\xi + \lambda + \eta))}. \quad (5.61)$$

Заметим, что значениям $z \in [1, \infty)$ соответствуют значения $\xi \in [0, \eta - \lambda]$ и поскольку функция $\gamma(\xi)$ монотонно растет на этом интервале, использование функции $f(\xi)$ вместо $F(z)$ позволяет полностью построить арктическую кривую на всем участке между двумя точками контакта.

Уравнения (5.45) заменяются уравнениями

$$f(\xi) = 0, \quad f'(\xi) = 0,$$

и решая эту линейную систему относительно x и y , получим:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varphi'(\xi - \eta)\Psi(\xi) - \varphi(\xi - \eta)\Psi'(\xi)}{\varphi(\xi + \lambda)\varphi'(\xi - \eta) - \varphi(\xi - \eta)\varphi'(\xi + \lambda)}, \\ y &= \frac{\varphi(\xi + \lambda)\Psi'(\xi) - \varphi'(\xi + \lambda)\Psi(\xi)}{\varphi(\xi + \lambda)\varphi'(\xi - \eta) - \varphi(\xi - \eta)\varphi'(\xi + \lambda)}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Напомним, что здесь функции $\varphi(\lambda)$ и $\Psi(\xi)$ даются формулами (5.59) и (5.61), соответственно.

5.3.3. Уравнения арктической кривой для частных значений параметров

Здесь мы обсудим полученные выше общие формулы для арктической кривой для нескольких частных случаев значений параметров. Напомним, что когда веса a и b равны ($\lambda = \pi/2$ в случае разупорядоченной фазы, либо $\lambda = 0$ в случае антисегнетоэлектрической фазы), арктическая кривая также описывает предельную форму больших матриц чередующихся знаков для q -перечислений где $q = 2 - 2\Delta$. Ниже мы обсуждаем различные частные случаи в терминах параметра Δ ; для симметричных весов, $a = b$, эти результаты имеют

непосредственную интерпретацию в контексте матриц чередующихся знаков. А именно, рассмотрены частные случаи формул (5.57) для $\Delta = 0, 1/2, -1/2, -1$, и для очень интересного предельного случая $\Delta \rightarrow 1^-$, а также (5.61) для $\Delta \rightarrow -\infty$.

При $\Delta = 0$, или $\eta = \pi/4$, и произвольного λ , функция $Y(\zeta)$ в (5.57) имеет вид

$$Y(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\zeta), \quad \zeta \in [0, \frac{3\pi}{4} - \lambda].$$

Исключая параметр ζ из уравнений (5.55) получим уравнение арктического эллипса (5.35), где $t \equiv \tan(\lambda - \pi/4)$, в полном согласии с результатами известными из замощений домино ацтекского диаманта [50].

При $\Delta = 1/2$, или $\eta = \pi/6$, и $\lambda = \pi/2$ функция $Y(\zeta)$ в (5.57) имеет вид

$$Y(\zeta) = 1 - \cos \zeta, \quad \zeta \in [0, \frac{\pi}{3}].$$

Исключая параметр ζ из уравнений (5.55) получим уравнение (5.48). Стоит отметить, что при $\eta = \pi/6$, но для произвольного λ кривая Γ_{NW} является описывается уравнением десятого порядка [37].

При $\Delta = -1/2$, или $\eta = \pi/3$, и $\lambda = \pi/2$ функция $Y(\zeta)$ в (5.57) имеет вид

$$Y(\zeta) = 4 \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{3} - \zeta) \tan \zeta}{1 + 2 \cos 2\zeta} \right]^2 \frac{11 + 12 \cos 2\zeta - 2 \cos 4\zeta}{6 - 3 \cos 2\zeta - \sqrt{3} \sin 2\zeta}, \quad \zeta \in [0, \frac{\pi}{6}].$$

Параметрическая форма (5.50) соответствует $w = \sin(\pi/6 + \zeta) / \sin(\pi/6 - \zeta)$; уравнения (5.55) приводят к уравнению шестого порядка (5.51).

Случай $\Delta = -1$ требует более детального рассмотрения, поскольку он соответствует переходу между разупорядоченной и антисегнетоэлектрической фазами. Стандартная параметризация весов для этого случая имеет вид

$$a = 1 + v, \quad b = 1 - v, \quad c = 2, \quad v \in (-1, 1).$$

Эта параметризация достигается, например, пределом $\delta \rightarrow 0$ для весов разупорядоченной фазы (1.3), если положить

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - v\delta, \quad \eta = \frac{\pi}{2} - \delta. \quad (5.63)$$

Соответственно, для параметра описывающего точки кривой Γ_{NW} , мы положим $\zeta = p\delta$ и тогда уравнения (5.55) примут вид $x = \tilde{X}(p)$, $y = \tilde{Y}(p)$, где p есть новый параметр кривой, $p \in [0, 1 + v]$, и

$$\tilde{X}(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} X(p\delta), \quad \tilde{Y}(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} Y(p\delta),$$

где δ также входит в λ и η согласно (5.63). Функции $\tilde{X}(p)$ и $\tilde{Y}(p)$ также зависят от v как от параметра, и, в силу (5.56), удовлетворяют соотношению $\tilde{X}(p) = \tilde{Y}(1 + v - p)$. Явно, функция $\tilde{Y}(p)$ имеет вид:

$$\tilde{Y}(p) = \frac{(2-p)^2}{4(1-v)[(1+v)(1-p) + p^2]} \left\{ 1 - v^2 - \pi p^2(p-v) \frac{\cos \frac{\pi}{2}v}{\sin \frac{\pi}{2}p \cos \frac{\pi}{2}(p-v)} - \pi^2 p^2 [1 - (p-v)^2] \frac{\cos \frac{\pi}{2}v \cos \frac{\pi}{2}(2p-v)}{4 \sin^2 \frac{\pi}{2}p \cos^2 \frac{\pi}{2}(p-v)} \right\}, \quad p \in [0, 1+v].$$

В отличие от всех рассмотренных предыдущих частных случаях, арктическая кривая в этом случае не является алгебраической. При $v = 0$, что соответствует $a = b$, арктическая кривая описывает предельную форму матриц чередующихся знаков для 4-перечислений.

Случай $\Delta \rightarrow 1^-$ соответствует пределу $\eta \rightarrow 0$. Для произвольного λ и малого η функция $Y(\zeta)$ имеет вид

$$Y(\zeta) = \frac{1}{2\pi}(2\zeta - \sin 2\zeta) + O(\eta), \quad \zeta \in [0, \pi - \lambda - \eta].$$

Формула (5.56) означает, что $X(\zeta) = Y(\pi - \lambda) + O(\eta)$. Дальнейшее рассмотрение зависит от того, стремиться ли к нулю параметр λ согласованно с η в пределе $\eta \rightarrow 0$, или остается конечным. А именно, согласованный вариант предельного перехода состоит в том, чтобы положить $\lambda = \eta v$ или $\lambda = \pi - \eta v$, где v новый спектральный параметр весов ($v \geq 1$); этот выбор соответствует одной из двух веток, $a > b$ или $a < b$, соответственно, модели при $\Delta = 1$. Веса параметризуются как $a = v \pm 1$, $b = v \mp 1$, $c = 2$, где $v \geq 1$, где два выбора знаков соответствуют двум веткам модели при $\Delta = 1$. При $a > b$, исключая параметр ζ , найдем, что кривая есть просто прямая $x + y = 1$, где $x, y \in [0, 1]$. При $a < b$ кривая Γ_{NW} вырождается в точку $x = y = 0$. Это все находится в согласии тем фактом, что при $\Delta = 1$ модель более не является в разупорядоченной фазе; область D на рис. 5.1 вырождается в прямую линию $x + y = 1$, при $a > b$, или $x = y$, при $a < b$.

Вариант предельного перехода, при котором параметр λ остается фиксированным при $\eta \rightarrow 0$ является более содержательным с точки зрения обсуждения арктической кривой. На фазовой диаграмме шестивершинной модели в a/c - b/c плоскости этот переход соответствует пределу по направлению к бесконечности внутри области фазовой диаграммы соответствующей разупорядоченной фазе, вместо предела к одной из двух веток модели при $\Delta = 1$, см. Рис. 3.1. В частности, полагая $\lambda = \pi/2$ и опуская малые по η поправки, найдем, что кривая Γ_{NW} дается уравнением

$$x + y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cos \pi(x - y), \quad x, y \in [0, \frac{1}{2}]. \quad (5.64)$$

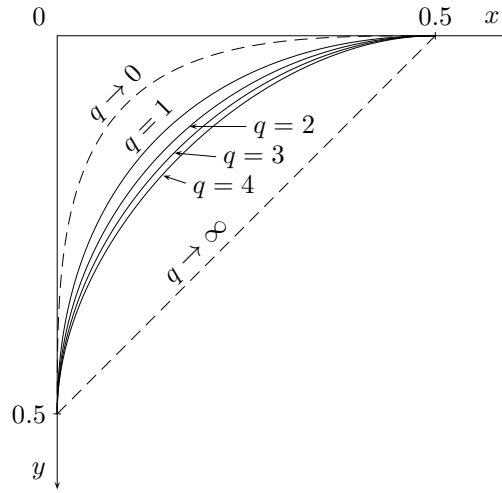


Рис. 5.3. Предельная форма матриц чередующихся знаков для различных q -перечислениях.

Уравнение (5.64) имеет интересную интерпретацию в контексте матриц чередующихся знаков: это есть уравнение кривой к которой стремится предельная форма при q -перечислениях в пределе $q \rightarrow 0$. Появление нетривиальной предельной кривой объясняется тем фактом, что два предела, $N \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow 0$, не коммутируют.

Наконец, случай $\Delta \rightarrow -\infty$ соответствует пределу $\eta \rightarrow \infty$ в параметризации весов для антисегнетоэлектрического режима (5.58). Формулы (5.62) в пределе $\eta \rightarrow \infty$ где $\lambda = -v\eta$, $v \in (-1, 1)$, сводятся к прямой

$$x + y = \frac{1 + v}{2}. \quad (5.65)$$

В случае симметричных весов, $\lambda = 0$, что соответствует $v = 0$, прямая (5.65) описывает кривую, к которой стремятся предельные формы матриц чередующихся знаков в q -перечислениях при $q \rightarrow \infty$.

В качестве иллюстрации рассмотренных частных случаев, на рис. 5.3 показаны кривые Γ_{NW} в контексте предельных форм матриц чередующихся знаков в q -перечислениях для значений $q = 1, 2, 3, 4$, и в пределах $q \rightarrow 0, -\infty$. Эти кривые соответствуют арктическим кривым для шестивершинной модели с симметричными весами, $a = b$, при значениях $\Delta = 1/2, 0, -1/2, 1$, и в пределах $\Delta \rightarrow 1, -\infty$. Пример для случая несимметричных весов ($a \neq b$) приведен на рис. 5.1, где показана полная арктическая кривая \mathcal{A} , построенная из кривой Γ_{NW} по процедуре описанной в разделе 5.1.1, в случае $\eta = \pi/6$ и $\lambda = 5\pi/12$.

5.3.4. Производящая функция в антисегнетоэлектрической фазе

Рассмотрим неоднородную шестивершинную модель (на $N \times N$ решетке с граничными условиями типа доменной стенки) в антисегнетоэлектрической фазе, зависящую от двух наборов параметров $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ и $\{\nu_k\}_{k=1}^N$. Как и в случае разупорядоченной фазы, см. формулы

(1.6) и (1.7), веса a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} вершины находящейся на пересечении k -ой горизонтальной и j -ой вертикальной линий, определяются путем замены $\lambda \mapsto \lambda_j - \nu_k$ в (5.58). Статистическая сумма дается формулой Изергина–Корепина:

$$Z_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N) = \frac{\prod_{j,k=1}^N \sinh(\eta - \lambda_j + \nu_k) \sinh(\eta + \lambda_j - \nu_k)}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} \sinh(\lambda_k - \lambda_j) \sinh(\nu_j - \nu_k)} \det_{1 \leq j, k \leq N} [\varphi(\lambda_j - \nu_k)],$$

где функция $\varphi(\lambda)$ определена в (5.59). Рассмотрим неполный однородный предел в котором все параметры неоднородности, кроме одного, например λ_1 , стремятся к своим значениям в однородном пределе, $\lambda_2, \dots, \lambda_N \rightarrow \lambda$ и $\nu_1, \dots, \nu_N \rightarrow 0$. Полагая $\lambda_1 = \lambda + \xi$, где ξ новый параметр, формула Изергина–Корепина перефразированная в терминах производящей функции $h_N(z)$, имеет вид (см., например, приложение в работе [35]):

$$h_N(\gamma(\xi)) = \left[\frac{\sinh(\eta - \lambda)}{\sinh(\eta - \lambda - \xi)} \right]^{N-1} \frac{Z_N(\lambda + \xi, \lambda, \dots, \lambda; 0, \dots, 0)}{Z_N(\lambda, \dots, \lambda; 0, \dots, 0)}. \quad (5.66)$$

Здесь функция $\gamma(\xi)$ дается в (5.60). Таким образом, последний член в (5.44) в случае анти-сегнетоэлектрического режима может быть найден путем вычисления термодинамического предела для формулы Изергина–Корепина с одной неоднородностью, аналогично тому как это было проделано в разделе 5.1.4 в случае критического режима.

В работе [58] методы моделей случайных матриц были применены для вычисления термодинамического предела статистической суммы в полностью однородном пределе, которая дается формула Изергина–Корепина вида (1.12) с весами (5.58). Эта же техника может быть применена для вычисления термодинамического предела функции (5.66).

Стартовая точка метода состоит в том, чтобы рассмотреть преобразование Лапласа функции $\varphi(\lambda)$ вида

$$\varphi(\lambda) = \int e^{\lambda z} dm(z),$$

где $dm(z) = dm(z; \lambda, \eta)$ есть некоторая мера, которая в случае антисегнетоэлектрической фазы является дискретной, явный вид которой приведен в работе [58]. Введем обозначение

$$I_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} [\varphi(\lambda_j - \nu_k)]}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} \sinh(\lambda_k - \lambda_j) \sinh(\nu_j - \nu_k)}.$$

Используя свойства определителей и симметрию меры N -кратного интегрирования, это выражение может быть переписано в виде

$$I_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \nu_1, \dots, \nu_N) = \frac{1}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} \sinh(\lambda_k - \lambda_j) \sinh(\nu_j - \nu_k)} \times \frac{1}{N!} \int \cdots \int \det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{\lambda_j z_k}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{-\nu_j z_k}] dm(z_1) \cdots dm(z_N).$$

Рассмотрим однородный предел, а именно, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \rightarrow \lambda$ и $\nu_1, \dots, \nu_N \rightarrow 0$, в этом выражении. Например, вычисляя предел $\lambda_1, \dots, \lambda_N \rightarrow \lambda$, получим

$$\lim_{\lambda_1, \dots, \lambda_N \rightarrow \lambda} \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{\lambda_j z_k}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} \sinh(\lambda_k - \lambda_j)} = \frac{e^{\lambda(z_1 + \dots + z_N)}}{\prod_{j=1}^{N-1} j!} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_k - z_j).$$

Полностью аналогичное выражение получим при вычислении предела $\nu_1, \dots, \nu_N \rightarrow 0$. Обозначая $I_N \equiv I_N(\lambda, \dots, \lambda; 0, \dots, 0)$, получим

$$I_N = \frac{1}{N! \prod_{j=1}^{N-1} (j!)^2} \int \dots \int dm_N(\{z_j\}), \quad (5.67)$$

где

$$dm_N(\{z_j\}) \equiv e^{\lambda(z_1 + \dots + z_N)} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_k - z_j)^2 dm(z_1) \dots dm(z_N).$$

Формула (5.67) является фактически представлением в виде матричной модели для статистической суммы (1.12) работы [58].

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda_2, \dots, \lambda_N \rightarrow \lambda$, но $\lambda_1 = \lambda + \xi$, где ξ является произвольным. В этом случае можно сначала разложить появляющийся в числителе определитель по элементам первого столбца, а затем взять предел,

$$\lim_{\lambda_2, \dots, \lambda_N \rightarrow \lambda} \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{\lambda_j z_k}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} \sinh(\lambda_k - \lambda_j)} = \frac{(-1)^{N-1} e^{\lambda(z_1 + \dots + z_N)}}{(\sinh \xi)^{N-1} \prod_{j=1}^{N-2} j!} \sum_{l=1}^N (-1)^{l-1} e^{\xi z_l} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ j, k \neq l}} (z_k - z_j),$$

заменяя далее сумму контурным интегралом (см, например, [118]),

$$\sum_{l=1}^N (-1)^{N-l} e^{\xi z_l} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ j, k \neq l}} (z_k - z_j) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_k - z_j) \oint_C \frac{e^{\xi z}}{\prod_{j=1}^N (z - z_j)} \frac{dz}{2\pi i},$$

где C есть простой замкнутый положительно-ориентированный контур обходящий все z_j , $j = 1, \dots, N$. В результате, для величины $I_N(\xi) := I_N(\lambda + \xi, \lambda, \dots, \lambda; 0, \dots, 0)$ получим

$$I_N(\xi) \propto \frac{1}{(\sinh \xi)^{N-1}} \int \dots \int dm_N(\{z_j\}) \oint_C \frac{e^{\xi z}}{\prod_{j=1}^N (z - z_j)} dz. \quad (5.68)$$

Здесь и ниже мы опускаем, для простоты записи, все множители не дающие вклад в логарифмическую производную от $I_N(\xi)$ (см. формулы (5.44) и (5.66)).

При рассмотрении предела большого N в выражениях типа представленных в (5.67) и (5.68) в рамках метода перевала, опыт из теории моделей случайных матриц указывает на необходимость рассмотреть растяжение переменных z_j , на величину порядка N , а именно, $z_j \mapsto Nz_j$. Действительно, для того чтобы нетривиальная точка перевала существовала, все

члены в логарифме подынтегрального выражения должны быть одного порядка. Решение уравнений перевала содержится в резольвенте $W(z)$, определенной формулой

$$W(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{z - z_j}$$

где величины z_j даются решением системы уравнений перевала ассоциированного с многократным интегралом (5.67).

В случае выражения (5.68), растягивая переменные $z_j \mapsto Nz_j$, и проводя замену $z \mapsto Nz$, получим

$$I_N(\xi) \propto \frac{1}{(\sinh \xi)^{N-1}} \int \cdots \int d\tilde{m}_N(\{z_j\}) \oint_C \frac{e^{N\xi z}}{\prod_{j=1}^N (z - z_j)} dz, \quad (5.69)$$

где $\tilde{m}_N(\{z_j\}) := m_N(\{Nz_j\})$. Важным обстоятельством является то, что множество уравнений перевала для переменных z_j по-прежнему такое же, как и для случая I_N , и соответствующее решение по-прежнему содержится в резольвенте $W(z)$. Имеет место, однако, еще одно уравнение, связанное с переменной z :

$$\xi = W(z_{\text{s.p.}}).$$

Другими словами, положение точки перевала для дополнительной переменной попросту дается обратной функцией от резольвенты, вычисленной в точке ξ :

$$z_{\text{s.p.}} = W^{-1}(\xi). \quad (5.70)$$

Стоит отметить, что соотношение обращения (5.70) возникает в различных задачах, см. например, работы [101, 119].

Дифференцируя выражение (5.69) по ξ , найдем

$$\frac{1}{N} (\ln I_N(\xi))' = -\frac{N-1}{N} \coth \xi + \frac{\int \cdots \int d\tilde{m}_N(\{z_j\}) \oint \frac{\exp(N\xi z)}{\prod_{j=1}^N (z - z_j)} z dz}{\int \cdots \int d\tilde{m}_N(\{z_j\}) \oint \frac{\exp(N\xi z)}{\prod_{j=1}^N (z - z_j)} dz}$$

и отсюда в пределе больших N , получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\ln I_N(\xi))' = -\coth \xi + z_{\text{s.p.}}$$

В силу (5.66) и соотношения обращения (5.70), получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln h_N(\gamma(\xi)) = \coth(\xi + \lambda + \eta) - \coth \xi + W^{-1}(\xi). \quad (5.71)$$

Таким образом, единственная информация, которая необходима для вычисления последнего члена в (5.44), это резольвента $W(z)$. Эта функция была вычислена в явном виде для всех

фаз шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в работе [58] (см. также [112]).

В антисегнетоэлектрической фазе, формулировка интеграла I_N в рамках модели случайных матриц, в пределе больших N , ведет к резольвенте с двумя разрезами, разделенными областью насыщения Дугласа–Казакова. В наших обозначениях, результаты работ [58, 110] означают, что резольвента имеет следующий вид:

$$W(z) = -\frac{\eta}{K}[u(\eta z) - u_\infty], \quad (5.72)$$

где функция $u(z)$ определена в терминах эллиптических функций Якоби в виде

$$\operatorname{sn}^2 u(z) := \frac{\beta - z}{\beta' - z} \operatorname{sn}^2 u_\infty,$$

с эллиптическим номом $q = \exp(-\pi^2/2\eta)$, и K есть соответствующий полный эллиптический интеграл первого рода. Величины β , β' , и $u_\infty := u(z)|_{z=\infty}$ даются формулами

$$\beta = \pi \frac{\vartheta'_1(\varkappa)}{\vartheta_1(\varkappa)}, \quad \beta' = \pi \frac{\vartheta'_4(\varkappa)}{\vartheta_4(\varkappa)}, \quad u_\infty = \frac{2K}{\pi} \varkappa,$$

где

$$\varkappa := \pi \frac{\eta - \lambda}{4\eta},$$

и, поскольку для антисегнетоэлектрического режима $\eta > 0$ и $-\eta < \lambda < \eta$, параметр \varkappa принимает значения в интервале $[0, \pi/2]$.

Функциональное соотношение (5.72) может быть легко обращено, откуда

$$z = W^{-1}(\xi) = \frac{\beta \operatorname{sn}^2 u_\infty - \beta' \operatorname{sn}^2(u_\infty - K\xi/\eta)}{\eta \operatorname{sn}^2 u_\infty - \eta \operatorname{sn}^2(u_\infty - K\xi/\eta)}.$$

Обозначая

$$\alpha := \frac{\pi}{2\eta}$$

и подставляя значения для констант β , β' , и u_∞ данных выше, и переходя к тета-функциям, получим

$$\begin{aligned} W^{-1}(\xi) &= 2\alpha \frac{\vartheta_1(\varkappa)\vartheta'_1(\varkappa)\vartheta_4^2(\varkappa - \alpha\xi) - \vartheta_4(\varkappa)\vartheta'_4(\varkappa)\vartheta_1^2(\varkappa - \alpha\xi)}{\vartheta_1^2(\varkappa)\vartheta_4^2(\varkappa - \alpha\xi) - \vartheta_4^2(\varkappa)\vartheta_1^2(\varkappa - \alpha\xi)} \\ &= \alpha \frac{\vartheta'_1(2\varkappa - \alpha\xi)\vartheta_1(\alpha\xi) - \vartheta_1(2\varkappa - \alpha\xi)\vartheta'_1(\alpha\xi)}{\vartheta_1(2\varkappa - \alpha\xi)\vartheta_1(\alpha\xi)} \\ &= \alpha \frac{\vartheta'_1(\alpha\xi)}{\vartheta_1(\alpha\xi)} - \alpha \frac{\vartheta'_1(\alpha(\xi + \lambda + \eta))}{\vartheta_1(\alpha(\xi + \lambda + \eta))}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Подстановка (5.73) в (5.71) дает результат вычисления логарифмической производной от главного члена асимптотики в термодинамическом пределе функции $h_N(\gamma(\xi))$ для антисегнетоэлектрической фазы, что и было использовано нами выше при выводе арктической кривой в этой фазе модели.

Глава 6

Фазовый переход третьего рода в замощениях домино

Целью настоящей главы является вычисление главного члена асимптотики в термодинамическом пределе для вероятности образования пустоты шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в случае весов удовлетворяющих условию свободный фермионов. Решение этой задачи позволяет исследовать термодинамику модели на так называемой L-образной области и исследовать поведение замощений домино при деформациях ацтекских диамантов путем вырезания прямоугольной области у угла диаманта. Обнаружено, что имеет место фазовый переход третьего рода на арктической кривой.

В первом разделе выводятся различные эквивалентные представления для вероятности образования пустоты. В втором разделе формулируется основной результат — теорема о главном члене асимптотики вероятности образования пустоты и исследуется фазовый переход на арктической кривой. В третьем разделе приводится доказательство теоремы на основе формулировки вероятности образования пустоты в терминах дискретного кулоновского газа с двумя потенциальными стенками. Глава основана на результатах автора опубликованных в работах [40, 41, 43, 44].

6.1. Вероятность образования пустоты в точке свободных фермионов

Этот раздел посвящен выводу различных представлений для вероятности образования пустоты для модели в точке свободных фермионов, которые эквивалентны представлению в терминах многократного интеграла. Получены представления в терминах: ганкелевых определителей, определителей Фредгольма интегрируемых интегральных операторов, решения системы разностно-дифференциальных уравнений типа цепочки Тоды, и, также, τ -функции шестого уравнения Пенлеве.

6.1.1. Представления в терминах ганкелевых определителей

В силу технических особенностей вычислений, которые будут проводиться в этой главе, вероятность образования пустоты $F_N^{(r,s)}$, которая была введена и вычислена в терминах многократного интеграла в главе 4, здесь будет обозначаться как $F_{r,s,q}$. Новый параметр q введен так, что $N = r + s + q$, при этом “замороженная” область на рис. 4.1 имеет размер

$s \times (s + q)$, а размер всей решетки задается параметром r . Очевидно, что без ограничения общности можно считать, что $q \geq 0$.

Вероятность образования пустоты для модели в точке свободных фермионов ($\Delta = 0$) уже обсуждалась нами в главе 5 в связи построением арктической кривой. В новых обозначения представление в терминах многократного контурного интеграла (в его симметризованном варианте) имеет вид

$$F_{r,s,q} = \frac{(-1)^{s(s+1)/2}}{s!} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_j - z_k)^2 \prod_{j=1}^s \frac{(\alpha z_j + 1 - \alpha)^{r+q}}{z_j^r (z_j - 1)^s} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s}, \quad (6.1)$$

где $d^s z \equiv dz_1 \cdots dz_s$, и, как обычно, C_0 обозначает простой, замкнутый, положительно ориентированный контур содержащий точку $z = 0$ и лежащий в ее малой окрестности. Параметр $\alpha \in [0, 1]$ задает веса модели при $\Delta = 0$,

$$\frac{a}{c} = \sqrt{1 - \alpha}, \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\alpha}. \quad (6.2)$$

Используемый здесь параметр α связан с параметрами t и τ , использовавшимися в главах 4 и 5 (а также в работах [31] и [35]), соответственно, как $\alpha = \tau/(1 + \tau) = t^2/(1 + t^2)$. Используемые здесь обозначения в определении свободно-фермионных весов (6.2) тесно связаны с интерпретацией модели как задачи о замощении домино, в контексте которых параметр α играет роль параметра асимметрии, как это обсуждалось в разделе 1.2.1. Заметим, что выбор весов в виде (6.2) отличается от такового в замощениях домино (1.18) только нормировкой, от которой вероятность образования пустоты, очевидно, не зависит (см. также обсуждение в разделе 6.2.1 ниже).

Следующее утверждение играет ключевую роль для вывода всех других результатов, обсуждаемых ниже в этой главе.

Предложение 6.1. *Вероятность образования пустоты для модели с весами (6.2), для всех $r, s, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ допускает представление в виде ганкелевого определителя*

$$F_{r,s,q} = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{q!}{(q+k)!k!} \cdot \frac{(1-\alpha)^{s(s+q)}}{\alpha^{s(s-1)/2}} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} m^{j+k-2} \frac{(q+m)!}{q!m!} \alpha^m \right]. \quad (6.3)$$

Доказательство. Чтобы вывести (6.3) начнем с того, что перепишем интеграл (6.1), переходя к переменным $x_j = (\alpha z_j + 1 - \alpha)/z_j$, $j = 1, \dots, s$, что дает

$$F_{r,s,q} = \frac{(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (1-\alpha)^{(s+q)s}}{s!} \oint_{C_\infty} \cdots \oint_{C_\infty} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (x_j - x_k)^2 \prod_{j=1}^s \frac{x_j^{r+q}}{(x_j - \alpha)^{s+q} (x_j - 1)^s} \frac{d^s x}{(2\pi i)^s}, \quad (6.4)$$

где C_∞ некоторый большой замкнутый положительно ориентированный контур. Запишем это представление в виде определителя, используя тождество

$$\text{Sym}_{x_1, \dots, x_s} \prod_{j=1}^s (x_j - \alpha)^{j-1} \det_{1 \leq j, k \leq s} [(x_j - 1)^{k-1}] = \frac{1}{s!} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (x_j - x_k)^2$$

где в левой части производится взятие симметричной части функции относительно перестановок переменных x_1, \dots, x_s . Тогда для вероятности образования пустоты получим представление

$$F_{r,s,q} = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (1 - \alpha)^{(N-r)s} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\oint_{C_\infty} \frac{x^{N-s}}{(x - \alpha)^{N-r-j+1} (x - 1)^{s-k+1}} \frac{dx}{2\pi i} \right].$$

Чтобы продолжить преобразования этого представления нам потребуется ограничиться значениями $q \geq 0$, которые, как уже обсуждалось выше, достаточны для полного описания $F_{r,s,q}$. Меняя порядок строк и столбцов в определителе, можно написать

$$F_{r,s,q} = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (1 - \alpha)^{(s+q)s} \det_{1 \leq j, k \leq s} [g_{j,k}(\alpha, \beta)] \Big|_{\beta=1}, \quad (6.5)$$

где для дальнейшего удобства вычислений введена дополнительная переменная β , а функция $g_{j,k}(\alpha, \beta)$ дается формулой

$$g_{j,k}(\alpha, \beta) := \oint_{C_\infty} \frac{x^{r+q}}{(x - \alpha)^{q+j} (x - \beta)^k} \frac{dx}{2\pi i}. \quad (6.6)$$

Нашей целью, таким образом, — показать, что определитель в выражении (6.5), с точностью до множителя, равен ганкелеву определителю.

Поскольку $q \geq 0$, можно написать

$$g_{j,k}(\alpha, \beta) = \frac{q!}{(q+j-1)!(k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^{k-1} g_{1,1}(\alpha, \beta).$$

Рассмотрим параметризацию переменных α, β в терминах новых переменных v, u , соответственно, в виде $\alpha = e^v, \beta = e^{-u}$. Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{j-1} = \left(e^{-v} \frac{\partial}{\partial v} \right)^{j-1} = e^{-(j-1)v} \sum_{i=1}^{j-1} c_i \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^i,$$

где c_i есть целые числа, и $c_{j-1} = 1$. Аналогичная формула имеет место также и для $(\partial/\partial\beta)^{k-1}$.

Таким образом, рассматривая линейные комбинации строк и, независимо, столбцов, получим

$$\det_{1 \leq j, k \leq s} [g_{j,k}(\alpha, \beta)] = (q!)^s \prod_{j=1}^s \frac{e^{-(j-1)v}}{(q+j-1)!} \prod_{k=1}^s \frac{(-1)^{k-1} e^{(k-1)u}}{(k-1)!} \times \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^{k-1} g_{1,1}(e^v, e^{-u}) \right]. \quad (6.7)$$

Чтобы далее преобразовать определитель, воспользуемся следующим простым свойством функции $g_{1,1}(e^v, e^{-u})$, которое следует из замены $x \mapsto e^{-u}x$ в интеграле (6.6):

$$g_{1,1}(e^v, e^{-u}) = e^{-(r-1)u} g_{1,1}(e^{v+u}, 1).$$

Поскольку $(\partial/\partial u)^{k-1} e^{-(r-1)u} = e^{-(r-1)u} [(\partial/\partial u)^{k-1} + \dots]$, где многоточие обозначает члены младших степеней по $\partial/\partial u$ с целыми коэффициентами, получим

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^{k-1} g_{1,1}(e^v, e^{-u}) \right] &= e^{-s(r-1)u} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^{k-1} g_{1,1}(e^{v+u}, 1) \right] \\ &= e^{-s(r-1)u} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{j+k-2} g_{1,1}(e^{v+u}, 1) \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В итоге, подставляя (6.8) в (6.7), и возвращаясь к исходным переменным, определитель в (6.5) оказывается выраженным через ганкелевый определитель:

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq s} [g_{j,k}(\alpha, \beta)] &= \frac{(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (q!)^s}{\prod_{k=1}^s (q+k-1)!(k-1)!} \frac{\beta^{s(p-q-1) - \frac{s(s-1)}{2}}}{\alpha^{\frac{s(s-1)}{2}}} \\ &\quad \times \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{j+k-2} g_{1,1}(\alpha/\beta, 1) \right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Нам осталось получить явное выражение для элементов матрицы в (6.9). Применяя вновь трюк с дифференцированием интеграла, и вычисляя интеграл по вычетам, получим

$$g_{1,1}(\alpha, 1) = \frac{1}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^q \oint_{C_\infty} \frac{x^{r+q}}{(x-\alpha)(x-1)} \frac{dx}{2\pi i} = \frac{1}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^q \frac{1-\alpha^{r+q}}{1-\alpha} = \frac{1}{q!} \sum_{m=0}^{r-1} \frac{(q+m)!}{m!} \alpha^m.$$

После подстановки этого выражения в (6.9) и дифференцирования, формула (6.5) есть в точности формула (6.3), которая, таким образом, доказана. \square

Полезно вкратце обсудить некоторые свойства только что доказанного представления. Стоит отметить, что это представление, в частности, интересно тем, что связано с матричной моделью которая значительно проще, нежели модель, с которой связано исходное представление многократным интегралом. Особенность матричной модели связанной с представлением (6.3) в том, что мера интегрирования дискретная и задана на конечном множестве значений. Этот факт имеет несколько интересных следствий; полезно обсудить одно из них, которое имеет отношение к ганкелевым определителям.

А именно, представление (6.3), которое содержит определитель $s \times s$ матрицы, ранг которой конечен (равен r), позволяет вывести эквивалентное представление, которое содержит определитель $(r-s) \times (r-s)$ матрицы (которая тоже имеет ранг r). Используя стандартные

свойства ганкелева определителя, можем написать формулу

$$\det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} m^{j+k-2} \rho(m) \right] = \sum_{0 \leq m_1 < \dots < m_s \leq r-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (m_k - m_j)^2 \prod_{j=1}^s \rho(m_j),$$

где функция $\rho(m)$ произвольна; в нашем случае ее выражение легко извлекается из (6.3).

Поскольку суммирование производится по конечному набору значений, это суммирование можно переписать как суммирование по незаполненным значениям (“дыркам”), а именно, по значениям $0 \leq p_1 < \dots < p_{r-s} \leq r-1$, таким, что

$$\{p_1, \dots, p_{r-s}\} := \{0, 1, \dots, r-1\} \setminus \{m_1, \dots, m_s\}.$$

Можно доказать, что

$$\prod_{1 \leq j < k \leq s} (m_k - m_j) = \frac{(r-1)!(r-2)! \dots 1!}{\prod_{j=1}^{r-s} (r-1-p_j)! p_j!} \prod_{1 \leq j < k \leq r-s} (p_k - p_j).$$

Желаемое преобразование суммирования в результате имеет вид

$$\det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} m^{j+k-2} \rho(m) \right] = \prod_{k=0}^{r-1} (k!)^2 \rho(k) \sum_{0 \leq p_1 < \dots < p_{r-s} \leq r-1} \prod_{1 \leq j < k \leq r-s} (p_k - p_j)^2 \times \prod_{j=1}^{r-s} \frac{1}{(p_j!)^2 [(r-1-p_j)!]^2 \rho(p_j)}.$$

Подставляя сюда явное выражение для функции $\rho(m)$ из (6.3), выполняя замену $p_j = r-1-m_j$ ($j = 1, \dots, r-s$) и переписывая сумму в виде ганкелевого определителя, для функции $f_{r,s,q}$ получим следующее представление

$$F_{r,s,q} = \prod_{k=s}^{r-1} \frac{(q+k)! k!}{q!} \cdot \frac{(1-\alpha)^{s(s+q)}}{\alpha^{(r-s)(r-s-1)/2}} \det_{1 \leq j, k \leq r-s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} \frac{m^{j+k-2} q! \alpha^m}{(q+r-m-1)!(r-m-1)!(m!)^2} \right]. \quad (6.10)$$

Это представление, также как и исходное представление (6.3), связано с тау-функцией конечной цепочки Тоды τ_s ($s = 0, 1, \dots, r$) описываемой уравнением (6.33a).

Формула (6.10) позволяет явно вычислить функцию $F_{r,s,q}$ при значениях r , близких к s , например,

$$F_{r,s,q} \Big|_{r=s} = (1-\alpha)^{s(s+q)}. \quad (6.11)$$

Также имеем

$$F_{r,s,q} \Big|_{r=s+1} = (1-\alpha)^{s(s+q)} \sum_{m=0}^s \binom{q+s}{m} \binom{s}{m} \alpha^m. \quad (6.12)$$

Эти специальные значения функции $F_{r,s,q}$ позволяют получить граничные значения $\tilde{\tau}_0$ и $\tilde{\tau}_1$, соответственно, для тау-функции $\tilde{\tau}_n$, где $n = r-s$ ($n = 0, 1, \dots$), полубесконечной цепочки Тоды связанной с уравнением (6.32a). Эти значения фиксируют выражение для $\tilde{\tau}_n$ в виде

некоторого ганкелевого определителя, что, в свою очередь, позволяет написать еще одно представление для функции $F_{r,s,q}$, а именно

$$F_{r,s,q} = [s!(s+q)!]^{r-s} \prod_{k=s}^{r-1} \frac{1}{k!(k+q)!} \cdot \frac{(1-\alpha)^{r(r+q)}}{\alpha^{(r-s)(r-s-1)}} \\ \times \det_{1 \leq j, k \leq r-s} \left[\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{j+k-2} \frac{1}{(1-\alpha)^{2s+q+1}} \sum_{m=0}^s \binom{q+s}{m} \binom{s}{m} \alpha^m \right].$$

Доказательство того, что функция $f_{r,s,q}$ задаваемая формулой (6.3) удовлетворяет, в частности, уравнению (6.32a), является одной из наших целей ниже (детали вывода (6.32a) см. в разделе 6.1.3).

6.1.2. Представления в терминах определителей Фредгольма

Используя формулу (6.3) можно показать, что вероятность образования пустоты представима в терминах определителей Фредгольма. Например, имеет место представление в терминах $s \times s$ матрицы

$$F_{r,s,q} = \det_{0 \leq j, l \leq s-1} [\delta_{jl} - (V_{r,q})_{jl}], \quad (6.13)$$

где матрица $V_{r,q}$ симметричная и имеет матричные элементы

$$(V_{r,q})_{jl} = \frac{1}{q!} \sqrt{\frac{(q+j)!(q+l)!}{j!l!}} (1-\alpha)^{q+1} \sum_{m=r}^{\infty} \frac{(q+m)!}{q!m!} \alpha^m M_j(m; q+1, \alpha) M_l(m; q+1, \alpha), \quad (6.14)$$

либо интегрального оператора с дискретным ядром

$$F_{r,s,q} = \det \left(I - U_{s,q} \Big|_{\mathbb{Z}_{\geq r}} \right), \quad (6.15)$$

где ядро оператора $U_{s,q}$ имеет вид

$$U_{s,q}(m, n) = \frac{1}{q!} \sqrt{\frac{(m+q)!(n+q)!}{m!n!}} (1-\alpha)^{q+1} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(q+j)!}{q!j!} \alpha^j M_j(m; q+1, \alpha) M_j(n; q+1, \alpha). \quad (6.16)$$

Используемые обозначения указывают, что m, n принимают значения на множестве $\mathbb{Z}_{\geq r} := \{r, r+1, \dots\}$, а также использовано стандартное обозначение для полиномов Мейкснера. Отметим, что элементы матрицы $V_{r,q}$ зависят от r и q (и не зависят от s), а ядро оператора $U_{s,q}$ зависит от s и q (и не зависит от r).

Чтобы вывести эти представления, представим сумму в выражении для элементов матрицы в определителе в (6.3) как разность двух бесконечных сумм

$$\sum_{m=0}^{r-1} = \sum_{m=0}^{\infty} - \sum_{m=r}^{\infty}$$

и обозначим через A_0 и A_r матрицы, соответствующие первой и второй суммам, соответственно.

В частности

$$(A_r)_{jk} = \sum_{m=r}^{\infty} m^{j+k-2} \rho(m), \quad (6.17)$$

где функция $\rho(m) = \rho(m; q, \alpha)$ определена формулой

$$\rho(m) = \frac{(q+m)!}{q!m!} \alpha^m. \quad (6.18)$$

Определитель в (6.3) перепишем в виде

$$\det(A_0 - A_r) = \det A_0 \cdot \det(I - A_0^{-1} A_r). \quad (6.19)$$

Определитель матрицы A_0 и элементы обратной матрицы, A_0^{-1} , явно вычисляются. Действительно, согласно общей теории ганкелевых матриц (см., например, [83]) матрица (6.17) при $r = 0$ естественно связана с ансамблем полиномов Мейкснера $\{M_n(x; q+1, \alpha)\}_{n=0}^{\infty}$, условие ортогональности которых для $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho(m) M_j(m; q+1, \alpha) M_k(m; q+1, \alpha) = h_j \delta_{jk},$$

где нормировочный коэффициент равен

$$h_j = \frac{j!q!}{(q+j)!} \frac{1}{\alpha^j (1-\alpha)^{q+1}}. \quad (6.20)$$

Полиномы Мейкснера имеют явный вид (см., например, [72])

$$M_j(m; q+1, \alpha) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -j, -m \\ q+1 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{1}{\alpha}\right). \quad (6.21)$$

Обозначая через \varkappa_j старший коэффициент полинома $M_j(m; q+1, \alpha)$, и извлекая из (6.21) явное выражение

$$\varkappa_j = (-1)^j \frac{q!}{(q+j)!} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^j,$$

стандартное вычисление определителя ганкелевой матрицы для матрицы A_0 дает

$$\det A_0 = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{h_j}{\varkappa_j^2} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{j!(q+j)! \alpha^j}{q! (1-\alpha)^{2j+q+1}} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{j!(q+j)!}{q!} \cdot \frac{\alpha^{s(s-1)/2}}{(1-\alpha)^{s(s+q)}}.$$

Полученное выражение в точности сокращает множитель стоящий перед определителем в формуле (6.3) и величина $f_{r,s,q}$, в результате, равна второму сомножителю в (6.19).

Преобразуем этот множитель, используя формулу

$$\det(I - A_0^{-1} A_r) = \exp \left\{ - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \text{Tr} (A_0^{-1} A_r)^p \right\}. \quad (6.22)$$

Согласно общей теории (см., например, [83]), элементы матрицы A_0^{-1} могут быть найдены из ядра Кристоффеля–Дарбу полиномов Мейкснера, которое является их производящей функцией,

$$(A_0^{-1})_{jk} = \frac{1}{(j-1)!(k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{k-1} \sum_{l=0}^{s-1} h_l^{-1} M_l(x; q+1, \alpha) M_l(y; q+1, \alpha) \Big|_{x=y=0}.$$

Учитывая, что из выражения (6.20) следует, что $h_j^{-1} = (1-\alpha)^{q+1} \rho(j)$, где функция $\rho(j)$ определена в (6.18), для матричных элементов произведения матриц A_0^{-1} и A_r получим

$$(A_0^{-1} A_r)_{jk} = \frac{(1-\alpha)^{q+1}}{(j-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{j-1} \sum_{l=0}^{s-1} \rho(l) M_l(x; q+1, \alpha) \sum_{m=r}^{\infty} m^{k-1} \rho(m) M_l(m; q+1, \alpha) \Big|_{x=0}. \quad (6.23)$$

При выводе этой формулы промежуточное суммирование было интерпретировано как разложение в ряд оператора $\exp\{m\partial/\partial y\}$.

Используя (6.23), и применяя аналогичную процедуру для выполнения промежуточных суммирований, нетрудно получить общую формулу для следа p -ой степени матрицы $A_0^{-1} A_r$. Справедлива формула

$$\begin{aligned} \text{Tr} (A_0^{-1} A_r)^p &= (1-\alpha)^{p(q+1)} \sum_{l_1, \dots, l_p=0}^{s-1} \sum_{m_1, \dots, m_p=r}^{\infty} \prod_{i=1}^p \rho(l_i) \rho(m_i) \\ &\quad \times M_{l_i}(m_i; q+1, \alpha) M_{l_{i+1}}(m_i; q+1, \alpha), \quad (6.24) \end{aligned}$$

где $l_{p+1} \equiv l_1$. Группируя различными способами суммирования в этой формуле, нетрудно видеть, что полученное выражение может быть записано как след p -ой степени $s \times s$ матрицы $V_{r,q}$, с матричными элементами (6.14), либо как интегрального оператора $U_{s,q}$, с дискретным ядром (6.16),

$$\text{Tr} (A_0^{-1} A_r)^p = \text{Tr}(V_{r,q})^p = \text{Tr}(U_{s,q})^p,$$

что и доказывает, в силу (6.22), формулы (6.13) и (6.15).

Используя тот факт, что полиномы Мейкснера могут быть построены с помощью рекуррентного соотношения

$$x p_l(x) = -\frac{(l+q+1)\alpha}{1-\alpha} p_{l+1}(x) + \frac{(l+q+1)\alpha + l}{1-\alpha} p_l(x) - \frac{l}{1-\alpha} p_{l-1}(x),$$

где $p_l(x) = M_l(x; q+1, \alpha)$, с начальными условиями $p_{-1}(x) = 0$ и $p_0(x) = 1$, для ядра $U_{s,q}(m, n)$ справедливо также представление

$$U_{s,q}(m, n) = \sqrt{\rho(m)\rho(n)} (1-\alpha)^q s \rho(s) \frac{p_s(m) p_{s-1}(n) - p_{s-1}(m) p_s(n)}{m-n}.$$

Диагональные элементы ядра следует понимать в смысле правила Лопиталья. Это формула означает (что, впрочем, верно для любого оператора с ядром типа Кристоффеля–Дарбу), что оператор $U_{s,q}$ является т.н. интегрируемым интегральным оператором, в смысле терминологии работы [73].

Аналогичное наблюдение, в определенном смысле, оказывается верным также и в случае матрицы $V_{r,q}$. Воспользуемся разностным уравнением, которому удовлетворяют полиномы Мейкснера (см., например, [72]),

$$lp_l(x) = -\frac{(x+q+1)\alpha}{1-\alpha}p_l(x+1) + \frac{(x+q+1)\alpha+x}{1-\alpha}p_l(x) - \frac{x}{1-\alpha}p_l(x-1). \quad (6.25)$$

Рассматривая недиагональные элементы матрицы $V_{r,q}$, для членов под знаком суммы по m можем написать

$$p_j(m)p_l(m) = \frac{(jp_j(m))p_l(m) - p_j(m)(lp_l(m))}{j-l} \quad (j \neq l),$$

и применяя (6.25), получим

$$(V_{r,q})_{jl} = -\frac{\sqrt{\rho(j)\rho(l)}(1-\alpha)^q}{j-l} \sum_{m=r}^{\infty} \rho(m) \{ [(m+q+1)\alpha p_j(m+1) + mp_j(m-1)]p_l(m) - p_j(m)[(m+q+1)\alpha p_l(m+1) + mp_l(m-1)] \}.$$

Используя соотношение

$$(m+q+1)\alpha \rho(m) = (m+1)\rho(m+1), \quad (6.26)$$

легко видеть, что под знаком суммы стоит разность членов с индексами m и $m+1$. Поскольку сходимость суммы по m обеспечивается экспоненциальным убыванием общего члена при $m \rightarrow \infty$, можно утверждать, что все члены в сумме сокращаются, кроме члена с $m=r$, и, таким образом, для недиагональных членов матрицы $V_{r,q}$ справедливо выражение

$$(V_{r,q})_{jl} = \sqrt{\rho(j)\rho(l)}(1-\alpha)^q r \rho(r) \frac{p_j(r)p_l(r-1) - p_j(r-1)p_l(r)}{j-l}. \quad (6.27)$$

Для диагональных элементов это выражение, однако, неприменимо, и для них необходимо пользоваться общей формулой (6.14).

Формула (6.27) тем не менее показывает, что матрица $V_{r,q}$ может рассматриваться как интегрируемый интегральный оператор с дискретным ядром (с переменными, принимающими значения на конечном множестве $\{0, 1, \dots, s-1\}$). Учитывая также свойство симметрии полиномов Мейкснера, см. (6.21),

$$M_l(m; q+1, \alpha) = M_m(l; q+1, \alpha),$$

представления (6.13) и (6.15) таким образом, оказываются дуальными друг другу. Это свойство оказывается полезным, например, для вывода дифференциальных уравнений для вероятности образования пустоты. Действительно, дифференцирование определителя Фредгольма интегрируемого интегрального оператора основано на алгебраических свойствах функций входящих в его ядро. Совпадение структур ядер операторов в представлениях (6.13) и (6.15) таким образом означает, что вывод систем уравнений (6.32) и (6.33) из этих представлений, соответственно, идентичен с точностью до переобозначений. По этой причине в следующем разделе детально рассматривается только вывод уравнений (6.32).

Закончим обсуждение в этом разделе выводом еще одного представления для величины $f_{r,s,q}$, в терминах определителя Фредгольма интегрального оператора, действующего на некотором простом замкнутом контуре. Воспользуемся тем, что полиномы Мейкснера $M_l(m; q+1, \alpha)$ при всех целых m ($m \geq l$), рассматриваемые как функции параметра α , могут быть выражены двумя разными способами через полиномы Якоби:

$$\begin{aligned} M_l(m; q+1, \alpha) &= \frac{(-1)^l l! q!}{(l+q)!} \alpha^{-l} P_l^{(m-l, q)}(1-2\alpha) \\ &= \frac{(-1)^m m! q!}{(m+q)!} \alpha^{-m} P_m^{(l-m, q)}(1-2\alpha). \end{aligned}$$

Для полиномов Якоби фигурирующих в первом представлении, используя формулу Родрига и применяя теорему Коши, получим

$$\begin{aligned} P_l^{(m-l, q)}(1-2\alpha) &= \frac{(-1)^l}{2^{m+q} \alpha^{m-l} (1-\alpha)^q} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x)^m (1+x)^{l+q} \Big|_{x=1-2\alpha} \\ &= \frac{(-1)^l}{2^{m+q} \alpha^{m-l} (1-\alpha)^q} \oint_{C_{1-2\alpha}} \frac{(1-x)^m (1+x)^{l+q}}{(x-1+2\alpha)^{l+1}} \frac{dx}{2\pi i} \\ &= \frac{(-1)^l}{\alpha^{m-l}} \oint_{C_0} \frac{(\alpha-z)^m}{(1-z)^{m+q+1} z^{l+1}} \frac{dz}{2\pi i}, \end{aligned}$$

где была выполнена замена переменных $z = (x-1+2\alpha)/(x+1)$. Аналогично, для полиномов Якоби фигурирующих в втором представлении можно написать

$$P_m^{(l-m, q)}(1-2\alpha) = \frac{(-1)^{q+m}}{\alpha^{l-m} (1-\alpha)^q} \oint_{C_0} \frac{(1-w)^{m+q}}{(1-\alpha w)^{m+1} w^{l+q+1}} \frac{dw}{2\pi i}.$$

Подставляя все выражения в (6.24), получим

$$\begin{aligned} \text{Tr} (A_0^{-1} A_r)^p &= (-1)^{pq} (1-\alpha)^p \sum_{l_1, \dots, l_p=0}^{s-1} \sum_{m_1, \dots, m_p=r}^{\infty} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \prod_{i=1}^p \frac{(\alpha-z_i)^{m_i}}{(1-z_i)^{m_i+q+1} z_i^{l_i+1}} \\ &\quad \times \frac{(1-w_i)^{m_i+q}}{(1-\alpha w_i)^{m_i+1} w_i^{l_i+q+1}} \frac{d^p w}{(2\pi i)^p} \frac{d^p z}{(2\pi i)^p}. \end{aligned}$$

Суммирование, очевидно, элементарно вычисляются, что приводит к выражению

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} (A_0^{-1} A_r)^p &= (-1)^{pq} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \prod_{i=1}^p \frac{(\alpha - z_i)^r (1 - w_i)^{r+q}}{(1 - z_i)^{r+q} (1 - \alpha w_i)^r} \\ &\quad \times \frac{1}{z_{i+1}^s w_i^{s+q} (1 - z_i w_i) (1 - z_{i+1} w_i)} \frac{d^p w}{(2\pi i)^p} \frac{d^p z}{(2\pi i)^p} \end{aligned}$$

где $z_{p+1} := z_1$. Выполняя замену переменных $w_i \mapsto 1/w_i$ ($i = 1, \dots, p$) полученный результат приводит к представлению в терминах определителя Фредгольма

$$F_{r,s,q} = \det \left(I - \hat{K} \Big|_{C_0} \right), \quad (6.28)$$

где интегральный оператор \hat{K} имеет ядро

$$K(z, z') = \frac{1}{2\pi i} \frac{e_+(z)e_-(z') - e_-(z)e_+(z')}{z - z'}, \quad (6.29)$$

с функциями $e_{\pm}(z) = e_{\pm}(z; r, s, q, \alpha)$ имеющими вид

$$e_+(z) = e_-(z)E(z), \quad e_-(z) = \left[\frac{(z - \alpha)^r}{(z - 1)^{r+q} z^s} \right]^{1/2}, \quad E(z) = \oint_{C_{\infty}} \frac{(w - 1)^{r+q} w^s}{(w - \alpha)^r (w - z)} \frac{dw}{2\pi i}. \quad (6.30)$$

Здесь C_{∞} , как и в представлении (6.4), обозначает некоторый большой замкнутый положительно ориентированный контур.

6.1.3. Представление через дифференциально-разностные уравнения

Представления в терминах определителей Фредгольма, в свою очередь, позволяют вывести дифференциальные уравнения для вероятности образования пустоты. Здесь и всюду ниже используется обозначение

$$\mathcal{D}_{\alpha} := \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (6.31)$$

Полезно начать с формулировки результата.

Предложение 6.2. *Функция $F_{r,s,q} = F_{r,s,q}(\alpha)$, где $r, s, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $s \leq r$, при фиксированном s и переменных r и q удовлетворяет уравнениям*

$$\mathcal{D}_{\alpha}^2 \ln F_{r,s,q} = \frac{r(r+q)\alpha}{(1-\alpha)^2} \left(\frac{F_{r+1,s,q} F_{r-1,s,q}}{F_{r,s,q}^2} - 1 \right), \quad (6.32a)$$

$$\mathcal{D}_{\alpha} \ln \frac{F_{r,s,q+1}}{F_{r,s,q}} = \frac{r\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{F_{r+1,s,q} F_{r-1,s,q+1}}{F_{r,s,q} F_{r,s,q+1}} - 1 \right), \quad (6.32b)$$

$$\mathcal{D}_{\alpha} \ln \frac{F_{r+1,s,q}}{F_{r,s,q+1}} = \frac{r+q+1}{1-\alpha} \left(\frac{F_{r+1,s,q+1} F_{r,s,q}}{F_{r,s,q+1} F_{r+1,s,q}} - 1 \right), \quad (6.32c)$$

а при фиксированном r и переменных s и q , уравнениям

$$\mathcal{D}_\alpha^2 \ln F_{r,s,q} = \frac{s(s+q)\alpha}{(1-\alpha)^2} \left(\frac{F_{r,s+1,q} F_{r,s-1,q}}{F_{r,s,q}^2} - 1 \right), \quad (6.33a)$$

$$\mathcal{D}_\alpha \ln \frac{F_{r,s,q+1}}{F_{r,s,q}} = \frac{s\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{F_{r,s+1,q} F_{r,s-1,q+1}}{F_{r,s,q} F_{r,s,q+1}} - 1 \right), \quad (6.33b)$$

$$\mathcal{D}_\alpha \ln \frac{F_{r,s+1,q}}{F_{r,s,q+1}} = \frac{s+q+1}{1-\alpha} \left(\frac{F_{r,s+1,q+1} F_{r,s,q}}{F_{r,s,q+1} F_{r,s+1,q}} - 1 \right), \quad (6.33c)$$

причем в уравнениях (6.32a) и (6.33a) фиксировано также и q .

Очевидное свойство систем уравнений (6.32) и (6.33) это их формальная симметрия при перестановке дискретных переменных s и r (хотя области их значений различны, $0 \leq s \leq r$); эта симметрия возникает в результате симметрии между собой представлений (6.13) и (6.15).

Уравнения (6.32) и (6.33) можно рассматривать как некоторые эволюционные уравнения, например, вводя время t ($0 < t < \infty$) с помощью параметризации $\alpha = \exp(-t)$, так что $\mathcal{D}_\alpha = -\partial_t$. Тогда уравнение (6.33a) есть не что иное, как переписанное уравнение для тау-функции цепочки Тоды, $\partial_t^2 \ln \tau_s = \tau_{s+1} \tau_{s-1} / \tau_s^2$, где $\tau_s = \tau_s(t)$ равна определителю в формуле (6.3), и которое следует из тождества Сильвестра для определителей [105, 120–123]. В этом случае цепочка Тоды конечная ($s = 0, 1, \dots, r$), см., например, [124]. С другой стороны, из уравнения (6.32a) следует, что функция $F_{r,s,q}$ связана также и с тау-функцией некоторой полубесконечной цепочки Тоды, $\tilde{\tau}_n$, где $n = r - s$ ($n = 0, 1, \dots$).

Наконец, отметим, что из трех уравнений в (6.32), и, аналогично, из таковых в (6.33), одно из уравнений может быть выведено из двух других, при условии, что указано подходящее либо граничное (при $s = 0$), либо одно из асимптотических (при $r \rightarrow \infty$ или при $q \rightarrow \infty$) условий,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_{r,s,q} = 1, \quad F_{r,s,q}|_{s=0} = 1, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} F_{r,s,q} = 0, \quad (6.34)$$

либо указаны начальные данные (по переменной α), в частности, можно использовать одно из двух условий:

$$\lim_{\alpha \searrow 0} F_{r,s,q} = 1 \quad (s \leq r), \quad \lim_{\alpha \nearrow 1} F_{r,s,q} = 0 \quad (s \neq 0). \quad (6.35)$$

Условия (6.34) и (6.35) следуют из определения для вероятности образования пустоты, либо могут быть получены из представления (6.3). Таким образом, из шести уравнений (6.32) и (6.33) только четыре (по два в каждой системе) являются независимыми.

Рассмотрим вывод уравнений (6.32) используя представление (6.13); уравнения (6.33) могут быть получены по сути повторением этого вычисления в случае представления (6.15).

Прямой способ доказательства уравнений (6.32) заключается в вычислении производных (дифференциальной по α и разностных по r и q) функции $\ln F_{r,s,q} = \ln \det(I - V_{r,q})$. Поскольку,

как было замечено выше, матричные элементы матрицы $V_{r,q}$ имеют структуру ядра интегрируемого интегрального оператора, естественно строить вычисления адаптируя к нашей задаче формализм развитый для этого типа интегральных операторов (см., например, [2]).

В качестве подготовительного шага для применения этой техники необходимо вычислить первые производные матрицы $V_{r,q}$ по интересующим нас переменным. Для упрощения записи выражений будем использовать обозначение

$$E_j(m) = \sqrt{\rho(j)}(1 - \alpha)^{\frac{q+1}{2}} M_j(m; q + 1, \alpha), \quad (6.36)$$

причем $E_j(m) = E_j(m; q, \alpha)$; указание зависимости от q и α (а также r) различных величин в обозначениях ниже часто будет опускаться. Простейший пример первой “производной” это соотношение между матричными элементами матриц $V_{r+1,q}$ и $V_{r,q}$. Справедливо соотношение

$$(V_{r+1,q})_{jl} = (V_{r,q})_{jl} - \rho(r)E_j(r)E_l(r). \quad (6.37)$$

Из этого соотношения видно, что сдвиг по r генерируется матрицей ранга один, что важно для успеха применения техники основанной на использовании интегрируемых интегральных операторов.

Производные по другим переменным имеют похожие свойства. Вычисление производной \mathcal{D}_α (см. (6.31)) матричных элементов матрицы $V_{r,q}$ дает

$$\mathcal{D}_\alpha(V_{r,q})_{jl} = \frac{r\rho(r)}{2(1 - \alpha)} [E_j(r)E_l(r - 1) + E_j(r - 1)E_l(r)]. \quad (6.38)$$

Рассматривая матрицу $V_{r,q+1}$ и выражая ее элементы через таковые матрицы $V_{r,q}$, получим

$$(V_{r,q+1})_{jl} = \sqrt{\frac{j + q + 1}{l + q + 1}} \left[(V_{r,q})_{jl} + \frac{r\rho(r)}{1 - \alpha} \frac{E_j(r - 1) - \alpha E_j(r)}{j + q + 1} E_l(r) \right]. \quad (6.39)$$

Полезной является также формула описывающая одновременный сдвиг r и q ,

$$(V_{r-1,q+1})_{jl} = \sqrt{\frac{j + q + 1}{l + q + 1}} \left[(V_{r,q})_{jl} + \frac{r\rho(r)}{\alpha(1 - \alpha)} \frac{E_j(r - 1) - \alpha E_j(r)}{j + q + 1} E_l(r - 1) \right]. \quad (6.40)$$

Прежде чем перейти собственно к выводу дифференциально-разностных уравнений, поясним происхождение формул (6.38), (6.39) и (6.40).

Чтобы получить выражение для $(\mathcal{D}_\alpha V_{r,q})_{jl}$ воспользуемся формулой

$$\mathcal{D}_\alpha M_j(m; q + 1, \alpha) = \frac{m}{1 - \alpha} [M_j(m - 1; q + 1, \alpha) - M_j(m; q + 1, \alpha)], \quad (6.41)$$

которая может быть непосредственно проверена подстановкой явного выражения для полиномов Мейкснера, см. (6.21). Дифференцируя (6.14), и переходя к обозначениям (6.36),

имеем

$$(\mathcal{D}_\alpha V_{r,q})_{jl} = \left(\frac{j+l}{2} - \frac{(q+1)\alpha}{1-\alpha} \right) (V_{r,q})_{jl} + \sum_{m=r}^{\infty} \frac{m\rho(m)}{1-\alpha} [E_j(m-1)E_l(m) + E_j(m)E_l(m-1) - (1+\alpha)E_j(m)E_l(m)].$$

Используя тот факт, что из уравнения (6.25) следует соотношение

$$\frac{m}{1-\alpha} [E_j(m-1) - (1+\alpha)E_j(m)] = - \left(j - \frac{(q+1)\alpha}{1-\alpha} \right) E_j(m) - \frac{(m+q+1)\alpha}{1-\alpha} E_j(m+1),$$

формула для $(\mathcal{D}_\alpha V_{r,q})_{jl}$ выше может быть переписана в виде

$$(\mathcal{D}_\alpha V_{r,q})_{jl} = \sum_{m=r}^{\infty} \frac{\rho(m)}{1-\alpha} \left\{ \frac{m}{2} [E_j(m-1)E_l(m) + E_j(m)E_l(m-1)] - \frac{(m+q+1)\alpha}{2} [E_j(m+1)E_l(m) + E_j(m)E_l(m+1)] \right\}.$$

Наконец, учитывая (6.26) видим, что под знаком суммы стоит разность членов с индексами m и $m+1$, что и дает (6.38).

Рассмотрим теперь вывод формулы (6.39). Подбирая подходящее тождество Гаусса для гипергеометрической функции, можно получить тождество

$$M_j(m; q+2, \alpha) = \frac{q+1}{(j+q+1)(1-\alpha)} [M_j(m; q+1, \alpha) - \alpha M_j(m+1; q+1, \alpha)].$$

Учитывая также, что

$$\rho(m; q+1, \alpha) = \frac{m+q+1}{q+1} \rho(m; q, \alpha),$$

результат выражения всех функций при $q+1$ через таковые при q записывается в виде

$$(V_{r,q+1})_{jl} = \frac{1}{\sqrt{(j+q+1)(l+q+1)}} \sum_{m=r}^{\infty} \frac{(m+q+1)\rho(m)}{1-\alpha} \times [E_j(m) - \alpha E_j(m+1)] [E_l(m) - \alpha E_l(m+1)], \quad (6.42)$$

где $\rho(m) = \rho(m; q, \alpha)$ и $E_j(m) = E_j(m; q, \alpha)$, как определено формулами (6.18) и (6.36). Чтобы преобразовать полученное выражение, заметим, что уравнение (6.25) может быть также записано в виде

$$\frac{m+q+1}{1-\alpha} [E_j(m) - \alpha E_j(m+1)] = (j+q+1)E_j(m) + \frac{m}{1-\alpha} [E_j(m-1) - \alpha E_j(m)]. \quad (6.43)$$

Используя это соотношение, выражение в (6.42) может быть очевидным образом переписано в виде

$$(V_{r,q+1})_{jl} = \sqrt{\frac{j+q+1}{l+q+1}} \sum_{m=r}^{\infty} \left\{ \rho(m) \left[E_j(m) + \frac{m}{1-\alpha} \frac{E_j(m-1) - \alpha E_j(m)}{j+q+1} \right] E_l(m) - \frac{(m+1)\rho(m+1)}{1-\alpha} \frac{E_j(m) - \alpha E_j(m+1)}{j+q+1} E_l(m+1) \right\},$$

где также была использована формула (6.26). Замечая, что имеет место сокращение членов при суммировании по m , полученная формула приводит в итоге к (6.39).

Наконец, чтобы получить формулу (6.40), можно воспользоваться соотношением (6.43) и переписать (6.39) в виде

$$(V_{r,q+1})_{jl} = \sqrt{\frac{j+q+1}{l+q+1}} \left[(V_{r,q})_{jl} - \rho(r) E_j(r) E_l(r) + \frac{(r+q+1)\rho(r)}{1-\alpha} \frac{E_j(r) - \alpha E_j(r+1)}{j+q+1} E_l(r) \right].$$

Учитывая соотношение (6.37) и используя (6.26), полученная формула, после сдвига $r \mapsto r-1$, дает в точности (6.40).

Теперь, когда формулы (6.38), (6.39) и (6.40) доказаны, мы можем перейти собственно к выводу дифференциально-разностных уравнений (6.32) и (6.33).

Чтобы воспользоваться техникой интегрируемых интегральных операторов, введем “функции” $e_{\pm}(j) = e_{\pm}(j; r, q, \alpha)$ формулами

$$e_+(j) = E_j(r), \quad e_-(j) = E_j(r-1).$$

Здесь “переменная” $j = 0, 1, \dots, s-1$ играет роль спектрального параметра. В терминах этих функций недиагональные элементы матрицы $V_{r,q}$ запишутся в виде

$$(V_{r,q})_{jl} = \frac{r\rho(r)}{1-\alpha} \cdot \frac{e_+(j)e_-(l) - e_-(j)e_+(l)}{j-l} \quad (j \neq l). \quad (6.44)$$

Важную роль в конструкции играют функции $f_{\pm}(j) = f_{\pm}(j; r, q, \alpha)$, определяемые формулой

$$f_{\pm}(j) = \sum_{l=0}^{s-1} [(I - V_{r,q})^{-1}]_{jl} e_{\pm}(l).$$

Рассмотрим величины

$$B_{\mu,\nu} = \frac{r\rho(r)}{1-\alpha} \sum_{j=0}^{s-1} e_{\mu}(j) f_{\nu}(j) \quad (\mu, \nu = +, -).$$

Заметим, что функции $f_{\pm}(j)$ и величины $B_{\mu,\nu}$ (которые иногда называются потенциалами), зависят также от s как от параметра. Формула (6.37) означает, что

$$\frac{F_{r+1,s,q}}{F_{r,s,q}} = \frac{\det(I - V_{r+1,q})}{\det(I - V_{r,q})} = 1 + \frac{1-\alpha}{r} B_{++}, \quad (6.45)$$

а также, что

$$\frac{F_{r-1,s,q}}{F_{r,s,q}} = 1 - \frac{1-\alpha}{(r+q)\alpha} B_{--}. \quad (6.46)$$

Используя (6.38), получим

$$\frac{\mathcal{D}_{\alpha} F_{r,s,q}}{F_{r,s,q}} = -\text{Tr} [(I - V_{r,q})^{-1} \mathcal{D}_{\alpha} V_{r,q}] = -\frac{1}{2} (B_{+-} + B_{-+}). \quad (6.47)$$

Эти формулы играют ключевую роль в выводе уравнений (6.32).

Чтобы выразить отношения $F_{r,s,q+1}$ и $F_{r-1,s,q+1}$ с $F_{r,s,q}$ при помощи (6.39) и (6.40), рассмотрим также потенциалы

$$D_{\mu,\nu} = \frac{r\rho(r)}{1-\alpha} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{e_{\mu}(j)f_{\nu}(j)}{j+q+1}, \quad (\mu, \nu = +, -).$$

Соотношение (6.39) позволяет тогда написать

$$\frac{F_{r,s,q+1}}{F_{r,s,q}} = 1 + \alpha D_{++} - D_{-+}, \quad (6.48)$$

и, аналогично, соотношение (6.40) дает

$$\frac{F_{r-1,s,q+1}}{F_{r,s,q}} = 1 + D_{+-} - \frac{1}{\alpha} D_{--}. \quad (6.49)$$

Эти формулы важны для вывода уравнений (6.32b) и (6.32c), и будут использованы ниже совместно с формулами (6.45) и (6.46).

Для того чтобы вывести желаемые уравнения из имеющихся в нашем распоряжении формул, необходимо уметь вычислять производные \mathcal{D}_{α} от величин $B_{\mu,\nu}$ и $D_{\mu,\nu}$. Для этого необходимо вычислить выражения для производных функций $f_{\pm}(j)$. Стартовыми выражениями являются производные функций $e_{\pm}(j)$, которые следуют из формул (6.41) и (6.25),

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha} e_{+}(j) &= \left(\frac{j}{2} - \frac{2r + (q+1)\alpha}{2(1-\alpha)} \right) e_{+}(j) + \frac{r}{1-\alpha} e_{-}(j), \\ \mathcal{D}_{\alpha} e_{-}(j) &= \left(-\frac{j}{2} + \frac{(2r+q-1)\alpha}{2(1-\alpha)} \right) e_{-}(j) - \frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} e_{+}(j). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Стандартные вычисления (см., например, главу XIV книги [2]) дают

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha} f_{+}(j) &= \left(\frac{j}{2} - \frac{2r + (q+1)\alpha}{2(1-\alpha)} \right) f_{+}(j) + \left(\frac{r}{1-\alpha} + B_{++} \right) f_{-}(j), \\ \mathcal{D}_{\alpha} f_{-}(j) &= \left(-\frac{j}{2} + \frac{(2r+q-1)\alpha}{2(1-\alpha)} \right) f_{-}(j) - \left(\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} - B_{--} \right) f_{+}(j). \end{aligned} \quad (6.51)$$

При выводе этих формул используется формула (6.44) для недиагональных элементов матрицы $V_{r,q}$.

Имеющиеся формулы позволяют доказать уравнение (6.32a). Рассмотрим выражение в правой части (6.47). Отметим, что в силу того, что матрица $V_{r,q}$ симметрична, имеет место соотношение $B_{-+} = B_{+-}$. Дифференцируя B_{+-} (либо B_{-+}) с использованием формул (6.50) и (6.51), получим

$$\mathcal{D}_{\alpha} B_{\pm\mp} = B_{++} B_{--} + \frac{r}{1-\alpha} B_{--} - \frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} B_{++}.$$

Поставляя сюда выражения для величин $B_{\mu,\nu}$ в терминах функции $F_{r,s,q}$ фигурирующие в левых частях формул (6.45), (6.46) и (6.47), получим

$$-\mathcal{D}_\alpha \frac{\mathcal{D}_\alpha F_{r,s,q}}{F_{r,s,q}} = \frac{r(r+q)\alpha}{(1-\alpha)^2} \left\{ 1 - \frac{F_{r+1,s,q}}{F_{r,s,q}} \cdot \frac{F_{r-1,s,q}}{F_{r,s,q}} \right\}.$$

Очевидно, это равенство и есть уравнение (6.32a).

Рассмотрим теперь вывод уравнений (6.32b) и (6.32c). Используя (6.51), нетрудно получить выражения для $\mathcal{D}_\alpha D_{\mu,\nu}$ в терминах величин $D_{\mu,\nu}$ и $B_{\mu,\nu}$. Получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha D_{-+} &= -\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} D_{++} + \left(\frac{r}{1-\alpha} + B_{++} \right) D_{--}, \\ \mathcal{D}_\alpha D_{++} &= B_{++} - \frac{r+q+1+(r-1)\alpha}{1-\alpha} D_{++} + \frac{r}{1-\alpha} D_{-+} + \left(\frac{r}{1-\alpha} + B_{++} \right) D_{+-}, \\ \mathcal{D}_\alpha D_{+-} &= \frac{r}{1-\alpha} D_{--} - \left(\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} - B_{--} \right) D_{++}, \\ \mathcal{D}_\alpha D_{--} &= -B_{--} + \frac{r+q+1+(r-1)\alpha}{1-\alpha} D_{--} - \frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} D_{+-} - \left(\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} - B_{--} \right) D_{-+}. \end{aligned}$$

Эти выражения могут быть использованы для дифференцирования выражений стоящих в правых частях формул (6.48) и (6.49).

Рассмотрим выражение в (6.48). Полученные формулы дают

$$\mathcal{D}_\alpha (\alpha D_{++} - D_{-+}) = \alpha B_{++} - \frac{r\alpha}{1-\alpha} (\alpha D_{++} - D_{-+}) + \left(\frac{r\alpha}{1-\alpha} + \alpha B_{++} \right) \left(D_{+-} - \frac{1}{\alpha} D_{--} \right).$$

Поставляя линейные комбинации величин $D_{\mu,\nu}$ фигурирующие в (6.48) и (6.49) их выражениями стоящими в левых частях, и также используя (6.45), предыдущее выражение переписется в виде

$$\mathcal{D}_\alpha \frac{F_{r,s,q+1}}{F_{r,s,q}} = -\frac{r\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{F_{r,s,q+1}}{F_{r,s,q}} - \frac{F_{r+1,s,q}}{F_{r,s,q}} \frac{F_{r-1,s,q+1}}{F_{r,s,q}} \right).$$

Полученное соотношение есть, очевидно, уравнение (6.32b).

Рассмотрим теперь выражение в (6.49). Дифференцируя, получим

$$\mathcal{D}_\alpha \left(D_{+-} - \frac{1}{\alpha} D_{--} \right) = \frac{1}{\alpha} B_{--} + \frac{r+q}{1-\alpha} \left(D_{+-} - \frac{1}{\alpha} D_{--} \right) - \left(\frac{r+q}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha} B_{--} \right) (\alpha D_{++} - D_{-+}).$$

Выражая комбинации потенциалов их левыми частями из (6.48), (6.49), и (6.46), предыдущее выражение переписется в виде

$$\mathcal{D}_\alpha \frac{F_{r-1,s,q+1}}{F_{r,s,q}} = \frac{r+q}{1-\alpha} \left(\frac{F_{r-1,s,q+1}}{F_{r,s,q}} - \frac{F_{r-1,s,q}}{F_{r,s,q}} \frac{F_{r,s,q+1}}{F_{r,s,q}} \right),$$

в котором легко узнать уравнение (6.32c). Таким образом, все уравнения (6.32) нами доказаны.

В качестве дополнения к приведенному вычислению, полезно упомянуть вкратце еще один способ вывода уравнений (6.32), который, кроме того, позволяет еще и убедиться в

том, что полученные уравнения являются всеми возможными уравнениями для функции $F_{r,s,q}$ при фиксированном s . Суть метода заключается в том, чтобы вывести эти уравнения как условия совместности при эволюции по параметру α и при сдвигах значений r и q для функций $f_{\pm}(j) = f_{\pm}(j; r, q, s, \alpha)$.

Интерпретируя α как эволюционный параметр, введем 2×2 матрицу $M(j)$ которая описывает результат дифференцирования \mathcal{D}_{α} функций $f_{\pm}(j)$ в матричном виде

$$\mathcal{D}_{\alpha} \vec{f}(j) = M(j) \vec{f}(j), \quad \vec{f}(j) = \begin{bmatrix} f_{+}(j) \\ f_{-}(j) \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

Явное выражение для матрицы $M(j)$ следует из формул (6.51), которое полезно записать указывая явно зависимость от r и q (сдвиги по которым возникают при выводе условий согласования)

$$M(j; r, q) = \begin{bmatrix} \frac{j}{2} - \frac{2r + (q+1)\alpha}{2(1-\alpha)} & \frac{r}{1-\alpha} + B_{++}(r, q) \\ -\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} + B_{--}(r, q) & -\frac{j}{2} + \frac{(2r+q-1)\alpha}{2(1-\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Введем также матрицы $L(j)$ и $K(j)$ описывающие изменения функций $f_{\pm}(j)$ при сдвигах значений r и q , соответственно

$$\vec{f}(j; r+1, q) = L(j) \vec{f}(j; r, q), \quad \vec{f}(j; r, q+1) = K(j) \vec{f}(j; r, q). \quad (6.54)$$

Явный вид матриц $L(j)$ и $K(j)$ может быть получен из формул (6.37) и (6.39). Стандартное вычисление (аналогичное выводу соотношений (6.51)) для матрицы $L(j)$ приводит к выражению

$$L(j; r, q) = -\frac{1-\alpha}{(r+q+1)\alpha} \begin{bmatrix} j - \frac{r + (r+q+1)\alpha}{1-\alpha} + \nabla_r B_{-+}(r, q) & \frac{r}{1-\alpha} + B_{++}(r, q) \\ -\frac{(r+q+1)\alpha}{1-\alpha} + B_{--}(r+1, q) & 0 \end{bmatrix}$$

а для матрицы $K(j)$ к выражению

$$K(j; r, q) = \frac{1}{r+q+1} \sqrt{\frac{(q+1)(1-\alpha)}{j+q+1}} \begin{bmatrix} j+q+1 - \frac{r\alpha}{1-\alpha} + \nabla_q B_{-+}(r, q) & \frac{r}{1-\alpha} + B_{++}(r, q) \\ -\frac{(r+q+1)\alpha}{1-\alpha} + B_{--}(r, q+1) & \frac{r+q+1}{1-\alpha} \end{bmatrix},$$

где, например, $\nabla_r B_{-+}(r, q) = B_{-+}(r+1, q) - B_{-+}(r, q)$ и аналогично для $\nabla_q B_{-+}(r, q)$. Используя (6.45), (6.46) и (6.47) нетрудно убедиться, что уравнения (6.32) обеспечивают выполнение трех матричных соотношений, являющихся условиями совместности трех соотношений в (6.53) и (6.54). При этом уравнение (6.32c) возникает как необходимое условие совместности напрямую, а уравнения (6.32a) и (6.32b) возникают как решения двухчленных рекуррентных

уравнений по r с использованием условия, что $F_{r,s,q} \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ (s и q фиксированы). Полностью аналогичные рассуждения имеют место также в применении к уравнениям (6.33a), (6.33b), (6.33c), соответственно.

6.1.4. Представление через τ -функцию шестого уравнения Пенлеве

Поскольку уравнения (6.32) и (6.33) связаны с цепочками Тоды, они могут играть роль преобразования Шлезингера некоторой классической интегрируемой системы, для которой вероятность образования пустоты $F_{r,s,q}$ является τ -функцией. Сформулированная и доказанная ниже теорема фактически означает, что $F_{r,s,q} = C_{r,s,q} \alpha^{rs} (1 - \alpha)^{r(r+q)} \tau(\alpha)$, где величина $C_{r,s,q}$ не зависит от α , а функция $\tau(\alpha)$ является τ -функцией Джимбо–Мивы шестого уравнения Пенлеве [125].

Теорема 6.3. *Вероятность образования пустоты $F_{r,s,q}$ удовлетворяет шестому уравнению Пенлеве в его σ -форме*

$$\begin{aligned} \alpha^2(\alpha - 1)^2 \sigma'(\sigma'')^2 + \{(1 - 2\alpha)(\sigma')^2 + 2\sigma\sigma' + \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\}^2 \\ = (\sigma' + \nu_1^2)(\sigma' + \nu_2^2)(\sigma' + \nu_3^2)(\sigma' + \nu_4^2), \quad \sigma' \equiv \frac{d}{d\alpha}\sigma, \end{aligned} \quad (6.55)$$

с параметрами

$$\nu_1 = \nu_3 = -\frac{r+q+s}{2}, \quad \nu_2 = -\frac{r-q-s}{2}, \quad \nu_4 = \frac{r+q-s}{2}, \quad (6.56)$$

и где σ -функция имеет вид

$$\sigma = \alpha(\alpha - 1) \frac{d}{d\alpha} \ln F_{r,s,q} - \frac{(r+q+s)^2}{4} \alpha + \frac{(r+q+s)q + 2rs}{4}. \quad (6.57)$$

Доказательство будет основано на представлении в терминах определителя Фредгольма (6.28) и на хорошо известной структуре шестого уравнения Пенлеве в терминах фуксовой пары (конструкции Джимбо–Мивы [125]).

В качестве предварительного шага рассмотрим уравнения Фредгольма для ядра (6.29)

$$\left[(1 - \hat{K}) f_{\pm} \right] (\lambda) = e_{\pm}(\lambda). \quad (6.58)$$

где функции $e_{\pm}(\lambda)$ определены в (6.30) и $(\hat{K} f_{\pm})(\lambda) = \oint_{C_0} K(\lambda, \mu) f_{\pm}(\mu) d\mu$. Для краткости мы также опускаем зависимость все функций от параметра α и дискретных параметров r , s , и q . Поскольку оператор \hat{K} принадлежит классу так называемых интегрируемых интегральных операторов [73], резольвента этого оператора \hat{R} ,

$$(1 - \hat{K})(1 + \hat{R}) = 1,$$

строится через решения уравнений (6.58). Ядро резольвенты имеет вид

$$R(\lambda, \mu) = \frac{f_+(\lambda)f_-(\mu) - f_-(\lambda)f_+(\mu)}{2\pi i(\lambda - \mu)}. \quad (6.59)$$

Заметим, что функции $e_{\pm}(\lambda)$ являются решениями уравнений

$$f_{\pm}(\lambda) = \left[(1 + \hat{R}) e_{\pm} \right] (\lambda). \quad (6.60)$$

Уравнения (6.58) могут быть записаны в удобной форме

$$X(\lambda) \vec{e}(\lambda) = \vec{f}(\lambda), \quad \vec{e}(\lambda) = \begin{pmatrix} e_+(\lambda) \\ e_-(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\lambda) = \begin{pmatrix} f_+(\lambda) \\ f_-(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.61)$$

где матрица имеет вид

$$X(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - H_{-+}(\lambda) & H_{++}(\lambda) \\ -H_{--}(\lambda) & 1 + H_{+-}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.62)$$

а функции $H_{mn}(\lambda)$ определены как

$$H_{mn}(\lambda) = \oint_{C_0} \frac{e_m(\mu)f_n(\mu)}{\mu - \lambda} \frac{d\mu}{2\pi i}, \quad m, n \in \{+, -\}.$$

Матрица $X(\lambda)$ может быть легко обращена, поскольку

$$\det X(\lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6.63)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} H_{+-}(\lambda) - H_{-+}(\lambda) &= \oint_{C_0} \frac{\left[(1 - \hat{K}) f_+ \right] (\mu) f_-(\mu)}{\mu - \lambda} \frac{d\mu}{2\pi i} - \oint_{C_0} \frac{f_+(\nu) \left[(1 - \hat{K}) f_- \right] (\nu)}{\nu - \lambda} \frac{d\nu}{2\pi i} \\ &= \oint_{C_0} d\mu \oint_{C_0} f_-(\mu) K(\mu, \nu) f_+(\nu) \left(\frac{1}{\nu - \lambda} - \frac{1}{\mu - \lambda} \right) \frac{d\nu}{2\pi i} \\ &= \oint_{C_0} d\mu \oint_{C_0} \frac{f_-(\mu)(\mu - \nu) K(\mu, \nu) f_+(\nu)}{(\nu - \lambda)(\mu - \lambda)} \frac{d\nu}{2\pi i} \\ &= H_{-+}(\lambda) H_{+-}(\lambda) - H_{--}(\lambda) H_{++}(\lambda), \end{aligned}$$

откуда и следует (6.63). Таким образом,

$$X^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + H_{+-}(\lambda) & -H_{++}(\lambda) \\ H_{--}(\lambda) & 1 - H_{-+}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (6.64)$$

Уравнения (6.60) записываются в виде

$$X^{-1}(\lambda) \vec{f}(\lambda) = \vec{e}(\lambda).$$

Аналогичным образом можно записать результат действия оператора $(1 - \hat{K})^{-1} = 1 + \hat{R}$ на различные функции в компактной форме. В частности, ниже нам понадобится знать результат такого вычисления в случае функций $e_{\pm}(\lambda)/(\lambda - \nu)$.

Лемма 6.4. Пусть вектор $g(\lambda; \nu)$ имеет вид

$$\vec{g}(\lambda; \nu) = \begin{pmatrix} g_+(\lambda; \nu) \\ g_-(\lambda; \nu) \end{pmatrix}, \quad g_{\pm}(\lambda; \nu) = \frac{e_{\pm}(\lambda)}{\lambda - \nu}, \quad (6.65)$$

тогда

$$\left[(1 + \hat{R}) \vec{g}(\cdot; \nu) \right] (\lambda) = \frac{1}{\lambda - \nu} X^{-1}(\nu) \vec{f}(\lambda). \quad (6.66)$$

Доказательство. Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} \left[(1 + \hat{R}) g_{\pm}(\cdot; \nu) \right] (\lambda) &= \frac{e_{\pm}(\lambda)}{\lambda - \nu} + \oint_{C_0} R(\lambda, \mu) \frac{e_{\pm}(\mu)}{\mu - \nu} d\mu \\ &= \frac{e_{\pm}(\lambda)}{\lambda - \nu} + \frac{1}{\lambda - \nu} \oint_{C_0} R(\lambda, \mu) e_{\pm}(\mu) \left(1 + \frac{\lambda - \mu}{\mu - \nu} \right) d\mu \\ &= \frac{f_{\pm}(\lambda)}{\lambda - \nu} + \frac{1}{\lambda - \nu} \oint_{C_0} R(\lambda, \mu) (\lambda - \mu) e_{\pm}(\mu) d\mu \\ &= \frac{f_{\pm}(\lambda)}{\lambda - \nu} + H_{\pm-}(\nu) \frac{f_+(\lambda)}{\lambda - \nu} - H_{\pm+}(\nu) \frac{f_-(\lambda)}{\lambda - \nu}, \end{aligned} \quad (6.67)$$

где нами были использованы уравнения (6.60) и формула (6.59). Сравнение результата в (6.67) с (6.64) приводит к (6.66). \square

Одним из важных свойств функций $f_{\pm}(\lambda)$ заключается в том, что они удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка по переменным α и λ . Эти уравнения являются векторной формой знаменитой фуксовой пары для шестого уравнения Пенлеве (для частного случая значения параметров).

Предложение 6.5. Функции $f_{\pm}(\lambda)$ являются решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\lambda} \vec{f}(\lambda) = A(\lambda) \vec{f}(\lambda), \quad \frac{d}{d\alpha} \vec{f}(\lambda) = B(\lambda) \vec{f}(\lambda), \quad (6.68)$$

с

$$A(\lambda) = \frac{A_0}{\lambda} + \frac{A_1}{\lambda - 1} + \frac{A_{\alpha}}{\lambda - \alpha}, \quad B(\lambda) = -\frac{A_{\alpha}}{\lambda - \alpha}, \quad (6.69)$$

где матрицы A_{ν} , $\nu = 0, 1, \alpha$, даются формулой

$$A_{\nu} = \frac{\theta_{\nu}}{2} X(\nu) S(\nu) X^{-1}(\nu),$$

где $\theta_0 = s$, $\theta_1 = r + q$, $\theta_{\alpha} = -r$. Матрица $S(\lambda)$ имеет вид

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -2E(\lambda) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.70)$$

а матрица $X(\lambda)$ определена в (6.62).

Доказательство. Здесь мы приведем вывод основанный на непосредственном дифференцировании функций $f_{\pm}(\lambda)$; существует также доказательство, основанное на аналитических свойствах матрицы $X(\lambda)$, см. раздел 3 работы [44].

Начнем с вычисления производных от функций $f_{\pm}(\lambda)$ по переменной α . Для это вычислим таковые от функций $e_{\pm}(\lambda)$. Из (6.30), для функции $e_{-}(\lambda)$ имеем

$$\frac{d}{d\alpha}e_{-}(\lambda) = -\frac{r}{2(\lambda - \alpha)}e_{-}(\lambda). \quad (6.71)$$

Чтобы получить аналогичное выражение для функции $e_{+}(\lambda)$, рассмотрим сначала функцию $E(\lambda)$, для которой получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}E(\lambda) &= r \oint_{C_{\infty}} \frac{(\nu - 1)^{r+q}\nu^s}{(\nu - \alpha)^{r+1}(\nu - \lambda)} \frac{d\nu}{2\pi i} = r \oint_{C_{\infty}} \frac{(\nu - 1)^{r+q}\nu^s}{(\nu - \alpha)^r(\lambda - \alpha)} \left(\frac{1}{\nu - \lambda} - \frac{1}{\nu - \alpha} \right) \frac{d\nu}{2\pi i} \\ &= \frac{r}{\lambda - \alpha} (E(\lambda) - E(\alpha)). \end{aligned}$$

Отсюда, используя (6.71),

$$\frac{d}{d\alpha}e_{+}(\lambda) = \frac{r}{2(\lambda - \alpha)}e_{+}(\lambda) - \frac{rE(\alpha)}{\lambda - \alpha}e_{-}(\lambda). \quad (6.72)$$

Отметим, что (6.71) и (6.72) могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{d\alpha}\vec{e}(\lambda) = \frac{r}{2(\lambda - \alpha)}S(\alpha)\vec{e}(\lambda) = \frac{r}{2}S(\alpha)\vec{g}(\lambda; \alpha),$$

где матрица $S(\lambda)$ определена в (6.70), а вектор-функция $\vec{g}(\lambda; \nu)$ в (6.65).

Чтобы вычислить производные по α функций $f_{\pm}(\lambda)$, продифференцируем определяющие их уравнения (6.58), что дает

$$\frac{d}{d\alpha}f_{\pm}(\lambda) - \oint_{C_0} \left[\frac{d}{d\alpha}K(\lambda, \mu) \right] f_{\pm}(\mu) d\mu - \oint_{C_0} K(\lambda, \mu) \frac{d}{d\alpha}f_{\pm}(\mu) d\mu = \frac{d}{d\alpha}e_{\pm}(\lambda). \quad (6.73)$$

После переноса второго слагаемого из левой части направо, и вычисления с помощью (6.71) и (6.72) производной от ядра в терминах функций $e_{\pm}(\mu)$

$$\frac{d}{d\alpha}K(\lambda, \mu) = -r \frac{e_{+}(\lambda)e_{-}(\mu) + e_{-}(\lambda)e_{+}(\mu) - 2E(\alpha)e_{-}(\lambda)e_{-}(\mu)}{4\pi i(\lambda - \alpha)(\mu - \alpha)}, \quad (6.74)$$

найдем, что (6.73) нас самом деле представляет из себя соотношение:

$$\begin{aligned} \left[\left(1 - \hat{K} \right) \frac{d}{d\alpha}f_{\pm} \right] (\lambda) &= \frac{d}{d\alpha}e_{\pm}(\lambda) \\ &\quad - \frac{r}{2(\lambda - \alpha)} \left[H_{-\pm}(\alpha)e_{+}(\lambda) + H_{+\pm}(\alpha)e_{-}(\lambda) - 2E(\alpha)H_{-\pm}(\alpha)e_{-}(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

В случае функции f_+ , используя (6.72), получим

$$\left[\left(1 - \hat{K}\right) \frac{d}{d\alpha} f_+ \right] (\lambda) = (1 - H_{-+}(\alpha)) \frac{re_+(\lambda)}{2(\lambda - \alpha)} - [H_{++}(\alpha) + 2E(\alpha)(1 - H_{-+}(\alpha))] \frac{re_-(\lambda)}{2(\lambda - \alpha)}, \quad (6.75)$$

а в случае функции f_- , используя (6.71), получим

$$\left[\left(1 - \hat{K}\right) \frac{d}{d\alpha} f_- \right] (\lambda) = -H_{--}(\alpha) \frac{re_+(\lambda)}{2(\lambda - \alpha)} - [1 + H_{+-}(\alpha) + 2E(\alpha)H_{--}(\alpha)] \frac{re_-(\lambda)}{2(\lambda - \alpha)}. \quad (6.76)$$

Сравнивая (6.75) и (6.76) с (6.62), нетрудно видеть, что эти выражения записываются следующим образом:

$$\left[\left(1 - \hat{K}\right) \frac{d}{d\alpha} \vec{f} \right] (\lambda) = \frac{r}{2} X(\alpha) S(\alpha) \vec{g}(\lambda; \alpha). \quad (6.77)$$

Искомое выражение для производных по α функций $f_{\pm}(\lambda)$ может быть получено действием оператора $(1 - \hat{K})^{-1} = 1 + \hat{R}$ на выражение в правой части (6.77). Результат дается леммой 6.4, поскольку зависимость от λ содержится только в вектор-функции $\vec{g}(\lambda; \alpha)$, и заключается в замене $\vec{g}(\lambda; \alpha) \mapsto X^{-1}(\alpha) \vec{f}(\lambda)/(\lambda - \alpha)$. Получаемое выражение описывается матрицей $B(\lambda)$ в (6.69), и, таким образом, нами доказано второе уравнение в (6.68).

Рассмотрим теперь вычисление производных по λ от функций $f_{\pm}(\lambda)$, описываемых первым уравнением в (6.68). Начнем с вычисления таковых от функций $e_{\pm}(\lambda)$. В случае функции $e_-(\lambda)$, из (6.30), получим

$$e'_-(\lambda) = -\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\lambda} + \frac{r+q}{\lambda-1} - \frac{r}{\lambda-\alpha} \right) e_-(\lambda). \quad (6.78)$$

Чтобы получить аналогичное выражение для функции $e_+(\lambda)$, рассмотрим функцию $E(\lambda)$, для которой, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} E'(\lambda) &= \oint_{C_{\infty}} \frac{\nu^s (\nu-1)^{r+q}}{(\nu-\alpha)^r (\nu-\lambda)^2} \frac{d\nu}{2\pi i} = \oint_{C_{\infty}} \left(\frac{d}{d\nu} \frac{\nu^s (\nu-1)^{r+q}}{(\nu-\alpha)^r} \right) \frac{1}{\nu-\lambda} \frac{d\nu}{2\pi i} \\ &= \frac{s}{\lambda} (E(\lambda) - E(0)) + \frac{r+q}{\lambda-1} (E(\lambda) - E(1)) - \frac{r}{\lambda-\alpha} (E(\lambda) - E(\alpha)). \end{aligned}$$

Отсюда, используя (6.78),

$$e'_+(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{\lambda} + \frac{r+q}{\lambda-1} - \frac{r}{\lambda-\alpha} \right) e_+(\lambda) - \left(\frac{sE(0)}{\lambda} + \frac{(r+q)E(1)}{\lambda-1} - \frac{rE(\alpha)}{\lambda-\alpha} \right) e_-(\lambda). \quad (6.79)$$

Формулы (6.71) и (6.72) также могут быть записаны в виде:

$$\vec{e}'(\lambda) = \frac{s}{2} S(0) \vec{g}(\lambda; 0) + \frac{r+q}{2} S(1) \vec{g}(\lambda; 1) - \frac{r}{2} S(\alpha) \vec{g}(\lambda; \alpha).$$

Чтобы вычислить производные функций $f_{\pm}(\lambda)$, продифференцируем уравнения (6.58),

$$f'_{\pm}(\lambda) - \oint_{C_0} \left[\left(\frac{d}{d\lambda} + \frac{d}{d\mu} \right) K(\lambda, \mu) \right] f_{\pm}(\mu) d\mu - \oint_{C_0} K(\lambda, \mu) f'_{\pm}(\mu) d\mu = e'_{\pm}(\lambda). \quad (6.80)$$

После переноса второго слагаемого из левой части направо, и вычисляя с помощью (6.78) и (6.79) выражение

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\lambda} + \frac{d}{d\mu} \right) K(\lambda, \mu) &= \frac{e'_+(\lambda)e_-(\mu) - e'_-(\lambda)e_+(\mu) + e_+(\lambda)e'_-(\mu) - e_-(\lambda)e'_+(\mu)}{2\pi i(\lambda - \mu)} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{s}{\lambda\mu} + \frac{r+q}{(\lambda-1)(\mu-1)} - \frac{r}{(\lambda-\alpha)(\mu-\alpha)} \right] \frac{e_+(\lambda)e_-(\mu) + e_-(\lambda)e_+(\mu)}{2\pi i} \\ &\quad + \left[\frac{sE(0)}{\lambda\mu} + \frac{(r+q)E(1)}{(\lambda-1)(\mu-1)} - \frac{rE(\alpha)}{(\lambda-\alpha)(\mu-\alpha)} \right] \frac{e_-(\lambda)e_-(\mu)}{2\pi i} \end{aligned}$$

получим, что (6.80) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[(1 - \hat{K}) f'_\pm \right] (\lambda) &= e'_\pm(\lambda) - \frac{s}{2\lambda} [H_{-\pm}(0)e_+(\lambda) + (H_{+\pm}(0) - 2E(0)H_{-\pm}(0))e_-(\lambda)] \\ &\quad - \frac{r+q}{2(\lambda-1)} [H_{-\pm}(1)e_+(\lambda) + (H_{+\pm}(1) - 2E(1)H_{-\pm}(1))e_-(\lambda)] \\ &\quad + \frac{r}{2(\lambda-\alpha)} [H_{-\pm}(\alpha)e_+(\lambda) + (H_{+\pm}(\alpha) - 2E(\alpha)H_{-\pm}(\alpha))e_-(\lambda)]. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Вновь используя (6.78) и (6.79) и сравнивая получаемые выражения с (6.62) нетрудно получить, что в векторной форме записи соотношение (6.81) имеет вид

$$\left[(1 - \hat{K}) \vec{f}' \right] (\lambda) = \frac{s}{2} X(0)S(0)\vec{g}(\lambda; 0) + \frac{r+q}{2} X(1)S(1)\vec{g}(\lambda; 1) - \frac{r}{2} X(\alpha)S(\alpha)\vec{g}(\lambda; \alpha).$$

Применяя лемму 6.4 к этому выражению, получим, что производные функций $f_\pm(\lambda)$ описываются матрицей $A(\lambda)$ в (6.69), и, таким образом, нами доказано также и первое уравнение в (6.68). \square

Обратимся теперь к собственно установлению связи определителя Фредгольма (6.28) с σ -формой шестого уравнения Пенлеве. Рассмотрим логарифмическую производную от (6.28) по параметру α :

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \det (1 - \hat{K}) = -\operatorname{tr} \left[(1 - \hat{K})^{-1} \frac{d}{d\alpha} \hat{K} \right] = -\oint_{C_0} \left[(1 + \hat{R}) \frac{d}{d\alpha} K(\cdot, \mu) \right] (\mu) d\mu.$$

Записывая выражение (6.74) для производной по α ядра $K(\lambda, \mu)$ в терминах функций $g_\pm(\lambda; \nu)$, введенных в (6.65), и вводя обозначение

$$\vec{g}_*(\lambda; \nu) = \begin{pmatrix} g_-(\lambda; \nu) \\ -g_+(\lambda; \nu) \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} K(\lambda, \mu) &= -\frac{r}{4\pi i} [g_+(\lambda; \alpha)g_-(\mu; \alpha) + g_-(\lambda; \alpha)g_+(\mu; \alpha) - 2E(\alpha)g_-(\lambda; \alpha)g_-(\mu; \alpha)] \\ &= -\frac{r}{4\pi i} \vec{g}_*^T(\mu; \alpha)S(\alpha)\vec{g}(\lambda; \alpha) = -\frac{r}{4\pi i} \operatorname{tr} [\vec{g}(\lambda; \alpha)\vec{g}_*^T(\mu; \alpha)S(\alpha)]. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу леммы 6.4,

$$\left[\left(1 + \hat{R} \right) \frac{d}{d\alpha} K(\cdot, \mu) \right] (\lambda) = -\frac{r}{4\pi i(\mu - \alpha)} \operatorname{tr} \left[X^{-1}(\alpha) \vec{f}(\lambda; \alpha) \vec{g}_*^T(\mu; \alpha) S(\alpha) \right].$$

Полагая $\lambda = \mu$ и интегрируя по μ , найдем

$$\oint_{C_0} \frac{1}{\mu - \alpha} \vec{f}(\mu; \alpha) \vec{g}_*^T(\mu; \alpha) \frac{d\mu}{2\pi i} = \oint_{C_0} \frac{1}{(\mu - \alpha)^2} \begin{pmatrix} f_+(\mu) e_-(\mu) & -f_+(\mu) e_+(\mu) \\ f_-(\mu) e_-(\mu) & -f_-(\mu) e_+(\mu) \end{pmatrix} \frac{d\mu}{2\pi i} = X'(\lambda) \Big|_{\lambda=\alpha}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \det \left(1 - \hat{K} \right) = -\frac{r}{2} \operatorname{tr} \left[S(\alpha) X^{-1}(\alpha) X'(\lambda) \right] \Big|_{\lambda=\alpha}, \quad (6.82)$$

где след берется в пространстве 2×2 матриц.

Выражение для $X'(\lambda)$ нетрудно получить (например, дифференцированием соотношения (6.61)) из выведенных нами формул для функций $e'_\pm(\lambda)$ и $f'_\pm(\lambda)$,

$$\begin{aligned} X'(\lambda) &= A(\lambda) X(\lambda) - X(\lambda) \left(\frac{s}{2\lambda} S(0) + \frac{r+q}{2(\lambda-1)} S(1) - \frac{r}{2(\lambda-\alpha)} S(\alpha) \right) \\ &= \sum_{\nu=0,1,\alpha} \frac{\theta_\nu}{2(\lambda-\nu)} \left(X(\nu) S(\nu) X^{-1}(\nu) X(\lambda) - X(\lambda) S(\nu) \right). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Из этого выражения нетрудно увидеть, что слагаемое при $\nu = \alpha$ в (6.83) не дает вклада в след в (6.82), поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[S(\alpha) X^{-1}(\alpha) \left(X(\alpha) S(\alpha) X^{-1}(\alpha) X(\lambda) - X(\lambda) S(\alpha) \right) \right] \\ = \operatorname{tr} \left[S^2(\alpha) X^{-1}(\alpha) X(\lambda) - S(\alpha) X^{-1}(\alpha) X(\lambda) S(\alpha) \right] = 0. \end{aligned}$$

Полагая $\lambda = \alpha$ для оставшихся двух членов в (6.83), и учитывая, что $\theta_\alpha = -r$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \ln \det \left(1 - \hat{K} \right) &= \frac{\theta_\alpha}{2} \operatorname{tr} \left[S(\alpha) X^{-1}(\alpha) \left(\frac{A_0 X(\alpha)}{\alpha} - \frac{\theta_0 X(\alpha) S(0)}{2\alpha} + \frac{A_1 X(\alpha)}{\alpha-1} - \frac{\theta_1 X(\alpha) S(1)}{2(\alpha-1)} \right) \right] \\ &= \operatorname{tr} \left[A_\alpha \left(\frac{A_0}{\alpha} + \frac{A_1}{\alpha-1} \right) \right] - \frac{\theta_\alpha}{4} \operatorname{tr} \left[S(\alpha) \left(\frac{\theta_0 S(0)}{\alpha} + \frac{\theta_1 S(1)}{\alpha-1} \right) \right] \\ &= \operatorname{tr} \left[A_\alpha \left(\frac{A_0}{\alpha} + \frac{A_1}{\alpha-1} \right) \right] - \frac{\theta_\alpha}{2} \left(\frac{\theta_0}{\alpha} + \frac{\theta_1}{\alpha-1} \right). \end{aligned} \quad (6.84)$$

где на последнем шаге мы использовали явную формулу (6.70) для матрицы $S(\lambda)$.

Наконец, чтобы идентифицировать полученный нами результат в (6.84), полезно напомнить, что определяющее выражение для τ -функции шестого уравнения Пенлеве имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \ln \tau(\alpha) &= \operatorname{res}_{\lambda=\alpha} \operatorname{tr} \left(\frac{A_0 + \theta_0/2}{\lambda} + \frac{A_1 + \theta_1/2}{\lambda-1} + \frac{A_\alpha + \theta_\alpha/2}{\lambda-\alpha} \right)^2 \\ &= \operatorname{tr} \left[A_\alpha \left(\frac{A_0}{\alpha} + \frac{A_1}{\alpha-1} \right) \right] + \frac{\theta_\alpha}{2} \left(\frac{\theta_0}{\alpha} + \frac{\theta_1}{\alpha-1} \right) \equiv H_{VI}, \end{aligned} \quad (6.85)$$

где H_{VI} обозначает гамильтониан. Заметим, что (6.85) совпадает с гамильтонианом приведенном в работе [125], поскольку используемые нами матрицы A_ν , $\nu = 0, 1, \alpha$, имеют нулевой след. Также известно [126], что функция

$$\sigma = \alpha(\alpha - 1)H_{VI} + (\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3)\alpha - \frac{\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3 + \nu_1\nu_4 + \nu_2\nu_4 + \nu_3\nu_4}{2},$$

где

$$\nu_1 = \frac{\theta_\alpha + \theta_\infty}{2}, \quad \nu_2 = \frac{\theta_\alpha - \theta_\infty}{2}, \quad \nu_3 = -\frac{\theta_0 + \theta_1}{2}, \quad \nu_4 = -\frac{\theta_0 - \theta_1}{2}, \quad (6.86)$$

удовлетворяет уравнению (6.55). Отметим, что σ -функция может быть также записана в виде

$$\sigma = \alpha(\alpha - 1)\frac{d}{d\alpha} \operatorname{tr} \left[A_\alpha \left(\frac{A_0}{\alpha} + \frac{A_1}{\alpha - 1} \right) \right] + \nu_1\nu_2\alpha - \frac{\nu_1\nu_2 + \nu_3\nu_4}{2}. \quad (6.87)$$

В нашем случае, $\theta_0 = s$, $\theta_1 = r + q$, $\theta_\alpha = -r$, $\theta_\infty = -(\theta_0 + \theta_1 + \theta_\alpha) = -(s + q)$, откуда, в силу (6.86), получим, что значения параметров ν_1, \dots, ν_4 даются (6.56). Из (6.84) и (6.86) следует, что

$$\operatorname{tr} \left[A_\alpha \left(\frac{A_0}{\alpha} + \frac{A_1}{\alpha - 1} \right) \right] = \frac{d}{d\alpha} \ln \operatorname{Det} (1 - \hat{K}) + \frac{(\nu_1 + \nu_2)(-2\nu_3\alpha + \nu_3 + \nu_4)}{2\alpha(\alpha - 1)}. \quad (6.88)$$

В результате, поставляя (6.88) в (6.87) и используя (6.56), получим

$$\sigma = \alpha(\alpha - 1)\frac{d}{d\alpha} \ln \det (1 - \hat{K}) - \frac{(r + q + s)^2}{4}\alpha + \frac{(r + q + s)q + 2rs}{4}.$$

Поскольку вероятность образования пустоты дается определителем Фредгольма (6.28), выражение для σ -функции в рассматриваемом нами случае есть в точности (6.57), что и завершает доказательство теоремы 6.3.

6.2. Фазовый переход в замощениях домино

В этом разделе формулируется результат о главном члене асимптотически вероятности образования пустоты в термодинамическом пределе, который также имеет интерпретацию свободной энергии шестивершинной модели на так называемой L-образной области. Обнаружено, что имеет место фазовый переход третьего рода на арктической кривой. С комбинаторной точки зрения этот результат означает, что замощения домино имеют фазовый переход третьего рода при деформациях ацтековских диамантов, при которых удаляется прямоугольная область (с сохранением зигзагообразной границы) в одном из углов диаманта.

6.2.1. Свободная энергия на L-образной области и замощения домино

L-образная область может быть определена как квадратная область у которой часть решетки прямоугольной формы удалена у одного из углов, см. Рис. 6.1. Как обычно, под

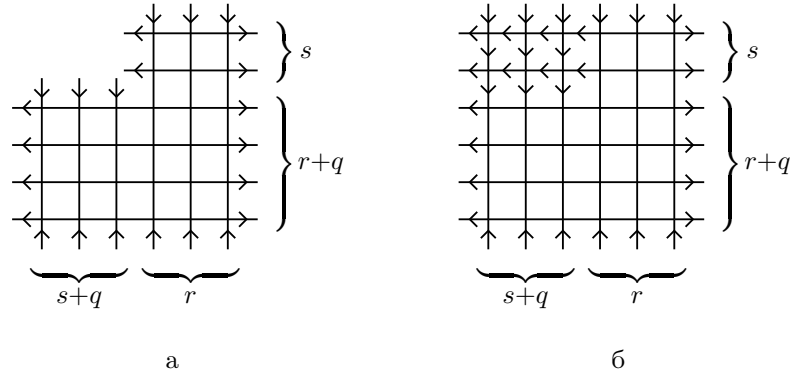


Рис. 6.1. L-образная область с граничными условиями типа доменной стенки: а) определение, б) соответствующая стрелочная конфигурация $N \times N$ решетки.

квадратной областью понимается конечная квадратная решетка полученная пересечением N горизонтальных и N вертикальных прямых, так называемая $N \times N$ решетка. Здесь будем рассматривать L-образную область которая получается удалением из $N \times N$ решетки левого верхнего угла прямоугольной части решетки, размера $s \times (s + q)$, $s, q \in \mathbb{N}_0$, $s + q < N$.

Ясно, что граничные условия типа доменной стенки (стрелки на горизонтальные ребрах исходящие, на вертикальных — входящие) также могут быть наложены в случае L-образной области. L-образная область с граничными условиями типа доменной стенки показана на Рис. 6.1а, где $r = N - s - q$. Будем обозначать статистическую сумму шестивершинной модели на этой решетке как $Z_{r,s,q}$. В частном случае $s = 0$ эта величина совпадает с статистической суммой на квадратной решетке, $Z_{r,0,q} = Z_N$, где $N = r + q$.

В ситуации общего положения ($s \neq 0$), статистическая сумма $Z_{r,s,q}$ выражается через вероятность образования пустоты $F_N^{(r,s)}$ модели на $N \times N$ решетке, $N = r + s + q$, для которой в этой главе нами адаптировано обозначение $F_{r,s,q}$. Напомним, что вероятность образования пустоты описывает вероятность конфигурации в которой все вершины на $s \times (s + q)$ решетке примыкающей к верхнему левому углу $N \times N$ решетки все являются вершинами типа 2, как показано на рис. 6.1б. Сравнение двух картинок на рис. 6.1 позволяет заключить, что

$$Z_{r,s,q} = \frac{Z_N}{w_2^{s(s+q)}} F_{r,s,q}, \quad (6.89)$$

где нами использовано обозначение весов w_i , $i = 1, \dots, 6$, для вершин в стандартном порядке (см. рис. 1.1).

Формула (6.89) позволяет использовать результаты для вероятности образования пустоты для модели в точке свободных фермионов, полученные в разделе 1 настоящей главы, для изучения замощений домино на модифицированных ацтекских алмазах связанных с L-образной областью. Напомним, что для свободно-фермионной модели (для которой

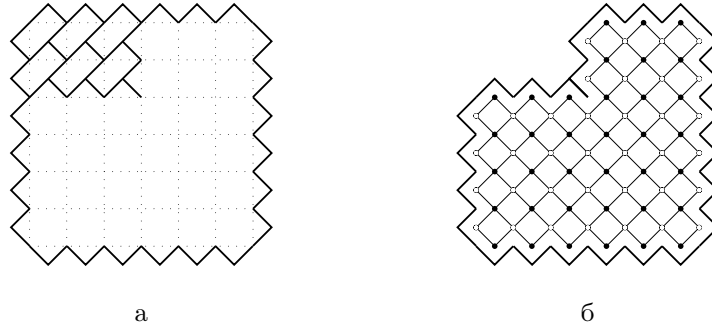


Рис. 6.2. Ацтекские диаманты соответствующие L-образной области: а) с замороженной областью с NE-SW домино, б) с вырезанным углом (показан также двудольный граф).

$w_1w_2 + w_3w_4 = w_5w_6$) статистическая сумма на $N \times N$ решетке имеет особенно простой вид: $Z_N = w_5^{\frac{N(N-1)}{2}} w_6^{\frac{N(N+1)}{2}}$. Поэтому, статистическая сумма $Z_{r,s,q}$ по сути задается вероятностью образования пустоты $F_{r,s,q}$.

Для того, чтобы связать наше обсуждение с соответствием замощений домино конфигурациям шестивершинной модели (см. раздел 1.2.1), полезно выбрать веса свободно-фермионной модели в виде

$$w_1 = w_2 = \sqrt{\rho(1-\alpha)}, \quad w_3 = w_4 = \sqrt{\rho\alpha}, \quad w_5 = 1, \quad w_6 = \rho. \quad (6.90)$$

Здесь параметр ρ играет роль нормировки, поскольку вес w_5 всегда появляется в комбинации w_5w_6 . Выбор $\rho = 2$ соответствует замощениям домино, см. (1.18). Напомним также, что параметр α описывает асимметрию между NW-SE и NE-SW ориентированными домино; значение $\alpha = 1/2$ соответствует симметричному случаю. Поскольку вероятность образования пустоты не зависит от нормировки весов, все результаты раздела 1 настоящей главы полученные для $F_{r,s,q}$ в случае весов (6.2) полностью переносятся и на случай весов (6.90), а значит и для случая замощений домино ($\rho = 2$).

Понятие L-образной области для шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки имеет естественную интерпретацию в контексте замощений домино, и заключается в подходящей модификации ацтекского диаманта, см. рис. 6.2. Используя соответствие вершин типа 2 с определенных фрагментом графического изображения замощений домино, см. рис. 1.3, нетрудно видеть, что вероятность образования пустоты может быть эквивалентно интерпретирована как вероятность конфигурации в замощениях домино показанной на рис. 6.2а. Удаляя «замороженную» область ацтекского диаманта состоящую из NE-SW домино, мы получим так называемый ацтекский диамант с вырезанным углом, показанный на рис. 6.2б; на этом же рисунке показан результирующий граф в моделях димеров.

Обратимся теперь к обсуждению поведения модели в термодинамическом пределе, а именно, в пределе $r, s, q \rightarrow \infty$. Основной величиной, описывающей модель в этом пределе, является свободная энергия на узел, определяемая следующим образом. Пусть $s + q = [xN]$, $s = [yN]$, где $x, y \in [0, 1]$ фиксированны, и, кроме того, $x \geq y$. Свободная энергия есть функция

$$f(x, y) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2 - s(s+q)} \ln Z_{N-s-q, s, q}. \quad (6.91)$$

Эквивалентно, можно рассматривать вероятность образования пустоты $F_{r, s, q}$. Аналогом свободной энергии на узел является функция

$$\varphi(x, y) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \ln F_{N-s-q, s, q}. \quad (6.92)$$

Отметим, что рассматриваемый здесь предел существует; в частности, функция $\varphi(x, y)$ неотрицательна во все области своего определения, $x, y \in [0, 1]$, $x \geq y$. Факт существования предела является частью более сильного утверждения доказанного в работе [127] (см. теорему 1.1 в этой работе).

Из соотношения (6.89) следует, что свободная энергия на узел шестивершинной модели на L-образной области полностью определяется функцией $\varphi(x, y)$:

$$(1 - xy)f(x, y) = f(0, 0) + xy \ln w_2 + \varphi(x, y), \quad f(0, 0) = - \ln \sqrt{\rho}.$$

Аналогично, функция $\varphi(x, y)$ полностью задает свободную энергию замощений домино (с точностью до тривиальных модификаций, которые следуют из (6.89)). Основной результат настоящей главы касается явного вида функции $\varphi(x, y)$.

Чтобы сформулировать основной результат, рассмотрим единичный квадрат, точки которого параметризуются переменными $x, y \in [0, 1]$. Как следует из (6.92), областью определения функции $\varphi(x, y)$ является треугольная область ограниченная тремя прямыми: $y = 0$, $y = x$, $y = 1 - x$. Рассмотрим эллипс заданный уравнением

$$\frac{(1 - x - y)^2}{\alpha} + \frac{(x - y)^2}{1 - \alpha} = 1. \quad (6.93)$$

Обозначим через \mathcal{D}_I и \mathcal{D}_{II} области треугольника которые лежат извне и внутри эллипса, соответственно, см. рис. 6.3. Дуга эллипса (6.93) лежащая в треугольнике и разделяющая эти две области, описывается уравнением

$$\sqrt{y} = \sqrt{(1 - x)(1 - \alpha)} - \sqrt{x\alpha}, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 - \alpha. \quad (6.94)$$

Будем обозначать эту дугу как \mathcal{A} .

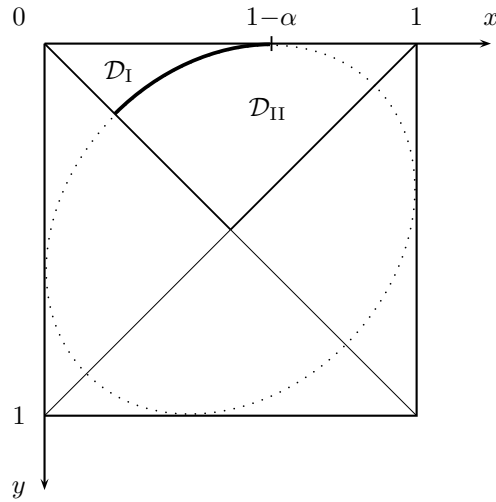


Рис. 6.3. Арктический эллипс (пунктирная линия), дуга \mathcal{A} (жирная линия), и области \mathcal{D}_I и \mathcal{D}_{II} .

Теорема 6.6. В области \mathcal{D}_I функция $\varphi(x, y)$ тождественно равна нулю. В области \mathcal{D}_{II} функция $\varphi(x, y) > 0$ дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & xy \ln \frac{h}{\eta} - \frac{(1-x-y)^2}{2} \ln \frac{1-h}{1-\eta} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+h}{1+\eta} \\ & + (1-x)y \ln \frac{y+(1-x)h}{y+(1-x)\eta} + x(1-y) \ln \frac{x+(1-y)h}{x+(1-y)\eta} \\ & - (1-x)x \ln \frac{x+(1-x)h}{x+(1-x)\eta} - (1-y)y \ln \frac{y+(1-y)h}{y+(1-y)\eta} \\ & - \frac{(x-y)^2}{2} \ln \frac{x+y+(2-x-y)h}{x+y+(2-x-y)\eta}, \end{aligned} \quad (6.95)$$

где

$$h = h(x, y) \equiv \sqrt{\frac{xy}{(1-x)(1-y)}} \quad (6.96)$$

и $\eta = \eta(x, y; \alpha)$ есть единственный на интервале $[0, 1]$ корень уравнения

$$\alpha \frac{(1+\eta)^2(x+(1-x)\eta)(y+(1-y)\eta)}{(1-\eta)^2(y+(1-x)\eta)(x+(1-y)\eta)} = 1, \quad (x, y) \in \mathcal{D}_{II}. \quad (6.97)$$

Обсуждению следствий и доказательству теоремы 6.6 посвящено все последующее изложение настоящей главы. Непосредственно ниже обсуждается наиболее важное следствие полученного результата, которое позволяет интерпретировать арктическую кривую \mathcal{A} как кривую фазового перехода (третьего рода). Утверждение теоремы особенно просто доказывается в частном случае квадратной замороженной области, $x = y$. Доказательство в ситуации общего положения основано на формулировке вероятности пустоты в терминах дискретного кулоновского газа и приведено в деталях в следующем разделе.

Стоит отметить, что факт тождественности нулю функции $\varphi(x, y)$ в области \mathcal{D}_I также следует из результатов работы [127], где величина, эквивалентная рассматриваемой нами

вероятности образования пустоты, была введена в контексте модели углового роста. Фактически вероятность образования пустоты в области \mathcal{D}_I равна 1 с точностью до экспоненциально малой поправки, которая связана с так называемой *функцией роста верхнего хвоста* (upper tail rate function [127]). В этой терминологии значение функции $\varphi(x, y)$ в области \mathcal{D}_{II} , явный вид которой дается (6.95), есть в точности так называемая *функция роста нижнего хвоста* (lower tail rate function).

6.2.2. Фазовый переход третьего рода

Функция $\varphi(x, y)$ является непрерывной функцией своих переменных, в частности, как следует из утверждения теоремы 6.6, $\varphi(x, y)$ должна быть равна нулю на кривой \mathcal{A} (см. рис. 6.3):

$$\varphi(x, y)|_{(x,y) \in \mathcal{A}} = 0. \quad (6.98)$$

Это свойство может быть проверено следующим образом. Пусть $(x, y) \in \mathcal{A}$, тогда $\alpha = \alpha_c$, где значение $\alpha_c = \alpha_c(x, y)$ равно

$$\alpha_c = (\sqrt{(1-x)(1-y)} - \sqrt{xy})^2. \quad (6.99)$$

Полагая $\alpha = \alpha_c$ в (6.97), легко видеть, что подходящий корень уравнения (6.97) равен $\eta = h$, где h дается (6.96). Другими словами,

$$\eta(x, y; \alpha)|_{(x,y) \in \mathcal{A}} = \eta(x, y; \alpha_c) = h(x, y), \quad (6.100)$$

и (6.98) следует из (6.95).

Функцию $\varphi(x, y) = \varphi(x, y; \alpha)$ можно также рассматривать как функцию параметра α при фиксированных x и y , причем $\varphi(x, y) = 0$, если $\alpha < \alpha_c$, и $\varphi(x, y) > 0$, если $\alpha > \alpha_c$. В этом смысле, из второго равенства в (6.100) следует, что $\varphi(x, y; \alpha_c) = 0$.

Фактически, имеют место более сильные свойства, которые следуют из явного вида функции $\varphi(x, y)$ приведенной в теореме 6.6. А именно, кривая \mathcal{A} разделяющая области \mathcal{D}_I и \mathcal{D}_{II} , является кривой фазового перехода третьего рода.

Предложение 6.7. *Для заданной точки (x, y) , имеет место следующая оценка для функции $\varphi(x, y)$ как функции параметра α в окрестности значения $\alpha = \alpha_c$:*

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & \alpha < \alpha_c \\ C(\alpha - \alpha_c)^3 + O((\alpha - \alpha_c)^4) & \alpha > \alpha_c, \end{cases}$$

где α_c дается формулой (6.99) и $C = C(x, y) > 0$.

Доказательство. Начнем с того, что введем параметризацию для точек кривой \mathcal{A} , которая понадобится для явных вычислений. Напомним, что кривая \mathcal{A} является частью эллипса

$$\frac{(1-x-y)^2}{\alpha} + \frac{(x-y)^2}{1-\alpha} = 0,$$

и поэтому можно ввести угловой параметр ϕ , такой что

$$1-x-y = \sqrt{\alpha} \sin \phi, \quad x-y = \sqrt{1-\alpha} \cos \phi.$$

Если положить $\alpha = \sin^2 \lambda$, $\lambda \in (0, \pi)$, то тогда для точек на \mathcal{A} имеют место выражения

$$x = \cos^2 \left(\frac{\phi + \lambda}{2} \right), \quad y = \sin^2 \left(\frac{\phi - \lambda}{2} \right), \quad (x, y) \in \mathcal{A}, \quad \phi \in [\lambda, \pi/2]. \quad (6.101)$$

Рассмотрим уравнение четвертой степени (6.97) в случае, когда $(x, y) \in \mathcal{A}$, используя параметризацию (6.101). Положим (см. приложение А работы [43])

$$\eta = \frac{\cos \omega - \sqrt{\alpha}}{\cos \omega + \sqrt{\alpha}}, \quad \omega \in [0, \arccos \sqrt{\alpha}]. \quad (6.102)$$

В терминах неизвестной величины ω уравнение (6.97) примет вид

$$\frac{\sin^2 \lambda \sin \phi}{\cos \omega} + \frac{\cos^2 \lambda \cos \phi}{\sin \omega} = 1.$$

Корень который нам нужен есть $\omega = \pi/2 - \phi$ (заметим, что $\phi \in [\lambda, \pi/2]$ и $\lambda \in (0, \pi/2)$, и значит $\omega \in [0, \pi/2)$, как и требуется). Подставляя полученное выражение для корня в (6.102), получим

$$\eta|_{(x,y) \in \mathcal{A}} = \frac{\sin \phi - \sin \lambda}{\sin \phi + \sin \lambda} = \cot \left(\frac{\phi + \lambda}{2} \right) \tan \left(\frac{\phi - \lambda}{2} \right) = \sqrt{\frac{xy}{(1-x)(1-y)}}.$$

В последнем равенстве появляется введенная в (6.96) величина h , что и объясняет ее интерпретацию как значение η на арктической кривой.

Теперь мы готовы рассмотреть свойства функции $\varphi(x, y) = \varphi(x, y; \alpha)$ в окрестности кривой \mathcal{A} . В частности, наша задача состоит в том, чтобы показать, что имеет место свойство

$$\varphi(x, y) \sim C(\alpha - \alpha_c)^3, \quad \alpha \rightarrow \alpha_c^+.$$

Поскольку $\varphi(x, y) = \chi(x, y; \eta) - \chi(x, y; h)$, где функция $\chi(x, y; \eta)$ определена в (6.173), и поскольку зависимость от α содержится только в η , задача сводится к изучению свойств функции $\chi(x, y; \eta)$ как функции η . Прямым вычислением легко убедиться, что

$$\partial_\eta^k \chi(x, y; \eta)|_{\eta=h} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (6.103)$$

Третья производная, однако, не равна нулю; коэффициент $C = C(x, y)$ может быть вычислен по формуле

$$C = \partial_{\alpha}^3 \varphi|_{\alpha=\alpha_c} = \frac{1}{\alpha_c^3} \left[\frac{1}{(\partial_{\eta} \ln \alpha)^3} \partial_{\eta}^3 \chi(x, y; \eta) \right] \Big|_{\eta=h},$$

где функция $\alpha = \alpha(\eta)$ определяется соотношением (6.172), откуда нетрудно получить

$$\begin{aligned} \partial_{\eta} \ln \alpha|_{\eta=h} &= -\frac{2}{1-h} - \frac{2}{1+h} + \frac{1-x}{y+(1-x)h} + \frac{1-y}{x+(1-y)h} - \frac{1-x}{x+(1-x)h} - \frac{1-y}{y+(1-y)h} \\ &= -4 \frac{(1-x)(1-y)}{1-x-y}. \end{aligned}$$

В случае величины $\partial_{\eta}^3 \chi(x, y; \eta)$ вычисления оказываются весьма трудоемкими; использование параметризации (6.101) позволяет получить результат в красивом факторизованном виде:

$$\partial_{\eta}^3 \chi(x, y; \eta)|_{\eta=h} = -\frac{(\sin \phi - \sin \lambda)(\sin \phi + \sin \lambda)^7}{8 \sin \lambda \cos^4 \lambda \sin^3 \phi}.$$

Принимая во внимание, что $\partial_{\eta} \ln \alpha|_{\eta=h} = -(\sin \phi + \sin \lambda)^2 / \sin \lambda \sin \phi$, и что $\alpha_c = \sin^2 \lambda$, окончательно получим

$$C = \frac{2 \sin(\phi - \lambda) \sin(\phi + \lambda)}{\sin^4 2\lambda} = \frac{\sqrt{x(1-x)y(1-y)}}{2\alpha_c^2(1-\alpha_c)^2},$$

где величина α_c как функция x и y определена в (6.99). \square

Аналогичным образом, фазовый переход третьего рода можно рассматривать как определенное поведение функции $\varphi(x, y) = \varphi(x, y; \alpha)$ по переменным x и y , при фиксированном α . А именно, функция $\varphi(x, y) = \varphi(x, y; \alpha)$ имеет скачок своей третьей нормальной производной на кривой \mathcal{A} , с первой и второй нормальными производными равными нулю.

Предложение 6.8. Для заданной точки $(x, y) \in \mathcal{D}_{\text{II}}$, лежащей на расстоянии t от кривой \mathcal{A} , имеет место поведение

$$\varphi(x, y) \propto t^3, \quad t \rightarrow 0^+,$$

где константа пропорциональности положительная.

Доказательство. Это свойство следует из выражения для функции $\varphi(x, y)$ приведенного в теореме 6.6. Пусть t переменная вдоль нормали к кривой \mathcal{A} в точке (x, y) , тогда, в частности, нужно показать, что

$$\partial_t^k \varphi(x, y)|_{(x,y) \in \mathcal{A}} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (6.104)$$

Действительно, поскольку $\varphi(x, y) = \chi(x, y; \eta) - \chi(x, y; h)$, при вычислении производных по t достаточно учитывать только те члены, которые содержат производные функций $\chi(x, y; \eta)$ и $\chi(x, y; h)$ по их параметрам, η и h , соответственно. Отсюда, свойство (6.104) есть просто

следствие аналогичного свойства функции $\chi(x, y; \eta)$, см. (6.103). Для третьей производной получим

$$\partial_t^3 \varphi(x, y)|_{(x,y) \in \mathcal{A}} = [(\partial_t \eta|_{\eta=h})^3 - (\partial_t h)^3] \partial_\eta^3 \chi(x, y; \eta)|_{\eta=h}.$$

Поскольку $\partial_t \eta|_{\eta=h}$, вообще говоря, не равно $\partial_t h$, третья производная не равна нулю; ее явное выражение может быть получено полностью аналогично тому, как была выше вычислена величина C . \square

Резюмируем полученные результаты. Напомним, что эллипс (6.93) есть арктический эллипс замощений домино оригинального, недеформированного ацтекского диаманта (впервые полученный в работе [50]), или, эквивалентно, шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в точке свободных фермионов, заданной на квадратной области. Функция $\varphi(x, y)$ равна нулю при $\alpha = \alpha_c$, совместно с своей первой и второй производными по α , и имеет ненулевую (и конечную) третью производную. Это свойство очевидно также имеет место и для свободной энергии $f(x, y)$ модели заданной на L-образной области, см. (6.91). Поскольку параметр α описывает больцмановские веса, полученный результат, таким образом, означает наличие фазового перехода третьего рода при $\alpha = \alpha_c$.

Альтернативная точка зрения состоит в том, чтобы рассматривать α фиксированное, и изменять геометрические параметры L-образной области, а именно, координаты угла области, x и y . При этом функция $\varphi(x, y)$, как функция расстояния t по нормали к арктической кривой, демонстрирует поведение фазового перехода третьего рода. Это означает, что арктический эллипс может быть интерпретирован как *кривая фазового перехода третьего рода* в пространстве параметров модели.

6.2.3. Частный случай квадратной замороженной области

В качестве иллюстрации к теореме 6.6, полное доказательство которой дано последнем разделе настоящей главы, полезно рассмотреть ее частный случай когда $x = y$. В этом случае корень η легко определяется явно

$$\eta(x, x; \alpha) = \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 + \sqrt{\alpha}}. \quad (6.105)$$

Функция $\varphi(x, y)$ при $x = y$ имеет вид

$$\varphi(x, x) = \frac{1}{(1-x)^2} \sigma(v), \quad v \equiv h(x, x) = \frac{x}{1-x},$$

где¹

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 & v \in [0, v_c] \\ v^2 \ln \frac{v}{v_c} - \frac{(1-v)^2}{2} \ln \frac{1-v}{1-v_c} - \frac{(1+v)^2}{2} \ln \frac{1+v}{1+v_c} & v \in [v_c, 1], \end{cases} \quad (6.106)$$

а критическое значение $v = v_c$ при котором имеет место переход третьего рода,

$$\sigma'(v_c) = \sigma''(v_c) = \lim_{v \nearrow v_c} \sigma'''(v) = 0, \quad \lim_{v \searrow v_c} \sigma'''(v) = \frac{1}{v_c(1-v_c^2)},$$

равно $v_c = \eta(x, x; \alpha)$, где $\eta(x, x; \alpha)$ дается формулой (6.105).

Формула (6.106) интересна тем, что она может быть легко получена с помощью уравнение типа цепочки Тоды, которым удовлетворяет вероятность образования пустоты. Действительно, замечая, что функция $\sigma(v)$ может быть определена формулой (ср. с (6.92))

$$\sigma(v) = - \lim_{\substack{r, s \rightarrow \infty \\ s/r=v}} \frac{\ln F_{r,s,0}}{s^2},$$

и переходя к пределу в уравнениях (6.32a) и (6.33a), нетрудно заключить, что функция $\sigma(v)$ должна удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\alpha \partial_\alpha)^2 \sigma &= \frac{\alpha v^2}{(1-\alpha)^2} (1 - e^{-\sigma''}), \\ (\alpha \partial_\alpha)^2 \sigma &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} (1 - e^{-v^2 \sigma'' + 2v \sigma' - 2\sigma}), \end{aligned} \quad (6.107)$$

где, как и выше, штрих обозначает производную по v . Кроме того, функция $\sigma(v)$ для $v \in [0, 1]$, очевидно, должна быть: а) непрерывной, б) неотрицательной, в) неубывающей, и г) удовлетворять определенным граничным условиям при $v = 0$ и $v = 1$. Граничные условия могут быть получены из известных значений вероятности образования пустоты при конечных r и s . В частности, для $s = 0, 1$ и произвольных значений r известно, что $F_{r,0,0} = 1$ и $F_{r,1,0} = 1 - w_6(w_3 w_4)^r Z_r Z_{r+1}^{-1} = 1 - \alpha^r$, и, поскольку $\alpha \in (0, 1)$, получим

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 0. \quad (6.108)$$

Аналогично, для $s = r$ имеем $F_{r,r,0} = (w_1 w_2)^{r^2} Z_r^2 Z_{2r}^{-1} = (1 - \alpha)^{r^2}$, откуда

$$\sigma(1) = -\ln(1 - \alpha). \quad (6.109)$$

В качестве комментария к формулам (6.108) и (6.109), отметим, что приведенные выше выражения для $F_{r,1,0}$ и $F_{r,r,0}$ в терминах статистических сумм верны для произвольных весов и следуют непосредственно из анализа возможных конфигураций модели (см. также обсуждения в работах [41, 100, 128]). Использование, например, уравнений (6.33a) и (6.32a), позволяет

¹ Эту функцию не следует путать с σ -функцией шестого уравнения Пенлеве.

получить более детальную информацию. А именно, формулы (6.108) могут быть также дополнены наблюдением, что при фиксированном s и больших r имеет место оценка $1 - F_{r,s,0} = O(\alpha^{r-s+1})$, которая означает, что в окрестности точки $v = 0$ все старшие производные функции $\sigma(v)$ равны нулю. Что касается (6.109), то эта формула может быть также получена из (6.11), а из (6.12) получено выражение для $\sigma'(1)$, которое, однако, для установления явного вида функции $\sigma(v)$ не потребуется.

Обратимся теперь к выводу формулы (6.106) как решения системы (6.107) с указанными свойствами. Будем искать функцию σ как решение ОДЕ по v к которому сводятся уравнения в (6.107) путем приравнивания их правых частей. Это уравнение удобно записать в виде

$$v^2 e^{(v^2-1)\sigma''-2v\sigma'+2\sigma} + (1-v^2)e^{v^2\sigma''-2v\sigma'+2\sigma} = 1. \quad (6.110)$$

Поскольку каждое из слагаемых в левой части принимают значения на интервале $[0, 1]$, уместно записать их как $\sin^2\Phi$ и $\cos^2\Phi$, соответственно, где $\Phi = \Phi(v; \alpha) \in [0, \pi/2]$. Тогда (6.110) может быть заменено следующей системой ОДЕ на функции σ и Φ :

$$\begin{aligned} \sigma'' &= -2 \ln \frac{\sin \Phi}{v} + 2 \ln \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1-v^2}}, \\ v\sigma' - \sigma &= -v^2 \ln \frac{\sin \Phi}{v} - (1-v^2) \ln \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Исключая из этой системы функцию σ (дифференцируя второе уравнение и пользуясь тем, что $(v\sigma' - \sigma)' = v\sigma''$) получим следующее уравнение для Φ :

$$[(1-v^2) \tan \Phi - v^2 \cot \Phi] \Phi' = 0.$$

Очевидно, это уравнение имеет два решения

$$\Phi_I(v) = \arcsin v, \quad \Phi_{II}(v) = \Omega,$$

где $\Omega = \Omega(\alpha)$ есть некоторая константа относительно переменной v .

Обозначая через σ_I решение, которое соответствует функции Φ_I , из (6.111) найдем, что $\sigma_I'' = v\sigma_I' - \sigma_I = 0$. Следовательно,

$$\sigma_I(v) = Av, \quad (6.112)$$

где $A = A(\alpha)$ константа относительно v . Подставляя (6.112) в (6.107) получим $(\alpha\partial_\alpha)^2 A = 0$, откуда

$$A = a_1 + a_2 \ln \alpha, \quad (6.113)$$

где a_1 и a_2 произвольные числовые константы.

Решение σ_{II} , которое соответствует функции Φ_{II} находится аналогично. Решая (6.111), где Φ заменено v -независимой величиной Ω , найдем

$$\sigma_{II}(v) = v^2 \ln v - \frac{(1-v)^2}{2} \ln(1-v) - \frac{(1+v)^2}{2} \ln(1+v) + v^2 \ln \cot \Omega + Bv + \ln \cos \Omega, \quad (6.114)$$

где $B = B(\alpha)$ константа относительно v . Подставляя (6.114) в (6.107) получим три ОДЕ по α на неизвестные функции B и Ω . Одно из уравнений имеет вид $(\alpha \partial_\alpha)^2 B = 0$, откуда

$$B = b_1 + b_2 \ln \alpha, \quad (6.115)$$

где b_1 и b_2 некоторые константы. Два других уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} (\alpha \partial_\alpha)^2 \ln \cos \Omega &= -\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \tan^2 \Omega, \\ (\alpha \partial_\alpha)^2 \ln \cot \Omega &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \frac{1}{\cos^2 \Omega}. \end{aligned}$$

Решая каждое из этих уравнений и требуя, чтобы совместное решение было вещественнозначной функцией α и принимало значения на интервале $[0, \pi/2]$, найдем

$$\Omega = \arcsin \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 + \sqrt{\alpha}}. \quad (6.116)$$

Установим теперь вид функции $\sigma(v)$, описывающей термодинамической предел вероятности образования пустоты. В первую очередь заметим, что функция $\sigma(v)$ не может быть выражена только в терминах решения $\sigma_I(v)$, либо решения $\sigma_{II}(v)$. Действительно, функция $\sigma_I(v)$ очевидно совместна с граничными условиями в точке $v = 0$, см. (6.108), но не совместна с таковыми в точке $v = 1$, см. (6.109). В тоже время, функция $\sigma_{II}(v)$ очевидно может быть выбрана удовлетворяющей условию в точке $v = 1$, но не может быть согласована с таковым в точке $v = 0$. Тем не менее, эти наблюдения указывают, что граничным условиям (6.108) и (6.109) можно удовлетворить, если предположить, что функция $\sigma(v)$ имеет вид:

$$\sigma(v) = \begin{cases} \sigma_I(v) & v \in [0, v_c] \\ \sigma_{II}(v) & v \in [v_c, 1], \end{cases} \quad (6.117)$$

где v_c может зависеть от α . Значение v_c может быть найдено из граничных условий и дополнительных свойств, которыми должна обладать искомая функция $\sigma(v)$, а именно, уже упоминавшиеся выше свойства непрерывности, неотрицательности и неубывания по переменной v на всем интервале $[0, 1]$.

Чтобы полностью построить функцию $\sigma(v)$ в соответствии с (6.117) и найти v_c , найдем сначала значения констант a_1, a_2, b_1, b_2 , при которых решения (6.112) и (6.114) удовлетворяют

граничным условиям (6.108) и (6.109), соответственно. При $v = 0$ имеем условие $A = 0$, т.е. $a_1 = a_2 = 0$, см. (6.113). Таким образом, решение $\sigma_I(v)$ в (6.117) имеет вид

$$\sigma_I(v) = 0. \quad (6.118)$$

Рассмотрим теперь точку $v = 1$. Из (6.114), (6.115) и (6.116) имеем

$$\sigma_{II}(1) = b_1 + b_2 \ln \alpha + \ln \frac{\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}$$

и значит условие (6.109) удовлетворяется, если положить $b_1 = 0$, $b_2 = -1/2$. В результате, для функции $\sigma_{II}(v)$ получим выражение

$$\sigma_{II}(v) = v^2 \ln \frac{v}{u} - \frac{(1-v)^2}{2} \ln \frac{1-v}{1-u} - \frac{(1+v)^2}{2} \ln \frac{1+v}{1+u}, \quad u = \sin \Omega, \quad (6.119)$$

где Ω определена в (6.116).

Найдем теперь значение v_c из условия, чтобы функция $\sigma(v)$, даваемая формулами (6.117), (6.118) и (6.119), была непрерывной, неотрицательной и неубывающей. Поскольку $\sigma_I(v)$ равно тождественно нулю, непрерывность означает, что $\sigma_{II}(v_c) = 0$. Из (6.119) следует, что $\sigma_{II}(v)$ положительная и монотонно растущая функция, от 0 при $v = u$ до своего граничного значения $-\ln(1 - \alpha)$ при $v = 1$. Отсюда

$$v_c = u = \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 + \sqrt{\alpha}}. \quad (6.120)$$

Таким образом, функция $\sigma(v)$ дается формулами (6.117), (6.118), (6.119) и (6.120), что в совокупности и означает справедливость выражения (6.106).

6.2.4. Формулировка задачи в терминах дискретного кулоновского газа

Как уже говорилось выше, статсумма шестивершинной модели на Γ -образной области, по существу, определяется вероятностью образования пустоты. Для общих значений бoльцмановских весов, вероятность образования пустоты была вычислена в виде кратного интеграла в главе 5 (см. также работу [32]). Для условия свободных фермионов этот кратный интеграл может быть вычислен, что приводит к представлению (6.3) в терминах определителя ганкелевой матрицы.

Из (6.3) непосредственно следует, что имеет место также представление

$$F_{r,s,q} = \frac{(1 - \alpha)^{s(s+q)}}{\alpha^{s(s-1)/2}} I_{r,s,q}, \quad (6.121)$$

где величина $I_{r,s,q}$ есть статистическая сумма кулоновского газа

$$I_{r,s,q} = \frac{1}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} \frac{q!}{j!(j+q)!} \sum_{m_1=0}^{r-1} \cdots \sum_{m_s=0}^{r-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (m_j - m_k)^2 \prod_{j=1}^s \binom{q + m_j}{q} \alpha^{m_j}. \quad (6.122)$$

Из этой формулы следует, что кулоновский газ является: а) дискретным, и б) заданным на конечном интервале. Действительно, в (6.122) нетрудно распознать дискретный вес полиномов Мейкснера

$$w_q^\alpha(m) = \binom{q+m}{q} \alpha^m, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

но также необходимо учесть условие $m < r$ для координат зарядов кулоновского газа. Эти два условия (дискретность и конечность интервала) играют важную роль в анализе решения задачи о термодинамическом пределе кулоновского газа. Как будет более детально обсуждаться ниже, дискретность накладывает ограничение на плотность зарядов, а конечность интервала означает наличие бесконечных потенциальных стенок у потенциала.

Модель дискретного кулоновского газа (6.122) появлялась ранее в контексте модели случайного углового роста [127]. Статистическая сумма (6.122) также тесно связана с унитарным круговым ансамблем случайных матриц, с обобщением гипергеометрической функции на случай многих переменных, и с τ -функцией шестого уравнения Пенлеве [129].

Чтобы вычислить предел (6.92) и доказать теорему 6.6, исследуем асимптотическое поведение дискретного кулоновского газа (6.122) в скейлинговом пределе, а именно, при $r, s, q \rightarrow \infty$, сохраняя при этом соотношения сторон L-образной области. Пусть $r = [Rs]$, $R \geq 1$ фиксированно, и пусть $q = [Qs]$, $Q \geq 0$ также фиксированно. Введем функцию

$$\Phi(R, Q) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln I_{r,s,q}}{s^2}. \quad (6.123)$$

Можно показать, что предел в (6.123) существует, см., например, [127], теорема 2.2. Функция $\Phi(R, Q)$ связана с функцией $\varphi(x, y)$, определенной в (6.92), следующей формулой (см. (6.121)):

$$(1-x)^2 \varphi(x, y) = -xy \ln(1-\alpha) + y^2 \ln \sqrt{\alpha} - y^2 \Phi \left(\frac{1-x}{y}, \frac{x-y}{y} \right). \quad (6.124)$$

Чтобы получить соотношение (6.124) необходимо принять во внимание соотношения

$$R = \frac{1-x}{y}, \quad Q = \frac{x-y}{y}, \quad (6.125)$$

которые имеют место в пределе $s \rightarrow \infty$.

Чтобы вычислить непрерывный предел дискретного кулоновского газа (6.122) можно рассмотреть соответствующий непрерывный газ с непрерывным потенциалом полученным из исходной дискретной меры. Положим

$$V_s(\mu) := -\frac{1}{s} \ln \left[\binom{q+s\mu}{q} \alpha^{s\mu} \right], \quad \mu \geq 0.$$

Используя формулу Стирлинга, получим

$$V(\mu) := \lim_{s \rightarrow \infty} V_s(\mu) = -\mu \ln \alpha + \mu \ln \mu - (Q + \mu) \ln(Q + \mu) + Q \ln Q, \quad (6.126)$$

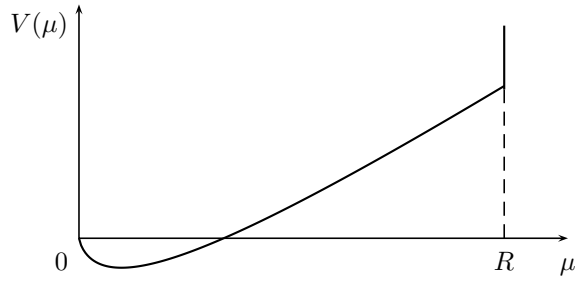


Рис. 6.4. Потенциал $V(\mu)$ с двумя бесконечными стенками в точках $\mu = 0$ и $\mu = R$.

равномерно на компактных подмножествах на интервале $[0, \infty)$. Заметим, что удерживающий потенциал $V(\mu)$ дополнен двумя бесконечными стенками в точках $\mu = 0$ и $\mu = R$, см. рис. 6.4. Подчеркнем различие в поведении потенциала вблизи двух бесконечных стенок: производная от потенциала расходится логарифмически в точке $\mu = 0$, в то время как является всегда конечной (для допустимых значений параметров модели) в точке $\mu = R$. В результате, потенциал продолжается гладко в бесконечную стенку на левой границе интервала, а на правой образует с стенкой ненулевой угол.

В связи с этим, напомним некоторые известные результаты из теории взвешенного потенциала в случае дискретного кулоновского газа. Эти результаты обсуждались как в физической [130], так и математической литературе [131, 132], в том числе и в наиболее общей математической формулировке [133]. В двух словах, при умеренных предположениях о потенциале, которые явно удовлетворены в нашей задаче (как было доказано в [127]), асимптотика дискретного кулоновского газа определяется с из задачи о равновесной мере, ограниченной дополнительным условием. Сама задача аналогична таковой для случая непрерывного кулоновского газа, а дополнительное условие состоит в том, что плотность частиц должна быть меньше или равна 1, как следствие дискретности.

Более конкретно, задача сводится к нахождению равновесной меры, $\rho_0(\mu)d\mu$, которая является (единственной) функцией минимизирующей функционал

$$S[\rho] = - \int \int \ln |\mu - \nu| \rho(\mu) \rho(\nu) d\mu d\nu + \int V(\mu) \rho(\mu) d\mu,$$

где сингулярность при $\mu = \nu$ должна пониматься в смысле главного значения. Равновесная мера удовлетворяет условию нормировки

$$\int \rho_0(\mu) d\mu = 1, \quad (6.127)$$

и дополнительному условию

$$\rho_0(\mu) \leq 1, \quad (6.128)$$

которое накладывается дискретностью меры кулоновского газа. В нашей задаче, интегрирование ведется по интервалу $[0, R]$.

Известно (см., например, [133]), что при наложении условия (6.128) равновесная мера разбивает интервал $[0, R]$ на три набора (множества) $I_-, I_0,$ и I_+ , на которых $\rho_0(\mu) = 0,$ $0 < \rho_0(\mu) < 1,$ и $\rho_0(\mu) = 1,$ соответственно. Каждый набор есть объединение конечного числа интервалов, которые являются зонами *пустоты*, заполненными зонами, и зонами *насыщения*, соответственно.

При доказательстве теоремы (6.6) мы используем представление (6.122), которое есть не что иное, как формулировка в терминах кулоновского газа на дискретной решетке с неполиномиальным потенциалом с двумя бесконечными стенками. Дополнительным результатом доказательства является то, что бесконечная стенка в дискретном кулоновском газе может приводить к фазовому переходу третьего рода в соответствующей свободной энергии, который обусловлен переходом между «жесткой» и «мягкой» границами у заполненной зоны. Это хорошо известное явление в случае непрерывного кулоновского газа, часто упоминаемое в литературе как фазовый переход Виттена–Гросса–Вадья [134–137]. Однако в дискретном случае фазовые переходы обычно являются переходами типа Дугласа–Казакова [130], в то время как переходы между «жесткой» и «мягкой» границами являются «прозрачными», в том смысле, что не приводят к каким-либо непрерывностям в свободной энергии [133].

Поведение, которое наблюдается в рассматриваемой модели, можно отнести к форме потенциала в непосредственной близости от бесконечных стенок. В всех случаях изучавшихся ранее, производная от потенциала в непосредственной близости от бесконечной стенки, расположенной, скажем, в точке $\mu = x_0,$ обычно имеет расходящееся поведение вида $V'(x) \simeq \ln|x - x_0|.$ Такое поведение означает плавное сглаживание потенциала с бесконечной стенкой. В данной модели такое сглаживание имеет место только для стенки на левой стороне интервала $[0, R].$ В результате, среди двух возможных переходов между «жесткой» и «мягкой» границами у заполненной зоны в данной модели только один является «прозрачным» — тот, который связан с левой стенкой. Другой же аналогичный переход, связанный с правой стенкой, таковым не является и потому порождает фазовый переход третьего рода.

6.3. Вывод выражения для свободной энергии на L-образной области

Основной целью этого раздела является доказательство теоремы 6.6 о главном члене асимптотики вероятности образования пустоты в термодинамическом пределе. Как обсужда-

лось выше, этот член также описывает свободную энергию модели на области L-образной формы. Основным инструментом вычислений является формулировка в терминах дискретного кулоновского газа с потенциалом (6.126).

6.3.1. Резольвента дискретного кулоновского газа

Самый удобным способом нахождения равновесной меры является метод основанный на использовании резольвенты

$$W(z) = \int_0^R \frac{\rho_0(\mu)}{z - \mu} d\mu, \quad z \notin [0, R].$$

Имеют место следующие свойства. Во-первых, $W(z)$ является аналитической функцией в $\mathbb{C} \setminus [0, R]$. Во-вторых, при $z \rightarrow \infty$, резольвента имеет следующее асимптотическое поведение

$$W(z) = \frac{1}{z} + \frac{E}{z^2} + O(z^{-3}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (6.129)$$

где старший коэффициент определяется нормировочным условием (6.127), и E есть первый момент:

$$E = \int_0^R \mu \rho_0(\mu) d\mu. \quad (6.130)$$

Во-третьих, равновесная мера дается скачком через разрез $I_0 \cup I_+$,

$$\rho_0(\mu) = -\frac{1}{2\pi i} [W(\mu + i0) - W(\mu - i0)], \quad \mu \in [0, R]. \quad (6.131)$$

В частности,

$$W(\mu + i0) - W(\mu - i0) = \begin{cases} 0 & \mu \in I_- \\ -2\pi i & \mu \in I_+. \end{cases}$$

И, наконец, в-четвертых, резольвента удовлетворяет уравнению

$$W(\mu + i0) + W(\mu - i0) = V'(\mu), \quad \mu \in I_0. \quad (6.132)$$

Эти свойства, дополненные некоторым простым анзацем о структуре интервала $[0, R]$ в терминах зон заполнения, пустых зон и зон насыщения, позволяют однозначно решить задачу о равновесной мере для рассматриваемого кулоновского газа.

Прежде чем обсуждать вопросы, связанные с дискретным характером кулоновского газа в присутствии потенциальных стенок, а также тесно связанное с этими факторами явление возникновения зон насыщения, полезно напомнить процедуру нахождения резольвенты в ситуации когда дискретность и присутствие потенциальных стенок ни коим образом не влияют

на результат. А именно, таким случаем является ситуация, когда интервал $[0, R]$ состоит из единственной заполненной зоны в интервале $[a, b]$, и двух пустых зон, в интервалах $[0, a]$ и $[b, R]$. Уравнение для резольвенты в этом случае есть сингулярное интегральное уравнение (6.132), где $I_0 = [a, b]$. Концевые точки заполненной зоны определяются из требования, чтобы решение (6.132) при $z \rightarrow \infty$ в ведущем порядке имело вид $W(z) \sim 1/z$, диктуемый (6.129).

Однако, если плотность решений (равновесная мера) найденная как решение (6.132) не удовлетворяет условию (6.128), или если концевые точки a и b оказываются лежащими вне интервала $[0, R]$, то тогда необходимо вводить некоторый подходящий анзац для структуры интервала $[0, R]$ в терминах пустых зон, заполненных зон и зон насыщения, с I_+ состоящем как минимум из одного интервала.

Существование как минимум одной зоны насыщения, (т.е., $I_+ \neq \emptyset$) означает следующую форму резольвенты:

$$W(z) = \int_{I_+} \frac{1}{z - \mu} d\mu + H(z), \quad H(z) := \int_{I_0} \frac{\rho_0(\mu)}{z - \mu} d\mu.$$

Здесь функция $H(z)$ является решением уравнения

$$H(\mu + i0) + H(\mu - i0) = U(\mu), \quad \mu \in I_0, \quad (6.133)$$

где

$$U(z) = -2 \int_{I_+} \frac{1}{z - \mu} d\mu + V'(z).$$

В предположении, что I_0 состоит из одного интервала (так называемый однозонный анзац [133]), с концевыми точками a и b удовлетворяющими $0 < a < b < R$, решение (6.133), такое, что $H(z) = O(1/z)$ при $z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$H(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi} \int_a^b \frac{U(\mu)}{(z-\mu)\sqrt{(\mu-a)(b-\mu)}} d\mu. \quad (6.134)$$

Концевые точки a и b могут быть найдены из уравнений, которые следуют из условия (6.129), на коэффициенты порядка z^0 и z^{-1} в разложении выражения (6.134) при больших z . Окончательный результат для плотности, который следует из (6.131), должен удовлетворять условию (6.128).

Формулировка анзаца для структуры интервала $[0, R]$ в терминах заполненных зон, зон пустоты, и зон насыщения, основана на форме потенциала, а также наличии потенциальных стенок. В нашем случае потенциал дается выражением (6.126), и имеются стенки в точках $\mu = 0$ и $\mu = R$. Структура зон может зависеть от значений параметров $R \in [1, \infty)$ и $Q \in [0, \infty)$.

Как видно из Рис. 6.4, потенциал имеет один минимум в точке $\mu = \mu_0$, значение которого легко найти вычисляя выражение для производной

$$V'(\mu) = -\ln \alpha + \ln \mu - \ln(\mu + Q),$$

откуда следует, что

$$\mu_0 = \frac{Q\alpha}{1-\alpha}.$$

Таким образом, следует ожидать, что ненулевая плотность должна быть в окрестности точки $\mu = \mu_0$. Кроме того, известно, что заполненная зона не может находиться в окрестности потенциальных стенок [133]. Таким образом, в нашем случае, интервалы содержащие точки $\mu = 0$ и $\mu = R$ могут быть только зоны пустоты или зоны насыщения. Очевидно, исходя из физической картины кулоновского газа, что наличие зон пустоты и зон насыщения определяется расстоянием точки минимума потенциала в точке $\mu = \mu_0$ до потенциальных стенок в точках $\mu = 0$ и $\mu = R$.

Детальный анализ, представленный ниже, показывает, что однозонный анзац для интервала $[0, R]$ допускает четыре различные структуры. Мы будем называть их режим IA, режим IB, режим IIA, и режим IIIB. В каждом из этих режимов, имеется в интервале $[a, b]$ находится заполненная зона, расположенная между зонами пустоты или насыщения в интервалах $[0, a]$ и $[b, R]$. Четыре сценария отличаются друг от друга является ли каждый из этих интервалов пустой или насыщенной зоной. А именно, в режиме IA интервал $[0, a]$ является зоной насыщения, а интервал $[b, R]$ зоной пустоты; в режиме IB оба интервала являются зонами пустоты; в режиме IIA оба интервала являются зонами насыщения; наконец, в режиме IIIB интервал $[0, a]$ является зоной пустоты, а интервал $[b, R]$ зоной насыщения.

Четыре указанных режима соответствуют четырем различным областям значений параметров $Q \geq 0$, $R \geq 1$. При этом, режимы IA и IB являются частными случаями режима I, а режимы IIA и IIIB являются частными случаями режима II, где режимы I и II это режимы асимптотики вероятности образования пустоты соответствующие областям \mathcal{D}_I и \mathcal{D}_{II} , см. Рис. 6.3. Как получено ниже при обсуждении явных выражений для резольвенты, эти два режима определяются, соответственно, значениями $R > R_c$, и $1 \leq R < R_c$, где критическое значение $R_c = R_c(Q)$ дается формулой

$$R_c = \frac{(1 + \sqrt{\alpha(1+Q)})^2}{1-\alpha}, \quad Q \in [0, \infty). \quad (6.135)$$

Это значение позволяет найти уравнение границы отделяющую области \mathcal{D}_I и \mathcal{D}_{II} в пространстве координат $x, y \in [0, 1]$.

Чтобы получить это уравнение, достаточно заметить, что это уравнение имеет вид $R = R_c(Q)$, которое также может быть записано как следующее соотношение между параметрами R и Q :

$$\sqrt{(1-\alpha)R} = 1 + \sqrt{\alpha(1+Q)}.$$

В силу (6.125), это соотношение переписывается в терминах x и y в следующем виде:

$$\sqrt{y} = \sqrt{(1-\alpha)(1-x)} - \sqrt{\alpha x}. \quad (6.136)$$

В этой формуле нетрудно увидеть часть арктического эллипса (6.93) между точками касания $(x, y) = (1-\alpha, 0)$ и $(x, y) = (0, 1-\alpha)$. Дополнительное условие $x \geq y$ (соответствующее условию $Q \geq 0$) выделяет дугу этого эллипса \mathcal{A} , см. также (6.94), разделяющую области \mathcal{D}_I и \mathcal{D}_{II} .

Из (6.136) также следует, что значения x и y , которые соответствуют $R > R_c$, т.е., режиму I, выделяются условиями $y < y_c$ и $y \leq x$, где $y_c = y_c(x)$ имеет вид:

$$y_c = \begin{cases} (\sqrt{(1-\alpha)(1-x)} - \sqrt{\alpha x})^2 & x \in [(1-\sqrt{\alpha})/2, 1-\alpha] \\ 0 & x \in [1-\alpha, 1]. \end{cases}$$

Таким образом, в режиме I имеем $(x, y) \in \mathcal{D}_I$. Аналогично, для режима II, $1 \leq R < R_c$, нетрудно получить, что $(x, y) \in \mathcal{D}_{II}$. Это и есть условия на значения (x, y) , указанные в теореме 6.6.

6.3.2. Явные выражения для резольвенты

Обратимся теперь установлению явных выражений для резольвенты. Как следует из обсуждения выше, режим IA и режим IB тесно связаны друг другом. На самом деле, они могут рассматриваться как два различных сценария для одного и того же режима, режима I, который характеризуется пустотой на интервале $[b, R]$, примыкающем к правой стенке потенциала в точке $\mu = R$. Решение задачи о резольвенте, эквивалентное рассматриваемому здесь для дискретного кулоновского газа (6.122) в режимах IA и IB, рассматривалось в работах [58, 127, 138].

Предложение 6.9. *Резольвента равновесной меры в непрерывном пределе дискретного кулоновского газа (6.122) в режиме IA имеет вид*

$$W(z) = -\ln \sqrt{\alpha} - \ln \frac{\sqrt{a(z-b)} + \sqrt{b(z-a)}}{\sqrt{(b-a)z}} - \ln \frac{\sqrt{(a+Q)(z-b)} + \sqrt{(b+Q)(z-a)}}{\sqrt{(b-a)z}}, \quad (6.137)$$

где параметры a и b , — концевые точки заполненной зоны, равны

$$a = \frac{(1 - \sqrt{\alpha(1+Q)})^2}{1-\alpha}, \quad b = \frac{(1 + \sqrt{\alpha(1+Q)})^2}{1-\alpha}. \quad (6.138)$$

Доказательство. В режиме IA имеются: частичное заполнение в интервале $[a, b]$, насыщение в интервале $[0, a]$, и пустота в интервале $[b, R]$. Сатурация в интервале $[0, a]$ означает, что резольвента имеет вид

$$W(z) = \ln \frac{z}{z-a} + H(z), \quad H(z) := \int_a^b \frac{\rho_0(\mu)}{z-\mu} d\mu.$$

Функция $W_{IA}(z)$ обязана быть решением уравнения (6.133) с $U(z) = V'(z)$ и $I_0 = [a, b]$, где функция $H(z)$ должна быть решением уравнения (6.133), с функцией $U(\mu)$ вида

$$U(\mu) = -\ln \alpha + \ln \frac{(\mu-a)^2}{\mu(\mu+Q)}.$$

Вычисляя интеграл в (6.134) с этой функцией и возвращаясь к функции $W(z)$, приходим к выражению (6.137).

Из (6.137) следует, что плотность в интервале $[a, b]$ дается выражением

$$\rho_0(\mu) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a(b-\mu)}{b(\mu-a)}} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(a+Q)(b-\mu)}{(b+Q)(\mu-a)}},$$

и, по построению, $\rho_0(\mu) = 1$, для $\mu \in [0, a]$, и $\rho_0(\mu) = 0$, для $\mu \in [b, R]$.

Для выполнения условия $W(z) \sim 1/z$, при $z \rightarrow \infty$, из (6.137) следует, что необходимо выполнение следующих равенств:

$$\frac{\sqrt{b+Q} - \sqrt{a+Q}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \sqrt{\alpha}, \quad \frac{\sqrt{(b+Q)(a+Q)} + \sqrt{ab} - Q}{2} = 1. \quad (6.139)$$

Эти равенства являются уравнениями для значений концевых точек a и b ; решение дается формулами (6.138). \square

Из качественных соображений ясно, что режим IA имеет место при относительно малых значениях Q , и относительно больших значениях R . Для таких значений минимум потенциала расположен относительно близко к левой стенке потенциала (в точке $\mu = 0$), и относительно далеко от правой стенки потенциала (в точке $\mu = R$).

Полагая $b = R$, получим формулу (6.135) для критического значения $R = R_c$ при котором пустая зона на интервале $[b, R]$ исчезает. При этом значении параметров имеет место фазовый переход от «жесткой» к «мягкой» границе на правой стороне заполненной зоны в интервале $[a, b]$. Очевидно, что это минимальное значение R , при котором применим сценарий для режима IA; как будет видно ниже, выражение (6.135) также справедливо и для режима IB. Иными словами, режим I соответствует $R > R_c$; значениям $R < R_c$ соответствует режим II (режимы IIA и IIB).

Значение $a = 0$ соответствует критическому значению $Q = Q_c$, при котором зона насыщения $[0, a]$ исчезает. При этом значении параметров имеет место фазовый переход от «мягкой» к «жесткой» границе на левой стороне заполненной зоны в интервале $[a, b]$. Явно,

$$Q_c = \frac{1 - \alpha}{\alpha}. \quad (6.140)$$

Иначе говоря, режим IA соответствует значениям $Q < Q_c$; значениям $Q > Q_c$ соответствует режим IB.

Предложение 6.10. *Резольвента равновесной меры в непрерывном пределе дискретного кулоновского газа (6.122) в режиме IB имеет вид*

$$W(z) = -\ln \sqrt{\alpha} + \ln \frac{\sqrt{a(z-b)} + \sqrt{b(z-a)}}{\sqrt{(a+Q)(z-b)} + \sqrt{(b+Q)(z-a)}}, \quad (6.141)$$

где параметры a и b даются формулами (6.138).

Доказательство. Режим IB характеризуется существованием заполненной зоной в интервале $[a, b]$ и двумя пустыми интервалами $[0, a]$ и $[b, R]$. Резольвента $W(z)$ является попросту решением (6.133) с $U(z) = V'(z)$ и $I_0 = [a, b]$. Результат вычисления интеграла (6.134) дается выражением (6.141).

Плотность в заполненной зоне имеет вид:

$$\rho_0(\mu) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a(b-\mu)}{b(\mu-a)}} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(a+Q)(b-\mu)}{(b+Q)(\mu-a)}}, \quad \mu \in [a, b],$$

и, по построению, $\rho_0(\mu) = 0$, для $\mu \in [0, a] \cup [b, R]$.

Полагая $W(z) \sim 1/z$ при $z \rightarrow \infty$, из (6.141) получим следующие уравнения для концевых точек a и b :

$$\frac{\sqrt{b+Q} - \sqrt{a+Q}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \sqrt{\alpha}, \quad \frac{\sqrt{(a+Q)(b+Q)} - \sqrt{ab} - Q}{2} = 1.$$

Эти уравнения отличаются от аналогичных уравнений (6.139) режима IA знаком члена \sqrt{a} . Решение этих уравнений, удовлетворяющее условию $0 < a < b$, дается формулами (6.138), в которых, однако, теперь необходимо положить $Q > Q_c$, где Q_c дается (6.140). \square

Отметим также, что критическое значение R , а именно, его минимальное значение, для которого режим IB применим, дается (6.135). Таким образом, минимальное значение R , для которого сценарий режима IB применим, такое же, как и для режима IA.

В режиме IB все заряды накапливаются в непосредственной близости минимума потенциала μ_0 , и вообще говоря, требуется проверка, что полученное решение уравнения (6.133)

с $U(z) = V'(z)$ и $I_0 = [a, b]$ удовлетворяет условию (6.128). Поскольку, как нетрудно видеть, $\rho_0(\mu) < 1$, $\mu \in [a, b]$, это условие действительно выполнено, что гарантирует отсутствие области насыщения в рассматриваемом режиме.

Рассмотрим теперь режимы ПА и ПВ. Эти режимы тесно связаны, и они могут рассматриваться как два различных сценария для одного и того же режима, режима П, который характеризуется насыщением на интервале $[b, R]$, примыкающем к правой стенке потенциала в точке $\mu = R$. Оба этих режима соответствуют значениям $R < R_c$, где R_c дается (6.135).

Предложение 6.11. *Резольвента равновесной меры в непрерывном пределе дискретного кулоновского газа (6.122) в режиме ПА имеет вид*

$$W(z) = -\ln \sqrt{\alpha} + \ln \frac{z}{z-R} - \ln \frac{\sqrt{a(z-b)} + \sqrt{b(z-a)}}{\sqrt{(R-a)(z-b)} + \sqrt{(R-b)(z-a)}} - \ln \frac{\sqrt{(a+Q)(z-b)} + \sqrt{(b+Q)(z-a)}}{\sqrt{(R-a)(z-b)} + \sqrt{(R-b)(z-a)}}, \quad (6.142)$$

где концевые точки заполненной зоны, параметры a и b , $a < b$, определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} \frac{\sqrt{R-b} - \sqrt{R-a}}{\sqrt{R-b} + \sqrt{R-a}} \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b+Q} - \sqrt{a+Q}} &= 1, \\ \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{(a+Q)(b+Q)} - Q}{2} + \sqrt{(R-a)(R-b)} &= 1. \end{aligned} \quad (6.143)$$

Доказательство. Режим ПА характеризуется наличием заполненной зоны в интервале $[a, b]$ лежащей между двух зон насыщения $[0, a]$ и $[b, R]$. Это означает, что резольвента в этом случае имеет вид

$$W(z) = \ln \frac{z}{z-a} + \ln \frac{z-b}{z-R} + H(z), \quad H(z) := \int_a^b \frac{\rho_0(\mu)}{z-\mu} d\mu.$$

Функция $H(z)$ должна искажаться как решение уравнения (6.133), где функция $U(\mu)$ дается выражением

$$U(\mu) = -\ln \alpha + \ln \frac{(\mu-a)^2(\mu-b)^2}{\mu(\mu+Q)(\mu-R)^2}.$$

Вычисляя интеграл (6.134), и возвращаясь к функции $W(z)$, получим (6.142).

Плотность дается выражением

$$\begin{aligned} \rho_0(\mu) = 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a(b-\mu)}{b(\mu-a)}} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(a+Q)(b-\mu)}{(b+Q)(\mu-a)}} \\ - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(R-a)(b-\mu)}{(R-b)(\mu-a)}}, \quad \mu \in [a, b], \end{aligned}$$

и, по построению, $\rho_0(\mu) = 1$, для $\mu \in [0, a] \cup [b, R]$.

Требую, чтобы $W(z) \sim 1/z$ при $z \rightarrow \infty$, из (6.142) получим систему уравнений (6.143). \square

Предложение 6.12. *Резольвента равновесной меры в непрерывном пределе дискретного кулоновского газа (6.122) в режиме ПВ имеет вид*

$$W(z) = -\ln \sqrt{\alpha} - 2 \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-R)}}{\sqrt{(R-a)(z-b)} + \sqrt{(R-b)(z-a)}} + \ln \frac{\sqrt{a(z-b)} + \sqrt{b(z-a)}}{\sqrt{(a+Q)(z-b)} + \sqrt{(b+Q)(z-a)}}, \quad (6.144)$$

где концевые точки заполненной зоны, параметры a и b , $a < b$, определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} \frac{\sqrt{R-b} - \sqrt{R-a}}{\sqrt{R-b} + \sqrt{R-a}} \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b+Q} - \sqrt{a+Q}} &= 1, \\ \frac{-\sqrt{ab} + \sqrt{(a+Q)(b+Q)} - Q}{2} + \sqrt{(R-a)(R-b)} &= 1. \end{aligned} \quad (6.145)$$

Доказательство. Режим ПВ характеризуется заполненной зоной в интервале $[a, b]$, пустотой в интервале $[0, a]$ и насыщением в интервале $[b, R]$. Следовательно, резольвента имеет вид

$$W(z) = \ln \frac{z-b}{z-R} + H(z), \quad H(z) := \int_a^b \frac{\rho_0(\mu)}{z-\mu} d\mu.$$

Функция $H(z)$ является решением уравнения (6.133), где функция $U(\mu)$ имеет вид

$$U(\mu) = -\ln \alpha + \ln \frac{\mu(\mu-b)^2}{(\mu+Q)(\mu-R)^2}.$$

Вычисляя интеграл (6.134), и возвращаясь к функции $W(z)$, получим (6.144).

Плотность дается выражением

$$\rho_0(\mu) = \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{a(b-\mu)}{b(\mu-a)}} - \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{(a+Q)(b-\mu)}{(b+Q)(\mu-a)}} - \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{(R-a)(b-\mu)}{(R-b)(\mu-a)}}, \quad \mu \in [a, b],$$

и, по построению, $\rho_0(\mu) = 0$, для $\mu \in [0, a]$, и $\rho_0(\mu) = 1$, для $\mu \in [b, R]$.

Условие, что резольвента (6.144) ведет себя как $W(z) \sim 1/z$ при $z \rightarrow \infty$, ведет к системе уравнений (6.145). \square

Как и в случае режимов IA и IB, режимы ПА и Regime ПВ соответствуют значениям Q , таким, что $Q < Q_c$ и $Q > Q_c$, соответственно. Значение $Q = Q_c$ соответствует значению $a = 0$, при котором интервал $[0, a]$, являющегося зоной насыщения (ПА) или зоной пустоты (режим ПВ), исчезает. В режиме II критическое значение Q_c , в отличие от случая режима I, дается

значительно более сложным выражением (являясь корнем кубического уравнения), и зависит от параметра R .

Наконец, заметим, что в обоих режимах ПА и ПВ, при убывании параметра R интервал $[a, b]$ описывающий заполненную зону сужается, и исчезает ($a \rightarrow b$) в пределе $R \rightarrow 1$. Более точно, $a \rightarrow b \neq 0$, в режиме ПА, и $a, b \rightarrow 0$, в режиме ПВ, при $R \rightarrow 1$. В обоих случаях $\rho_0(\mu) \rightarrow 1$ при $R \rightarrow 1$, всюду в интервале $[0, 1]$.

6.3.3. Свободная энергия дискретного кулоновского газа в режиме I

Чтобы вычислить свободную энергию кулоновского газа $\Phi(R, Q)$ можно воспользоваться специфической зависимостью интеграла (6.122) от переменной α . В силу определения (6.130), для первого момента равновесной меры имеет место формула:

$$E = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2} \frac{\partial \ln I_{r,s,q}}{\partial \ln \alpha}. \quad (6.146)$$

Таким образом, зная резольвенту $W(z)$, первый момент E может быть найден как коэффициент члена $1/z^2$ в ее $z \rightarrow \infty$ разложении (6.129). Используя (6.123) в (6.146), имеем следующее уравнение первого порядка для функции $\Phi(R)$:

$$\frac{\partial}{\partial \ln \alpha} \Phi(R, Q) = E.$$

Отсюда,

$$\Phi(R, Q) = \int E \frac{d\alpha}{\alpha} + C(R, Q), \quad (6.147)$$

где $C(R, Q)$ некоторая функция, независящая от α .

Чтобы зафиксировать константу интегрирования $C(R, Q)$, воспользуемся тем фактом, что функция $\varphi(x, y)$ допускает явное вычисление для значений параметра α принимающего предельные значения $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Эти две случая играют роль начальных условий для определения функции $\varphi(x, y)$ в случаях режимов I и II, соответственно.

Рассмотрим детально случай $\alpha = 0$. Начнем с того, что вернемся к модели кулоновского газа при конечных значениях r, s, q . Из (6.122) следует, что величина $I_{r,s,q}$ является полиномом по α . Член наинизшей степени этого полинома имеет степень $s(s-1)/2$ и коэффициент этого члена может быть легко найден если в (6.122) положить $m_j = j-1$ ($j = 1, \dots, s$), что дает

$$I_{r,q,s} \sim \alpha^{s(s-1)/2}, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Это, совместно с (6.121), означает, что

$$F_{r,s,q} \Big|_{\alpha=0} = 1.$$

Отсюда, в силу (6.92), в частности, получим

$$\varphi(x, y)|_{\alpha=0} = 0. \quad (6.148)$$

Это условие позволяет зафиксировать константу интегрирования $C(R, Q)$ для режима I.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 1$. Поскольку функция $F_{r,s,q}$ имеет нуль в точке $\alpha = 1$ степени $s(s+q)$, функция $\varphi(x, y) = \varphi(x, y; \alpha)$ имеет логарифмическую сингулярность при $\alpha \rightarrow 1$. Кроме этого, функция $\varphi(x, y)$ имеет регулярную при $\alpha \rightarrow 1$ часть, которая существенна для нашего анализа.

Чтобы вычислить регулярную часть, рассмотрим ганкелевый определитель в представлении (6.3) для $F_{r,s,q}$. В случае $\alpha = 1$, этот определитель вычисляется в явном виде.

Предложение 6.13. *Для произвольных неотрицательных целых чисел r, s, q , $s \leq r$, справедливо равенство*

$$\det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} m^{j+k-2} \binom{m+q}{m} \right] = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{(j!(j+q)!)^2(j+q+r)!}{q!(r-j-1)!(2j+q)!(2j+q+1)!}.$$

Доказательство. Действительно, определитель в левой части может быть идентифицирован как определитель Грама полиномов Хана $Q_j(m; q, 0, r-1)$. Выражение в правой части следует в силу стандартной техники ортогональных полиномов и известных свойств определителей Хана, см., например, монографию [72], раздел 9.5. \square

Таким образом, при $\alpha \rightarrow 1$,

$$F_{r,s,q} \sim \prod_{j=0}^{s-1} \frac{j!(j+q)!(j+q+r)!}{q!(r-j-1)!(2j+q)!(2j+q+1)!} \cdot (1-\alpha)^{s(s+q)}. \quad (6.149)$$

Пусть $s+q = [xN]$, $s = [yN]$, где $x, y \in [0, 1]$ фиксированы, $N = r+s+q$. Положим

$$\psi(x, y) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \ln \left(\prod_{j=0}^{s-1} \frac{j!(j+q)!(j+q+r)!}{q!(r-j-1)!(2j+q)!(2j+q+1)!} \right).$$

Из (6.149), в силу (6.92), следует что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} [\varphi(x, y) + xy \ln(1-\alpha)] = \psi(x, y). \quad (6.150)$$

Используя формулу Стирлинга, получим

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{(x+y)^2}{2} \ln(x+y) - \frac{(1-x-y)^2}{2} \ln(1-x-y) \\ &\quad - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{(1-x)^2}{2} \ln(1-x) - \frac{y^2}{2} \ln y + \frac{(1-y)^2}{2} \ln(1-y). \end{aligned} \quad (6.151)$$

В силу (6.124) и (6.125), соотношение (6.150) дает

$$\Phi(R, Q)|_{\alpha=1} = -(R + Q + 1)^2 \psi(x, y), \quad x = \frac{1 + Q}{R + Q + 1}, \quad y = \frac{1}{R + Q + 1}.$$

Окончательно, используя (6.151), получим следующее условие

$$\begin{aligned} \Phi(R, Q)|_{\alpha=1} = & -\frac{R^2}{2} \ln R + \frac{(R-1)^2}{2} \ln(R-1) - \frac{(R+Q)^2}{2} \ln(R+Q) \\ & + \frac{(1+Q)^2}{2} \ln(1+Q) - \frac{(2+Q)^2}{2} \ln(2+Q) + \frac{(R+Q+1)^2}{2} \ln(R+Q+1). \end{aligned} \quad (6.152)$$

Это условие позволяет зафиксировать константу интегрирования $C(R, Q)$ для режиме II.

После этих предварительных замечаний, можно начать вычисление свободной энергии дискретного кулоновского газа. Здесь мы рассмотрим случай режима I; случай режима II, как технически более сложный, рассмотрен отдельно ниже.

Чтобы получить первый момент равновесной меры в режимах IA и IB, вычислим член $O(1/z^2)$ в $z \rightarrow \infty$ разложении резольвенты исходя из выражений (6.137) и (6.141), соответственно. Для обоих режимов получим следующее выражение:

$$E = \frac{2+Q}{8}(a+b) + \frac{Q^2}{4} - \frac{Q}{4} \sqrt{(a+Q)(b+Q)}.$$

Подставляя сюда выражения (6.138) для конечных точек a и b , получим

$$E = (Q+1) \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{2}.$$

Интегрирую по α , и используя (6.147), получим следующее выражение для свободной энергии кулоновского газа в режиме I:

$$\Phi(R, Q) = -(Q+1) \ln(1-\alpha) + \ln \sqrt{\alpha} + C(R, Q), \quad (6.153)$$

где константа интегрирования $C(R, Q)$ должна быть определена из условия (6.148). Из (6.153) и (6.124) следует, что

$$\varphi(x, y) = C(R, Q),$$

Таким образом, условие (6.148) дает

$$C(R, Q) = 0.$$

В результате, получим

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{D}_I,$$

как и сформулировано в теореме 6.6 для случая режима I.

6.3.4. Свободная энергия дискретного кулоновского газа в режиме II

Чтобы решить задачу о вычислении свободной энергии кулоновского газа в режимах IIА и IIВ, необходимо найти решение системы уравнений на концевые точки a и b . Эти уравнения даются формулами (6.143), для режима IIА, и (6.145), для режима IIВ. Каждое из двух уравнений в этих системах сводится к алгебраическому уравнению четвертой степени по одной из неизвестных (a или b). Как показано ниже, решение может быть дано в виде некоторой рациональной параметризации.

Чтобы построить решение для концевых точек a и b , введем величины

$$A_{\pm} = \frac{(\sqrt{b} \pm \nu\sqrt{a})^2}{4}, \quad B_{\pm} = \frac{(\sqrt{b+Q} \pm \sqrt{a+Q})^2}{4}, \quad C_{\pm} = \frac{(\sqrt{R-a} \pm \sqrt{R-b})^2}{4}, \quad (6.154)$$

где $\nu = +1$ соответствует режиму IIА, а $\nu = -1$ режиму IIВ. Для концевых точек можем использовать, например, выражения

$$a = A_+ + A_- - 2\sqrt{A_+A_-}, \quad b = A_+ + A_- + 2\sqrt{A_+A_-},$$

либо аналогичные выражения в терминах B_+ и B_- , или C_+ и C_- . По построению, величины (6.154) удовлетворяют квадратичным тождествам вида

$$A_+A_- = B_+B_- = C_+C_-, \quad (6.155)$$

а также линейным тождествам вида

$$A_+ + A_- = B_+ + B_- - Q = R - C_+ - C_-. \quad (6.156)$$

Первое уравнение в (6.143) и (6.145) записывается в виде

$$\alpha \frac{C_-A_+}{C_+B_-} = 1, \quad (6.157)$$

а второе записывается в одной из двух форм

$$A_{\pm} + B_{\pm} + 2C_{\pm} = N_{\pm}, \quad (6.158)$$

где

$$N_+ \equiv R + Q + 1, \quad N_- \equiv R - 1.$$

Таким образом, уравнения (6.155), (6.156), (6.157), и (6.158) представляют из себя систему из шести уравнений на шесть неизвестных A_{\pm} , B_{\pm} , C_{\pm} .

Для построения решения этой системы полезно вначале отметить, что стартуя с одной из форм записи уравнения (6.158), например, для знака '+', с помощью (6.156) нетрудно получить другую форму записи, для знака '-'. Действительно, переписывая (6.156) в виде

$$\begin{aligned} A_+ + A_- + C_+ + C_- &= R, \\ B_+ + B_- + C_+ + C_- &= R + Q, \end{aligned} \quad (6.159)$$

и суммируя, видим, что две вида записи уравнения (6.158) эквивалентны.

Если разделить уравнения записанные в (6.158) соответственно на $\sqrt{A_{\pm}B_{\pm}}$, и использовать соотношение $A_+/B_+ = B_-/A_-$, которое следует из первого равенства в (6.155), сравнение результирующих выражений позволяет получить следующее равенство:

$$\frac{N_+ - 2C_+}{\sqrt{A_+B_+}} = \frac{N_- - 2C_-}{\sqrt{A_-B_-}}.$$

Таким образом, используя (6.155), нетрудно выразить величины A_{\pm} в терминах B_{\pm} , C_{\pm} :

$$A_{\pm} = B_{\mp} \frac{z_{\pm}}{z_{\mp}}, \quad z_{\pm} \equiv N_{\pm} - 2C_{\pm}. \quad (6.160)$$

Используя эти выражения в (6.159), также нетрудно исключить величины B_{\pm} .

Используя (6.160), и записывая величины C_{\pm} в терминах z_{\pm} , из (6.159) получим

$$\begin{aligned} B_+ \frac{z_-}{z_+} + B_- \frac{z_+}{z_-} &= \frac{z_+ + z_-}{2} - \frac{Q}{2}, \\ B_+ + B_- &= \frac{z_+ + z_-}{2} + \frac{Q}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$B_{\pm} = \left(1 \pm \frac{Q}{z_+ - z_-} \right) \frac{z_{\pm}}{2}. \quad (6.161)$$

Вспоминая, что $B_+B_- = C_+C_-$, см. (6.155), получим

$$\left(1 - \frac{Q^2}{(z_+ - z_-)^2} \right) z_+z_- = (N_+ - z_+)(N_- - z_-).$$

Сокращая член z_+z_- стоящий в обеих частях, получаем кубическое уравнение:

$$Q^2 z_+z_- = (N_-z_+ + N_+z_- - N_+N_-)(z_+ - z_-)^2. \quad (6.162)$$

Присутствие только кубических и квадратичных членов относительно переменных z_+ и z_- означает, что это уравнение описывает рациональную кривую [139]. Таким образом, эти переменные могут быть выражены как рациональные функции некоторого параметра вдоль кривой.

Что получить эту параметризацию, положим $z_+ = tz_-$ в (6.162) и рассмотрим z_- как функцию от t . Тогда

$$z_- = \frac{1}{N_-t + N_+} \left[\frac{Q^2t}{(t-1)^2} + N_+N_- \right], \quad z_+ = tz_-.$$

Заметим, что нам нужна лишь та часть кривой, для которой $C_{\pm} \geq 0$. Это соответствует значениям $t \in [N_+/N_-, \infty)$. Полезно ввести параметр $\eta \in [0, 1]$, который параметризует эту часть кривой:

$$t = \frac{N_+}{N_-} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}.$$

В терминах параметра η переменные z_{\pm} имеют следующий вид:

$$z_{\pm} = N_{\pm} \frac{1 \pm \eta}{2} \left(\frac{Q^2(1 - \eta)(1 + \eta)}{(N_+(1 + \eta) - N_-(1 - \eta))^2} + 1 \right). \quad (6.163)$$

В результате, вспоминая, что $C_{\pm} = (E_{\pm} - z_{\pm})/2$, и используя формулы (6.161) для B_{\pm} , а также формулы (6.160) для A_{\pm} , получим, что параметризация (6.163) приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} C_+ &= N_+ \frac{(1 - \eta)(1 + R\eta)(1 + Q + (R + Q)\eta)}{(2 + Q + (2R + Q)\eta)^2}, \\ C_- &= N_- \frac{(1 + \eta)(1 + Q + R\eta)(1 + (R + Q)\eta)}{(2 + Q + (2R + Q)\eta)^2}, \\ B_+ &= N_+ \frac{(1 + \eta)(1 + Q + R\eta)(1 + Q + (R + Q)\eta)}{(2 + Q + (2R + Q)\eta)^2}, \\ B_- &= N_- \frac{(1 - \eta)(1 + R\eta)(1 + (R + Q)\eta)}{(2 + Q + (2R + Q)\eta)^2}, \\ A_+ &= N_+ \frac{(1 + \eta)(1 + R\eta)(1 + (R + Q)\eta)}{(2 + Q + (2R + Q)\eta)^2}, \\ A_- &= N_- \frac{(1 - \eta)(1 + Q + R\eta)(1 + Q + (R + Q)\eta)}{(2 + Q + (2R + Q)\eta)^2}. \end{aligned} \quad (6.164)$$

Эти выражения являются решением уравнений (6.155), (6.156), (6.158), и, более того, соответствуют решению в котором все величины A_{\pm} , B_{\pm} и C_{\pm} положительные, при условии, что $\eta \in [0, 1]$.

Наконец, чтобы зафиксировать решение исходной задачи на положение концевых точек, воспользуемся уравнением (6.157). В силу (6.164), получим следующее уравнение на значение η :

$$\alpha \frac{(1 + \eta)^2(1 + Q + R\eta)(1 + (R + Q)\eta)}{(1 - \eta)^2(1 + R\eta)(1 + Q + (R + Q)\eta)} = 1. \quad (6.165)$$

Таким образом, η является корнем алгебраического уравнения четвертой степени, причем нас интересует корень лежащий в интервале $[0, 1]$. Прямая проверка показывает, что такой корень

$\eta = \eta(R, Q; \alpha)$ всегда существует и является единственным при выполнении условия, что параметры R , Q , и α соответствуют режиму II. Также возможно предъяснить явное выражение для этого корня (см. детали вычислений в приложении А работы [43]).

Обратимся теперь к собственно вычислению свободной энергии в режиме II. Чтобы получить первый момент равновесной меры в режимах IIА и IIВ, мы вычислим члены $O(1/z^2)$ в $z \rightarrow \infty$ разложениях резольвент, используя формулы (6.142) и (6.144), соответственно. Для этих двух режимов справедливо следующее (одинаковое) выражение:

$$E = \frac{2+Q}{8}(a+b) + \frac{Q^2}{4} - \frac{Q}{4}\sqrt{(a+Q)(b+Q)} + \frac{R}{2}\sqrt{(R-a)(R-b)}.$$

В терминах величин (6.154), это выражение запишется в виде

$$E = \frac{Q^2}{4} + \frac{2+Q}{4}(A_+ + A_-) - \frac{Q}{4}(B_+ - B_-) + \frac{R}{2}(C_+ - C_-). \quad (6.166)$$

Чтобы получить функцию $\Phi(R, Q)$, можно записать интеграл (6.147) в виде

$$\Phi(R, Q) = \int E \frac{\partial \ln \alpha}{\partial \eta} d\eta + C(R, Q),$$

где функция $\alpha = \alpha(\eta)$ определяется формулой (6.165), а функция $E = E(\eta)$ формулой (6.166), в которой все величины выражены через η с помощью выражений (6.164).

Вычисляя интеграл, найдем

$$\Phi(R, Q) = \Omega(R, Q) + C(R, Q), \quad (6.167)$$

где функция $\Omega(R, Q) = \Omega(R, Q; \eta)$ является суммой семи логарифмических членов:

$$\begin{aligned} \Omega(R, Q) = & \left(\frac{1}{2} + R - \frac{R^2}{2}\right) \ln(1 - \eta) + \left(\frac{1}{2} - R + Q - \frac{(R+Q)^2}{2}\right) \ln(1 + \eta) \\ & + \left(\frac{1}{2} + R\right) \ln(1 + R\eta) + \left(\frac{1}{2} - R + Q - RQ\right) \ln(1 + Q + R\eta) \\ & + \left(\frac{1}{2} - R\right) \ln(1 + (R+Q)\eta) + \left(\frac{1}{2} + R + Q + RQ + Q^2\right) \ln(1 + Q + (R+Q)\eta) \\ & - \frac{(2+Q)^2}{2} \ln(2 + Q + (2R+Q)\eta). \end{aligned} \quad (6.168)$$

Чтобы найти постоянную интегрирования $C(R, Q)$, напомним, что выше было получено условие (6.152). Чтобы использовать это условие, заметим, что из (6.165) следует, что $\eta \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 1$, и значит константа интегрирования $C(R, Q)$ может быть выведена путем приравнивания выражения (6.167) при $\eta = 0$ к (6.152). Это дает

$$\begin{aligned} C(R, Q) = & -\frac{R^2}{2} \ln R + \frac{(R-1)^2}{2} \ln(R-1) - \frac{(R+Q)^2}{2} \ln(R+Q) \\ & - \frac{(1+Q)^2}{2} \ln(1+Q) + \frac{(R+Q+1)^2}{2} \ln(R+Q+1). \end{aligned} \quad (6.169)$$

Выражения (6.167), (6.168), и (6.169) дают решение задачи о вычислении свободной энергии дискретного кулоновского газа в режиме II.

Из (6.124) и (6.125) следует, что функция $\varphi(x, y)$ в режиме II дается выражением

$$\varphi(x, y) = \chi(x, y; \eta) - \chi_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}_{II}, \quad (6.170)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(x, y; \eta) = & -xy \ln(1 - \alpha) + \frac{y^2}{2} \ln \alpha + \left(\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} - x - y + \frac{1}{2} \right) \ln(1 - \eta) \\ & + \left(y^2 - 2xy + \frac{1}{2} \right) \ln(1 + \eta) - \left(\frac{y}{2} - x + 1 \right) y \ln [y + (1 - x)\eta] \\ & - \left(x^2 + xy - \frac{y^2}{2} - x \right) \ln [x + (1 - x)\eta] - \left(\frac{y}{2} + x - 1 \right) y \ln [y + (1 - y)\eta] \\ & - \left(\frac{y^2}{2} - xy + x \right) \ln [x + (1 - y)\eta] + \frac{(x + y)^2}{2} \ln [x + y + (2 - x - y)\eta], \end{aligned} \quad (6.171)$$

а функция $\chi_0(x, y)$, независящая от η , имеет вид

$$\chi_0(x, y) = -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{(1 - x)^2}{2} \ln(1 - x) - \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{(1 - y)^2}{2} \ln(1 - y) + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \ln(1 - x - y).$$

Принимая во внимание уравнение для параметра η в терминах переменных x и y

$$\alpha \frac{(1 + \eta)^2 [x + (1 - x)\eta] [y + (1 - y)\eta]}{(1 - \eta)^2 [y + (1 - x)\eta] [x + (1 - y)\eta]} = 1 \quad (6.172)$$

а также используя тот факт, что

$$1 - \alpha = \frac{\eta [x + y + (2 - x - y)\eta]^2}{(1 + \eta)^2 [x + (1 - x)\eta] [y + (1 - y)\eta]},$$

можно выразить параметр α в терминах η в (6.171). В результате, для $\chi(x, y; \eta)$ получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \chi(x, y; \eta) = & -xy \ln \eta + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \ln(1 - \eta) + \frac{1}{2} \ln(1 + \eta) - (1 - x)y \ln [y + (1 - x)\eta] \\ & - x(1 - y) \ln [x + (1 - y)\eta] + x(1 - x) \ln [x + (1 - x)\eta] \\ & + y(1 - y) \ln [y + (1 - y)\eta] + \frac{(x - y)^2}{2} \ln [x + y + (2 - x - y)\eta]. \end{aligned} \quad (6.173)$$

Замечательное свойство представления (6.170) состоит в том, что если мы рассмотрим величину

$$h = h(x, y) \equiv \sqrt{\frac{xy}{(1 - x)(1 - y)}},$$

то тогда, как нетрудно убедиться прямым вычислением, справедливо равенство:

$$\chi_0(x, y) = \chi(x, y; h). \quad (6.174)$$

В итоге, представление (6.170) совместно с (6.173) и (6.174) приводит к формуле (6.95), что завершает доказательство теоремы 6.6.

Глава 7

Пятивершинная модель и плоские разбиения

Эта глава посвящена пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями, при которых конфигурации модели находятся в взаимно-однозначном соответствии с плоскими разбиениями (трехмерными диаграммами Юнга) ящике. Вычислена одноточечная корреляционная функция пятивершинной модели для модели в точке свободных фермионов, в однородном случае и в неоднородном, при котором такая модель описывает взвешенные перечисления плоских разбиений в ящике. Рассмотрена задача вычисления однородного предела детерминантной формулы для статистической суммы пятивершинной модели с граничными условиями типа «скалярного произведения». Показано, что эта величина является τ -функцией шестого уравнения Пенлеве для специальных значений параметров, соответствующих классическим решениям. Глава основана на результатах автора опубликованных в работах [34, 39, 42].

7.1. Пятивершинная модель в точке свободных фермионов и плоские разбиения в ящике

Плоские разбиения в ящике рассмотрены в терминах пятивершинной модели на конечной решетке с фиксированными граничными условиями. В предположении равенства всех весов модели, вычислена одноточечная корреляционная функция описывающая вероятность состояния на произвольном горизонтальном ребре решетки, что эквивалентно перечислению плоских разбиений соответствующих замощениям ромбами шестиугольника с выколотым (или фиксированным) ромбом определенной ориентации в заданной точке. Решение задачи дано для ящика произвольного размера.

7.1.1. Формулировка модели и связь с плоскими разбиениями

Пятивершинная модель является частным случаем шестивершинной модели, у которой одна из первых четырех вершин, расположенных в стандартном порядке, см. Рис. 1.1, запрещена (имеет нулевой вес) [15, 19]. Напомним, что конфигурации шестивершинной модели обычно изображаются путем размещения стрелок на ребрах квадратной решетки, с условием, что у каждой вершины решетки имеются две входящие и две исходящие стрелки. Эквивалентно, конфигурации модели могут быть изображены в терминах линий протекающих по ребрам

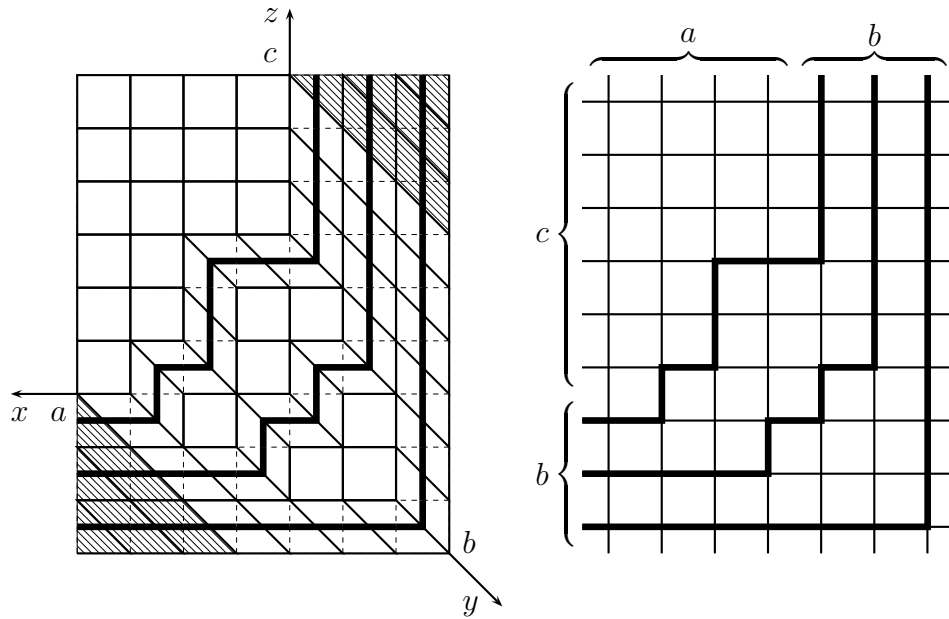


Рис. 7.1. Пример плоского разбиения в трехмерной интерпретации, жирными линиями показаны градиентные линии (слева) и соответствующая конфигурация пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями (справа).

решетки. Взаимно-однозначное соответствие между стрелками и линиями вводится, например, по правилу, что если стрелка направлена вниз или влево, то на этом ребре есть линия, а если вправо или вверх, то такое ребро пустое. Нам будет удобно использовать пятивершинную модель определенную таким образом, что ее конфигурации описываются непересекающимися линиями. В силу указанного выше соответствия между описаниями в терминах стрелок и линий, это означает, что в этой модели вершина второго типа имеет вес равный нулю.

Чтобы показать связь конфигураций пятивершинной модели с плоскими разбиениями в ящике размера $a \times b \times c$, положим

$$N = c + b, \quad M = a + b,$$

и рассмотрим случай фиксированных граничных условий, таких, что последние b горизонтальных ребер левой границы и последние b вертикальных ребер линий верхней границы содержат линии, а остальные внешние ребра являются пустыми. Тогда, как нетрудно убедиться используя интерпретацию плоских разбиений как трехмерных диаграмм Юнга и используя градиентные линии в (xz) -плоскости, существует взаимно-однозначное соответствие между плоскими разбиениями и конфигурациями пятивершинной модели, см. Рис. 7.1. Напомним (см., например, [16, 51]), что плоские разбиения имеют естественное представление в виде

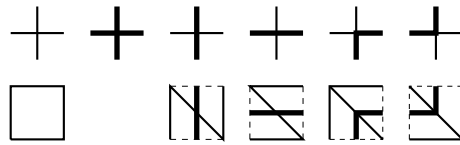


Рис. 7.2. Вершины шестивершинной модели в терминах линий (первый ряд) и соответствующие им плоские фрагменты изображения трехмерных укладок (второй ряд). В пятивершинной модели вершина второго типа исключена.

таблиц

$$\begin{array}{cccc}
 \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \dots \\
 \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \dots \\
 \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & \lambda_{3,3} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array} \tag{7.1}$$

элементами которых являются целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям невозрастания вдоль столбцов и строк (т.е. $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i',j'}$ для всех $i \leq i'$ и $j \leq j'$, соответственно); условие, что они находятся «в ящике» означает, что размер таблиц и максимальное значение элементов таблиц ограничены размерами (т.е. $\lambda_{i,j} = 0$ при $i \geq a$ и $j \geq b$, и также $\lambda_{i,j} \leq c$ при $i \leq a$ и $j \leq b$). Рассматривая элементы таблиц как значения высот, эти таблицы имеют естественную интерпретацию как трехмерный аналог диаграмм Юнга.

Эквивалентность плоских разбиений в ящике и рассматриваемой нами пятивершинной модели на $N \times M$ решетке, таким образом, основана на наблюдении, что условие невозрастания вдоль столбцов в таблицах (7.1) позволяет интерпретировать градиентные линии в (xz) -плоскости как линии некоторой вершинной модели на квадратной решетке, в то время как условие невозрастания вдоль строк эквивалентно требованию, чтобы эти линии не пересекались; более того, существует соответствие между вершинами модели и фрагментами изображения трехмерных диаграмм Юнга на плоскости, см. Рис. 7.2.

Использование градиентных линий для описания плоских разбиений позволяет применять методы, основанные на теории непересекающихся путей [61, 140, 141]. Нашей целью является демонстрация того, перечисления привлечение пятивершинной модели позволяет использовать также алгебраические методы интегрируемых моделей для вычисления различных интересных величин связанных с плоскими разбиениями. Чтобы дать пример одной такой величины, полезно также упомянуть, что плоские разбиения часто рассматриваются как замощения шестиугольника ромбами трёх типов [17]. Данный шестиугольник легко видеть на левой картинке Рис. 7.1, который выделен светлой областью. Ромбами здесь являются два типа ромбов и квадраты (ромбы с углами 90°). Интерес представляет число замощений

с фиксированным ромбом [142–145]. Данная величина есть не что иное, как корреляционная функция в контексте пятивершинной модели (с точностью до множителя равного статистической сумме).

Необходимо отметить, что применение методов теории поля и интегрируемых моделей к решению задач связанных с плоскими разбиениями в бесконечном объеме позволяет получать много новых результатов [65–68, 146]. Стоит также упомянуть о приложениях шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки и их модификаций к перечислению и исследованию свойств переменного-знаковых матриц [8, 9, 33, 147, 148]. Плоские разбиения в ящике допускают интерпретацию в контексте фазовой модели [149, 150] и четырехвершинной модели [151]. Также тесно связаны с перечислениями плоских разбиений и случайными блужданиями на решетке корреляционные функции спиновых цепочек Гейзберга [152, 153].

Среди различных формулировок плоских разбиений в ящике терминах интегрируемых моделей, пятивершинная модель интересна тем, что ее веса должны удовлетворять условию свободных фермионов. Для такой модели эффективным методом является переход к ее формулировке в терминах фермионов, или «фермионизация». Ниже показано, что фермионизация может быть выполнена напрямую, посредством преобразования Йордана-Вигнера. Фермионный аналог оператора перехода (трансфер-матрицы) соответствующий пятивершинной модели с всеми равными весами имеет вид экспоненты от квадратичной формы по фермионным операторам. В результате, статистическая сумма записывается в виде определителя некоторой матрицы порядка $b \times b$ представимой в виде произведения двух диагональных и одной ганкелевой матрицы. Последняя оказывается ассоциированной с ансамблем полиномов Лагерра. В качестве примера, мы рассматриваем здесь вычисление одноточечной корреляционной функции описывающую вероятность обнаружения линии на горизонтальном ребре. Как упомянуто выше, эта величина эквивалентна числу плоских разбиений соответствующих замощениям ромбами шестиугольника с выколотой областью в виде ромба.

7.1.2. Пятивершинная модель и фермионы

Здесь мы сформулируем пятивершинную модель в рамках операторного формализма, типичного для использования операторов перехода типа диагональ-диагональ. После применения преобразования Йордана-Вигнера, перепишем статистическую сумму в терминах некоторого оператора перехода (уже фермионного) типа ряд-ряд, что удобно для дальнейших вычислений на решетке прямоугольной формы.

Начнем определения с больцмановского веса вершины. В качестве переменных описыва-

ющих состояния на ребрах будем использовать переменные типа заполнения, принимающие значения: 0, если ребро пустое, и 1, если ребро содержит линию. Пусть μ, ν, μ' и ν' переменные заполнения приписанные соответственно левому, нижнему, верхнему и правому ребрам вершины, а $w_{\mu,\nu;\mu',\nu'}$ есть соответствующий этой вершине больцмановский вес. В пятивершинной модели, соответствующей перечислению плоских разбиений

$$w_{0,0;0,0} = w_{0,1;1,0} = w_{1,0;0,1} = w_{0,1;0,1} = w_{1,0;1,0} = 1, \quad w_{1,1;1,1} = 0$$

и также $w_{\mu,\nu;\mu',\nu'} = 0$ для $\mu + \nu \neq \mu' + \nu'$.

В формализме, который мы намерены рассмотреть, вершинам квадратной $N \times M$ решетки будут сопоставляться операторы X_j ($j = 1, \dots, N + M - 1$), действующие в пространстве $\mathcal{H}_{N+M} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+M)}$. Каждый X_j будет нетривиально действовать только в j -ой и $(j + 1)$ -ой копии пространства \mathbb{C}^2 в \mathcal{H}_{N+M} . Пусть v_0, v_1 образуют базис в \mathbb{C}^2 ,

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для базисных векторов пространства \mathcal{H}_{N+M} , которое будет играть роль квантового пространства состояний, будем использовать “бра” и “кет” обозначения

$$|\Psi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N+M}}\rangle := v_{\mu_1} \otimes v_{\mu_2} \otimes \dots \otimes v_{\mu_{N+M}},$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N+M} = 0, 1$. Операторы X_j определим по формуле

$$\langle \Psi_{\mu_1, \dots, \mu_{N+M}} | X_j | \Psi_{\mu'_1, \dots, \mu'_{N+M}} \rangle = w_{\mu_j, \mu_{j+1}; \mu'_j, \mu'_{j+1}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j, j+1}}^{N+M} \delta_{\mu_l, \mu'_l}.$$

Здесь $w_{\mu,\nu;\mu',\nu'}$ — больцмановский вес, определенный выше, и $\delta_{\mu,\mu'}$ — символ Кронекера.

В терминах спиновых операторов

$$\sigma_j^\alpha = \underbrace{I \otimes \dots \otimes I}_{j-1} \otimes \sigma^\alpha \otimes I \otimes \dots \otimes I \quad (\alpha = x, y, z),$$

где I единичная 2×2 матрица, а $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ — матрицы Паули,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

операторы X_j имеют вид

$$X_j = \frac{1}{4} (3 + \sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z - \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) + \frac{1}{2} (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y). \quad (7.2)$$

Статистическая сумма пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями показанными на правой картинке Рис. 7.1 может быть записана в виде

$$Z = \langle \text{LB} | \Xi | \text{TR} \rangle, \quad (7.3)$$

где вектор $|\text{TR}\rangle$ учитывает граничные условия на верхней (top) и правой (right) границах решетки,

$$|\text{TR}\rangle = |\Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_a, \underbrace{1, \dots, 1}_b, \underbrace{0, \dots, 0}_{c+b}}\rangle, \quad (7.4)$$

а вектор $\langle \text{LB} |$ — на левой (left) и нижней (bottom) границах,

$$\langle \text{LB} | = \langle \Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_c, \underbrace{1, \dots, 1}_b, \underbrace{0, \dots, 0}_{a+b}} |. \quad (7.5)$$

Оператор Ξ описывает переход через всю решетку, с правого верхнего угла до левого нижнего, и, как произведение операторов перехода типа диагональ-диагональ, например, при $N \geq M$, записывается в виде

$$\begin{aligned} \Xi = & X_N (X_{N+1} X_{N-1}) \cdots (X_{2M-1} \cdots X_3 X_1) \\ & \times \cdots (X_{N+M-1} \cdots X_{N-M+3} X_{N-M+1}) \cdots (X_{M+1} X_{M-1}) X_M. \end{aligned}$$

В этом выражении каждая группа операторов является оператором перехода типа диагональ-диагональ. А именно, крайний справа оператор, X_M , соответствует правой верхней вершине решетки, $X_{M+1} X_{M-1}$ соответствует второму диагональному ряду вершин от правого верхнего угла и т.д., вплоть до левой нижней вершины, которой соответствует оператор X_N . Полезно отметить, что поскольку $X_j X_k = X_k X_j$ при $|k - j| \geq 2$, операторы X_j в выражении для Ξ могут быть также сгруппированы вдоль вертикальных или горизонтальных рядов решетки. Например, группируя сомножители вдоль вертикальных рядов, для оператора Ξ можно написать

$$\Xi = (X_N \cdots X_2 X_1) (X_{N+1} \cdots X_3 X_2) \cdots (X_{N+M-1} \cdots X_{M+1} X_M). \quad (7.6)$$

В этой формуле порядок групп сомножителей совпадает с порядком вертикальных рядов решетки которым они соответствуют на правой картинке Рис. 7.1 (порядок сомножителей в каждой группе справа налево соответствует перебору вершин вертикального ряда решетки сверху вниз).

Рассмотренная операторная формулировка интересна тем, что позволяет применить конструкцию Йордана-Вигнера и выразить все операторы через алгебру канонических фермионных операторов [154]. Обозначая $\sigma_j^\pm = \frac{1}{2} (\sigma_j^x \pm i\sigma_j^y)$, положим

$$f_j = \Sigma_j^z \sigma_j^+, \quad f_j^* = \sigma_j^- \Sigma_j^z, \quad \Sigma_j^z := \prod_{k=1}^j \sigma_k^z.$$

Для всех $j, k = 1, \dots, N + M$ имеем

$$f_j f_k^* + f_k^* f_j = \delta_{jk}, \quad f_j f_k + f_k f_j = 0, \quad f_j^* f_k^* + f_k^* f_j^* = 0.$$

Операторы f_j^* и f_j являются операторами рождения и уничтожения фермионов относительно вакуумного вектора $|\Omega\rangle = |\Psi_{0,\dots,0}\rangle$, и для любого базисного вектора пространства \mathcal{H}_{N+M} имеем

$$|\Psi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N+M}}\rangle = (f_1^*)^{\mu_1} (f_2^*)^{\mu_2} \dots (f_{N+M}^*)^{\mu_{N+M}} |\Omega\rangle,$$

где порядок операторов существенен. В частности, для векторов (7.4) и (7.5) имеем

$$\langle \text{LB} | = \langle \Omega | f_{c+b} f_{c+b-1} \dots f_{c+1}, \quad | \text{TR} \rangle = f_{a+1}^* f_{a+2}^* \dots f_{a+b}^* |\Omega\rangle. \quad (7.7)$$

Принимая во внимание, что $(\Sigma_j)^2 = 1$, и $\sigma_j^z = 1 - 2f_j^* f_j$, из формулы (7.2) нетрудно получить

$$X_j = 1 - q_j q_{j+1} + f_{j+1}^* f_j + f_j^* f_{j+1}, \quad (7.8)$$

где через q_j мы обозначили плотность числа фермионов относительно вакуума, $q_j = f_j^* f_j$. Выражения (7.7) и (7.8), подставленные в формулы (7.3) и (7.6), дают представление для статистической суммы в терминах фермионов.

В качестве последнего подготовительного шага мы преобразуем формулы (7.3) и (7.6) для статистической суммы к виду, более удобному для последующих вычислений. Рассмотрим операторы перестановки фермионов

$$P_{j,k} = 1 - q_j - q_k + f_j^* f_k + f_k^* f_j, \quad (7.9)$$

обладающие, как нетрудно проверить, свойствами

$$P_{j,k} f_j^* P_{j,k} = f_k^*, \quad P_{j,k} f_j P_{j,k} = f_k, \quad P_{j,k} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle.$$

Нам понадобится оператор трансляции фермионов, который дается стандартной формулой для оператора циклического сдвига

$$U = P_{1,2} P_{2,3} \dots P_{N+M-1, N+M}, \quad U^{N+M} = 1. \quad (7.10)$$

Далее, введем в рассмотрение оператор T , который будет играть важную роль в дальнейшем, определяя его формулой

$$T = X_N \dots X_2 X_1 U. \quad (7.11)$$

Выражая каждую группу операторов в формуле (7.6) через T , и принимая во внимание, что $U^{-1} X_j U = X_{j-1}$, для статистической суммы получим представление

$$Z = \langle \text{LB} | T^M | \text{RT} \rangle. \quad (7.12)$$

Здесь

$$|RT\rangle = U^N |TR\rangle = f_{N+a+1}^* f_{N+a+2}^* \cdots f_{N+M}^* |\Omega\rangle = |\Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_{a+b+c}, \underbrace{1, \dots, 1}_b}\rangle,$$

и напомним также, что $N = b + c$ и $M = a + b$. Формула (7.12) и будет использована ниже для вычисления статистической суммы. Оператор T в ней играет роль оператора перехода типа ряд-ряд.

7.1.3. Свойства операторов и статистическая сумма

Оператор T , определенный формулой (7.11), в силу определенных свойств операторов X_j и U , как будет показано ниже, является экспонентой от некоторой квадратичной формы. Эта структура сохраняется и для его степеней, что позволит в результате выразить статистическую сумму в виде некоторого определителя. Квадратичные формы будем записывать в компактном виде $f^* \mathcal{A} f = \sum_{j,k} \mathcal{A}_{jk} f_j^* f_k$, где \mathcal{A} обозначает матрицу порядка $(N+M) \times (N+M)$ с элементами \mathcal{A}_{jk} .

Перед обсуждением свойств операторов, полезно привести вначале две основные общие формулы, касающиеся операторов представимых в виде экспоненты от квадратичных форм по фермионам. Первая формула описывает результат произведения для двух таких операторов. Пусть операторы A_i ($i = 1, 2$) такие, что $A_i = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A}_i) f\}$, то тогда

$$A_1 A_2 = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2) f\}. \quad (7.13)$$

Вторая формула позволяет вычислять матричные элементы операторов. В p -частичном секторе матричные элементы оператора вида $A = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A}) f\}$ выражаются через p -ый минор матрицы \mathcal{A} ,

$$\langle \Omega | f_{i_p} \cdots f_{i_2} f_{i_1} A f_{j_1}^* f_{j_2}^* \cdots f_{j_p}^* | \Omega \rangle = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{i_1, j_1} & \mathcal{A}_{i_1, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_1, j_p} \\ \mathcal{A}_{i_2, j_1} & \mathcal{A}_{i_2, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_2, j_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{i_p, j_1} & \mathcal{A}_{i_p, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_p, j_p} \end{vmatrix}. \quad (7.14)$$

Формулы (7.13) и (7.14) могут быть доказаны разными методами. Наиболее прямое доказательство может быть дано в рамках формализма интегрирования по грассманновым переменным (см., например, [155]). Использование этого формализма позволяет свести обе формулы к вычислению гауссовых интегралов. В частности, формула (7.13) следует того факта, что ядро оператора вида $\exp\{f^* \ln \mathcal{A} f\}$ записывается в виде экспоненты от квадратичной формы по грассманновым переменным, с матрицей квадратичной формы равной матрице

\mathcal{A} ; поскольку перемножению операторов соответствует свертка ядер, результат вычисления свертки приводит из левой части равенства к правой. В свою очередь, формула (7.14) может быть сведена к вычислению гауссова интеграла по p парам грассманновых переменных.

Чтобы найти для оператора T соответствующую ему матрицу \mathcal{T} в представлении в виде экспоненты $T = \exp\{f^* \ln(\mathcal{T})f\}$, необходимо найти аналогичные матрицы для элементарных операторных сомножителей содержащихся выражении (7.11), а именно операторов X_j и $P_{j,j+1}$ (см. формулу (7.10)). Для этого рассмотрим операторы $V_j(\alpha)$, где α — вещественный параметр, определяя их по формуле

$$V_j(\alpha) := \exp\{f^* \ln(\mathcal{V}_j(\alpha))f\}, \quad (7.15)$$

где $(N + M) \times (N + M)$ матрицы $\mathcal{V}_j(\alpha)$ имеют следующую блочную структуру

$$\mathcal{V}_j(\alpha) = \begin{pmatrix} I_{(j-1)} & & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & 1 & \alpha & & \\ & & & & \\ & & & & I_{(N+M-j-1)} \end{pmatrix}.$$

Здесь и всюду ниже $I_{(p)}$ обозначает единичную $p \times p$ матрицу. Полагая $\alpha \neq 1$, непосредственное вычисление дает

$$V_j(\alpha) = 1 + (\alpha - 1)(q_j + q_{j+1}) + \alpha(\alpha - 2)q_j q_{j+1} + f_j^* f_{j+1} + f_{j+1}^* f_j. \quad (7.16)$$

Заметим, что поскольку это выражение и матрицы $\mathcal{V}_j(\alpha)$, очевидно, хорошо определены при $\alpha \rightarrow 1$, то мы можем распространить эквивалентность формул (7.15) и (7.16) также и на случай $\alpha = 1$. Указанный специальный случай важен тем, что выражение (7.16) при $\alpha = 1$ переходит в выражение (7.8) для операторов X_j . Полагая, что $X_j = V_j(1)$ также и для представления в виде экспоненты, мы можем написать

$$X_j = \exp\{f^* \ln(\mathcal{X}_j)f\}, \quad \mathcal{X}_j := \mathcal{V}_j(1). \quad (7.17)$$

Подчеркнем, что поскольку операторы X_j и матрицы \mathcal{X}_j имеют нулевые собственные значения, формула (7.17) должна пониматься в смысле некоторого предела. Операторы $V_j(\alpha)$ являются подходящей регуляризацией операторов X_j в том смысле, что $X_j = \lim_{\alpha \rightarrow 1} V_j(\alpha)$. Соответственно, логарифм матрицы \mathcal{X}_j должен пониматься как $\ln(\mathcal{X}_j) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \ln(\mathcal{V}_j(\alpha))$. Ниже, однако, мы будем иметь дело только с самими матрицами \mathcal{X}_j , а не с логарифмами от них.

Далее, полагая $\alpha = 0$ в выражении (7.16), мы также приходим к выражению (7.9) для операторов перестановки при $k = j + 1$, т.е., $P_{j,j+1} = V_j(0)$. Таким образом

$$P_{j,j+1} = \exp\{f^* \ln(\mathcal{P}_{j,j+1})f\}, \quad \mathcal{P}_{j,j+1} := \mathcal{V}_j(0). \quad (7.18)$$

Принимая во внимание формулы (7.10) и (7.13) для оператора циклического сдвига $N + M$ фермионов, в свою очередь, получим представление $U = \exp\{f^* \ln(\mathcal{U})f\}$, где

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} & 1 \\ I_{(N+M-1)} & \end{pmatrix}.$$

Вообще, для любого оператора соответствующего некоторому элементу симметрической группы будет справедливо представление в виде экспоненты от квадратичной формы по фермионам, с логарифмом от матрицы соответствующей подстановки элементов, что есть, очевидно, следствие формул (7.13) и (7.18).

В результате, для оператора T имеем представление искомого вида с матрицей \mathcal{T} , равной

$$\mathcal{T} = \mathcal{X}_N \cdots \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_1 \mathcal{U}.$$

Вообще, для любой целой степени оператора T справедлива формула $T^k = \exp\{f^* \ln(\mathcal{T}^k)f\}$, причем, как оказывается, явный вид матриц \mathcal{T}^k , $k = 1, \dots, M$, может быть получен прямым вычислением. Ниже мы приводим результат этого вычисления. Эти формулы могут быть доказаны, например, по индукции.

Матрицы \mathcal{T}^k представимы в виде блочных матриц вида

$$\mathcal{T}^k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}, \quad (k = 1, \dots, M).$$

Матрица A_k является квадратной, размерности $N \times N$, нижнетреугольной матрицей, элементы которой выражаются через биномиальные коэффициенты по формуле

$$(A_k)_{ij} = \binom{i-j+k-1}{i-j}. \quad (7.19)$$

Матрица B_k является прямоугольной, размерности $N \times M$, у которой первые $M - k$ столбцов нулевые; матричные элементы даются формулой

$$(B_k)_{ij} = \binom{i+j-M+k-2}{j-M+k-1}. \quad (7.20)$$

Матрица C_k также является прямоугольной, но размерности $M \times N$, у которой последние $M - k$ строк нулевые; матричные элементы даются формулой

$$(C_k)_{ij} = \binom{N+k-i-j}{k-i}.$$

Матрица D_k является квадратной, размерности $M \times M$, и, в свою очередь, обладает блочной структурой вида

$$D_k = \begin{pmatrix} & S_k \\ I_{(M-k)} & \end{pmatrix}$$

Здесь квадратная $k \times k$ матрица S_k является верхнетреугольной, с элементами

$$(S_k)_{ij} = \begin{pmatrix} j - i + N - 1 \\ j - i \end{pmatrix},$$

где $i, j = 1, \dots, k$.

Обратимся теперь к вычислению статистической суммы. Применяя формулу (7.14) к представлению (7.12), для статистической суммы выражение в виде минора матрицы B_M составленного из элементов последних b строк и последних b столбцов (напомним, что $M = a + b$, $N = b + c$). Таким образом, получим

$$Z = \det H, \quad (7.21)$$

где $b \times b$ матрица H имеет матричные элементы

$$H_{ij} = (B_M)_{c+i, a+j} = \begin{pmatrix} a + c + i + j - 2 \\ a + j - 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица H может быть записана как произведение трех матриц

$$H = \Lambda_c^{-1} \tilde{H} \Lambda_a^{-1}, \quad (7.22)$$

где через Λ_p ($p = 0, 1, \dots$) обозначена диагональная $b \times b$ матрица с элементами

$$(\Lambda_p)_{ij} = (p + i - 1)! \delta_{ij}, \quad (7.23)$$

а матрица \tilde{H} является ганкелевой,

$$\tilde{H}_{ij} = (a + c + i + j - 2)! = \int_0^\infty e^{-x} x^{a+c+i+j-2} dx.$$

Из формулы для матричных элементов в терминах интеграла следует, что матрица \tilde{H} для фиксированных a и c , и различных $b = 1, 2, \dots$ связана с ансамблем полиномов Лагерра $\{L_k^{(a+c)}(x)\}_{k=0,1,\dots}$. Напомним, что полиномы Лагерра имеют явный вид

$$L_k^{(\lambda)}(x) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k+\lambda}{k-l} \frac{x^l}{l!} \quad (7.24)$$

и удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\lambda L_k^{(\lambda)}(x) L_{k'}^{(\lambda)}(x) dx = h_k \delta_{kk'} \quad (\lambda > -1),$$

где $h_k = \Gamma(\lambda + k + 1)/k!$. Используя тот факт, что для определителя ганкелевой матрицы справедлива формула [83]

$$\det \tilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{h_k}{\mu_k^2},$$

где μ_k обозначает старший коэффициент ассоциированного полинома степени k , и учитывая, что в рассматриваемом нами случае h_k и μ_k равны

$$h_k = \frac{(k+a+c)!}{k!}, \quad \mu_k = \frac{1}{k!},$$

получим

$$\det \tilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} k!(k+a+c)!.$$

В результате, для статистической суммы имеем формулу

$$Z = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{k!(k+a+c)!}{(k+a)!(k+c)!}. \quad (7.25)$$

Раскрывая в полученной формуле факториалы (рассматривая разные случаи, например полагая, что $a \leq b \leq c$) и добавляя подходящие множители в числитель и знаменатель, нетрудно получить выражение

$$\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}, \quad (7.26)$$

которое является знаменитой формулой Мак Магона для числа плоских разбиений в ящике размером $a \times b \times c$. Отметим, что формула (7.25), также как и (7.26), верна для любых натуральных a , b и c , без ограничений.

7.1.4. Одноточечная корреляционная функция

Занумеруем вертикальные линии решетки на картинке справа Рис. 7.1 через $m = 1, \dots, M$ слева направо, и горизонтальные линии через $n = 1, \dots, N$ снизу вверх. Таким образом, для вершин решетки будем иметь декартовы координаты (m, n) , с “началом координат” $(1, 1)$ в вершине в левом нижнем углу решетки.

Рассмотрим одноточечную корреляционную функцию $G(m, n)$, которую определим как вероятность обнаружения линии на горизонтальном ребре соединяющем вершины с координатами (m, n) и $(m+1, n)$. Как уже упоминалось во Введении, с точки зрения интерпретации плоских разбиений как укладок шестиугольника ромбами, эта корреляционная функция равна, с точностью до умножения на статистическую сумму, пересчету укладок ромбами шестиугольника с одним фиксированным ромбом в заданной точке шестиугольника, либо, что эквивалентно, пересчету укладок шестиугольника с “выколотой” областью в виде такого ромба.

Для интересующей нас корреляционной функции, аналогично формуле (7.12) для статистической суммы, имеем следующую формулу

$$G(m, n) = \frac{1}{Z} \langle L | T^m q_{N-n+1} T^{M-m} | \tilde{R} \rangle.$$

Здесь, как и выше, оператор q_j является плотностью числа фермионов, $q_j := f_j^* f_j$. Чтобы воспользоваться формулой (7.13), заменим оператор q_j подходящей экспонентой от квадратичной формы по фермионам, используя дифференцирование по параметру

$$q_j = \frac{\partial}{\partial \alpha} \exp\{\alpha q_j\} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \exp\{f^* \ln(I + (e^\alpha - 1)\mathcal{E}_j) f\} \Big|_{\alpha=0},$$

где \mathcal{E}_j обозначает $(N + M) \times (N + M)$ матрицу со всеми элементами равными нулю, кроме одного, равного единице и стоящего на диагонали на j -ой позиции. Для корреляционной функции, в результате применения формулы (7.14), имеем

$$G(m, n) = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \alpha} \det[H + (e^\alpha - 1)W] \Big|_{\alpha=0} = \text{tr}(H^{-1}W), \quad (7.27)$$

где мы использовали формулу (7.21). Здесь W — матрица ранга один, являющаяся правым нижним $b \times b$ подблоком правого верхнего блока, размерности $N \times M$, матрицы $\mathcal{T}^m \mathcal{E}_{N-n+1} \mathcal{T}^{M-m}$. Обозначая через E_{N-n+1} матрицу левого верхнего блока, размерности $N \times N$, матрицы \mathcal{E}_{N-n+1} , чьи остальные блоки равны нулю, для интересующего нас произведения матриц имеем

$$\mathcal{T}^m \mathcal{E}_{N-n+1} \mathcal{T}^{M-m} = \begin{pmatrix} \cdots & A_m E_{N-n+1} B_{M-m} \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Здесь точками обозначены несущественные для нас блоки. Матрица W определяется как матрица с элементами

$$W_{ij} = (A_m E_{N-n+1} B_{M-m})_{c+i, a+j}.$$

Учитывая, что $(E_k)_{ij} = \delta_{ki} \delta_{kj}$, имеем

$$W_{ij} = (A_m)_{c+i, N-n+1} (B_{M-m})_{N-n+1, a+j},$$

и, используя (7.19) и (7.20), приходим к явному выражению

$$W_{ij} = \binom{i + m + n - b - 2}{i + n - b - 1} \binom{j + a + b + c - m - n - 1}{j + a - m - 1}.$$

Из этих формул видно, что матрица W имеет вид произведения вектор-столбца на вектор-строку.

Рассмотрим теперь задачу обращения матрицы H . Из формулы (7.22) следует, что

$$H^{-1} = \Lambda_a \tilde{H}^{-1} \Lambda_c,$$

где диагональные матрицы Λ_a и Λ_c даются формулой (7.23). Поскольку матрица \tilde{H} ганкелева, матричные элементы обратной матрицы содержатся в ядре Кристоффеля-Дарбу $K_b(x, y)$ полиномов Лагерра,

$$K_b(x, y) = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{k!}{(k+a+c)!} L_k^{(a+c)}(x) L_k^{(a+c)}(y),$$

которое является производящей функцией для этих матричных элементов,

$$K_b(x, y) = \sum_{i,j=1}^b \tilde{H}_{ij}^{-1} x^{i-1} y^{j-1}.$$

Используя формулу для полиномов Лагерра (7.24), нетрудно найти матричные элементы матрицы \tilde{H}^{-1} . В результате, для элементов матрицы H^{-1} получим

$$H_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} (i+a-1)! (j+c-1)!}{(i+a+c-1)! (i-1)! (j+a+c-1)! (j-1)!} \sum_{k=\max(i,j)-1}^{b-1} \frac{k! (k+a+c)!}{(k-i+1)! (k-j+1)!}.$$

После подстановки полученных выражений в формулу (7.27) для корреляционной функции следует выражение в терминах тройной суммы. Записывая суммы по i и j как обрывающиеся гипергеометрические ряды, окончательное выражение для корреляционной функции может быть представлено как сумма произведений двух гипергеометрических рядов:

$$\begin{aligned} G(m, n) = & \sum_{k=\max(0, m-a, b-n)}^{b-1} \frac{(k+a)!(k+c)!}{k!(k+a+c)!} \binom{k+a+b+c-m-n}{k+a-m} \binom{k+m+n-b-1}{k+n-b} \\ & \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, -k-a+m, -k-a-c \\ -k-a-b-c+m+n, -k-a \end{matrix} \middle| 1 \right) \\ & \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, -k-n+b, -k-a-c \\ -k-m-n+b+1, -k-c \end{matrix} \middle| 1 \right). \end{aligned} \quad (7.28)$$

В этой формуле число членов в обоих гипергеометрических рядах определяется значениями первых двух верхних индексов. Кроме того, условия суммирования по k таковы, что вторые верхние индексы гипергеометрических рядов неположительные целые числа ни при каких значениях натуральных чисел a, b, m, n .

Формула (7.28) справедлива для любых значений размеров ящика a, b, c и значений координат $m = 1, \dots, a+b-1$ и $n = 1, \dots, b+c$. Формула (7.28) численно согласуется с результатами полученными в работах [142–145] для специальных случаев перечислений укладок ромбами шестиугольника с фиксированным ромбом.

7.2. Неоднородная пятивершинная модель и взвешенные перечисления плоских разбиений

Рассматривается пятивершинная модель на квадратной решетке с фиксированными граничными условиями соответствующая взвешенным (с весом q на элементарный куб) перечислениям плоских разбиений в ящике. Вычисляется одноточечная корреляционная функция модели описывающая вероятность заданного состояния на ребре (поляризация), что обобщает полученный выше аналогичный результат для случая однородных (с весом $q = 1$) перечислений плоских разбиений.

7.2.1. Неоднородная пятивершинная модель

Рассмотрим пятивершинную модель на квадратной решетке образованной N горизонтальными и M вертикальными прямыми. Конфигурации модели будем описывать в терминах линий и в качестве переменных описывающих состояния на ребрах будем использовать переменные типа заполнения, принимающие значения: 0, если ребро пустое, и 1, если ребро содержит линию. Пусть $w_{i,j}(\mu, \nu; \mu', \nu')$ обозначает больцмановский вес вершины лежащей на пересечении i -ой сверху горизонтальной ($i = 1, \dots, N$) и j -ой слева вертикальной ($j = 1, \dots, M$) линий, а μ, ν, μ' и ν' переменные заполнения приписанные соответственно левому, нижнему, верхнему и правому ребрам вершины. Больмановский вес будет выбираться равным

$$w_{i,j}(\mu, \nu; \mu', \nu') = \begin{cases} q^{\frac{i+j}{2}} & \mu = \nu = \mu' = \nu' = 0, \\ 1 & \mu + \nu = \mu' + \nu' = 1, \\ 0 & \mu = \nu = \mu' = \nu' = 1, \mu + \nu \neq \mu' + \nu', \end{cases} \quad (7.29)$$

где q есть некоторый параметр, который ниже будет отождествлен с весом перечислений плоских разбиений. Статистическая сумма модели определяется как

$$Z = \sum_{\{\mu, \nu\}} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M w_{i,j}(\mu_{i,j}, \nu_{i+1,j}; \nu_{i,j}, \mu_{i,j+1}),$$

где сумма вычисляется по состояниям переменных заполнения внутренних ребер решетки; переменные внешних ребер подразумеваются фиксированными, как указано ниже.

Естественными величинами связанными с плоскими разбиениями являются их перечисления. Будем рассматривать их q -взвешенные перечисления, в которых каждая трехмерная диаграмма Юнга λ берется с весом $q^{V(\lambda)}$, где $V(\lambda)$ есть «объем» диаграммы,

$V(\lambda) = \sum_{i,j \geq 0} \lambda_{ij}$, и которые определяются, для случая плоских разбиений в ящике, формулой

$$\mathcal{N}_{a,b,c}(q) = \sum_{\lambda \in \Omega_{a,b,c}} q^{V(\lambda)}, \quad (7.30)$$

где $\Omega_{a,b,c}$ есть множество всех плоских разбиений в ящике размера $a \times b \times c$. Величина (7.30) выражается через статистическую сумму пятивершинной модели на $N \times M$ решетке с весами (7.29) и фиксированными граничными условиями определенными выше (см. Рис. 7.1):

$$\mathcal{N}_{a,b,c}(q) = q^{-\frac{ac(a+c+2)}{4}} Z. \quad (7.31)$$

Действительно, чтобы установить справедливость этого равенства, достаточно убедиться в его выполнении для каждого плоского разбиения и для соответствующей ему конфигурации пятивершинной модели. Воспользуемся очевидным свойством плоских разбиений, что любая трехмерная диаграмма Юнга однозначно определяется заданием всех позиций одного из трех типов ромбов в укладках шестиугольника; в нашем случае удобно использовать набор квадратов, число которых, очевидно, одинаково для всех конфигураций (и равно ac). Важную роль играет конфигурация соответствующая пустой диаграмме $\lambda = \emptyset$, см. Рис. 7.3. Ясно, что все остальные плоские разбиения в ящике могут быть получены из этой конфигурации путем элементарных сдвигов квадратов вдоль диагоналей; число таких сдвигов для каждого плоского разбиения λ устанавливается однозначно и в точности равно его «объему», $V(\lambda)$. С другой стороны, в пятивершинной модели только вес $w_{i,j}(0, 0; 0, 0)$, который является весом вершины первого типа (см. Рис. 7.2) зависит от координаты вершины и от q (в то время как остальные ненулевые веса равны единице и тем самым не зависят от координаты вершины) и удовлетворяет уравнению

$$w_{i+1,j+1}(0, 0; 0, 0) = q w_{i,j}(0, 0; 0, 0).$$

Повторяя описанный выше прием со сдвигом квадратов, получаем, что полный больмановский вес конфигурации пятивершинной модели равен $q^{V(\lambda)}$, умноженный на вес конфигурации соответствующий пустой диаграмме $\lambda = \emptyset$, который равен $q^{ac(a+c+2)/4}$. Таким образом, деля на этот фактор статистическую сумму, мы имеем в точности число q -взвешенных перечислений плоских разбиений в ящике, что и доказывает формулу (7.31).

Определим теперь корреляционную функцию, которая будет являться целью нашего вычисления в дальнейшем. Как и в работе [34], для обозначения вершин решетки в определении корреляционной функции будем использовать декартовы координаты (m, n) , с «началом координат» $(1, 1)$ в вершине в левом нижнем углу решетки, так что вертикальные линии занумерованы через $m = 1, \dots, M$ слева направо, а горизонтальные линии через $n = 1, \dots, N$

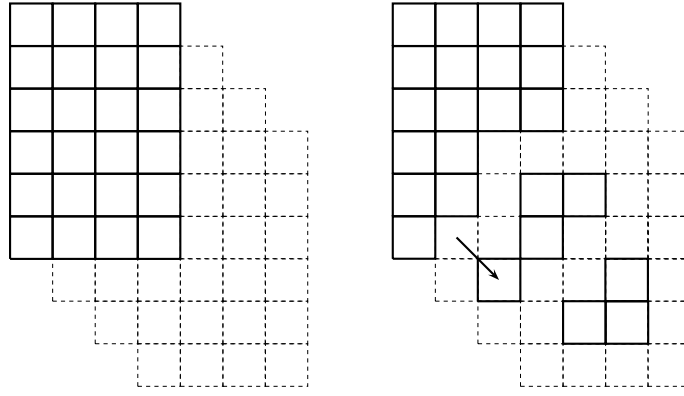


Рис. 7.3. Конфигурации квадратов соответствующие пустой трехмерной диаграмме Юнга (слева) и диаграмме Рис. 7.1 (справа); стрелкой показан элементарный сдвиг квадрата вдоль диагонали.

снизу вверх (а не сверху вниз, как выше). Нас будет интересовать вероятность обнаружения конфигурации в которой на горизонтальном ребре соединяющем вершины с координатами (m, n) и $(m + 1, n)$ находится жирная линия, т.е. переменная заполнения этого ребра равна 1:

$$G(m, n) = \frac{1}{Z} \sum_{\{\mu, \nu\}} \mu_{N-n+1, m+1} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M w_{i,j}(\mu_{i,j}, \nu_{i+1,j}; \nu_{i,j}, \mu_{i,j+1}). \quad (7.32)$$

С точки зрения интерпретации плоских разбиений как укладок шестиугольника ромбами, эта корреляционная функция дает перечисления укладок ромбами шестиугольника с одним фиксированным ромбом.

7.2.2. Операторная формулировка и детерминантные представления

Как и в работе [34], вычисление интересующих нас величин в пятивершинной модели на $N \times M$ решетке будет основано на представлении в виде матричных элементов операторов действующих в пространстве $N + M$ фермионов. Такие представления являются результатом процедуры «фермионизации», основанной на преобразовании Йордана-Вигнера, и адаптированной к случаю фиксированных граничных условий (см. раздел 2 работы [34]).

Для статистической суммы справедливо представление в виде матричного элемента от произведения M операторов:

$$Z = \langle \text{LB} | T(q^{1/2}) T(q) \cdots T(q^{M/2}) | \text{RT} \rangle. \quad (7.33)$$

Состояния $\langle \text{LB} |$ и $| \text{RT} \rangle$ учитывают граничные условия на левой и нижней, и на правой и верхней границах решетки соответственно, и в рассматриваемом нами случае граничных условий (см. Рис. 7.1) являются b -фермионными состояниями

$$\langle \text{LB} | = \langle \Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_c, \underbrace{1, \dots, 1}_b, \underbrace{0, \dots, 0}_{a+b}} |, \quad | \text{RT} \rangle = | \Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_{a+b+c}, \underbrace{1, \dots, 1}_b} \rangle, \quad (7.34)$$

где базисные кет-векторы определены как

$$|\Psi_{\mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1, \dots, \nu_M}\rangle = (f_1^*)^{\mu_1} \cdots (f_N^*)^{\mu_N} (f_{N+1}^*)^{\nu_1} \cdots (f_{N+M}^*)^{\nu_M} |\Omega\rangle, \quad (7.35)$$

и, соответственно, бра-векторы как

$$\langle\Psi_{\mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1, \dots, \nu_M}| = \langle\Omega|(f_{N+M})^{\nu_M} \cdots (f_{N+1})^{\nu_1} (f_N)^{\mu_N} \cdots (f_1)^{\mu_1}. \quad (7.36)$$

Операторы f_j^* и f_j ($j = 1, \dots, N + M$) являются каноническими фермионными операторами рождения и уничтожения относительно вакуума $|\Omega\rangle$, и $\langle\Omega|\Omega\rangle = 1$. Отметим, что в случае произвольных фиксированных граничных условий состояния (7.34) равны бра- и кет-векторам (7.36) и (7.35), соответственно, где μ_1, \dots, μ_N и ν_1, \dots, ν_M принимают значения переменных заполнения внешних ребер решетки лежащих на левой и нижней (для $\langle\text{LB}|$) или на правой и верхней (для $|\text{RT}\rangle$) границах; как и выше, подразумевается, что переменные заполнения нумеруются либо сверху вниз, либо слева направо.

Операторы $T(z)$ в (7.33) соответствуют столбцам решетки и имеют вид

$$T(z) = X_N(q^{N/2}z) X_{N-1}(q^{(N-1)/2}z) \cdots X_1(q^{1/2}z) U \quad (7.37)$$

где оператор $X_j(z)$ соответствует j -ому (сверху) узлу вертикального ряда, и имеет вид

$$X_j(z) = z + f_{j+1}^* f_j + f_j^* f_{j+1} + (1 - z)(f_j^* f_j + f_{j+1}^* f_{j+1}) + (z - 2)f_j^* f_j f_{j+1}^* f_{j+1}. \quad (7.38)$$

Оператор U в (7.37) является оператором циклического сдвига,

$$U = P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{N+M-1, N+M}, \quad U^{N+M} = 1,$$

где $P_{j,k}$ является оператором перестановки j -го и k -го фермионов, удовлетворяющий соотношениям

$$P_{j,k} f_j^* P_{j,k} = f_k^*, \quad P_{j,k} f_j P_{j,k} = f_k, \quad P_{j,k} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle,$$

и имеющий следующее представление:

$$P_{j,k} = 1 - f_j^* f_j - f_k^* f_k + f_j^* f_k + f_k^* f_j.$$

Корреляционная функция $G(m, n)$, определенная в (7.32), выражается, аналогично формуле (7.33) для статистической суммы, в виде

$$G(m, n) = \frac{1}{Z} \langle\text{LB}| T(q^{1/2}) \cdots T(q^{m/2}) f_{N-n+1}^* f_{N-n+1} T(q^{(m+1)/2}) \cdots T(q^{M/2}) |\text{RT}\rangle. \quad (7.39)$$

Важную роль для применимости всего метода является возможность представить операторы (7.38) в виде экспоненты от квадратичной формы по фермионам. Справедливо представление

$$X_j(z) = z e^{f^* \ln \mathcal{X}_j(z) f}, \quad \mathcal{X}_j(z) = \begin{pmatrix} I_{(j-1)} & & & \\ & z^{-1} & z^{-1} & \\ & z^{-1} & z^{-1} & \\ & & & I_{(M+N-j-1)} \end{pmatrix}. \quad (7.40)$$

Отметим, что поскольку матрица $\mathcal{X}_j(z)$ имеет нулевое собственное значение, представление (7.40) необходимо понимать в смысле некоторого предела в классе операторов являющихся экспонентой от квадратичной формы по фермионам, аналогично тому как это делается для оператора (7.15).

Непосредственным следствием формул (7.13) и (7.40) является формула

$$T(z) = q^{\frac{N(N+1)}{4}} z^N e^{f^* \ln \mathcal{T}(z) f},$$

где матрица $\mathcal{T}(z)$ равна

$$\mathcal{T}(z) = \mathcal{X}_N(q^{N/2}z) \mathcal{X}_{N-1}(q^{(N-1)/2}z) \dots \mathcal{X}_1(q^{1/2}z) \mathcal{U}. \quad (7.41)$$

В следующем разделе мы покажем, что все элементы матрицы $\mathcal{T}(z)$ могут быть вычислены явно; более того, вычислению поддаются матричные элементы произведений этих матриц, такие как фигурирующие в формуле (7.33). Применение формулы (7.14) дает

$$Z = q^{\frac{NM(N+M+2)}{4}} \det H, \quad (7.42)$$

где $b \times b$ матрица H имеет матричные элементы:

$$H_{ij} = [\mathcal{T}(q^{1/2}) \mathcal{T}(q) \dots \mathcal{T}(q^{M/2})]_{c+i, a+b+c+j} \quad (i, j = 1, \dots, b). \quad (7.43)$$

Чтобы обобщить эти формулы на случай корреляционной функции (7.39), воспользуемся представлением

$$f_j^* f_j = \frac{d}{d\alpha} e^{f^* \ln \mathcal{E}_j(\alpha) f} \Big|_{\alpha=0}, \quad \mathcal{E}_j(\alpha) = \begin{pmatrix} I_{(j-1)} & & & \\ & e^\alpha & & \\ & & & \\ & & & I_{(N+M-j)} \end{pmatrix}.$$

Получим

$$G(m, n) = q^{\frac{NM(N+M+2)}{4}} Z^{-1} \frac{d}{d\alpha} \det [H + (e^\alpha - 1)W(m, n)] \Big|_{\alpha=0} = \text{tr} [H^{-1}W(m, n)], \quad (7.44)$$

где матрица H определена выше, а матрица $W(m, n)$ имеет матричные элементы

$$[W(m, n)]_{ij} = [\mathcal{T}(q^{1/2}) \cdots \mathcal{T}(q^{m/2})]_{c+i, N-n+1} \times [\mathcal{T}(q^{(m+1)/2}) \cdots \mathcal{T}(q^{M/2})]_{N-n+1, a+b+c+j} \quad (i, j = 1, \dots, b). \quad (7.45)$$

7.2.3. Матричные произведения

Рассмотрим задачу вычисления матричных элементов произведений \mathcal{T} -матриц, которые задают выражения (7.43) и (7.45).

Начнем с вычисления матричных элементов матрицы $\mathcal{T}(z)$, определяемой формулой (7.41). Рассмотрим более общую матрицу

$$\mathcal{T}(z_1, \dots, z_N) := \mathcal{X}_N(z_N^{-1}) \mathcal{X}_{N-1}(z_{N-1}^{-1}) \cdots \mathcal{X}_1(z_1^{-1}) \mathcal{U}, \quad (7.46)$$

которая определена так, что $\mathcal{T}(z) = \mathcal{T}(z_1, \dots, z_N)$ при $z_j = q^{-j/2} z^{-1}$ ($j = 1, \dots, N$). Замечая, что произведение \mathcal{X} -матриц в формуле (7.46) допускает индукцию по числу сомножителей, нетрудно получить, что матрица $\mathcal{T}(z_1, \dots, z_N)$ может быть записана как матрица с блочной структурой

$$\mathcal{T}(z_1, \dots, z_N) = \begin{pmatrix} A(z_1, \dots, z_N) & B(z_1, \dots, z_N) \\ C(z_1, \dots, z_N) & D(z_1, \dots, z_N) \end{pmatrix}, \quad (7.47)$$

где $A(z_1, \dots, z_N)$ является $N \times N$ нижнетреугольной матрицей, у которой ненулевые матричные элементы равны

$$[A(z_1, \dots, z_N)]_{ij} = \prod_{l=j}^i z_l,$$

а $B(z_1, \dots, z_N)$ и $C(z_1, \dots, z_N)$ являются прямоугольными матрицами, размерности $N \times M$ и $M \times N$, соответственно, причем у $B(z_1, \dots, z_N)$ ненулевым является только последний столбец, с элементами

$$[B(z_1, \dots, z_N)]_{iM} = \prod_{l=1}^i z_l \quad (i = 1, \dots, N),$$

а у $C(z_1, \dots, z_N)$ — ненулевой только первая строка, с элементами

$$[C(z_1, \dots, z_N)]_{1j} = \prod_{l=j}^N z_l \quad (j = 1, \dots, N).$$

Наконец, $D(z_1, \dots, z_N)$ является $M \times M$ матрицей:

$$D(z_1, \dots, z_N) = \begin{pmatrix} & \prod_{l=1}^N z_l \\ I_{(M-1)} & \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ блоки матрицы $\mathcal{T}(z)$, по аналогии с формулой (7.47). Полагая в формулах выше $z_j = q^{-j/2}z^{-1}$ ($j = 1, \dots, N$) приходим к выражениям для матричных элементов этих матриц. В частности, для матрицы $A(z)$ получим

$$[A(z)]_{ij} = \begin{cases} q^{-\frac{i(i+1)}{4} + \frac{j(j-1)}{4}} z^{-i+j-1} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, N). \quad (7.48)$$

Нетривиальные матричные элементы остальных матриц, как легко видеть, выражаются через матричные элементы первого столбца и последней строки матрицы $A(z)$:

$$[B(z)]_{ij} = [A(z)]_{i1} \delta_{jM} \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M),$$

$$[C(z)]_{ij} = [A(z)]_{Nj} \delta_{i1} \quad (i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N),$$

$$[D(z)]_{ij} = \delta_{i,j+1} + [A(z)]_{N1} \delta_{i1} \delta_{jM} \quad (i, j = 1, \dots, M).$$

Рассмотрим теперь произведения \mathcal{T} -матриц. В силу блочной структуры матрицы $\mathcal{T}(z)$ естественно искать выражения для этих произведений также в виде блочных матриц:

$$\mathcal{T}(z_1)\mathcal{T}(z_2)\cdots\mathcal{T}(z_m) =: \begin{pmatrix} A_m(z_1, \dots, z_m) & B_m(z_1, \dots, z_m) \\ C_m(z_1, \dots, z_m) & D_m(z_1, \dots, z_m) \end{pmatrix}$$

и ниже мы ограничимся только значениями $m \leq M$. Непосредственное вычисление показывает, что $N \times N$ матрицы $A_m(z_1, \dots, z_m)$ есть произведение A -матриц:

$$A_m(z_1, \dots, z_m) = A(z_1)A(z_2)\cdots A(z_m). \quad (7.49)$$

Матрицы $B_m(z_1, \dots, z_m)$, размерности $N \times M$, имеют ненулевые последние m столбцов:

$$[B_m(z_1, \dots, z_m)]_{ij} = [A(z_1)]_{i1} \delta_{j, M-m+1} + [A(z_1)A(z_2)]_{i1} \delta_{j, M-m+2} + \dots \\ + [A(z_1)A(z_2)\cdots A(z_m)]_{i1} \delta_{jM}. \quad (7.50)$$

Матрицы $C_m(z_1, \dots, z_m)$, размерности $M \times N$, имеют ненулевые первые m строк:

$$[C_m(z_1, \dots, z_m)]_{ij} = [A(z_1)A(z_2)\cdots A(z_m)]_{Nj} \delta_{i1} + \dots + [A(z_1)A(z_2)]_{Nj} \delta_{i, m-1} + [A(z_1)]_{Nj} \delta_{im}.$$

Наконец, $M \times M$ матрица $D_m(z_1, \dots, z_m)$ имеет вид:

$$D_m(z_1, \dots, z_m) = \begin{pmatrix} S_m(z_1, \dots, z_m) \\ I_{(M-m)} \end{pmatrix},$$

где матрица $S_m(z_1, \dots, z_m)$, размерности $m \times m$, является верхнетреугольной, с матричными элементами:

$$[S_m(z_1, \dots, z_m)]_{ij} = [A(z_i)\cdots A(z_j)]_{N1}.$$

Таким образом, задача вычисления матричных элементов произведений T -матриц сводится к задаче вычисления матричных элементов произведений A -матриц. Полезно также отметить, что все матрицы в наборе $B_m(z_1, \dots, z_m)$ ($m = 1, \dots, M$) порождаются матрицей $B_M(z_1, \dots, z_M)$, поскольку все остальные матрицы этого набора могут быть получены из нее сдвигом ее столбцов вправо. Это следует из выражения для ее элементов (которые все ненулевые),

$$[B_M(z_1, \dots, z_M)]_{ij} = [A(z_1)A(z_2) \cdots A(z_j)]_{i1}, \quad (7.51)$$

и может быть выражено формулой:

$$[B_m(z_1, \dots, z_m)]_{ij} = [B_M(z_1, \dots, z_M)]_{i, j-M+m}. \quad (7.52)$$

Аналогично, матрицы $C_m(z_1, \dots, z_m)$, $m = 1, \dots, M$, порождаются матрицей $C_M(z_1, \dots, z_M)$, элементы которой равны

$$[C_M(z_1, \dots, z_M)]_{ij} = [A(z_1)A(z_2) \cdots A(z_{M-i+1})]_{Nj},$$

с помощью сдвига строк этой матрицы вверх.

Чтобы рассмотреть задачу вычисления матричных элементов произведения A -матриц полезно переписать матрицу $A(z)$ терминах матриц удовлетворяющих некоторой алгебре. Введем матрицы E , нижнетреугольную, и J , диагональную, с элементами

$$E_{ij} = \delta_{i, j+1}, \quad J_{ij} = i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, N).$$

Матрица E нильпотентна, $E^N = 0$, и $(E^k)_{ij} = \delta_{i-j, k}$ ($k = 1, \dots, N-1$). Имеет место коммутационное соотношение:

$$q^J E q^{-J} = q E. \quad (7.53)$$

Для матрицы $A(z)$, матричные которой элементы даются формулой (7.48), имеем представление:

$$A(z) = q^{-\frac{1}{4}J(J+1)} z^{-(J+1)} (I - E)^{-1} q^{\frac{1}{4}J(J-1)} z^J. \quad (7.54)$$

Будем рассматривать произведение $A(q^{1/2}z) \cdots A(q^{m/2}z)$, что достаточно для вычисления выражений (7.43) и (7.45). Непосредственная подстановка (7.54) для искомого произведения дает

$$\begin{aligned} A(q^{1/2}z) \cdots A(q^{m/2}z) &= q^{-\frac{m(m+1)}{4}} z^{-m} q^{-\frac{1}{4}J(J+3)} z^{-J} \\ &\quad \times (I - E)^{-1} q^{-J} (I - E)^{-1} q^{-J} \cdots (I - E)^{-1} q^{\frac{1}{4}J(J+2m-1)} z^J. \end{aligned}$$

Используя коммутационное соотношение (7.53), это выражение может быть переписано в виде:

$$A(q^{1/2}z) \cdots A(q^{m/2}z) = q^{-\frac{m(m+1)}{4}} z^{-m} q^{-\frac{1}{4}J(J+4m-1)} z^{-J} \\ \times (I - q^{m-1}E)^{-1} \cdots (I - qE)^{-1} (I - E)^{-1} q^{\frac{1}{4}J(J+2m-1)} z^J.$$

Дальнейшее вычисление основано на формуле

$$\prod_{l=0}^{m-1} \frac{1}{(I - q^l x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} m-1+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k, \quad (7.55)$$

где нами использовано стандартное обозначение для q -биномиальных коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{l=0}^{k-1} \frac{1 - q^{n-l}}{1 - q^{l+1}} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad (x, q)_k := \prod_{l=0}^{k-1} (1 - q^l x).$$

Справедливость (7.55) легко проверяется с помощью q -аналога формулы Паскаля

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

В итоге, для матричных элементов искомого матричного произведения получим

$$[A(q^{1/2}z) \cdots A(q^{m/2}z)]_{ij} = q^{-\frac{(i-j+m)(i+j+3m-1)}{4} + \frac{m(m-1)}{2}} \begin{bmatrix} m-1+i-j \\ i-j \end{bmatrix}_q z^{-i+j-m}. \quad (7.56)$$

В качестве примера приложения этой формулы, вычислим элементы матрицы $B_M := B_M(q^{1/2}, \dots, q^{M/2})$, которые задают элементы матрицы H определенной в (7.43) (напомним, что $b + c = N$), $H_{ij} = (B_M)_{c+i, a+j}$ ($i, j = 1, \dots, b$). Используя (7.51) и (7.56), получим

$$(B_M)_{ij} = [A(q^{1/2})A(q) \cdots A(q^{j/2})]_{i1} = q^{-\binom{i+j}{2} + \frac{1}{2}\binom{i}{2} + \frac{1}{2}\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{bmatrix}_q. \quad (7.57)$$

Аналогично, для матрицы $W(m, n)$ определенной в (7.45), в наших обозначениях имеем:

$$[W(m, n)]_{ij} = [A_m(q^{1/2}, \dots, q^{m/2})]_{c+i, N-n+1} [B_{M-m}(q^{(m+1)/2}, \dots, q^{M/2})]_{N-n+1, a+j},$$

откуда следует, в силу (7.50), что при $m > a$ элементы этой матрицы отличны от нуля только на столбцах $j = m - a + 1, \dots, b$. Применение (7.49), (7.51) и (7.52) для этих элементов дает:

$$[W(m, n)]_{ij} = [A(q^{1/2}) \cdots A(q^{m/2})]_{c+i, N-n+1} [A(q^{(m+1)/2}) \cdots A(q^{(a+j)/2})]_{N-n+1, 1}.$$

Наконец, применение (7.56) приводит к явному выражению для элементов этой матрицы, которое будет использовано ниже.

7.2.4. Статическая сумма и одноточечная функция

В этом разделе мы рассмотрим вычисление выражений (7.21) и (7.44) для статистической суммы и одноточечной функции, соответственно, основываясь на результатах предыдущего раздела.

Начнем с статистической суммы, для нахождения которой необходимо вычисление определителя $b \times b$ матрицы H в (7.42). Согласно (7.43) и (7.57) для ее элементов имеем

$$H_{ij} = (B_M)_{c+i, a+j} = q^{-(a+c+i+j) + \frac{1}{2}(c+i) + \frac{1}{2}(a+j)} \frac{(q; q)_{a+c+i+j-2}}{(q; q)_{c+i-1} (q; q)_{a+j-1}}.$$

Эта матрица допускает факторизацию

$$H = q Y_c^{-1} \tilde{H} Y_a^{-1}, \quad (7.58)$$

где Y_p (здесь и всюду ниже $p \in \mathbb{N}_0$) обозначает диагональную матрицу с элементами

$$(Y_p)_{ij} = q^{p+i-\frac{1}{2}\binom{p+i}{2}} (q; q)_{p+i-1} \delta_{ij}, \quad (7.59)$$

а \tilde{H} является ганкелевой матрицей,

$$\tilde{H}_{ij} = q^{-(a+c+i+j-1)} (q; q)_{a+c+i+j-2}. \quad (7.60)$$

В силу факторизации матрицы H , имеем

$$\det H = q^{-b(a+c+b)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{q^{\frac{1}{2}\binom{a+k+1}{2} + \frac{1}{2}\binom{c+k+1}{2}}}{(q; q)_{a+k} (q; q)_{c+k}} \det \tilde{H}. \quad (7.61)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению определителя ганкелевой матрицы. Ниже будем полагать, что $0 < q < 1$, однако отметим, что элементы (7.60), с точностью до знакового множителя, инвариантны относительно замены $q \mapsto q^{-1}$, и поэтому это ограничение в окончательных выражениях может быть снято.

Вычисление определителя матрицы \tilde{H} , а также элементов обратной матрицы ниже, основано на представлении

$$\tilde{H}_{ij} = \frac{1}{(-\ln q)} \int_0^\infty \frac{x^{a+c+i+j-2}}{(-x; q)_\infty} dx.$$

Это представление позволяет связать ганкелеву матрицу \tilde{H} с ансамблем q -полиномов Лагерра $\{L_k^{(p)}(x; q)\}_{k=0}^\infty$ при $p = a+c$, условие ортогональности которых для p целых и неотрицательных может быть записано в виде

$$\frac{1}{(-\ln q)} \int_0^\infty \frac{x^p}{(-x; q)_\infty} L_k^{(p)}(x; q) L_{k'}^{(p)}(x; q) dx = h_k \delta_{k, k'}, \quad (7.62)$$

где

$$h_k = q^{-k - \binom{p+1}{2}} \frac{(q; q)_{k+p}}{(q; q)_k}, \quad (7.63)$$

и которые имеют вид (см., например, [72]):

$$L_k^{(p)}(x; q) = \frac{(q^{p+1}; q)_k}{(q; q)_k} \sum_{l=0}^k \frac{(q^{-k}; q)_l}{(q^{p+1}; q)_l (q; q)_l} q^{l(k+p+1) + \binom{l}{2}} x^l. \quad (7.64)$$

Подробное обсуждение свойств q -полиномов Лагерра было дано в [156], условие ортогональности (7.62) обсуждалось также в [157, 158].

Определитель ганкелевой матрицы вычисляется (см., например, [83]) по хорошо известной формуле

$$\det \tilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{h_k}{\mu_k^2}, \quad (7.65)$$

где μ_k является старшим коэффициентом полинома $L_k^{(a+c)}(x; q)$; из (7.64) следует выражение

$$\mu_k = \frac{q^{k(k+a+c)}}{(q; q)_k}. \quad (7.66)$$

Подстановка (7.63) и (7.66) в (7.65) дает

$$\det \tilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} q^{-\binom{2k+a+c+1}{2}} (q; q)_k (q; q)_{k+a+c}. \quad (7.67)$$

В результате, подставляя (7.67) и (7.61) в (7.21), для статистической суммы получим выражение:

$$Z = q^{\frac{1}{4}ac(a+c+2)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(q; q)_k (q; q)_{k+a+c}}{(q; q)_{c+k} (q; q)_{a+k}}.$$

Используя (7.31), для q -взвешенных перечислении плоских разбиений получим

$$\mathcal{N}_{a,b,c}(q) = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(q; q)_k (q; q)_{k+a+c}}{(q; q)_{c+k} (q; q)_{a+k}} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}},$$

где второе выражение есть знаменитая формула МакМахона [51, 159].

Обсудим задачу обращения матрицы H , что необходимо для вычисления корреляционной функции $G(m, n)$ по формуле (7.44). Важную роль в решении этой задачи играет ядро Кристоффеля–Дарбу $K_b(x, y)$ для q -полиномов Лагерра

$$K_b(x, y) = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{1}{h_k} L_k^{(a+c)}(x; q) L_k^{(a+c)}(y; q).$$

Согласно общей схеме [83], эта функция является производящей функцией для элементов $b \times b$ матрицы \tilde{H}^{-1} :

$$K_b(x, y) = \sum_{i,j=1}^b \tilde{H}_{ij}^{-1} x^{i-1} y^{j-1}.$$

Таким образом, используя (7.64) нетрудно получить явное выражение для элементов матрицы \tilde{H}^{-1} . В результате, после учета (7.58) и (7.59), получим:

$$H_{ij}^{-1} = q^{-\frac{1}{2}\binom{a+i}{2} + \binom{i}{2} - \frac{1}{2}\binom{c+j}{2} + \binom{j}{2} + \binom{a+c}{2} + (i+j)(a+c+1)} \times \frac{(q; q)_{a+i-1} (q; q)_{c+j-1}}{(q; q)_{a+c} (q^{a+c+1}; q)_{i-1} (q; q)_{i-1} (q^{a+c+1}; q)_{j-1} (q; q)_{j-1}} \times \sum_{k=\max\{i,j\}-1}^{b-1} \frac{(q^{a+c+1}; q)_k (q^{-k}; q)_{i-1} (q^{-k}; q)_{j-1}}{(q; q)_k} q^{k(i+j-1)}. \quad (7.68)$$

Наконец, для использования (7.44) нам понадобятся матричные элементы матрицы $W(m, n)$. Обсуждение вычисления этих элементов было дано в конце предыдущего раздела. Явное выражение имеет вид:

$$[W(m, n)]_{ij} = q^{-\frac{1}{2}\binom{c+i}{2} - \frac{1}{2}\binom{a+j}{2} - (c+i)m - \frac{(a+j)(2N-2n+m+2)}{2} + \frac{m(3N-3n-m+2)}{2}} \times \begin{bmatrix} i+n-b+m-2 \\ i+n-b-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j+a+N-n-m-1 \\ j+a-m-1 \end{bmatrix}_q \quad (7.69)$$

В результате, подставляя (7.68) и (7.69) в (7.44), и выражая суммирование по $i, j = 1, \dots, b$ в терминах обрывающихся базисных рядов, для одноточечной функции $G(m, n)$ получим формулу:

$$G(m, n) = \sum_{k=\max\{0, m-a, b-n\}}^{b-1} q^{(k+n-b)(k+a-m+1)} \frac{(q; q)_{a+k} (q; q)_{c+k}}{(q; q)_k (q; q)_{a+c+k}} \times \begin{bmatrix} a+b+c+k-n-m \\ a+k-m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k+n+m-b-1 \\ k+n-b \end{bmatrix}_q \times {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-k}, q^{-k-a+m}, q^{-k-a-c} \\ q^{-a-b-c-k+m+n}, q^{-k-a} \end{matrix} \middle| q; q \right) {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-k}, q^{-k-n+b}, q^{-k-a-c} \\ q^{-k-n-m+b+1}, q^{-k-c} \end{matrix} \middle| q; q \right),$$

где использовано стандартное обозначение для базисного гипергеометрического ряда

$${}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} \middle| q; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k (b; q)_k (c; q)_k}{(d; q)_k (e; q)_k} \frac{z^k}{(q; q)_k}.$$

7.3. Пятивершинная модель с произвольными весами

В этом разделе рассмотрена пятивершинная модель на $M \times 2N$ квадратной решетке с граничными условиями типа «скалярное произведение». Обсуждается детерминантная формула для статистической суммы. Показано, что в точке свободных фермионов модели эта формула воспроизводит формулу МакМагона числа плоских разбиений в ящике, а в общем

случае произвольных весов (вне точки свободных фермионов) описывает перечисления с весом определяемым функцией числа скачков вдоль вертикальных (или горизонтальных) рядов. Получены различные представления для статистической суммы которая описывает такие перечисления.

7.3.1. Детерминантная формула пятивершинной модели

Здесь мы будем рассматривать пятивершинную модель на конечной квадратной решетке образованной пересечением M горизонтальных и $2N$ вертикальных прямых, $N \leq M$, с определенными фиксированными граничными условиями, см. Рис. 7.4а. А именно, на горизонтальных внешних ребрах на левой и правой границах все стрелки направлены вправо, на вертикальных внешних ребрах на верхней границе первые N стрелок направлены вверх и последние N — вниз, а нижней границе первые N стрелок направлены вниз и последние N — вверх. Смысл этих условий состоит в том, что в терминах линий конфигурации модели состоят из N линий втекающих сверху справа и вытекающих слева снизу, см. пример конфигурации Рис. 7.4б. Допустимые конфигурации находятся в взаимно-однозначном соответствии с плоскими разбиениями в $N \times N \times (M - N)$ ящике, см. Рис. 7.4в.

Веса модели выберем так, что вершины, которые попарно связаны преобразованием обращения всех стрелок в стрелочной формулировке, имеют одинаковые веса, кроме запрещенной вершины второго типа, см. Рис. 7.2; в результате, веса вершин будут параметризоваться тремя различными весовыми функциями a, b, c ,

$$w_1 = a, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = w_4 = b, \quad w_5 = w_6 = c.$$

Статистическая сумма модели определяется формулой

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^{2N} W_{ij}(\mathcal{C})$$

где сумма берется по всем возможным состояниям (размещением стрелок на внутренних ребрах), а весовая функция вершины W_{ij} , где вершины нумеруются как элементы $M \times 2N$ матрицы, принимает соответствующее значение веса для стрелочной конфигурации вершины, $W_{ij} = a, b, c$. Определенная таким образом статистическая сумма описывает однородную модель, т.е. модель в которой веса a, b, c не зависят от координат. Естественным обобщением такой модели является неоднородная модель, в которой $W_{ij} = a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$. Мы будем рассматривать ниже специальный случай такого обобщения, в котором веса не зависят от номера горизонтального ряда, но зависят от номера вертикального ряда, $W_{ij} = a_j, b_j, c_j$.

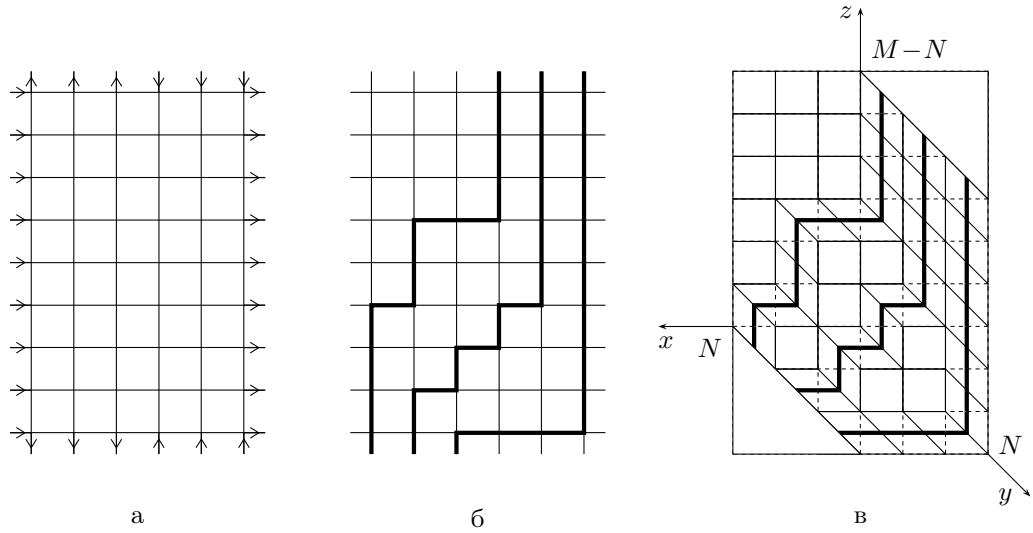


Рис. 7.4. Пятивершинная модель на $M \times 2N$ решетке: а) граничные условия типа «скалярное произведение», б) пример конфигурации модели в терминах линий, в) конфигурация как плоская проекция трехмерной диаграммы Юнга ($M = 9$, $N = 3$).

Наши вычисления будут основаны том факте, что статистическая сумма такой частично-неоднородной пятивершинной модели, при определенной параметризации весов a_j , b_j , c_j , равна скалярному произведению бетевских состояний вне поверхности масс (без наложения уравнений Бете). Это скалярное произведение проистекает из исследований одномерных бозонных моделей, в частности, связанных с q -деформациями алгебры Гейзенберга [160–162]. В одном из предельных случаев ($q \rightarrow 0$) алгебра q -бозонов описывает операторы квантовой фазы, а связанная с ней одномерная квантовая цепочка является так называемой фазовой моделью [163]. В рамках квантового метода обратной задачи эта модель описывается перестановочными соотношениями с R -матрицей пятивершинной модели, а скалярное произведение бетевских векторов вне поверхности масс дается некоторой детерминантной формулой [22]. Наши усилия будут направлены изучение статистической суммы задаваемой этой формулой в однородном пределе, а именно когда веса становятся независимыми от номера горизонтального ряда, $a_j \rightarrow a$, $b_j \rightarrow b$, $c_j \rightarrow c$, $j = 1, \dots, 2N$.

Будем рассматривать следующую параметризацию весов неоднородной модели. Рассмотрим три функции $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$, явный вид которых указан ниже, и введем, для удобства, два набора параметров v_1, \dots, v_N и u_1, \dots, u_N . Будем считать, что веса j -го вертикального ряда, a_j , b_j , c_j , являются соответствующими функциями параметра v_j , а $(N + j)$ -го вертикального ряда, a_{N+j} , b_{N+j} , c_{N+j} , — функциями параметра u_j , $j = 1, \dots, N$. В компактном виде:

$$f_j = f(v_j), \quad f_{N+j} = f(u_j), \quad f \in \{a, b, c\}, \quad j = 1, \dots, N.$$

В работе [22] замечено, что если функции $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ выбрать в виде

$$a(u) = u - u^{-1}, \quad b(u) = u, \quad c(u) = 1, \quad (7.70)$$

то тогда для статистической суммы справедливо представление

$$Z = \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{u_k u_j v_k v_j}{(u_j^2 - u_k^2)(v_k^2 - v_j^2)} \det Q, \quad (7.71)$$

где матрица Q , размерности $N \times N$, имеет матричные элементы

$$Q_{jk} = \frac{[v_j(u_k - u_k^{-1})]^M (u_k v_j^{-1})^{N-1} - [u_k(v_j - v_j^{-1})]^M (v_j u_k^{-1})^{N-1}}{u_k v_j^{-1} - v_j u_k^{-1}}. \quad (7.72)$$

Как было указано Боголюбовым [152], представление (7.71) следует из результата доказанного в монографии [2], см. Гл. IX, формулу (6.27); также прямое доказательство обсуждалось Мотеги и Сакаи [164, 165].

Для наших целей нам потребуется несколько модифицировать представленный выше результат. Нетрудно видеть, что параметризация (7.70) соответствует некоторому однородному соотношению между величинами a_j , b_j и c_j , а именно, для всех j выполняется соотношение $b_j^2 = c_j^2 + a_j b_j$. Это соотношение накладывает сильное ограничение на возможные значения весов, например, оно исключает выбор всех весов равными друг другу, $a_j = b_j = c_j$, что соответствует пересчету конфигураций.

Чтобы ослабить указанное ограничение, мы введем дополнительный параметр в параметризацию (7.70), который будет не зависеть от u ; иначе говоря, все веса a_j , b_j , c_j , $j = 1, \dots, 2N$, будут также рассматриваться как функции этого параметра. Для этого воспользуемся простым свойством конфигураций пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями, которое заключается в том, что все допустимые конфигурации содержат одинаковое число вершин первого типа, что легко видеть исследуя возможные конфигурации в терминах линий, см. Рис. 7.2 и 7.4. В нашем случае число таких вершин равно $(M - N)N$. Это свойство означает, что если выполнить замену $a_j \mapsto a_j/\Delta$, $j = 1, \dots, 2N$, то тогда статистическая сумма умножится на известный фактор, а именно, $Z \mapsto \Delta^{-(M-N)N} Z$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение модифицирующее представленный выше результат. Если функции $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ выбрать в виде

$$a(u) = \frac{u - u^{-1}}{\Delta}, \quad b(u) = u, \quad c(u) = 1, \quad (7.73)$$

то тогда статистическая сумма равна

$$Z = \frac{1}{\Delta^{(M-N)N}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{u_k u_j v_k v_j}{(u_j^2 - u_k^2)(v_k^2 - v_j^2)} \det Q, \quad (7.74)$$

где матрица Q дается формулой (7.72).

Сделанная нами модификация интересна тем, что позволяет рассмотреть предел $\Delta \rightarrow 0$. А именно, перейдем от параметров $v_j, u_j, j = 1, \dots, N$, к параметрам $\nu_j, \mu_j, j = 1, \dots, N$, соответственно, по формулам

$$v_j = \exp(\Delta\nu_j/2), \quad u_j = \exp(\Delta\mu_j/2), \quad j = 1, \dots, N,$$

и, полагая, что все параметры $\nu_j, \mu_j, j = 1, \dots, N$, не зависят от Δ , перейдем пределу $\Delta \rightarrow 0$ в формулах (7.72), (7.73), (7.74). В результате получим, что если веса $a_j, b_j, c_j, j = 1, \dots, 2N$, такие что

$$f_j = f^{\Delta=0}(\nu_j), \quad f_{N+j} = f^{\Delta=0}(\mu_j), \quad f = \{a, b, c\}, \quad j = 1, \dots, N,$$

где

$$f^{\Delta=0}(\mu) \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(\exp(\Delta\mu/2)),$$

или, в явном виде,

$$a^{\Delta=0}(\mu) = \mu, \quad b^{\Delta=0}(\mu) = c^{\Delta=0}(\mu) = 1, \quad (7.75)$$

то тогда статистическая сумма такой модели $Z^{\Delta=0} \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} Z$ дается формулой

$$Z^{\Delta=0} = \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{(\mu_j - \mu_k)(\nu_k - \nu_j)} \det Q^{\Delta=0}, \quad (7.76)$$

где $N \times N$ матрица $Q^{\Delta=0}$ имеет элементы

$$Q_{jk}^{\Delta=0} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Q_{jk}}{\Delta^{M-1}} = \frac{\mu_k^M - \nu_j^M}{\mu_k - \nu_j}.$$

Если далее рассмотреть предел $\nu_1, \dots, \nu_N, \mu_1, \dots, \mu_N \rightarrow 1$, то, как видно из (7.75), такая модель будет содержать все веса равными друг другу, $a_j = b_j = c_j = 1, j = 1, \dots, 2N$, а ее статистическая сумма (число конфигураций) будет даваться значением соответствующего предела в (7.76).

Рассмотренный нами предел $\Delta \rightarrow 0$ имеет простой смысл в терминах общей шестивершинной модели и есть не что иное, как предел к условию свободных фермионов¹. Это непосредственно следует из формул (7.73), которые описывают параметризацию отношений трех весов $a : b : c$ в терминах двух параметров u и Δ , где второй параметр может быть определен в терминах исходных весов как соотношение

$$\Delta = \frac{b^2 - c^2}{ab}.$$

¹ Напомним, что условие свободных фермионов общей шестивершинной модели имеет вид $w_1w_2 + w_3w_4 = w_5w_6$, где $w_i, i = 1, \dots, 6$ есть вес i -ой вершины на Рис. 1.1.

Таким образом, параметр Δ имеет такой же смысл как и аналогичный параметр в шестивершинной модели (см., например, [1]). При $\Delta = 0$ имеем $b = c$, и, поскольку вес второй вершины Рис. 1.1 равен нулю, то при произвольном значении веса a условие свободных фермионов удовлетворено.

Отметим, что, как следует из нашего обсуждения выше, предел свободных фермионов в пятивершинной модели соответствует переходу в тригонометрической параметризации весов к ее рациональному пределу. Это является естественным распространением аналогичной процедуры из шестивершинной модели и может быть реализовано с использованием объектов квантового метода обратной задачи. Например, R -матрица соответствующая пятивершинной модели с весами (7.73) содержит явно параметр Δ (при $\Delta = 1$ воспроизводится R -матрица работы [163]) и допускает описанный выше рациональный предел.

7.3.2. Комбинаторная интерпретация

Существует взаимно-однозначное соответствие между конфигурациями пятивершинной модели на $M \times 2N$ решетке с фиксированными граничными условиями Рис. 7.4 и плоскими разбиениями в коробке размера $N \times N \times (M - N)$. Это соответствие, дополненное идентификацией весов модели с мерой на множестве плоских разбиений позволяет использовать представление (7.74) для перечислений плоских разбиений.

Обозначим множество все плоских разбиений в $A \times B \times C$ ящике как $\Omega_{A,B,C}$. Перечисления плоских разбиений, в которых диаграмма λ входит с весом $W(\lambda)$, являются функционалом от $W(\lambda)$, и будут обозначаться как $\mathcal{N}_{A,B,C}[W]$. Перечисления есть сумма

$$\mathcal{N}_{A,B,C}[W] = \sum_{\lambda \in \Omega_{A,B,C}} W(\lambda).$$

Простейший пример перечислений — это собственно число плоских разбиений, когда весовая функция $W(\lambda) \equiv 1$. В этом случае перечисления связаны со статистической суммой пятивершинной модели, у которой все веса равны, $a_j = b_j = c_j = 1$. Рассматривая статистическую сумму модели при $\Delta = 0$ как функцию параметров ν_1, \dots, ν_N и μ_1, \dots, μ_N , см. (7.75), и обозначая $Z^{\Delta=0}(\mu) \equiv Z^{\Delta=0}(\mu, \dots, \mu; \mu, \dots, \mu)$, имеем

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}[1] = Z^{\Delta=0}(1).$$

Рассмотрим теперь обобщение простых (однородных) перечислений на случай когда вес плоского разбиения λ зависит от его «объема» $V(\lambda)$, а именно

$$W(\lambda) = q^{V(\lambda)}, \quad V(\lambda) \equiv \sum_{i,j \geq 0} \lambda_{ij}, \quad q \in \mathbb{C}. \quad (7.77)$$

Отождествление весов модели основано на наблюдении, что если два плоских разбиения λ и λ' таковы, что $V(\lambda) - V(\lambda') = 1$, то тогда плоская проекция (аналогичная показанной на Рис. 7.4в) трехмерной диаграммы Юнга соответствующая λ отличается от таковой для λ' сдвигом одного из квадратов на одну позицию вправо и вниз. В результате, перечисления (7.77) оказываются эквивалентны статистической сумме пятивершинной модели с весами $a_j = q^j$, $b_j = c_j = 1$, $j = 1, \dots, 2N$, что соответствуют случаю $\Delta = 0$ и значению параметров $\nu_j = q^j$, $\mu_j = q^{N+j}$, $j = 1, \dots, N$. Таким образом,

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}[q^V] = \frac{1}{q^{\frac{(M-N)N(N+1)}{2}}} Z^{\Delta=0}(q, \dots, q^N; q^{N+1}, \dots, q^{2N}). \quad (7.78)$$

Интересно отметить, что при указанном выборе параметров определитель в формуле (7.76) может быть вычислен с помощью формулы Куперберга (см. [8], Лемма 10), которая может быть записана в виде

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1 - z^{j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}} \right] = q^{\frac{(2N-1)(N-1)N}{6}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (1 - q^{k-j})^2 \prod_{j, k=1}^N \frac{1 - q^{j-k} z}{1 - q^{j+k-1}}. \quad (7.79)$$

Применяя (7.79) при $z = q^M$, для статистической суммы получим

$$Z^{\Delta=0}(q, \dots, q^N; q^{N+1}, \dots, q^{2N}) = q^{\frac{(M-N)N(N+1)}{2}} \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{j-k} z}{1 - q^{j+k-1}} \Big|_{z=q^M},$$

и из (7.78) имеем

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}[q^V] = \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{j+M-k}}{1 - q^{j+k-1}},$$

что есть не что иное как формула МакМагона для перечислений плоских разбиений в коробке,

$$\mathcal{N}_{A,B,C}[q^V] = \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B \prod_{l=1}^C \frac{1 - q^{j+k+l-1}}{1 - q^{j+k+l-2}} = \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B \frac{1 - q^{j+B-k+C}}{1 - q^{j+k-1}}$$

при $A = B = N$ и $C = M - N$.

Рассмотрим теперь перечисления плоских разбиений которые соответствуют пятивершинной модели при $\Delta \neq 0$. Мы ограничимся здесь случаем когда веса не зависят от положения вершины (однородная модель).

Чтобы получить интерпретацию этой модели в терминах плоских разбиений, обратимся снова к Рис. 7.4в. Напомним, что во всех конфигурациях число вершин первого типа (см. Рис. 7.2) фиксированно (равно $N(M - N)$), а число вершин пятого типа равно числу вершин шестого типа. Рассматривая статистическую сумму как функцию параметров v_1, \dots, v_N и u_1, \dots, u_N , см. (7.73), и обозначая $Z(u) \equiv Z(u, \dots, u; u, \dots, u)$, получим, что статистическая сумма однородной модели имеет вид

$$Z(u) = \left(\frac{u - u^{-1}}{\Delta} \right)^{N(M-N)} u^{N(M+N-2)} P(u^{-2}), \quad (7.80)$$

где $P(u^{-2})$ есть некоторый полином, степень которого равна максимальному числу пар вершин пятого и шестого типов минус N . Префактор в (7.80) равен весу конфигурации, которая соответствует трехмерной диаграмме Юнга с нулевым объемом. Как видно из Рис. 7.4, вершины пятого типа соответствуют скачкам вдоль градиентных линий; коэффициент члена k -ой степени в полиноме $P(u^{-2})$ равен числу трехмерных диаграмм Юнга у которых k скачков вдоль вертикальных рядов. Более точно, рассмотрим функцию числа скачков вдоль вертикальных рядов:

$$J_V(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \theta(\lambda_{i,j} - \lambda_{i+1,j}),$$

где $\theta(n)$, $n = 0, 1, \dots$, — функция Хевисайда,

$$\theta(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0. \end{cases}$$

Используя функцию числа скачков естественно рассмотреть перечисления вида $\mathcal{N}_{A,B,C}(x^{-J_V})$. Полином $P(u^{-2})$ в (7.80) описывает эти перечисления в случае когда $A = B = N$, $C = M - N$, а именно, имеет место соотношение $\mathcal{N}_{N,N,M-N}(x^{-J_V}) = P(x^{-1})$. В терминах статистической суммы пятивершинной модели,

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}[x^{-J_V}] = \frac{\Delta^{N(M-N)}}{(x-1)^{N(M-N)} x^{N(N-1)}} Z(\sqrt{x}). \quad (7.81)$$

Полностью аналогично, можно рассмотреть функцию скачков вдоль горизонтальных рядов

$$J_H(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} \theta(\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j+1}),$$

и рассмотреть перечисления $\mathcal{N}_{A,B,C}(x^{-J_H})$. В рассматриваемой нами модели $A = B = N$, и поэтому, в силу очевидной симметрии,

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}(x^{-J_H}) = \mathcal{N}_{N,N,M-N}(x^{-J_V}).$$

Наконец, отметим одну интересную интерпретацию введенных нами перечислений связанных с числом скачков вдоль вертикальных рядов. Для этого воспользуемся хорошо известной интерпретацией трехмерных диаграмм Юнга как укладок ромбами шестиугольника (см., например, [17]). В используемой нами плоской проекции трехмерных диаграмм Юнга такими ромбами являются два типа ромбов с углами 45° и 135° и квадраты, см. Рис. 7.4. Далее, воспользуемся интерпретацией плоских укладок как задачу о димерах, где димеры указывают склеивание треугольников в ромбы; три типа ромбов соответствуют склеиванию вдоль одной

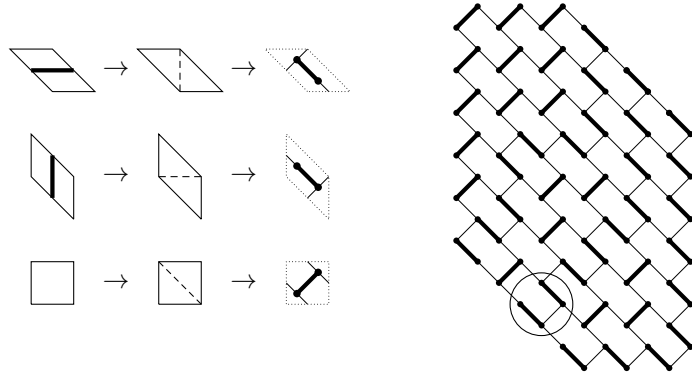


Рис. 7.5. Преобразование ромбов в димеры (слева) и конфигурация Рис. 7.4 в терминах димеров на решетке типа кирпичная кладка (справа). Кругом обведена пара взаимодействующих димеров.

из трех сторон треугольника, см. Рис. 7.5. При этом, задача о димерах формулируется для решетки типа кирпичная кладка. В терминах задачи о димерах, параметр u описывает взаимодействие димеров. А именно, каждый димер имеет «заряд» u^{-1} и димеры взаимодействуют если оказываются друг напротив друга на длинных сторонах одного «кирпича»; конфигурация с n парами димеров имеет вес $x^{-n} = u^{-2n}$. Статистическая сумма этих взаимодействующих димеров есть в точности перечисления $\mathcal{N}_{N,N,M-N} [x^{-J^v}]$, описываемые статистической суммой $Z(\sqrt{x})$, см. (7.81).

7.3.3. Статистическая сумма в однородном пределе

Рассмотрим задачу вывода представления для статистической суммы в пределе, когда все параметры $v_1, \dots, v_N, u_1, \dots, u_N$ стремятся к одному значению (однородный предел).

Чтобы найти выражение для указанного предела в представлении (7.74), мы воспользуемся двумя соотношениями. Первое соотношение заключается в том, что если функция $F(x, y)$ дифференцируема по каждой переменной как минимум $N - 1$ раз, то тогда

$$\lim_{\substack{x_1, \dots, x_N \rightarrow x \\ y_1, \dots, y_N \rightarrow y}} \left(\prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{(x_j - x_k)(y_k - y_j)} \right) \det_{1 \leq j, k \leq N} F(x_k, y_j) = \left[\prod_{j=1}^N \frac{1}{(j-1)!} \right]^2 \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} F(x, y) \right]. \quad (7.82)$$

Это соотношение доказывается путем разложения функции $F(x, y)$ в ряд Тейлора и последовательном вычитании строк и столбцов определителя (см., например, [48]).

Второе соотношение описывает значение предела $y \rightarrow x$ в выражении выше в случае, когда функция $F(x, y)$ имеет некоторый специальный вид. А именно, если функция $h(x)$

дифференцируема как минимум $2N - 1$ раз, то тогда

$$\lim_{y \rightarrow x} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right] = \left[\prod_{j=1}^N (j-1)! \right]^2 \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{(j+k-1)!} \partial_x^{j+k-1} h(x) \right]. \quad (7.83)$$

Действительно, воспользуемся теоремой Коши и перепишем матричные элементы определителя в левой части (7.83) в виде

$$\begin{aligned} \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} \frac{h(x) - h(y)}{x - y} &= \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} \frac{1}{x - y} \oint \left(\frac{h(z)}{z - x} - \frac{h(z)}{z - y} \right) \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} \oint \frac{h(z)}{(z - x)(z - y)} \frac{dz}{2\pi i} = (j-1)!(k-1)! \oint \frac{h(z)}{(z - x)^j (z - y)^k} \frac{dz}{2\pi i}, \end{aligned}$$

где интеграл берется по некоторому простому замкнутому контуру охватывающему точки $z = x$ и $z = y$. Полагая в последнем выражении $y = x$ и вновь пользуясь теоремой Коши, в результате приходим к выражению в правой части (7.83).

Комбинируя (7.82) и (7.83) имеем следующее предельное соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N \rightarrow x} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{(x_j - x_k)(y_k - y_j)} \det_{1 \leq j, k \leq N} \frac{h(x_j) - h(y_k)}{x_j - y_k} \\ = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{(j+k-1)!} \partial_x^{j+k-1} h(x) \right]. \end{aligned}$$

Это соотношение решает задачу о переходе в выражении для статистической суммы (7.74) к однородному пределу.

Выбирая подходящим образом переменные x_1, \dots, x_N и y_1, \dots, y_N , например, полагая $x_j = u_j^2$, $y_j = v_j^2$, $j = 1, \dots, N$, для статистической суммы $Z = Z(u) = Z(\sqrt{x})$ получим представление

$$Z = \frac{(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} x^{(M+1)N}}{\Delta^{N(M-N)}} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{(j+k-1)!} \partial_x^{j+k-1} \frac{(x-1)^M}{x^{M-N+1}} \right]. \quad (7.84)$$

Таким образом, статистическая сумма в однородном пределе выражается через определитель ганкелевой матрицы.

7.3.4. Эквивалентные представления для статистической суммы

Представление (7.84) может быть использовано для вывода эквивалентных представлений для статистической суммы. В первую очередь необходимо отметить, что с его помощью статистическая сумма может быть представлена как многократный контурный интеграл. Воспользуемся опять теоремой Коши и перепишем матричные элементы в виде интеграла,

$$\frac{1}{(j+k-1)!} \partial_x^{j+k-1} \frac{(x-1)^M}{x^{M-N+1}} = \oint \frac{(z-1)^M}{z^{M-N+1} (z-x)^{j+k}} \frac{dz}{2\pi i},$$

где контуром интегрирования является любой простой положительно ориентированный контур вокруг точки $z = x$. Используя тождество

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left(\oint (z-x)^{2N-j-k} f(z; x) \frac{dz}{2\pi i} \right) = \frac{1}{N!} \oint \cdots \oint \prod_{j=1}^N f(z_j; x) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)^2 \frac{d^N z}{(2\pi i)^N}, \quad (7.85)$$

где функция $f(z)$ может также зависеть каких-либо дополнительных параметров, для статистической суммы получим

$$Z = \frac{(-1)^{N(N-1)/2}}{\Delta^{N(M-N)}} x^{(M+1)N} \oint \cdots \oint \prod_{j=1}^N \frac{(z_j - 1)^M}{z_j^{M-N+1} (z_j - x)^{2N}} \prod_{j < k} (z_j - z_k)^2 \frac{d^N z}{(2\pi i)^N}. \quad (7.86)$$

Множественный интеграл в (7.86) интересен тем, что он очень похож на интеграл, обсуждавшийся в [40]. Это обстоятельство позволяет вывести еще одну формулу в терминах определителя ганкелевой матрицы.

Стартовым преобразованием является обратный переход к определителю (пока еще не являющимся ганкелевым) с помощью более общего, чем (7.85), тождества

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\oint (z-x)^{N-j} (z-y)^{N-k} f(z; x, y) \frac{dz}{2\pi i} \right] \\ = \frac{1}{N!} \oint \cdots \oint \prod_{j=1}^N f(z_j; x, y) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)^2 \frac{d^N z}{(2\pi i)^N}. \end{aligned}$$

Выбирая функцию $f(z; x, y)$ в виде

$$f(z; x, y) = \frac{(z-y)^M}{z^{M-N+1} (z-x)^{2N}},$$

а именно так, чтобы правая часть в (7.86) воспроизводилась при $y = 1$, применение тождества выше дает

$$Z = \frac{1}{\Delta^{N(M-N)}} \prod_{j=1}^N \frac{N!}{(N+j-1)!} \prod_{k=1}^N \frac{(M+N-k)!}{(M+N-1)!} x^{(M+1)N} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} g(x, y) \right] \Big|_{y=1},$$

где мы ввели функцию

$$g(x, y) \equiv \oint \frac{(z-y)^{M+N-1}}{z^{M-N+1} (z-x)^{N+1}} \frac{dz}{2\pi i}. \quad (7.87)$$

Дальнейшие преобразования используют свойства определителей и явный вид функции $g(x, y)$. Во-первых, заметим, что последовательно вычитая строки и столбцы нетрудно доказать тождество

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} g(x, y) \right] = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{x^{j-1} y^{k-1}} (x \partial_x)^{j-1} (y \partial_y)^{k-1} g(x, y) \right].$$

Полностью аналогично, для любых констант α и β , можно доказать тождество

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x \partial_x)^{j-1} (y \partial_y)^{k-1} g(x, y) \right] = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[x^\alpha y^\beta (x \partial_x)^{j-1} (y \partial_y)^{k-1} \frac{g(x, y)}{x^\alpha y^\beta} \right].$$

Во-вторых, воспользуемся явным видом функции $g(x, y)$, из которого следует, что эта функция является однородной функцией своих аргументов, а именно, обладает свойством

$$g(x, y) = y^{N-2}g(x/y, 1).$$

Обозначая $g(x) \equiv g(x, 1)$ и используя тот факт, что

$$(y\partial_y)^n g(x/y) = (-x\partial_x)^n g(x/y), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

использование всех свойств в результате показывает, что исходный определитель выражается через определитель ганкелевой матрицы:

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [\partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} g(x, y)] = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \frac{y^{N(N-2)}}{x^{\frac{N(N-1)}{2}} y^{\frac{N(N-1)}{2}}} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x\partial_x)^{j+k-2} g(x)]. \quad (7.88)$$

В-третьих, получим явное выражение для функции $g(x)$. Из (7.87) следует, что

$$g(x) = \frac{1}{N!} \partial_x^N \frac{(x-1)^{M+N-1}}{x^{M-N+1}}.$$

Используя формулу (см., например, [76, §2.8, (17)])

$$\partial_x^n \frac{1}{(x-1)^a x^b} = \frac{(b)_n}{(x-1)^{a+n} x^b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -n-a-b+1 \\ -n-b+1 \end{matrix} \middle| x \right),$$

где $(b)_n$ — символ Похгаммера, получим

$$g(x) = \binom{M}{N} \frac{(x-1)^{M-1}}{x^{M+1}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N-1 \\ -M \end{matrix} \middle| x \right).$$

Наконец, в-четвертых, заметим, что присутствующий здесь множитель $1/x^{M+1}$ может быть вынесен из-под знака определителя в правой части (7.88), в силу тождества

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [(x\partial_x)^{j+k-2} g(x)] = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[x^\alpha (x\partial_x)^{j+k-2} \frac{g(x)}{x^\alpha} \right],$$

которое аналогично тождествам, использованным выше.

В итоге, приходим к следующему представлению для статистической суммы

$$Z = \frac{1}{\Delta^{N(M-N)}} \binom{M}{N} \prod_{j=1}^N \frac{N!}{(N+j-1)!} \prod_{k=1}^N \frac{(M+N-k)!}{(M+N-1)!} \times \frac{1}{x^{\frac{N(N-1)}{2}}} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x\partial_x)^{j+k-2} p(x)], \quad (7.89)$$

где функция $p(x)$ дается формулой

$$p(x) = (x-1)^{M-1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N-1 \\ -M \end{matrix} \middle| x \right).$$

Полученное представление позволяет получить интересную интерпретацию статистической суммы. Сделаем в выражении для функции $p(x)$ преобразование Эйлера гипергеометрической функции

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right)$$

и перейдем от переменной x к переменной $t = x/(x-1)$. Тогда элементы ганкелевой матрицы в (7.89) перепишутся в виде

$$(x\partial_x)^{j+k-2}p(x) = \delta^{j+k-2}(t-1)^b {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| t\right), \quad \delta \equiv t(t-1)\partial_t, \quad (7.90)$$

где

$$a = -N, \quad b = M + N - 1, \quad c = -M.$$

Формула (7.90) показывает, что выражение (7.89) для статистической суммы является не чем иным, как τ -функцией шестого уравнения Пенлеве, отвечающая классическим решениям [126] (см. также обсуждение в [129], где выводится связь представлений типа (7.89) с ансамблями случайных матриц).

Заключение

В заключение, кратко обсудим полученные результаты.

В Главе 1 выведены различные представления для статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в терминах определителей Фредгольма. Одно из этих представлений, как было обнаружено в работах других авторов, оказалось полезным для установления связей с перечислениями матриц чередующих знаков в задаче о нисходящих плоских разбиениях, а также в задачах вычисления компонент векторов основных состояний спиновых цепочек старшего спина с твистованными граничными условиями.

В Главе 2 на основе квантового метода обратной задачи развит подход к вычислению корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. В основе этого подхода лежат коммутационные соотношения алгебры Янга–Бакстера и концепция «двуузельной модели», которые позволяют выразить граничные корреляционные функции в терминах статистической суммы на решетках меньшего размера. Вычислены одно- и двухточечные граничные корреляционные функции и показано, что для однородной модели двухточечные функции разрешимы в терминах одноточечных.

В Главе 3 указаны свойства формулы Изергина–Корепина для статистической суммы однородной шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, которые позволяют установить связь перечислений матриц чередующихся знаков с классическими полиномами из таблицы Аски–Вильсона. А именно, 1-, 2-, и 3-перечисления связаны с непрерывными полиномами Хана, полиномами Мейкснера–Поллачка, и дуальными непрерывными полиномами Хана, соответственно. Обнаруженная связь позволила дать простые доказательства известных результатов об детальном 1- и 2-перечислениях, а также получить неизвестное ранее явное выражение для детальном 3-перечислениях.

В Главе 4 предложенный подход к вычислению корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки применен к вычислению нелокальных корреляционных функций. Получены различные представления для вероятности образования пустоты, главным из которых является представление в терминах кратного контурного интеграла. Аналогичные формулы получены для более общей корреляционной функции, так называемой конфигурации ряда. Последняя интересна тем, что может использоваться как строительный блок для вычисления различных корреляционных функций модели, и, в частности, вероятности образования пустоты.

В Главе 5 полученные представления для вероятности образования пустоты использо-

ваны для вывода арктической кривой шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. Вывод основан на известном термодинамическом пределе для вероятности образования пустоты и предложенном механизме воспроизведения этого предела из представления в терминах кратного контурного интеграла. В основе вывода лежит гипотеза конденсации, а именно, что арктическая кривая соответствует условию на параметры интеграла, при выполнении которого почти все решения системы уравнений перевала равны одному, известному, значению. Это позволяет вывести уравнение для арктической кривой в параметрической форме, для всех значениях параметров модели, при которых эта кривая существует. Также обсуждаются частные случаи этой кривой, в частности, в приложении к задаче о предельной форме матриц чередующихся знаков.

В Главе 6 изучена вероятность образования пустоты шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в точке свободных фермионов. Получены различные представления для вероятности образования пустоты, а именно, в терминах: ганкелевых определителей, определителей Фредгольма, решения системы дифференциально-разностных уравнений типа уравнений Тоды, τ -функции шестого уравнения Пенлеве. Вычислена свободная энергия шестивершинной модели в точке свободных фермионов на L-образной области. Установлено, что арктическая кривая является кривой фазового перехода третьего рода возникающего при деформациях ацтекских алмазиков путем вырезания прямоугольной области у угла алмаза. Обнаруженный фазовый переход тесно связан с фазовыми переходами Дугласа–Казакова и Гросса–Виттена–Вадья из теории матричных моделей.

В Главе 7 рассмотрена пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями, такими, что конфигурации модели находятся в взаимно-однозначном соответствии с плоскими разбиениями (трехмерными диаграммами Юнга) ящичке, которые также эквивалентны замощениям ромбами нерегулярного шестиугольника. Вычислена одноточечная корреляционная функция пятивершинной модели в точке свободных фермионов, в однородном случае и в неоднородном, при котором такая модель описывает взвешенные перечисления плоских разбиений в ящичке. Также вычислен однородный предел детерминантной формулы для статистической суммы пятивершинной модели с граничными условиями типа «скалярного произведения» и показано, что эта величина является τ -функцией шестого уравнения Пенлеве для специальных значений параметров, соответствующих классическим решениям.

Автор выражает признательность всем сотрудникам лаборатории математических проблем физики и администрации Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова за уникальную творческую атмосферу и моральную поддержку.

Список литературы

1. Baxter R. J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. — San Diego, CA : Academic Press, 1982.
2. Korepin V. E., Bogoliubov N. M., Izergin A. G. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. — Cambridge : Cambridge University Press, 1993.
3. Jimbo M., Miwa T. Algebraic analysis of solvable lattice models. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1995. — Vol. 85 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics.
4. Lieb E. H. The residual entropy of square ice // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 162. — P. 162–172.
5. Sutherland B. Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 103–104.
6. Korepin V. E. Calculations of norms of Bethe wave functions // Comm. Math. Phys. — 1982. — Vol. 86. — P. 391–418.
7. Изергин А. Г. Статсумма шестивершинной модели в конечном объеме // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 2. — С. 331–334.
8. Kuperberg G. Another proof of the alternative-sign matrix conjecture // Int. Math. Res. Not. — 1996. — Vol. 1996. — P. 139–150.
9. Zeilberger D. Proof of the refined alternating sign matrix conjecture // New York J. Math. — 1996. — Vol. 2. — P. 59–68.
10. Разумов А. В., Строганов Ю. Г. О детальном перечислении некоторых классов симметрии матриц чередующихся знаков // ТМФ. — 2004. — Т. 141, № 3. — С. 323–347.
11. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика мер Планшереля симметрических групп и предельная форма диаграмм Юнга // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 233. — С. 1024–1027.
12. Cohn H., Elkies N., Propp J. Local statistics for random domino tilings of the Aztec diamond // Duke Math. J. — 1996. — Vol. 85. — P. 117–166.
13. Cohn H., Kenyon R., Propp J. A variational principle for domino tilings // J. Amer. Math. Soc. — 2001. — Vol. 14. — P. 297–346.
14. Reshetikhin N. Lectures on the integrability of the six-vertex model // Exact methods in low-dimensional statistical physics and quantum computing. — Oxford Univ. Press, Oxford, 2010. — P. 197–266.
15. Noh J. D., Kim D. Interacting domain walls and the five-vertex model // Phys. Rev. E. — 1994. — Mar. — Vol. 49. — P. 1943–1961.
16. Andrews G. E. The Theory of Partitions. — Cambridge University Press, 1998.
17. Cohn H., Larsen M., Propp J. The shape of a typical boxed plane partition // New York J.

- Math. — 1998. — Vol. 4. — P. 137–165.
18. Borodin Al., Gorin V., Rains E. M. q -Distributions on boxed plane partitions // *Selecta Math.* (N. S.). — 2010. — Vol. 16. — P. 731–789.
 19. Huang H. Y., Wu F. Y., Kunz H., Kim D. Interacting dimers on the honeycomb lattice: An exact solution of the five-vertex model // *Physica A.* — 1996. — Vol. 228. — P. 1–32.
 20. Kitanine N., Maillet J.-M., Slavnov N. A., Terras V. Spin-spin correlation functions of the XXZ-1/2 Heisenberg chain in a magnetic field // *Nucl. Phys. B.* — 2002. — Vol. 641. — P. 487–518.
 21. Boos H. E., Korepin V. E., Smirnov F. A. Emptiness formation probability and Quantum Knizhnik-Zamolodchikov Equation // *Nucl. Phys. B.* — 2003. — Vol. 658. — P. 417–439.
 22. Боголюбов Н. М. Пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями // *Алгебра и анализ.* — 2009. — Т. 21, № 3. — С. 58–78.
 23. Algara-Siller G., Lehtinen O., Wang F. C. et al. Square ice in graphene nanocapillaries // *Nature.* — 2015. — Vol. 519. — P. 443–445.
 24. Bogoliubov N. M., Pronko A. G., Zvonarev M. B. Boundary correlation functions of the six-vertex model // *J. Phys. A.* — 2002. — Vol. 35. — P. 5525–5541.
 25. Colomo F., Pronko A. G. On some representations of the six vertex model partition function // *Phys. Lett. A.* — 2003. — Vol. 315. — P. 231–236.
 26. Colomo F., Pronko A. G. On the partition function of the six-vertex model with domain wall boundary conditions // *J. Phys. A.* — 2004. — Vol. 37. — P. 1987–2002.
 27. Colomo F., Pronko A. G. On the refined 3-enumeration of alternating sign matrices // *Adv. in Appl. Math.* — 2005. — Vol. 34. — P. 798–811.
 28. Colomo F., Pronko A. G. Square ice, alternating sign matrices, and classical orthogonal polynomials // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2005. — Vol. 2005. — P. P01005 (33 pp.).
 29. Colomo F., Pronko A. G. On two-point boundary correlations in the six-vertex model with domain wall boundary conditions // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2005. — Vol. 2005. — P. P05010 (21 pp.).
 30. Colomo F., Pronko A. G. The role of orthogonal polynomials in the six-vertex model and its combinatorial applications // *J. Phys. A.* — 2006. — Vol. 39. — P. 9015–9033.
 31. Colomo F., Pronko A. G. The Arctic Circle revisited // *Contemp. Math.* — 2008. — Vol. 458. — P. 361–376.
 32. Colomo F., Pronko A. G. Emptiness formation probability in the domain-wall six-vertex model // *Nucl. Phys. B.* — 2008. — Vol. 798. — P. 340–362.
 33. Colomo F., Pronko A. G. The limit shape of large alternating-sign matrices // *SIAM J.*

- Discrete Math. — 2010. — Vol. 24. — P. 1558–1571.
34. Капитонов В. С., Пронько А. Г. Пятивершинная модель и плоские разбиения в ящике // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2008. — Т. 360. — С. 162–179.
35. Colomo F., Pronko A. G. The arctic curve of the domain-wall six-vertex model // J. Stat. Phys. — 2010. — Vol. 138. — P. 662–700.
36. Colomo F., Pronko A. G., Zinn-Justin P. The arctic curve of the domain-wall six-vertex model in its anti-ferroelectric regime // J. Stat. Mech. Theory Exp. — 2010. — Vol. 2010. — P. L03002 (11 pp.).
37. Colomo F., Nofereni V., Pronko A. G. Algebraic arctic curves in the domain-wall six-vertex model // J. Phys. A. — 2011. — Vol. 44. — P. 195201 (13 pp.).
38. Коломо Ф., Пронько А. Г. Подход к вычислению корреляционных функций в шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки // ТМФ. — 2012. — Т. 171. — С. 254–270.
39. Капитонов В. С., Пронько А. Г. Взвешенные пересчеты плоских разбиений в ящике и неоднородная пятивершинная модель // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2012. — Т. 398. — С. 125–144.
40. Пронько А. Г. О вероятности образования пустоты в свободнофермионной шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2012. — Т. 398. — С. 179–208.
41. Colomo F., Pronko A. G. Third-order phase transition in random tilings // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 88. — P. 042125 (11 pp.).
42. Пронько А. Г. Пятивершинная модель и пересчеты плоских разбиений // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2015. — Т. 433. — С. 204–223.
43. Colomo F., Pronko A. G. Thermodynamics of the six-vertex model on an L -shaped domain // Comm. Math. Phys. — 2015. — Vol. 339. — P. 699–728.
44. Kitaev A. V., Pronko A. G. Emptiness formation probability of the six-vertex model and the sixth Painlevé equation // Comm. Math. Phys. — 2016. — Vol. 345. — P. 305–354.
45. Lieb E. H., Wu F. Y. Two Dimensional Ferroelectric Models // Phase Transitions and Critical Phenomena / Ed. by C. Domb, M. S. Green. — London : Academic Press, 1972. — Vol. 1. — P. 331–490.
46. Lieb E. H. Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 18. — P. 692–694.
47. Lieb E. H. Exact solution of the two-dimensional Slater KDP model of a ferroelectric // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 108–110.

48. Izergin A. G., Coker D. A., Korepin V. E. Determinant formula for the six-vertex model // *J. Phys. A.* — 1992. — Vol. 25. — P. 4315–4334.
49. Elkies N., Kuperberg G., Larsen M., Propp J. Alternating-sign matrices and domino tilings // *J. Algebraic Combin.* — 1992. — Vol. 1. — P. 111–132; 219–234.
50. Jockush W., Propp J., Shor P. Random domino tilings and the arctic circle theorem. — 1998. — arXiv : math.CO/9801068.
51. Bressoud D. M. *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture.* — Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
52. Robbins D. P., Rumsey H. Determinants and alternating-sign matrices // *Advances in Math.* — 1986. — Vol. 62, no. 2. — P. 169–184.
53. Mills W. H., Robbins D. P., (Jr.) H. Rumsey. Alternating sign matrices and descending plane partitions // *J. Combin. Theory Ser. A.* — 1983. — Vol. 34. — P. 340 – 359.
54. Mills W. H., Robbins D. P., Rumsey H. (Jr.). Proof of the Macdonald conjecture // *Invent. Math.* — 1982. — Vol. 66. — P. 73–87.
55. Zeilberger D. Proof of the alternating sign matrix conjecture // *Elec. J. Comb.* — 1996. — Vol. 3, no. 2. — P. R13.
56. Stroganov Yu. 3-enumerated alternating sign matrices. — 2003. — arXiv : math-ph/0304004.
57. Korepin V. E., Zinn-Justin P. Thermodynamic limit of the six-vertex model with domain wall boundary conditions // *J. Phys. A.* — 2000. — Vol. 33. — P. 7053–7066.
58. Zinn-Justin P. Six-vertex model with domain wall boundary conditions and one-matrix model // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 62. — P. 3411–3418.
59. Syljuasen O. F., Zvonarev M. B. Monte-Carlo simulations of vertex models // *Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 70. — P. 016118.
60. Allison D., Reshetikhin N. Numerical study of the 6-vertex model with domain wall boundary conditions // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* — 2005. — Vol. 55. — P. 1847–1869.
61. Johansson K. Non-intersecting paths, random tilings and random matrices // *Probab. Theory Related Fields.* — 2002. — Vol. 123. — P. 225–280.
62. Johansson K. The arctic circle boundary and the Airy process // *Ann. Probab.* — 2005. — Vol. 33. — P. 1–30.
63. Fisher M. E. Walks, walls, wetting and melting // *J. Stat. Phys.* — 1984. — Vol. 34. — P. 667–729.
64. Cerf R., Kenyon R. The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model // *Comm. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 222. — P. 147–179.
65. Okounkov A., Reshetikhin N. Correlation function of Schur process with application to local

- geometry of a random 3-dimensional Young diagram // *J. Amer. Math. Soc.* — 2003. — Vol. 16. — P. 581–603.
66. Ferrari P. L., Spohn H. Step fluctuations for a faceted crystal // *J. Stat. Phys.* — 2003. — Vol. 113. — P. 1–46.
67. Kenyon R., Okounkov A. Limit shapes and the complex Burgers equation // *Acta Math.* — 2007. — Vol. 199. — P. 263–302.
68. Kenyon R., Okounkov A., Sheffield S. Dimers and amoebae // *Ann. of Math.* — 2006. — Vol. 163. — P. 1019–1056.
69. Eynard B. A matrix model for plane partitions // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2009. — Vol. 2009, no. 0910.
70. Wilf H. *Mathematics for the Physical Sciences.* — New York : Dover, 1978. — Originally published by John Wiley, 1962.
71. Dieudonné J. Fractions continues et polynomes orthogonaux dans l'oeuvre de E.N. Laguerre // *Polynômes Orthogonaux et Applications: Proceedings of the Laguerre Symposium held at Bar-le-Duc, October 15–18, 1984* / Ed. by C. Brezinski, A. Draux, A. P. Magnus et al. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1985. — P. 1–15.
72. Koekoek R., Swarttouw R. F., Lesky P. A. *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues.* Springer Monographs in Mathematics. — Berlin : Springer-Verlag, 2010.
73. Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E., Slavnov N. A. Differential equations for quantum correlation function // *Int. J. Mod. Phys. B.* — 1990. — Vol. 4. — P. 1003–1037.
74. Mehta M. L. *Random Matrices.* — 3rd. ed. edition. — Amsterdam : Elsevier, 2004.
75. Славнов Н. А. Фредгольмов детерминант для статистической суммы шестивершинной модели // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2000. — Т. 269. — С. 308–321.
76. Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions, Vol. I.* — Malabar, FL : Robert E. Krieger Publishing Company, 1981.
77. Behrend R. E., Di Francesco Ph., Zinn-Justin P. On the weighted enumeration of alternating sign matrices and descending plane partitions // *J. Combin. Theory Ser. A.* — 2012. — Vol. 119. — P. 331–363.
78. Behrend R. E., Di Francesco Ph., Zinn-Justin P. A doubly-refined enumeration of alternating sign matrices and descending plane partitions // *J. Combin. Theory Ser. A.* — 2013. — Vol. 120. — P. 409–432.
79. Hagendorf C., Morin-Duchesne A. Symmetry classes of alternating sign matrices in a nineteen-vertex model // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2016. — Vol. 2016, no. 5. — P. 053111.
80. Gaudin M. *La Fonction d'Onde de Bethe.* — Paris : Masson, 1983.

81. Foda O., Preston I. On the correlation functions of the domain wall six vertex model // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2004. — Vol. 2004. — P. P11001.
82. Stroganov Yu. A new way to deal with Izergin–Korepin determinant at root of unity. — 2002. — arXiv : math-ph/0204042.
83. Szegő G. *Orthogonal Polynomials.* — 4 edition. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1975. — Vol. XXIII of American Colloquium Publications.
84. Koekoek R., Swarttouw R. F. *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue.* — Delft University of Technology, 1998.
85. Строганов Ю. Г. Определитель Изергина–Корепина при кубическом корне из единицы // *ТМФ.* — 2006. — Т. 146, № 1. — С. 65–76.
86. Stroganov Yu. The importance of being odd // *J. Phys. A.* — 2001. — Vol. 34, no. 13. — P. L179–L185.
87. Pronko G. P., Stroganov Yu. G. Bethe equations ‘on the wrong side of the equator’ // *J. Phys. A.* — 1999. — Vol. 32, no. 12. — P. 2333–2340.
88. Kitanine N., Maillet J.-M., Terras V. Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field // *Nucl. Phys. B.* — 2000. — Vol. 567. — P. 554–582.
89. Boos H., Jimbo M., Miwa T. et al. Algebraic representation of correlation functions in integrable spin chains // *Annales Henri Poincare.* — 2006. — Vol. 7. — P. 1395–1428.
90. Izergin A. G., Korepin V. E., Reshetikhin N. Yu. Correlation functions in a one-dimensional Bose gas // *J. Phys. A.* — 1987. — Vol. 20. — P. 4799–4822.
91. Kitanine N., Maillet J.-M., Terras V. Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain // *Nucl. Phys. B.* — 1999. — Vol. 554. — P. 647–678.
92. Fischer I. The number of monotone triangles with prescribed bottom row // *Adv. in Appl. Math.* — 2006. — Vol. 37, no. 2. — P. 249–267.
93. Зинн-Жюстен П., Ди Франческо Ф. Квантовое уравнение Книжника-Замолодчикова, полностью симметричные самодополнительные разбиения плоскости и матрицы чередующихся знаков // *ТМФ.* — 2008. — Т. 154, № 3. — С. 387–408.
94. Zeilberger D. Proof of a conjecture of Philippe Di Francesco and Paul Zinn-Justin related to the qKZ equation and to Dave Robbins’ two favorite combinatorial objects [Electronic resource online]. — 2007. — Access mode: <http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/diFrancesco.html>.
95. Tracy C. A., Widom H. Integral formulas for the asymmetric simple exclusion process // *Comm. Math. Phys.* — 2008. — Vol. 279. — P. 815–844.
96. Eloranta K. Diamond ice // *J. Stat. Phys.* — 1999. — Vol. 96. — P. 1091–1109.

97. Cugliandolo L.F., Gonnella G., Pelizzola A. Six-vertex model with domain wall boundary conditions in the Bethe-Peierls approximation // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2015. — P. P06008.
98. Lyberg I., Korepin V., Viti J. The density profile of the six vertex model with domain wall boundary conditions. — 2016. — arXiv : 1612.06758.
99. Keesman R., Lamers J. A numerical study of the F-model with domain-wall boundaries. — 2017. — arXiv : 1702.05474.
100. Colomo F., Sportiello A. Arctic curves of the six-vertex model on generic domains: the tangent method // *J. Stat. Phys.* — 2016. — Vol. 164, no. 6. — P. 1488–1523.
101. Zinn-Justin P. The influence of boundary conditions in the six-vertex model. — 2002. — arXiv : cond-mat/0205192.
102. Cimasoni D., Reshetikhin N. Dimers on surface graphs and spin structures. I // *Comm. Math. Phys.* — 2007. — Vol. 275. — P. 187–208.
103. Palamarchuk K., Reshetikhin N. The six-vertex model with fixed boundary conditions // *PoS (Solvay)*. — 2008. — Vol. 2008. — P. 012.
104. Reshetikhin N., Sridhar A. Integrability of limit shapes of the six-vertex model. — 2015. — arXiv : 1510.01053.
105. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М. : Наука, 1967.
106. Bleher P., Fokin V. Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Disordered phase // *Comm. Math. Phys.* — 2006. — Vol. 268. — P. 223–284.
107. Bleher P., Liechty K. Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Critical line between ferroelectric and disordered phases // *J. Stat. Phys.* — 2009. — Vol. 134. — P. 463–485.
108. Bleher P., Liechty K. Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Ferroelectric phase // *Comm. Math. Phys.* — 2009. — Vol. 286. — P. 777–801.
109. Bleher P., Liechty K. Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Critical line between ferroelectric and disordered phases // *J. Stat. Phys.* — 2009. — Vol. 134. — P. 463–485.
110. Bleher P., Liechty K. Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Antiferroelectric phase // *Comm. Pure App. Math.* — 2010. — Vol. 63. — P. 779–829.
111. Bleher P., Bothner T. Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Critical line between disordered and antiferroelectric phases // *Random Matrices: Theory Appl.* — 2012. — Vol. 1. — P. 1250012 (43 pp.).

112. Bleher P., Liechty K. Random Matrices and the Six-Vertex Model. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2013. — Vol. 32 of CRM Monograph Series.
113. Penner R. C. Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces // J. Diff. Geom. — 1988. — Vol. 28. — P. 35–53.
114. Paniak L., Weiss N. Kazakov-Migdal model with logarithmic potential and the double Penner matrix model // J. Math. Phys. — 1995. — Vol. 36. — P. 2512–2530.
115. Ambjorn J., Makeenko Yu., Kristjansen C. F. Generalized Penner models to all genera // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 5193–5203.
116. Weiland B. The C code for generating random ASMs (Version 1.7) [Electronic resource]. — 2007. — Access mode: <http://s3.amazonaws.com/asm-frozen/squareice.zip>.
117. Propp J., Wilson D.B. Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics // Random Struct. Algor. — 1996. — Vol. 9. — P. 223–252.
118. Zinn-Justin P. Universality of correlation functions of Hermitian random matrices in an external field // Comm. Math. Phys. — 1998. — Vol. 194. — P. 631–650.
119. Zinn-Justin P. Adding and multiplying random matrices: a generalization of Voiculescu's formulas // Phys. Rev. E (3). — 1999. — Vol. 59. — P. 4884–4888.
120. Au-Yang H., Perk J. H. H. Critical correlations in a Z-invariant inhomogeneous Ising model // Physica A. — 1987. — Vol. 144. — P. 44–104.
121. Sogo K. Time-dependent orthogonal polynomials and theory of soliton — applications to matrix model, vertex model and level statistics // J. Phys. Soc. Japan. — 1993. — Vol. 62. — P. 1887–1894.
122. Изергин А. Г., Карьялайнен Е., Китанин Н. А. Интегрируемые уравнения для статсуммы шестивершинной модели // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 1997. — Т. 245. — С. 207–215.
123. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux Transformations and Solitons. Springer series in nonlinear dynamics. — Springer-Verlag, 1991.
124. Kavalov Al. R., Mkrtchyan R. L., Zurabyan L. A. Random matrices with discrete spectrum and finite Toda chains // Mod. Phys. Lett. A. — 1991. — Vol. 6, no. 39. — P. 3627–3633.
125. Jimbo M., Miwa T. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II // Physica D. — 1981. — Vol. 2. — P. 407–448.
126. Okamoto K. Studies on the Painlevé equations. I. Sixth Painlevé Equation P_{VI} // Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — Vol. 146. — P. 337–381.
127. Johansson K. Shape fluctuations and random matrices // Comm. Math. Phys. — 2000. — Vol. 209. — P. 437–476. — math/9903134.
128. Bogoliubov N. M., Kitaev A. V., Zvonarev M. B. Boundary polarization in the six-vertex

- model // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65. — P. 026126.
129. Forrester P. J., Witte N. S. Application of the τ -function theory of Painlevé equations to random matrices: P_{VI} , the JUE, CyUE, cJUE and scaled limits // Nagoya Math. J. — 2004. — Vol. 174. — P. 29–114.
130. Douglas M.R., Kazakov V.A. Large N phase transition in continuum QCD₂ // Phys. Lett. B. — 1993. — Vol. 319. — P. 219–230.
131. Dragnev P. D., Saff E. B. Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable // J. Anal. Math. — 1997. — Vol. 72, no. 1. — P. 223–259.
132. Kuijlaars A.B.J. On the finite-gap ansatz in the continuum limit of the Toda lattice. // Duke Math. J. — 2000. — Vol. 104, no. 3. — P. 433–462.
133. Baik J., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Miller P. D. Discrete orthogonal polynomials: Asymptotics and applications. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 2007. — Vol. 164 of Ann. of Math. Stud.
134. Gross D. J., Witten E. Possible third-order phase transition in the large- N lattice gauge theory // Phys. Rev. D. — 1980. — Vol. 21. — P. 446–453.
135. Wadia S. R. $N = \infty$ phase transition in a class of exactly soluble model lattice gauge theories // Phys. Lett. B. — 1980. — Vol. 93. — P. 403–410.
136. Claeys T., Kuijlaars A. B. J. Universality in unitary random matrix ensembles when the soft edge meets the hard edge // Contemp. Math. — 2008. — Vol. 458. — P. 265–280.
137. Majumdar S. N., Schehr G. Top eigenvalue of a random matrix: large deviations and third order phase transition // J. Stat. Mech. Theory Exp. — 2014. — Vol. 2014, no. 1. — P. P01012.
138. Brezin E., Kazakov V. Universality of correlations of levels with discrete statistics // Comm. Math. Phys. — 2000. — Vol. 214. — P. 233–247.
139. Шафаревич И. П. Основы алгебраической геометрии. — Москва : Наука, 1988. — Т. 1.
140. Lindstrom B. On the vector representations of induced matroids // Bull. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 5. — P. 85–90.
141. Gessel I.M., Viennot X. Binomial determinants, paths, and hook length formulae // Adv. Math. — 1985. — Vol. 58. — P. 300–321.
142. Fulmek M., Krattenthaler C. The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis, I // Ann. Combin. — 1998. — Vol. 2. — P. 19–40.
143. Fulmek M., Krattenthaler C. The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis, II // Europ. J. Combin. — 2000. — Vol. 21. —

- P. 601–640.
144. Krattenthaler C. A (conjectural) $1/3$ -phenomenon for the number of rhombus tilings of a hexagon which contain a fixed rhombus // *Number Theory and Discrete Mathematics* / Ed. by A.K. Agarwal et al. — New Delhi : Hindustan Book Agency, 2002. — P. 13–30.
 145. Ciucu M., Krattenthaler C. A factorization theorem for classical group characters, with applications to plane partitions and rhombus tilings // *Advances in Combinatorial Mathematics: Proceedings of the Waterloo Workshop in Computer Algebra 2008* / Ed. by Ilias S. Kotsireas, Eugene V. Zima. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. — P. 39–59.
 146. Okounkov A., Reshetikhin N. Random skew plane partitions and the Pearcey process // *Comm. Math. Phys.* — 2007. — Vol. 269, no. 3. — P. 571–609.
 147. Kuperberg G. Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof // *Ann. of Math.* — 2002. — Vol. 156. — P. 835–866.
 148. Razumov A.V., Stroganov Yu.G. Bethe roots and refined enumeration of alternating-sign matrices // *J. Stat. Mech.* — 2006. — Vol. 2006. — P. P07004.
 149. Bogoliubov N. M. Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model // *J. Phys. A.* — 2005. — Vol. 38. — P. 9415–9430.
 150. Цилевич Н.В. Квантовый метод обратной задачи для q -бозонной модели и симметрические функции // *Функц. анализ и его прил.* — 2006. — Т. 40, № 3. — С. 53–65.
 151. Боголюбов Н.М. Четырехвершинная модель и случайные укладки // *ТМФ.* — 2008. — Т. 155, № 1. — С. 25–38.
 152. Боголюбов Н. М. Скалярные произведения векторов состояний в полностью асимметричных точно решаемых моделях на кольце // *Зап. научн. семин. ПОМИ.* — 2012. — Т. 398. — С. 5–25.
 153. Bogoliubov N. M., Malyshev C. Correlation functions of XX0 Heisenberg chain, q -binomial determinants, and random walks // *Nucl. Phys. B.* — 2014. — Vol. 879. — P. 268–291.
 154. Destri C., de Vega H. J. Light-cone lattice approach to fermionic theories in 2D: The massive Thirring model // *Nucl. Phys. B.* — 1987. — Vol. 290. — P. 363–391.
 155. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. — 2-ое изд. (доп.) изд. — М. : Наука, 1986.
 156. Moak D. S. The q -analogue of the Laguerre polynomials // *J. Math. Anal. Appl.* — 1981. — Vol. 81. — P. 20–47.
 157. Koekoek R. Generalizations of a q -analogue of Laguerre polynomials // *J. Approx. Theory.* — 1992. — Vol. 69. — P. 55–83.
 158. Moreno S. G., García-Caballero E. M. q -Sobolev orthogonality of the q -Laguerre polynomials $\{L_n^{(-N)}(\cdot; q)\}_{n=0}^{\infty}$ for positive integers N // *J. Korean Math. Soc.* — 2011. — Vol. 48. —

- P. 913–926.
159. Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials. — 2nd edn. edition. — Oxford : Oxford University Press, 1995.
160. Kulish P. P. Quantum difference nonlinear Shroedinger equation // Lett. Math. Phys. — 1981. — Vol. 5. — P. 191–197.
161. Gerdjikov V. S., Ivanov M. I., Kulish P. P. Expansions over the “squared” solutions and difference evolution equations // J. Math. Phys. — 1984. — Vol. 25. — P. 25–34.
162. Bogoliubov N. M., Bullough R. K., Pang G. D. Exact solution of a q-boson hopping model // Phys. Rev. B. — 1993. — Vol. 47. — P. 11495–11498.
163. Bogoliubov N. M., Nasar T. On the spectrum of the non-Hermitian phase-difference model // Phys. Lett. A. — 1997. — Vol. 234. — P. 345–350.
164. Motegi K., Sakai K. Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials // J. Phys. A. — 2013. — Vol. 46. — P. 355201.
165. Motegi K., Sakai K. K-theoretic boson-fermion correspondence and melting crystals // J. Phys. A. — 2014. — Vol. 47. — P. 445202.