Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

ЦИЛЕВИЧ Наталия Владимировна

Асимптотическая теория унитарных представлений симметрических групп и ее приложения

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена задачам асимптотической теории представлений, связанным, с одной стороны с бесконечной симметрической группой $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, а с другой, с различными моделями и структурами фоковского пространства. Оба этих объекта играют ключевую роль как в самой теории представлений, так и в ее приложениях к математической физике. Группа $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ является простейшим примером «дикой» группы, и ее теория представлений во многом служит моделью для построения теорий представлений других таких групп. Эта группа есть индуктивный предел конечных симметрических групп $\mathfrak{S}_n$ с естественными вложениями, и именно эта индуктивная структура играет ключевую роль во всех рассмотрениях диссертации. Классическая теория представлений конечных симметрических групп была инициирована работами Г. Фробениуса, И. Шура и А. Юнга; ее изложение может быть найдено, например, в [120, 157], а история описана в [87]. Следует отметить, что с самого начала теория представлений симметрических групп играла важную роль для физики — см., напр., классическую монографию [5]. Начало теории представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ положила работа Э. Тома [163], в которой найдены ее характеры. Идею систематического изучения представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ на основе индуктивного подхода выдвинул А. М. Вершик в рамках его общей программы асимптотической теории представлений; реализация этой идеи была начата в работах

А. М. Вершика и С. В. Керова начала 1980-х гг. (см., напр., [19, 20, 176, 21], а также [125]); в ее дальнейшем развитии активное участие принимали также Г. И. Ольшанский, А. Ю. Окуньков, А. М. Бородин, Ф. Биан и др. (см., напр., [50, 126, 48, 49, 83, 127, 45, 22]). Следует отметить, что индуктивный подход позволил пересмотреть и теорию представлений конечных симметрических групп — результатом стало новое прямое и естественное построение этой теории, предложенное А. М. Вершиком и А. Ю. Окуньковым [150, 24] (ее изложение может быть найдено также в монографиях [130, 84]).

Понятие фоковского пространства, введенное В. А. Фоком [100] в контексте т. н. вторичного квантования еще в 1930-е гг. и играющее фундаментальную роль в физике, исходно было математически разработано в трудах Дж. фон Неймана, К. Фридрихса, Ф. А. Березина, И. Сигала, И. М. Гельфанда, В. Баргмана и др. (см., напр., [104, 1, 55, 71]); оно служит незаменимой основой для конструкций квантовой теории поля и теории представлений групп и алгебр (в частности, групп токов и алгебр Каца–Муди). Пространство Фока имеет много различных моделей и обладает богатством разнообразных структур, которые и используются в разных главах диссертации. Среди них, в частности, стоит отметить связь с гауссовскими процессами и теорией стохастических интегралов Винера–Ито [182, 118] (см., напр., изложение в [52]); связь с теорией симметрических функций, зародившуюся в работах киотской школы М. Сато (М. Джимбо, Т. Мива и др.) начала 1980-х гг. по солитонным уравнениям (см., напр., [34, гл. 14] или элементарное изложение в [42]); однородную вертекс-операторную конструкцию базисного представления аффинных алгебр, найденную И. Френкелем и В. Кацем [103] и в другой форме Г. Сигалом [158]. В первой главе диссертации фоковское пространство выступает как пространство, в котором действует базисное представление аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, а также стандартные представления алгебры Гейзенберга и алгебры Вирасоро; во второй главе на первый план выходит реализация фоковского пространства как пространства квадратично интегрируемых функционалов над гауссовским белым шумом; в третьей оно фигурирует как пространство, в котором реализуются модели теоретической физики. Разнообразие структур превращает фоковское пространство в универсальный инструмент и позволяет применять для решения рассматриваемых задач широкое разнообразие методов, от чисто алгебраических до теоретико-вероятностных и квантовофизических. Особо следует отметить здесь квантовый метод обратной задачи (КМОЗ), введенный и разработанный Л. Д. Фаддеевым и его школой (Л. А. Тахтаджян, П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, Н. Ю. Решетихин и др.; см., напр., [60, 56, 51, 40] и изложения в [93, 133, 3]), а также первые примеры связей между КМОЗ и теорией представлений симметрических групп, данные в работах [35, 38].

Цель работы. Целью диссертации является решение на основе индуктивного подхода ряда задач теории представлений бесконечной симметрической группы и рассмотрение их приложений. Основными направлениями работы являются анализ некоторых классов представлений бесконечной симметрической группы и установление их связи с представлениями групп и алгебр, играющих важную роль в физике, таких как алгебра Вирасоро и аффинные алгебры Ли; применение теории представлений симметрических групп и тесно связанной с ней теории симметрических функций к изучению некоторых физических моделей; исследование фоковской структуры в пространствах квадратично интегрируемых функционалов от процессов с независимыми значениями и ее применение к теории представлений.

Методы исследования. В работе применяются методы асимптотической теории представлений, основанные на систематическом использовании индуктивной структуры групп и алгебр. Важную роль играют связи теории представлений с математической физикой и теорией вероятностей, в том числе осуществляемые с помощью многочисленных структур в различных реализациях пространства Фока.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории представлений бесконечной симметрической группы; для дальнейшего исследования ее связей с теорией представлений аффинных алгебр Ли и алгебры Вирасоро, а также ее приложений к физическим моделям; для дальнейшего исследования свойств факторизаций, порожденных случайными процессами, и их приложений к теории представлений и теории вероятностей.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, представленные в диссертации, являются достоверными, математически строго доказанными фактами. Они докладывались и обсуждались, в частности, на следующих конференциях и семинарах: семинар исследовательской группы «Diskrete Strukturen in der Mathematik» (Билефельд, Германия, декабрь 2000 г.), семестр «Interaction and Growth in Complex Stochastic Systems» (Кембридж, Великобритания, октябрь 2003 г.), международная конференция «Geometry and Analysis on Random Structures» (Лилль, Франция, 25–28 мая 2004 г.), международная конференция «Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics» (С.-Петербург, 25–29 апреля 2005 г.), семинар «Geometry, Algebra, Singularities, Combinatorics» (Бостон, США, 26 марта 2010 г.), С.-Петербургский семинар по теории представлений и динамическим системам.

Основные результаты работы и научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Введен и изучен класс представлений Шура–Вейля бесконечной симметрической группы. Описана структура таких представлений, их спектральные меры относительно алгебры Гельфанда–Цетлина.

2. Доказано, что существует сохраняющий градуировку унитарный изоморфизм $\mathfrak{sl}_2$-модулей между т. н. серпантинным представлением бесконечной симметрической группы и базисным представлением аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Изучены свойства этого изоморфизма.

3. Введен класс марковских представлений бесконечной симметрической группы и доказано, что он совпадает с классом простых представлений (индуктивных пределов представлений конечных симметрических групп с простым спектром). Получена классификация и структурное описание представлений бесконечной симметрической группы, индуцированных с единичных представлений подгрупп Юнга. Изучены наиболее важные классы таких представлений, найдены их спектральные меры.

4. Доказано свойство квазиинвариантности гамма-процесса относительно большой группы мультипликаторов. Получены следствия этого результата для многочисленных объектов, структурно связанных с гамма-процессом (процессы Дирихле, меры Пуассона–Дирихле, бесконечномерная мера Лебега). Рассмотрены приложения к теории представлений групп токов.

5. Получены явные формулы (на уровне мультипликативных функционалов, ортогональных разложений, ядра) для изоморфизма гильбертовых факторизаций, порождаемых гауссовским белым шумом и пуассоновским процессом на одном и том же базовом пространстве. Доказано, что гильбертова факторизация, порожденная произвольным процессом Леви, является фоковской. Получены явные формулы для соответствующих изометрий. Рассмотрены приложения к теории представлений групп токов.

6. Дана интерпретация квантового метода обратной задачи для q-бозонной

модели в терминах алгебры симметрических функций. Доказано, что в случае фазовой модели ($q = 0$) оператор рождения совпадает (с точностью до скалярного множителя) с оператором умножения на производящую функцию полных симметрических функций, а волновые функции выражаются через функции Шура. В общем случае q-бозонной модели тот же результат имеет место с заменой функций Шура на симметрические функции Холла–Литтлвуда.

7. Исследованы асимптотические спектральные свойства оператора Кокстера–Лапласа — элемента групповой алгебры симметрической группы, тесно связанного с гамильтонианом изотропной цепочки Гейзенберга, — в естественных представлениях, в ферромагнитном и антиферромагнитном асимптотическом режиме.

Публикации. Результаты исследований отражены в 14 работах [18, 25, 26, 27, 28, 66, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 172], опубликованных в ведущих рецензируемых российских и международных изданиях.

Далее опишем **затрагиваемые в диссертации темы** более подробно по главам.

Глава 1

Первая глава диссертации посвящена изучению различных классов представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ — дискретной счетной группы финитных подстановок натурального ряда. Неприводимые комплексные представления конечной симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ порядка n параметризуются диаграммами Юнга с n клетками, множество которых будем обозначать $\mathbb{Y}_n$. Граф ветвления неприводимых представлений симметрических групп есть граф Юнга $\mathbb{Y}$ — $\mathbb{Z}_+$-градуированный граф, у которого n-й этаж есть $\mathbb{Y}_n$, а ребра соединяют две вершины соседних этажей, если соответствующие диаграммы отличаются на одну клетку. Пространство $\mathbb{T}$ бесконечных таблиц Юнга, т. е. бесконечных путей в графе Юнга, есть вполне несвязный (нестационарный) марковский компакт. Хвостовое разбиение ξ_{tail} на пространстве путей $\mathbb{T}$ есть разбиение на классы конфинальных (совпадающих с некоторого места) путей. Мера μ на $\mathbb{T}$ называется эргодической, если всякое измеримое ξ_{tail}-множество имеет либо нулевую, либо полную μ-меру, и квазиинвариантной, если она квазиинвариантна в обычном смысле слова относительно любых преобразований (замен) начала таблицы. Групповая алгебра группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ — как индуктивный предел полупростых алгебр с простым ветвлением — обладает естественной структурой скрещенного произведения: канонической коммутативной подалгеброй является т. н. алгебра Гельфанда–Цетлина — алгебра функций на бесконечных таблицах Юнга. Поэтому всякая эргодическая квазиинвариантная мера μ на пространстве бесконечных таблиц $\mathbb{T}$ и 1-коцикл c на хвостовом отношении эквивалентности в этом пространстве со значениями в группе $\{\alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha\| = 1\}$ определяют неприводимое представление бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ с простым спектром (относительно алгебры Гельфанда–Цетлина) по формуле (6), см. ниже. И наоборот, всякое неприводимое представление с простым спектром может быть реализовано в такой форме, и соответствующую меру μ естественно называть спектральной мерой представления; при этом два таких представления эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие меры взаимно абсолютно непрерывны, а коциклы когомологичны.

В § 1.1 вводится и изучается т. н. класс *представлений Шура–Вейля* бесконечной симметрической группы. Классическая двойственность Шура–Вейля (см. [4]) — это фундаментальная теорема, открытая И. Шуром, связывающая неприводимые представления общей линейной группы $GL(l,\mathbb{C})$ и симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ в тензорной степени $(\mathbb{C}^l)^{\otimes N}$, где $\mathfrak{S}_N$ действует перестановками сомножителей, а $GL(l,\mathbb{C})$ — одновременным матричным умножением в сомножителях:

$$(\mathbb{C}^l)^{\otimes N} = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_N^{\leq l}} \pi_\lambda \otimes \rho_\lambda, \tag{1}$$

где π_λ — неприводимое представление симметрической группы $\mathfrak{S}_N$, соответствующее диаграмме Юнга λ с N клетками и не более чем l строками, а ρ_λ — неприводимое представление общей линейной группы $GL(l,\mathbb{C})$ с сигнатурой λ. Операторные алгебры, порожденные действиями групп $\mathfrak{S}_N$ и $GL(l,\mathbb{C})$ соответственно, являются взаимными коммутантами во всей операторной алгебре $\mathrm{End}((\mathbb{C}^l)^{\otimes N})$.

Обычно рассматривают только «статическую» двойственность Шура–Вейля, когда параметр N фиксирован. Представленный в работе подход, в соответствии с общей идеологией асимптотической теории представлений, основан на «динамическом», или индуктивном взгляде на эту двойственность, что позволяет рассматривать индуктивные схемы и переходить к пределу, получая бесконечномерную версию двойственности Шура–Вейля для группы $SL(n,\mathbb{C})$ и бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$. Эта конструкция приводит к новому, ранее не изучавшемуся классу представлений бесконечной симметрической группы, которые названы представлениями Шура–Вейля. В работе рассматривается только случай $N=2$; случай общего N может быть разобран аналогичным образом.

Следует упомянуть, что в статье [152] рассматривалось другое бесконечномерное обобщение схемы Шура–Вейля. Различие заключается в следующем: в § 1.1 в классической двойственности Шура–Вейля между представлениями групп $SL(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{S}_N$ фиксируется n, а N устремляется к бесконечности, что дает двойственность между представлениями групп $SL(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$; в работе [152], наоборот, фиксируется N, а n устремляется к бесконечности, что дает двойственность между представлениями алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ и группы $\mathfrak{S}_N$.

Одно из применений рассматриваемого класса представлений связано с изучением поведения т. н. оператора Кокстера–Лапласа L_N, см. § 3.2. Он также тесно связан с представлениями аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, алгебры Вирасоро и другими важными объектами теории представлений.

Опишем полученные результаты более подробно. Рассматриваются представления бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, являющиеся индуктивными пределами представлений конечных симметрических групп относительно т. н. вложений Шура–Вейля, которые коммутируют с действием как симметрических групп, так и группы $SL(2,\mathbb{C})$. Структура общего представления такого вида, которое названо представлением Шура–Вейля, описана в **теореме 1.1**. А именно,

$$\mathcal{H} = \sum_k \Pi_k \otimes M_{k+1}, \tag{2}$$

где Π_k *— неприводимое представление группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *(индуктивный предел последовательности неприводимых представлений конечных симметрических групп),* M_k *—* k*-мерное неприводимое представление группы* $SL(2,\mathbb{C})$*, а сумма берется либо по четным, либо по нечетным* k*.*

Таким образом, достаточно изучать неприводимые представления Π_k группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. В **теореме 1.2** найдены *спектральные меры этих представлений.*

Интересным примером представления Шура–Вейля является т. н. *тензорное представление*, получаемое с помощью вложений Шура–Вейля, сохраняющих структуру тензорного произведения в пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$. Оно может быть реализовано в неполном тензорном произведении пространств $\mathbb{C}^4$, где в качестве выделенного вектора следует взять единственный (с точностью до константы) $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантный вектор в $\mathbb{C}^4$. Таким образом, в пространстве тензорного представления Шура–Вейля действует также равномерно гиперконечная (UHF) алгебра $\mathcal{G} = \varinjlim \mathrm{Mat}_{4^n}(\mathbb{C})$ (алгебра Глимма типа 2^∞; см., напр., [151]).

Обращает на себя внимание аналогия между разложением (2) представления Шура–Вейля бесконечной симметрической группы и разложением (предельным случаем конструкции Годдарда–Кента–Олива [106])

$$L_{j,1} = \sum_k L(1,k^2) \otimes M_{k+1}, \qquad j = 0,1,$$

где $L_{j,1} = L(\Lambda_j)$ — представление аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ уровня 1 со старшим весом Λ_j, $L(1,k^2)$ — неприводимое представление алгебры Вирасоро Vir с центральным зарядом 1 и конформной размерностью k^2, суммирование происходит по всем натуральным k той же четности, что и j, а алгебры Vir и $\mathfrak{sl}_2 \subset \widehat{\mathfrak{sl}_2}$ — взаимные коммутанты (см., напр., [181]). Эта аналогия мотивирует рассмотрение т. н. серпантинного представления группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, которому посвящен § 1.2.

Серпантинное представление — это замечательное ранее не изучавшееся представление бесконечной симметрической группы, тесно связанное с базисным представлением аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ и представлениями алгебры Вирасоро. А именно, это единственное представление Шура–Вейля, удовлетворяющее следующему дополнительном условию: соответствующие вложения Шура–Вейля сохраняют т. н. стабильный главный индекс таблицы Юнга. Основной результат § 1.2 состоит в том, что *существует сохраняющий градуировку унитарный изоморфизм $\mathfrak{sl}_2$-модулей между пространством H_Π серпантинного представления и базисным $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$-модулем $L_{0,1}$* (**теорема 1.3**); при этом неприводимые $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$-модули соответствуют неприводимым модулям алгебры Вирасоро. Этот факт обнаруживает новые взаимосвязи между теорией представлений бесконечной симметрической группы с одной стороны и теорией представлений аффинных алгебр Ли и алгебры Вирасоро с другой стороны.

Представленный в диссертации подход опирается на результат Б. Фейгина и Е. Фейгина [94] о том, что неприводимые представления старшего веса алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ уровня 1 можно получить как индуктивные пределы тензорных степеней двумерных неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Конструкция, применяемая в [94], основана на понятии градуированного тензорного представления, введенном Б. Фейгиным и С. Локтевым [96], главным ингредиентом которого, в свою очередь, является специальная градуировка в пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Ключевое для используемой конструкции наблюдение, опирающееся на вычисление q-характеров пространств кратностей неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей относительно этой градуировки, представленное в работе Р. Кедем [123], состоит в том, что рассматриваемое градуированное тензорное произведение можно реализовать в $\mathfrak{S}_N$-модуле так, что специальная градуировка по существу совпадет с известной комбинаторной характеристикой таблиц Юнга, называемой главным индексом (см. предложение 1.4). Таким образом, полученные результаты, в частности, дают комбинаторное описание градуированного тензорного произведения и выявляют новое теоретико-представленческое значение главного индекса таблицы Юнга. Например, **следствие 1.2** показывает, что *базис Гельфанда–Цетлина в серпантинном представлении является собственным базисом оператора Вирасоро L_0, а т. н. стабильные главные индексы таблиц Юнга суть его собственные значения.* В п. 1.2.3 получены и другие свойства изоморфизма между серпантинным представлением и базисным представлением $L_{0,1}$; в частности, в **теореме 1.4** представлена *явная формула для соответствия* *между естественными базисами в различных реализациях базисного представления.*

В § 1.3 вводятся и рассматриваются т. н. *марковские представления* бесконечной симметрической группы, для которых спектральная мера является марковской. Иначе говоря, для любой фиксированной диаграммы $\lambda_n \in \mathbb{Y}_n$ условная мера на множестве путей в графе Юнга, проходящих на n-м шаге через эту диаграмму, есть прямое произведение условных мер на «прошлом» (до момента n) и «будущем» (после момента n), т. е. прошлое и будущее пути при фиксированной «настоящей» диаграмме независимы. Тем самым, чтобы задать марковское представление, достаточно задать переходные вероятности добавления новой клетки к диаграмме Юнга (или копереходные вероятности удаления клетки). *Простым представлением* группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ назовем индуктивный предел последовательности представлений конечных симметрических групп $\mathfrak{S}_n$, для каждого из которых разложение на неприводимые не имеет кратностей. Простые представления имеют простой спектр, но не исчерпывают всех представлений с простым спектром. Определение класса простых представлений, вообще говоря, зависит от аппроксимации группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ конечными группами, но, поскольку в данной работе рассматривается только фиксированная стандартная аппроксимация, термин «простое представление» используется именно в этом смысле. Оказывается, что *класс простых представлений совпадает с классом марковских представлений* (**теорема 1.5**). Этот результат связывает совершенно различные на первый взгляд понятия, одно из которых определяется в чисто вероятностных терминах, а другое — в чисто алгебраических.

Едва ли не основную роль в классической теории представлений конечных симметрических групп (см., напр., [120]) играют представления, индуцированные с подгрупп Юнга. В их разложениях на неприводимые компоненты каноническим образом содержатся все неприводимые представления группы $\mathfrak{S}_n$, и в традиционном подходе именно с их помощью устанавливается связь между диаграммами Юнга и неприводимыми представлениями. Индуцированным представлениям бесконечной симметрической группы уделялось мало внимания; они изучались, например, в работах М. Биндера [75, 77, 76], Н. Обаты [146, 147] и Т. Хираи [113, 114]. В § 1.4 систематически рассматриваются представления бесконечной симметрической группы, *индуцированные с единичных представлений подгрупп Юнга*. Как нередко происходит, по сравнению с конечным случаем, с одной стороны, некоторые свойства становятся проще и естественней, а с другой, появляются совершенно новые эффекты.

Разбиения натурального ряда и соответствующие подгруппы Юнга можно разбить на два класса: большие разбиения, имеющие конечное число конечных блоков и произвольное число бесконечных блоков, и малые разбиения, имеющие бесконечно много конечных блоков. В отличие от случая конечных симметрических групп, результат индуцирования с единичного представления подгруппы Юнга на всю группу $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ часто является неприводимым представлением — так происходит для больших подгрупп Юнга, соответствующих разбиениям с не более чем одним конечным блоком. *Индукция с произвольной большой подгруппы дает представление типа I* (относительно классификации представлений см., напр., [37]), и можно явным образом описать его *разложение на неприводимые*. Эти результаты собраны в **теореме 1.6**.

Напротив, *индукция с малых подгрупп Юнга дает представления типа II* (**теорема 1.7**). Стоит отметить, что существует хорошо разработанная теория представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ типа II с конечным следом, однако здесь ситуация иная. А именно, фактор, порожденный операторами представления, имеет тип II_∞, т. е. не обладает конечным следом, однако его коммутант имеет тип II_1.

Важную роль для приложений играют *представления конечных симметрических групп, соответствующие двустрочечным диаграммам Юнга* (в частности, двойственность Шура–Вейля связывает их с теорией представлений группы $\mathfrak{sl}_2$, и именно эти представления используются в §§ 1.1, 1.2). Удобная их реализация *в пространстве бесквадратных симметрических форм* была предложена А. М. Вершиком и изучалась, например, П. П. Никитиным [47]. Исследованию этих и родственных им представлений посвящен § 1.5. В **теореме 1.8** *описан базис Гельфанда–Цетлина в упомянутой реализации*, а в **теореме 1.9** *показано, что представления бесконечной симметрической группы, индуцированные с двублочных подгрупп Юнга, являются простыми* (а значит, как следует из §1.3, марковскими), и *найдены их спектральные меры*, которые представляют собой распределения естественных случайных блужданий на полурешетке.

Поскольку бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ является дикой, центральную роль в её теории представлений играют не неприводимые, а *фактор-представления*. Общая конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала в применении к групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}]$, реализованной как скрещенное произведение, дает т. н. «табличную» модель фактор-представлений. Однако для групп преобразований G наибольший интерес представляют подстановочные модели представлений, реализующиеся в пространстве функций на некотором G-пространстве. Для фактор-представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ такая модель была найдена А. М. Вершиком и С. В. Керовым в [19] (см. также [176] и [50]); в работе она названа «динамической». Конструкция этой модели основана на т. н. траекторной (или группоидной) реализации динамических систем. Стоит отметить, что динамическая модель фактор-представлений по существу является фоковской (если рассматривать реализацию фоковского пространства в пространстве функций на конфигурациях). В § 1.6 дается *явное описание* *изоморфизма между табличной и динамической моделью* (**теорема 1.10**), использующее версию теории Фурье для бесконечной симметрической группы, намеченную А. М. Вершиком и Н. В. Цилевич в [26].

Глава 2

Вторая глава посвящена изучению свойств *обобщенных процессов Леви* — случайных процессов с независимыми значениями. Такие процессы можно рассматривать как континуальное обобщение понятия последовательности независимых случайных величин. Их теория, беря начало в пионерских работах Б. де Финетти, А. Н. Колмогорова, П. Леви и А. Я. Хинчина по теории безгранично делимых распределений на прямой, оформилась в трудах И. М. Гельфанда [29] и К. Ито [119], разработавших понятие обобщенных случайных процессов. Обобщенные процессы с независимыми значениями подробно рассмотрены в [30], см. также [97]. Стандартной ссылкой по процессам Леви в $\mathbb{R}^n$ может считаться монография [73].

В § 2.1 рассматриваются свойства одного из важнейших процессов Леви — *гамма-процесса* — и родственных ему процессов и мер. Отправной точкой для развиваемой теории, выявляющей тесные связи между вопросами, относящимися к теории вероятностей, теории представлений, комбинаторике, функциональному анализу и др., является *квазиинвариантность гамма-процесса относительно бесконечномерной группы $\mathcal{M}^+$ умножений на неотрицательные функции с суммируемым логарифмом* (**теорема 2.1**), обобщающая хорошо известное свойство гамма-распределений на прямой. Впервые эта квазиинвариантность, в совершенно иных терминах и в неявном виде, была обнаружена в серии работ А. М. Вершика, И. М Гельфанда и М. И. Граева [8, 11, 105] по теории представлений группы токов $\mathrm{SL}(2,\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — алгебра функций на некотором многообразии. В диссертации она доказана напрямую, исходя из преобразования Лапласа распределения гамма-процесса, и использована для выведения множества следствий путем систематического рассмотрения объектов, структурно связанных с гамма-процессами.

Во-первых, естественно возникает вопрос, допускает ли распределение гамма-процесса эквивалентную $\mathcal{M}^+$-инвариантную меру. Оказывается, существует семейство σ-конечных мер $\mathcal{L}_\theta$ с экспоненциальной плотностью относительно распределений гамма-процессов, которые *проективно инвариантны относительно группы* $\mathcal{M}^+$ (**теорема 2.3**) и инвариантны относительно умножения на функции с нулевым интегралом логарифма (**следствие 2.1**). Эти меры названы *мультипликативными*. Как доказано в [165], каждое из описанных свойств инвариантности характеризует мультипликативные меры в классе σ-конечных мер, конечных на компактных множествах и эквивалентных распределениям процессов Леви. Мультипликативные меры обобщают теорию Леви на случай σ-конечных мер. А именно, существует семейство σ-конечных мер λ_θ на $\mathbb{R}_+$, которые также называются мультипликативными и которые связаны с бесконечномерными мультипликативными мерами $\mathcal{L}_\theta$ так же, как обычное безгранично делимое распределение связано с процессом Леви, имеющим ту же меру Леви. В частности, мера $\mathcal{L}_1$ соответствует мере Лебега $\lambda = \lambda_1$, поэтому она названа *бесконечномерной мерой Лебега.*

Далее показано, что *распределения процессов Леви допускают каноническое разложение на т. н. коническую часть, т. е. меру на конусе положительных рядов, и стандартную продакт-меру на последовательностях точек базового пространства* (**теорема 2.6**). Это разложение впервые рассматривалось Т. Фергюсоном и М. Классом [99], но оригинальное доказательство было довольно сложным, в работе же оно получено из очень общих и простых соображений. Рассмотрение проекции конической части на симплекс рядов с единичной суммой дает *симплициальную часть* процесса Леви. В частности, симплициальной частью гамма-процесса является знаменитое *распределение Пуассона–Дирихле* $\mathrm{PD}(\theta)$. Эти распределения, введенные Дж. Кингманом [129], возникают в самых различных областях математики и приложений и обладают множеством замечательных свойств (см. обзоры в [36, 69]). В частности, они (и тесно связанные с ними GEM-распределения) обладают различными свойствами инвариантности, например относительно стохастической сортировки [141] или процесса коагуляции–фрагментации [91], тесно связанного с теорией представлений симметрических групп [65, 166]. В п. 2.1.4 доказана *квазиинвариантность распределений Пуассона–Дирихле относительно естественного семейства марковских операторов* (**теорема 2.7**).

Еще один объект, тесно связанный с гамма-процессом, есть т. н. *процесс Дирихле*, введенный Т. Фергюсоном [98] и играющий важную роль в байесовской непараметрической статистике. В частности, важным вопросом является вопрос о распределении случайных средних от процессов Дирихле. Ответ заключается в том, что *распределение случайного среднего от измеримой функции а связано с распределением самой функции а т. н. преобразованием Маркова–Крейна* (2.14) (**теорема 2.8**). Это преобразование впервые появилось в статье А. А. Маркова [140] и интенсивно изучалось М. Г. Крейном и его школой; оно возникает во многих контекстах, таких как проблема моментов Маркова, теория цепных дробей, экспоненциальные представления аналитических функций, планшерелевских рост диаграмм Юнга и др. (см. подробный обзор в [124]). Формула (2.14) для процессов Дирихле была впервые получена Д. М. Чифарелли и Э. Регаццини [86] при помощи тяжелых аналитических выкладок (более простые доказательства впоследствии были даны, например, в [90, 128, 154, 115]). В работе представлено новое простое доказательство этой формулы, основанное на связи процессов Дирихле с гамма-процессами и на квазиинвариантности гамма-процессов.

В п. 2.1.6 разработанная теория применяется к построению удобной модели канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$, впервые описанного в работе А. М. Вершика, И. М Гельфанда и М. И. Граева [8]. В отличие от конструкции из [8], предложенная конструкция, основанная на свойствах гамма-процесса, является явной, прозрачной и удобной для работы.

Параграф 2.2 посвящен изучению структуры т. н. *факторизации* в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функционалов над обобщенным процессом Леви. Структура *гильбертовой факторизации* отвечает интуитивному пониманию «континуального произведения независимых» и состоит в том, что гильбертово пространство и алгебра операторов в нем допускают безгранично делимые разложения в тензорные произведения. Это понятие восходит к работам Дж. фон Неймана по тензорным произведениям [144, 178] и было подробно исследовано в работе Х. Араки и Э. Дж. Вудса [68]. Его теоретико-вероятностный вариант — понятие *метрической факторизации* — был предложен Дж. Фельдманом [97]. Непрерывная метрическая факторизация пространства с мерой есть согласованное семейство разложений этого пространства в прямое произведение произвольно большого числа пространств с мерой. Такую структуру имеет пространство реализаций любого процесса с независимыми значениями.

Важнейший пример гильбертовой факторизации — т. н. фоковская факторизация в бозонном пространстве Фока $\mathrm{EXP}\,H$ над гильбертовым пространством H (см. ниже). Общеизвестно (см., напр., [52]), что пространство $L^2(\alpha)$ квадратично интегрируемых функционалов от гауссовского белого шума α на пространстве (X,ν) канонически изоморфно пространству Фока $\mathrm{EXP}\,L^2(X,\nu)$, где изоморфизм задается формулой $\mathrm{EXP}\,h \leftrightarrow e^{-\frac{\|h\|^2}{2}+\langle h,\cdot\rangle}$. В частности, вакуумный вектор $\mathrm{EXP}\,0$ соответствует единичной функции

$1 \in L^2(\alpha)$, а n-частичное подпространство $S^n H$ отождествляется с подпространством в $L^2(\alpha)$, натянутом на n-кратные стохастические интегралы, т. е. обобщенные функционалы Эрмита порядка n.

Основной результат § 2.2 состоит в том, что *гильбертово пространство квадратично интегрируемых функционалов $L^2(\eta)$ над произвольным обобщенным процессом Леви η допускает структуру фоковской факторизации* (**теорема 2.15**). Таким образом, факторизация в пространстве $L^2(\eta)$ изоморфна факторизации в пространстве $L^2(\alpha)$ для гауссовского процесса α подходящей размерности. Эта размерность есть единственный инвариант факторизации, и она зависит только от числа точек в носителе меры Леви, откуда вытекает, что процессы Леви с одинаковой мощностью носителей мер Леви определяют изоморфные факторизации. В диссертации предъявлены *явные формулы для сохраняющей факторизации изометрии между соответствующими пространствами L^2*, которые затем используются для детального изучения структуры этих пространств. Хотя имеются многочисленные (в основном, технические) работы, посвященные построению стохастических интегралов и аналогов разложения Винера–Ито для процессов Леви (см., напр., [148, 159, 92]), ключевой факт изоморфизма факторизаций оставался до сих пор в тени. Он тесно связан с теоремой Араки–Вудса [68], которая утверждает, что факторизация, обладающая достаточным числом мультипликативных векторов, изоморфна фоковской факторизации. В вероятностных терминах это условие означает, что существование канонической фоковской структуры в пространстве L^2 над произвольным процессом Леви следует из тотальности множества мультипликативных функционалов от этого процесса. Мультипликативный функционал от гауссовского процесса есть экспонента от линейного функционала, однако для общих процессов Леви множество мультипликативных функционалов значительно шире. Установленная структура фоковской факторизации в пространстве L^2 над произвольным процессом Леви делает избыточными многочисленные специальные построения ортогональных разложений (стохастических интегралов) в каждом конкретном случае.

Простейший пример рассматриваемой изометрии есть изометрия между пространствами L^2 над пуассоновским и гауссовским процессами. Аналогия между ортогональными структурами в этих пространствах отмечалась во многих работах, однако наличие изометрии, сохраняющей факторизации, не было установлено даже в этом случае. Впервые существование этой изометрии было неявным образом получено в работе А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева [10] из эквивалентности двух реализаций канонического представления групп токов; позже она изучалась Ю. А. Неретиным [44] в терминах голоморфной модели пространства Фока. Окончательные *явные формулы для изометрии между пространствами L^2 над пуассоновским и гауссовским процессами* (**теорема 2.13**) являются новыми.

Общий случай изометрии между произвольным процессом Леви и гауссовским процессом подходящей размерности сводится к пуассон-гауссовскому случаю при помощи разложения Леви–Хинчина или пуассоновской конструкции процессов Леви. Здесь необходимо рассматривать уже векторнозначный белый шум, причем в качестве пространства значений естественно выбрать гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}, \Pi)$, где Π — мера Леви рассматриваемого процесса Леви. В частности, в случае пуассоновского процесса это пространство одномерно, поэтому пуассоновская факторизация изоморфна факторизации, задаваемой обычным (одномерным) гауссовским процессом.

Явное построение структуры Винера–Ито в пространстве квадратично интегрируемых функционалов над произвольным процессом Леви основано на своеобразном «логарифмировании» мультипликативных функционалов, в результате которого получаются аддитивные функционалы, т. е. пространство «первого хаоса». Однако правило «логарифмирования» определяется при помощи факторизации, существенно от нее зависит и, вообще говоря, не совпадает со взятием обычного логарифма от мультипликативного функционала (совпадение имеет место только в случае гауссовского белого шума, и в этом случае множество аддитивных функционалов совпадает с множеством линейных функционалов от процесса). Существование этого «логарифма» для общих процессов Леви не очевидно; фактически, именно в построении логарифма состоит доказательство теоремы Араки–Вудса (в несколько более общем контексте); более явная версия этого построения имеется в работе А. М. Вершика и Б. С. Цирельсона [173]. В работе *вычисляется логарифм в гауссовском и пуассоновском случае* (**леммы 2.6** и **2.7**), к которым сводится общий случай произвольных процессов Леви.

Задать искомую изометрию можно, установив соответствие между множествами мультипликативных функционалов от двух процессов или между линейными подпространствами аддитивных функционалов. Также ее можно задать ядром, т. е. обобщенной функцией от траекторий двух процессов. Это *ядро* в работе *вычислено для случая пуассон-гауссовской изометрии* (**теорема 2.14**); замечательным образом, оно задается в чисто комбинаторном виде. *Соответствие между последовательными хаосами в этом случае сводится к соответствию между функционалами Эрмита и Шарлье* (**следствие 2.6**). Ядро не является положительным, поэтому изометрия не есть ни марковский, ни тем более мультипликативный оператор.

Описанная изометрия для процесса Леви с мерой Леви Π приобретает весьма конкретный вид, если для меры $t^2\Pi(t)$ проблема моментов является определенной. В этом случае можно использовать базис из ортогональных многочленов в $L^2(\mathbb{R}_+, t^2\Pi(t))$, что позволяет получить интересные связи между ортогональными многочленами относительно различных мер на прямой. Например, таким образом получено нетривиальное *тождество между классическими ортогональными многочленами Эрмита и Шарлье* (**следствие 2.4**). Комбинаторная сторона построения стохастических интегралов для широкого класса процессов наиболее отчетливо подчеркнута в [156].

Одними из наиболее важных приложений изометрий между гильбертовыми пространствами функционалов над различными процессами Леви являются приложения к теории бесконечномерных представлений, а именно представлений групп токов и калибровочных групп, а также алгебр Каца–Муди. Их унитарные представления естественным образом порождают гильбертову факторизацию и обычно реализуются в той или иной модели пространства Фока. Изометрия факторизаций соответствует изоморфизму представлений. В частности, в **теореме 2.16** построенная структура фоковской факторизации в пространстве L^2 над гамма-процессом используется для получения *явных формул для изоморфизма между различными моделями канонического представления группы токов* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$, описанного в п. 2.1.6.

Глава 3

Третья глава диссертации посвящена применению теории представлений симметрических групп и тесно связанной с ней теории симметрических функций к исследованию некоторых моделей теоретической физики.

q-Бозонная модель, введенная и решенная в [79, 80, 82], описывает систему сильно коррелированных бозонов на конечной одномерной решетке, которая играет важную роль в таких областях современной физики, как физика твердого тела и квантовая нелинейная оптика. Соответствующая q-бозонная (или q-осцилляторная) алгебра [132] тесно связана с квантовой алгеброй $sl_q(2)$ [39]. Лучше всего изучен частный случай $q=0$ этой модели, который называется

фазовой моделью [81, 82, 78].

Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ), разработанный Л. Д. Фаддеевым и его школой, представляет собой мощное регулярное средство исследования интегрируемых моделей математической физики, см. изложения в [60, 93, 133, 3]. В диссертации показано, что КМОЗ для q-бозонной модели имеет красивую и полезную интерпретацию в терминах алгебры симметрических функций. Исчерпывающим источником по теории симметрических функций является монография [138].

В п. 3.1.1 строится реализация фазовой модели в алгебре симметрических функций Λ, при которой базисному фоковскому вектору $\psi_{n_0,\dots,n_M}$ с числами заполнения $n_0, \dots, n_M$ сопоставляется функция Шура $s_\lambda(x)$, соответствующую диаграмме Юнга λ, имеющей n_j строк длины j. Оказывается, что при этом *оператор рождения $B(u)$ в КМОЗ совпадает (с точностью до скалярного множителя) с оператором умножения на (усеченную) производящую функцию $H_M(u^2) = \sum_{k=0}^{M} u^{2k} h_k$ полных симметрических функций h_k* (**теорема 3.1**), а оператор уничтожения $C(u)$ — с сопряженным к нему относительно стандартного скалярного произведения в Λ оператором $H_M^\perp(u^{-2})$. Это, в частности, позволяет, применяя аппарат симметрических функций, получить *разложение волновой функции по базисным фоковским векторам; коэффициенты этого разложения задаются функциями Шура* (**теорема 3.2**). Кроме того, можно найти *пределы регуляризованных операторов рождения и уничтожения при $M \to \infty$ в виде вертексных операторов* (**лемма 3.10**).

С другой стороны, установленную взаимосвязь между фазовой моделью и симметрическими функциями можно использовать и в другом направлении: например, применяя коммутационные соотношения для $B(u)$ и $C(u)$, получаемые в КМОЗ (т. е. соответствующую R-матрицу), можно вывести *коммутационные соотношения для оператора умножения на $H_M(u)$ и сопряженно-*

го к нему оператора $H_M^{\perp}(u)$ в подпространстве Λ_M алгебры Λ, натянутом на функции Шура, индексированные диаграммами, имеющими не более M столбцов (**следствие 3.2**); они имеют более сложный вид, чем коммутационные соотношения для оператора умножения на полную производящую функцию $H(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{2k} h_k$ и сопряженного к нему оператора $H^{\perp}(u)$ во всей алгебре Λ.

В работе также установлена связь операторов, возникающих в КМОЗ для фазовой модели, с формализмом вертексных операторов, применявшимся А. Окуньковым и Н. Решетихиным [149] для вычисления корреляционных функций трехмерных диаграмм Юнга (плоских разбиений). Оказывается, что вертексные операторы из работы [149] — это те же операторы $H(u)$ и $H^{\perp}(u)$, т. е. пределы регуляризованных операторов рождения и уничтожения фазовой модели при $M \to \infty$. Однако для изучения трехмерных диаграмм Юнга, содержащихся в некотором ящике, т. е. подчиненных некоторым ограничениям, подход [149] неприменим, в то время как метод из работы Н. М. Боголюбова [78], основанный на КМОЗ для фазовой модели, позволяет вычислить статистическую сумму и корреляционные функции для трехмерных диаграмм, содержащихся в ящике, поскольку, как отмечено выше, он позволяет получить коммутационные соотношения для «усеченных» операторов.

Аналогичная схема может быть реализована для общей q-бозонной модели. В этом случае вместо функций Шура следует использовать их обобщение — функции Холла–Литлвуда $P_\lambda(x; q^2)$. В частности, *оператор рождения в q-бозонной модели совпадает (с точностью до скалярного множителя) с оператором умножения на производящую функцию $Q_M(u) = \sum_{k=0}^{M} u^{2k} q_k$*, где $q_0(x,t) = 1$ и $q_r(x;t) = (1-t)P_{(r)}(x;t)$ при $r \geq 1$ (**теорема 3.3**), а *волновые функции q-бозонной модели выражаются через функции Холла–Литлвуда* (**теорема 3.4**).

В § 3.2 рассматриваются спектральные свойства замечательного элемента групповой алгебры симметрической группы $\mathfrak{S}_N$, который назван *оператором Кокстера–Лапласа* и который задается формулой $L_N = Ne - (s_1 + \ldots + s_N)$, где s_k есть кокстеровская транспозиция $(k, k+1)$. Этот оператор тесно связан с одной из классических интегрируемых моделей статистической физики — с *изотропной цепочкой (XXX-моделью) Гейзенберга* (см., напр., [33, 61]). А именно, если рассмотреть представление Шура–Вейля (1) группы $\mathfrak{S}_N$ в тензорном произведении $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$, то образ L оператора Кокстера–Лапласа в этом представлении связан с гамильтонианом H изотропной цепочки Гейзенберга на периодической одномерной решетке с N узлами формулой $H = \frac{J}{4}(2L - N)$, где $J > 0$ соответствует ферромагнитной цепочке, а $J < 0$ — антиферромагнитной цепочке. С другой стороны, L_N есть обычный оператор Лапласа для графа Кэли симметрической группы, соответствующего классической кокстеровской системе образующих, дополненной транспозицией $(N, 1)$ в соответствии с периодическими граничными условиями. Следует отметить, что подход к изучению цепочки Гейзенберга с использованием двойственности Шура–Вейля был одновременно с автором применён Е. Мухиным, В. Тарасовым и А. Варченко [142, 143].

С физической точки зрения интерес представляют собственные числа и собственные векторы гамильтониана H в пределе при $N \to \infty$. Для ферромагнитной цепочки решение задачи дал Г. Бете [74]. Для антиферромагнитной цепочки асимптотика $\frac{\lambda_N}{N} \to c_{\max} = 2 \ln 2$ при $N \to \infty$ для энергии λ_N основного состояния цепочки с N узлами была впервые вычислена Л. Хюльтеном [116] на основе эвристических соображений; строгое доказательство было получено Янгом и Янгом [184]. Поскольку гамильтониан H связан с оператором Кокстера–Лапласа L линейным соотношением, собственные векторы этих операторов совпадают, а собственные числа выражаются друг через друга линейной формулой. Таким образом, нас интересует асимптотическое поведение оператора Кокстера–Лапласа L_N и его спектра при $N \to \infty$. В п. 3.2.1 представлены результаты для ферромагнитной цепочки (предельные плотности собственных значений, слабые пределы операторов и т. п.). Антиферромагнитный асимптотический режим изучается в п. 3.2.2. В частности, показано, что *основное состояние антиферромагной цепочки при* $N = 2n$ *лежит в неприводимом представлении симметрической группы с диаграммой Юнга* (n, n) (**теорема 3.6**), и рассмотрены слабые пределы нормированного оператора Кокстера–Лапласа в естественных представлениях группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$. Все эти пределы оказываются скалярными операторами, и максимальное значение константы среди рассмотренных примеров достигается в случае представления Шура–Вейля. Это максимальное значение меньше $c_{\max}$, однако в **теореме 3.7** доказано, что, обобщая конструкцию представлений Шура–Вейля, *можно построить представление группы* $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$*, для которого соответствующая константа будет сколь угодно близка к* $c_{\max}$.

Обозначения

В этом разделе приводится сводка часто используемых в основном тексте понятий и обозначений (без попытки дать изложение соответствующих теорий).

Комбинаторика диаграмм и таблиц Юнга

Обозначим через $\mathbb{Y}_N$ множество диаграмм Юнга с N клетками, а через $\mathbb{Y}_N^{\leq l} \subset \mathbb{Y}_N$ подмножество диаграмм с не более чем l строками. Графом Юнга $\mathbb{Y}$ называется $\mathbb{Z}$-градуированный граф, у которого множество вершин N-го этажа есть $\mathbb{Y}_N$, а ребром соединены диаграммы $\lambda \in \mathbb{Y}_N$ и $\mu \in \mathbb{Y}_{N+1}$, если μ получается из λ добавлением одной клетки; нулевой этаж состоит из пустой диаграммы $\emptyset$.

Обозначим через $\mathbb{T}_N$ множество всех стандартных таблиц Юнга с N клетками (понимаемых также как пути в графе Юнга). В дальнейшем, если не оговорено противное, под таблицей всегда понимается стандартная таблица Юнга. Для диаграммы $\lambda \in \mathbb{Y}_N$ через $[\lambda] \subset \mathbb{T}_N$ обозначим множество таблиц с диаграммой λ, т. е. множество путей в графе Юнга от $\emptyset$ до λ. Через $[t]_N$ обозначается начальный отрезок длины N таблицы t, а через $c_k(t)$ — содержание той клетки таблицы t, которая содержит элемент k (напомним, что содержание клетки, находящейся в i-й строке и j-м столбце, по определению равно $j - i$).

Обозначим через $\mathbb{T} = \varprojlim \mathbb{T}_n$ пространство бесконечных таблиц Юнга (проективный предел пространств $\mathbb{T}_n$ относительно естественных проекций, состоящих в «забывании» хвоста пути) с топологией покоординатной сходимости. Это вполне несвязное метризуемое компактное пространство. Для данной конечной таблицы $u \in \mathbb{T}_n$ обозначим через $C_u = \{t \in \mathbb{T} : [t]_n = u\}$ соответствующее цилиндрическое множество. Для диаграммы $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ положим также $C_\lambda = \cup_{t\in[\lambda]} C_u = \{t \in \mathbb{T} : [t]_n \in \lambda\}$. Хвостовое отношение эквивалентности на $\mathbb{T}$ определяется следующим образом: пути $s = (s_1, s_2, \ldots)$ и $t = (t_1, t_2, \ldots)$ эквивалентны (конфинальны) тогда и только тогда, когда $s_k = t_k$ для достаточно больших k. Отношение n-эквивалентности $\sim_n$ на $\mathbb{T}$ определяется аналогично: $s \sim_n t$, если $s_k = t_k$ при $k \geq n$. Пару (s, t) эквивалентных таблиц будем называть битаблицей. Обозначим пространство битаблиц $\mathcal{B} = \{(s, t) : \ s \sim t\}$; полагая $\mathcal{B}_n = \{(s, t) : \ s \sim_n t\}$, имеем $\mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n$ — сепарабельное, вполне несвязное, локально компактное пространство.

Представления симметрических групп

Пусть $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа порядка n. Ее неприводимые представления параметризуются множеством $\mathbb{Y}_n$ диаграмм Юнга с n клетками. Через π_λ будем обозначать неприводимое унитарное представление, соответствующее диаграмме $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, а через $\dim \lambda$ — его размерность. Ветвление неприводимых представлений индуктивного семейства симметрических групп с естественными вложениями описывается графом Юнга. Согласно правилу ветвления, каждой таблице $t \in [\lambda]$ соответствует одномерное подпространство в пространстве V_λ представления π_λ. Выбрав единичный вектор h_t в каждом таком подпространстве, мы получим базис $\{h_t,\ t \in [\lambda]\}$ в V_λ, называемый базисом Гельфанда–Цетлина.

Алгеброй Гельфанда–Цетлина группы $\mathfrak{S}_n$ называется подалгебра групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, порожденная центрами $Z[\mathfrak{S}_k]$ подгрупп $\mathfrak{S}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Это максимальная коммутативная подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ — алгебра операторов, диагональных в базисе Гельфанда–Цетлина. Мультипликативный базис алгебры Гельфанда–Цетлина образуют элементы Юнга–Юциса–Мэрфи (YJM-элементы) X_l, $l = 1, \ldots, n$, где $X_l = (1, l) + (2, l) + \ldots + (l-1, l) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$; здесь, как обычно, (i, j) обозначает транспозицию элементов i и j.

Преобразование Фурье на группе $\mathfrak{S}_n$ сопоставляет функции $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ матричнозначную функцию $\hat{f}$ на $\mathbb{Y}_n$, где

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w) \pi_\lambda^*(w)$$

(здесь $*$ — матричное транспонирование). При преобразовании Фурье свертка функций на $\mathfrak{S}_n$ переходит в матричное умножение: $\widehat{(f * g)}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$. Рассматривая матричные элементы относительно базиса Гельфанда–Цетлина, получаем табличную форму преобразования Фурье: $f \mapsto \widehat{f} \in \mathbb{C}(B_n)$, где

$$\widehat{f}(s,t) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)\overline{(\pi_\lambda(w)h_t, h_s)}, \quad (s,t) \in B_n.$$

Формула обращения для преобразования Фурье имеет вид

$$f(w) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \frac{\dim \lambda}{n!} \operatorname{tr}(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(w)), \qquad w \in \mathfrak{S}_n. \tag{3}$$

Через $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n = \varinjlim \mathfrak{S}_n$ обозначается бесконечная симметрическая группа с фиксированной структурой индуктивного предела конечных групп. Алгебра Гельфанда–Цетлина бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ есть подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}]$, порожденная всеми центрами $Z[\mathfrak{S}_1], Z[\mathfrak{S}_2], \ldots$.

Характером группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ называется положительно определенная центральная функция χ на $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, нормированная условием $\chi(e) = 1$. Экстремальные характеры индексируются параметрами Тома

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq 0, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq 0, \quad \sum \alpha_i + \sum \beta_i \leq 1,$$

и являются нормированными следами фактор-представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ конечного типа. Фактор-представление, соответствующее паре (α, β), будем обозначать через $\pi^{\alpha,\beta}$, а его характер через $\chi^{\alpha,\beta}$.

Мера M на пространстве таблиц $\mathbb{T}$ называется центральной, если мера цилиндра C_u зависит только от формы таблицы $u \in \mathbb{T}_n$. Имеется соответствие $\chi \leftrightarrow M$ между характерами группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и центральными вероятностными мерами на $\mathbb{T}$, которое задается формулой

$$\chi_n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} M_n(\lambda) \frac{\chi^\lambda}{\dim \lambda}, \tag{4}$$

где $\chi_n = \chi|_{\mathfrak{S}_n}$ — ограничение характера χ на $\mathfrak{S}_n$, а $M_n(\lambda) = M(\{t : [t]_n \in \lambda\})$ — цилиндрическое распределение на $\mathbb{Y}_n$ меры M.

Мерой Планшереля называется центральная мера Pl на $\mathbb{T}$, цилиндрические распределения которой задаются формулой

$$\mathrm{Pl}_n(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}. \tag{5}$$

При помощи преобразования Фурье групповая алгебра $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}]$ бесконечной симметрической группы реализуется как скрещенное произведение, построенное по коммутативной алгебре функций на пространстве таблиц $\mathbb{T}$ (алгебре Гельфанда–Цетлина) и хвостовому отношению эквивалентности. А именно, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}]$ канонически изоморфна C*-пополнению алгебры комплекснозначных локально постоянных финитных функций на пространстве битаблиц $\mathcal{B}$ со сверткой в качестве умножения и инволюцией $f^*(s,t) = \overline{f(t,s)}$. Если даны квазиинвариантная мера μ на пространстве таблиц Юнга $\mathbb{T}$ и 1-коцикл c на битаблицах со значениями в группе комплексных чисел по модулю равных единице, то можно построить унитарное представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ в пространстве $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ следующим образом (см., напр., [21]):

$$L_g h(s) = \sum_{t \sim s} \sqrt{\frac{d\mu(s)}{d\mu(t)}} \hat{g}(s,t) c(s,t) h(t), \qquad \phi \in L^2(\mathbb{T}, \mu), \tag{6}$$

где $\hat{g}$ — функция на битаблицах, соответствующая элементу $g \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ (преобразование Фурье элемента g). Заметим, что коцикл тривиален на пространстве конечных таблиц.

Элементарным представлением бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ называется индуктивный предел неприводимых представлений конечных симметрических групп $\mathfrak{S}_n$, а *простым* — индуктивный предел представлений конечных симметрических групп $\mathfrak{S}_n$ с простым спектром. *Дискретным* представлением D_τ группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ будем называть элементарное представление, спектральная мера которого есть δ-мера, сосредоточенная на одной бесконечной таблице $\tau \in \mathbb{T}$; таким образом, представление D_τ реализуется в пространстве l^2, натянутом на все таблицы, конфинальные τ.

Пространство Фока

Пространством Фока над гильбертовым пространством H называется пространство

$$\mathcal{F}_\pm(H) = S^0_\pm H \oplus S^1_\pm H \oplus \ldots \oplus S^n_\pm H \oplus \ldots,$$

где S_+ — оператор симметризации (соответствующее пространство Фока называется *бозонным*), а S_- — оператор антисимметризации (соответствующее пространство Фока называется *фермионным*).

Удобную реализацию фермионного пространства Фока $\mathcal{F}$ дает пространство полубесконечных мономов. Пусть $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — базис пространства H. Тогда $\mathcal{F}$ натянуто на элементы вида $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \ldots$, где $i_1 > i_2 > \ldots$ и $i_n = i_{n-1} - 1$ для всех достаточно больших n, и снабжено скалярным произведением, относительно которого такие мономы образуют ортонормированный базис. Пусть ϕ_k — оператор внешнего умножения на u_k, а ϕ^*_k — сопряженный оператор. Тогда это семейство операторов удовлетворяет каноническим антикоммутационным соотношениям (КАС), т. е. образует представление алгебры Клиффорда. В работе используются производящие функции $\phi(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \phi_i z^{-(i+1)}$, $\phi^*(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \phi^*_i z^i$.

Положим $a^\phi_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_k \phi^*_{k+n}$ при $n \neq 0$ и $a^\phi_0 = \sum_{n=1}^\infty \phi_n \phi^*_n - \sum_{n=0}^\infty \phi^*_{-n} \phi_{-n}$. Эти операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (ККС), т. е. образуют представление алгебры Гейзенберга $\mathfrak{A}$. Они называются свободными бозонами, построенными по свободным фермионам ϕ_k. Обозначим $a^\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^\phi z^{-(n+1)}$.

Алгебры $\mathfrak{sl}_2$, $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, Vir

Необходимые сведения о представлениях алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ могут быть найдены, например, в [37], теория аффинных алгебр Ли изложена в [34], а представлениям алгебры Вирасоро посвящена монография [117].

В работе рассматривается алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ со стандартными образующими e, f, h, удовлетворяющими коммутационным соотношениям $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$, $[f, e] = -2f$. Используется также базис из матриц Паули:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Соответствующая аффинная алгебра Ли есть $\widehat{\mathfrak{sl}_2} = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ с коммутационными соотношениями

$$[a \otimes t^n, b \otimes t^m] = [a, b] \otimes t^{n+m} + \langle a, b\rangle n\delta_{n+m,0}c, \quad [c, \widehat{\mathfrak{sl}_2}] = 0,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — форма Киллинга–Картана на $\mathfrak{sl}_2$. Обозначим $x_n = x \otimes t^n$. Однородная градуировка на $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ задается формулами $\deg_H x_n = n$.

Через $L_{j,1} = L(\Lambda_j)$, $j = 0, 1$, обозначим представление аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ уровня 1 со старшим весом Λ_j. В частности, $L_{0,1}$ — базисное представление.

Алгебра Вирасоро Vir есть центральное расширение алгебры Витта комплексных полиномиальных векторных полей на окружности. Она порождена элементами L_n, $n \in \mathbb{Z}$, и c с коммутационными соотношениями

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}c, \qquad [c, L_n] = 0.$$

Через $L(1, k^2)$ обозначается представление старшего веса алгебры Vir с центральным зарядом 1 и конформной размерностью k^2.

Глава 1

Анализ некоторых классов представлений бесконечной симметрической группы

Первая глава диссертации посвящена изучению различных классов представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, имеющих важные применения как в теории представлений, так и в ее приложениях, в частности в математической физике.

В § 1.1 классическая двойственность Шура–Вейля между неприводимыми представлениями общей линейной группы $GL(n, \mathbb{C})$ (или специальной линейной группы $SL(n, \mathbb{C})$) и (конечной) симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ распространяется на случай группы $SL(n, \mathbb{C})$ и бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Представления Шура–Вейля, строящиеся и изучающиеся в § 1.1, естественным образом связаны с многими важными объектами теории представлений, например с представлениями аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ и алгебры Вирасоро Vir. Этим связям посвящен § 1.2. А именно, исследовано выделенное представление Шура–Вейля, названное серпантинным представлением, показано, что существует сохраняющий градуировку унитарный изоморфизм $\mathfrak{sl}_2$-модулей между пространством H_Π серпантинного представления и базисным $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$-модулем $L_{0,1}$, и изучены его свойства.

В § 1.3 вводится класс т. н. марковских представлений бесконечной симметрической группы — представлений, обладающих циклическим вектором, спектральная мера которого относительно алгебры Гельфанда–Цетлина является марковской в естественном смысле, и доказывается, что класс марковских представлений совпадает с классом простых представлений — индуктивных пределов представлений конечных симметрических групп с простым спектром. Параграф 1.4 посвящен изучению представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, индуцированных с единичных подгрупп Юнга. В § 1.5 рассматривается реализация представлений конечных симметрических групп, соответствующих двустрочечным диаграммам Юнга, в пространстве бесквадратных симметрических форм и представления группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, индуцированные с двублочных подгрупп Юнга. В § 1.6 дается явное описание изоморфизма между табличной и динамической моделью фактор-представлений группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$.

1.1 Представления Шура–Вейля

1.1.1 Бесконечномерная двойственность Шура–Вейля

Будем рассматривать частный случай двойственности Шура–Вейля при $l = 2$. Для определенности пусть $N = 2n + 1$ нечетно. Тогда

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_N^{\le 2}} \pi_\lambda \otimes \rho_\lambda = \sum_{k=0}^{n} \pi_{\lambda^{(k)}} \otimes \rho_{\lambda^{(k)}}, \tag{1.1}$$

где $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}) = (n+k+1, n-k)$, так что $\lambda_1^{(k)} - \lambda_2^{(k)} = 2k+1$.

В классической двойственности Шура–Вейля (1.1) рассмотрим ограничение представления $\rho_{\lambda^{(k)}}$ на подгруппу $SL(2,\mathbb{C}) \subset GL(2,\mathbb{C})$. Это неприводимое представление специальной линейной группы $SL(2,\mathbb{C})$, которое зависит только от разности $\lambda_1^{(k)} - \lambda_2^{(k)} = 2k+1$, т. е. от k. Пусть M_m — m-мерное неприводимое представление группы $SL(2,\mathbb{C})$. Тогда

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes(2n+1)} = \sum_{j=0}^{n} \pi_{(n+j+1,n-j)} \otimes M_{2j+2}. \tag{1.2}$$

Аналогичным образом, для четного $N = 2n$ мы имеем

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes(2n)} = \sum_{j=0}^{n} \pi_{(n+j,n-j)} \otimes M_{2j+1}. \tag{1.3}$$

Снабдим пространства $(\mathbb{C}^l)^{\otimes N}$ стандартным скалярным произведением и будем рассматривать все представления как унитарные. Заметим, что в обоих пространствах $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ и $(\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+2)}$ действуют группы $SL(2,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{S}_N$ (при стандартном вложении $\mathfrak{S}_N \hookrightarrow \mathfrak{S}_{N+2}$).

Определение 1.1. *Изометрические вложения* $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+2)}$, *эквивариантные относительно обоих действий, назовем* вложениями Шура–Вейля.

Для диаграмм Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}_N$, $\mu \in \mathbb{Y}_{N+k}$, таких, что $\lambda \subset \mu$, будем обозначать через $\mathbb{T}(\lambda,\mu)$ множество всех путей в графе Юнга от λ до μ, а через $H(\lambda,\mu)$ — гильбертово пространство, в котором элементы множества $\mathbb{T}(\lambda,\mu)$ образуют ортонормированный базис. При $\lambda \in \mathbb{Y}_N^{\le 2}$ и $\mu \in \mathbb{Y}_{N+2}^{\le 2}$ будем говорить, что пара (λ,μ) *допустима*, если $\lambda \subset \mu$ и μ получается из λ добавлением по одной клетке в каждую строку.

Предложение 1.1. *Вложения Шура–Вейля* $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+2)}$ *при* $N = 2n-1$ *или* $N = 2n$ *параметризуются точками тора* $(\mathbb{S}^1)^n$, *где* $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Доказательство. Ясно, что при вложении Шура–Вейля для каждого k мы имеем

$$\pi_{(n+k-1,n-k)} \otimes M_{2k} \hookrightarrow \pi_{(n+k,n-k+1)} \otimes M_{2k},$$

где $\pi_{(n+k-1,n-k)} \hookrightarrow \pi_{(n+k,n-k+1)}$ — вложение неприводимого представления $\pi_{(n+k-1,n-k)}$ группы $\mathfrak{S}_{2n-1}$ в неприводимое представление $\pi_{(n+k+1,n-k+1)}$ группы $\mathfrak{S}_{2n+1}$. Аналогичное утверждение имеет место в случае четного N.

Очевидно, $H(\lambda,\mu)$ есть пространство кратностей представления π_λ в π_μ, так что изометрические вложения $\pi_\lambda \hookrightarrow \pi_\mu$, коммутирующие с действием группы $\mathfrak{S}_N$, параметризуются единичными векторами $h \in H(\lambda,\mu)$. При $\lambda = (n+k-1, n-k)$ и $\mu = (n+k, n-k+1)$ пара (λ,μ) допустима, так что множество $\mathbb{T}(\lambda,\mu)$ состоит из двух элементов: таблица t_{21} получается добавлением элемента $2n$ во вторую строку и элемента $2n+1$ в первую строку, а таблица t_{12} получается добавлением элемента $2n$ в первую строку и элемента $2n+1$ во вторую строку. Таким образом, мы можем *отождествить* пространства $H((n+k-1,n-k),(n+k,n-k+1))$ для всех k. Обозначим полученное пространство через $H^{1,1}$ и зафиксируем в нем стандартный базис $\{t_{21}, t_{12}\}$. Тогда изометрические вложения $\pi_\lambda \hookrightarrow \pi_\mu$, коммутирующие с действием симметрической группы $\mathfrak{S}_N$, параметризуются элементами окружности $\mathbb{S}^1 \subset H^{1,1}$.

В случае четного N ситуация в точности аналогична с единственным исключением: для диаграмм $\lambda = (n,n)$ и $\mu = (n+1,n+1)$ пространство кратностей $H(\lambda,\mu)$ одномерно. $\square$

Описанная схема имеет естественное обобщение.

Определение 1.2. Обобщенное вложение Шура–Вейля — *это изометрическое вложение* $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+2k)}$, $k \geq 1$, *эквивариантное относительно действий групп* $SL(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathfrak{S}_N$ *(при стандартном вложении* $\mathfrak{S}_N \hookrightarrow \mathfrak{S}_{N+2k}$*)*.

Развиваемая ниже теория представлений Шура–Вейля бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ легко распространяется на случай обобщенных вложений Шура–Вейля.

Рассмотрим *бесконечную* цепочку вложений Шура–Вейля

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 0} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes 4} \hookrightarrow \dots \tag{1.4}$$

или

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 1} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes 5} \hookrightarrow \dots \tag{1.5}$$

(в дальнейшем эти два случая мы будем называть «четным» и «нечетным» соответственно) и соответствующий индуктивный предел Π представлений симметрических групп. В пространстве $\mathcal{H}$ этого представления имеются коммутирующие действия бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и специальной линейной группы $SL(2,\mathbb{C})$. Как следует из предложения 1.1, представление Π определяется набором векторов $h_j^{(k)} \in \mathbb{S}^1$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 0, 1, \dots$, где $h_j^{(k)}$ задает вложение $\pi_{(k+j,j)} \hookrightarrow \pi_{(k+j+1,j+1)}$.

Из предыдущих рассмотрений мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть* Π — *представление бесконечной симметрической группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, *являющееся индуктивным пределом стандартных представлений конечных симметрических групп* $\mathfrak{S}_N$ *в пространствах* $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ *относительно бесконечной цепочки* (1.4) *или* (1.5) *вложений Шура–Вейля. Тогда* Π *рас-*

кладывается в счетную прямую сумму примарных представлений

$$\Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k(h^{(k)}) \otimes M_{k+1}, \tag{1.6}$$

где $\Pi_k(h^{(k)})$ *— неприводимое представление группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$*, которое есть индуктивный предел неприводимых представлений конечных симметрических групп* $\mathfrak{S}_k, \mathfrak{S}_{k+2}, \ldots$*, соответствующих диаграммам Юнга* (k)*,* $(k+1,1)$*,* $(k+2,2)$*, …,* $(k+n,n)$*, …, относительно вложений, задаваемых последовательностью* $h^{(k)} = (h_0^{(k)}, h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \ldots) \in (\mathbb{S}^1)^\infty$*, и сумма берется по всем четным* k *в четном случае и по всем нечетным* k *в нечетном случае.*

Определение 1.3. *Представление* Π *бесконечной симметрической группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *назовем* представлением Шура–Вейля*, задаваемым последовательностью вложений Шура–Вейля с параметрами* $h_j^{(k)} \in \mathbb{S}^1$*,* $k = 0,1,\ldots$*,* $j = 0,1,\ldots$*. Представления вида* $\Pi_k(h^{(k)})$ *будем называть* неприводимыми представлениями Шура–Вейля*.*

Среди применений введенного класса представлений Шура–Вейля отметим связь с представлениями аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ и алгебры Вирасоро (см. § 1.2) и теорему 3.7 о спектре оператора Кокстера–Лапласа (п. 3.2.2).

Важный класс неприводимых представлений Шура–Вейля состоит из представлений, задаваемых однородными по N последовательностями вложений Шура–Вейля, как описано в следующем определении.

Определение 1.4. *Неприводимое представление Шура–Вейля, задаваемое последовательностью* $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots) \in (\mathbb{S}^1)^\infty$*, называется* стационарным представлением Шура–Вейля*, если* $h_0 = h_1 = h_2 = \ldots$.

Обозначим

$$\mathbb{T}^{\mathrm{odd}} = \{\tau = (\tau^{(1)}, \tau^{(3)}, \tau^{(5)}, \dots) : \tau^{(n)} \in \mathbb{Y}_n^{\le 2},\ \tau^{(n)} \subset \tau^{(n+2)} \text{ для всех } n,$$
$$\text{пара } (\tau^{(n)}, \tau^{(n+2)}) \text{ допустима для достаточно больших } n\}.$$

Таким образом, $\mathbb{T}^{\mathrm{odd}}$ есть множество ограничений бесконечных двустрочечных таблиц Юнга (рассматриваемых как последовательности диаграмм Юнга) на *нечетные* этажи, таких, что для достаточно больших n диаграмма с $n+2$ клетками получается из диаграммы с n клетками добавлением по одной клетке в каждую строку.

По определению при $\tau \in \mathbb{T}^{\mathrm{odd}}$ с $\tau^{(n)} = (\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)})$ последовательность $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)}$ стабилизируется на некотором значении $k = 1, 3, 5, \dots$: $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} = k$ для достаточно больших n. Обозначая соответствующее подмножество в $\mathbb{T}^{\mathrm{odd}}$ через $\mathbb{T}_k^{\mathrm{odd}}$, мы имеем

$$\mathbb{T}^{\mathrm{odd}} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{T}_{2j-1}^{\mathrm{odd}}.$$

Множества $\mathbb{T}_k^{\mathrm{odd}}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{odd}}$, очевидно, счетны. Множество $\mathbb{T}_k^{\mathrm{odd}}$ состоит из конфинальных последовательностей.

Пусть $h = (h_0, h_1, \dots)$ — последовательность, задающая неприводимое представление Шура–Вейля $\Pi_k(h)$; напомним, что h_j определяет вложение $\pi_{(k+j,j)} \hookrightarrow \pi_{(k+j+1,j+1)}$. Рассмотрим произвольную таблицу $\tau \in \mathbb{T}^{\mathrm{odd}}$. По определению множества $\mathbb{T}^{\mathrm{odd}}$ для достаточно больших j пара $(\tau_{k+2j}, \tau_{k+2j+2})$ допустима, поэтому можно отождествить $H(\tau_{k+2j}, \tau_{k+2j+2})$ с $H^{1,1}$ и считать, что $h_j \in H(\tau_{k+2j}, \tau_{k+2j+2})$. Пусть H_τ^h — *неполное тензорное произведение* пространств $H(\tau_n, \tau_{n+2})$ с выделенным вектором h, т. е. пополнение множества всех конечных линейных комбинаций векторов $\bigotimes_{j=0}^{\infty} v_{2j+1}$ с $v_n \in H(\tau_n, \tau_{n+2})$, таких, что все v_n за исключением конечного числа совпадают с h_n.

В четном случае рассуждение аналогично, вместо $\mathbb{T}^{\mathrm{odd}}$ вводится пространство $\mathbb{T}^{\mathrm{even}}$. Однако в этом случае имеется исключительное представление Π_0 (не зависящее от h) — индуктивный предел неприводимых представлений с диаграммами Юнга (n, n). Это дискретное представление D_{τ_0}, которое реализуется в пространстве l^2, натянутом на все бесконечные таблицы Юнга, конфинальные таблице

$$\tau_0 = \begin{array}{|c|c|c}\hline 1 & 3 & \cdots \\ \hline 2 & 4 & \cdots \\ \hline \end{array},$$

т. е. представление, спектральная мера которого относительно алгебры Гельфанда–Цетлина есть дельта-мера δ_{τ_0}.

Определение 1.5. *Таблицу τ_0 будем называть* вакуумной *таблицей. (Смысл этого термина будет ясен из* §1.2.*)*

Таким образом, мы получаем следующий результат.

Предложение 1.2. *Пусть $k \geq 1$, и пусть $H_k(h)$ — пространство представления $\Pi_k(h)$. Тогда*

$$H_k(h) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{T}_k^{\mathrm{odd}}} H_\tau^h.$$

Заметим, что подпространства H_τ^h не инвариантны относительно действия группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

1.1.2 Спектральный анализ представлений Шура–Вейля

Цель этого раздела — найти спектральную меру неприводимого представления Шура–Вейля $\Pi_k(h)$, $k \geq 1$, т. е. реализовать его в пространстве $L^2(\mathbb{T}, \nu)$ для некоторой меры ν на пространстве всех бесконечных таблиц Юнга $\mathbb{T}$.

По определению представления Шура–Вейля $h_j \in H(\lambda^{(j)}, \lambda^{(j+1)})$, где $\lambda^{(j)} = (k+j, j)$. Пусть $h_j = p_j t_{21} + q_j t_{12}$, где $\{t_{21}, t_{12}\}$ — стандартный табличный базис в $H(\lambda^{(j)}, \lambda^{(j+1)}) \simeq H^{(1,1)}$. В силу унитарности $p_j^2 + q_j^2 = 1$.

Обозначим через $\mathbb{T}^{\mathrm{proper}}$ множество всех конечных таблиц Юнга $t \in \mathbb{T}_N$, $N \in \mathbb{N}$, таких, что пара $([t]_{N-2}, t)$ не допустима, и пусть $\mathbb{T}_k^{\mathrm{proper}} = \{t \in \mathbb{T}^{\mathrm{proper}} : t \in [\lambda],\ \lambda_1 - \lambda_2 = k\}$. Для данной таблицы $t \in \mathbb{T}_k^{\mathrm{proper}}$ рассмотрим меру μ_t^h на $\mathbb{T}$, которая представляет собой распределение следующего случайного блуждания на $\mathbb{T}$: начнем с таблицы $t \in \mathbb{T}_N$ и на каждом шаге, переходя с n-го этажа на $(n+2)$-й, будем выбирать путь, соответствующий таблице t_{21}, с вероятностью $\alpha_n = p_j^2$, и путь, соответствующий таблице t_{12}, с вероятностью $\beta_n = q_j^2$, где $j = [(n-k)/2]$.

Пусть

$$\mu^{(k)} = \sum_{t \in \mathbb{T}_k^{\mathrm{proper}}} \mu_t.$$

Теорема 1.2. *Представление* $\Pi_k(h)$ *имеет простой спектр относительно алгебры Гельфанда–Цетлина, и*

$$\Pi_k(h) \simeq L^2(\mathbb{T}, \mu^{(k)}). \tag{1.7}$$

Доказательство. Будем обозначать норму в $L^2(\mathbb{T}, \mu^{(k)})$ через $\|\cdot\|$. По определению $\Pi_k(h)$ есть индуктивный предел неприводимых представлений $\pi_{(k)}$, $\pi_{(k+1,1)}$, $\pi_{(k+2,2)}, \ldots$. Представление $\pi_{(k)}$ одномерно; единственной таблице t с диаграммой (k) сопоставим функцию $\phi_t = \delta_t$, где δ_t — цилиндрическая функция в $L^2(\mathbb{T}, \mu^{(k)})$, такая, что $\delta_t(s) = 1$, если $[s]_k = t$, и $\delta_t(s) = 0$ в противном случае. Очевидно, $\|\phi_t\|{=}1$. Теперь предположим, что функции $\phi_t \in L^2(\mathbb{T}, \mu^{(i)})$ построены для всех t с диаграммой $(k+l, l)$. Полагая $N = k+2l$ и рассматривая ограничение неприводимого представления $\pi = \pi_{(k+l+1,l+1)}$ группы $\mathfrak{S}_{N+2}$ на $\mathfrak{S}_N$, имеем $\pi = \pi_{(k+l,l)} \oplus \pi'$, где $\pi' = \pi_{(k+l+1,l-1)} + \pi_{(k+l-1,l+1)}$ и в случае $k < 2$ последний член отсутствует. Пусть теперь $t \in \mathbb{T}_{N+2}((k+l+1, l+1))$. Если $[t]_N \in \mathbb{T}_N(\lambda)$ с $\lambda = (k+l+1, l-1)$ или $\lambda = (k+l-1, l+1)$, то $t \in \mathbb{T}_k^{\mathrm{proper}}$

и следует положить $\phi_t = \delta_t$. Если $[t]_N \in (k+l, l))$, то $\phi_{[t]_N}$ уже построена и следует положить

$$\phi_t = \phi_{[t]_N} \cdot \begin{cases} \frac{1}{p}\delta_t, & \text{если } N+1 \text{ лежит во второй строке таблицы } t, \\ \frac{1}{q}\delta_t, & \text{если } N+1 \text{ лежит в первой строке таблицы } t. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что определенное таким образом отображение $t \mapsto \phi_t$ есть изометрия $\pi_{(k+l,l)} \to L^2(\mathbb{T}, \mu^{(k)})$, и эти отображения согласованы с вложениями $\pi_{(k+l,l)} \hookrightarrow \pi_{(k+l+1,l+1)}$. $\square$

В частности, для стационарного представления Шура–Вейля имеем $\alpha_j \equiv \alpha$, $\beta_j \equiv \beta$ для всех j, и соответствующая мера $\mu^{(k)}$ на пространстве бесконечных таблиц Юнга есть распределение стационарного («бернуллиевского») случайного блуждания.

Пример. Если все h_j совпадают с t_{21} (или с t_{21}), т. е. $p \in \{0, 1\}$, то мера $\mu^{(k)}$ есть δ-мера, сосредоточенная в некоторой бесконечной таблице τ, и соответствующее представление $\Pi_k(h)$ есть дискретное представление D_τ.

Замечание. Мера $\mu^{(k)}$ на множестве бесконечных таблиц Юнга не центральна. Она σ-конечна, непрерывна и эргодична относительно хвостового отношения эквивалентности на разбиениях.

Имеется выделенное вложение Шура–Вейля, которое согласовано со структурой тензорного произведения в пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. А именно, заметим, что $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = M_1 \oplus M_3$, где M_3 — трехмерный неприводимый $SL(2, \mathbb{C})$-модуль и M_1 — тривиальный одномерный $SL(2, \mathbb{C})$-модуль. Таким образом, можно вложить $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ в $(\mathbb{C}^2)^{\otimes (N+2)} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \otimes (M_1 \oplus M_3)$ вдоль этого одномерного представления.

Иными словами, рассматривается единственное вложение Шура–Вейля, имеющее вид

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \ni v \mapsto v \otimes v_0 \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes (N+2)}$$

для некоторого $v_0 \in \mathbb{C}^2$. Обозначим стандартный базис в $\mathbb{C}^2$ через $\{e_1, e_2\}$. Легко видеть, что $v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$; это единственный (с точностью до константы) $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантный вектор в $\mathbb{C}^4$.

Определение 1.6. *Описанное выше вложение будем называть* тензорным вложением Шура–Вейля*, а соответствующее представление бесконечной симметрической группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *—* тензорным представлением Шура–Вейля*.*

Еще один способ описать тензорное вложение Шура–Вейля состоит в следующем: образ пространства $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ в $(\mathbb{C}^2)^{\otimes (N+2)}$ лежит в собственном подпространстве последней кокстеровской образующей $\sigma_{N+1} = (N+1, N+2)$ с собственным значением -1.

Предложение 1.3. *Для тензорного вложения Шура–Вейля*

$$p = -\sqrt{\frac{r-1}{2r}}, \qquad q = \sqrt{\frac{r+1}{2r}},$$

так что соответствующая бернуллиевская мера μ_t *имеет веса* $\alpha = \frac{r-1}{2r}$*,* $\beta = \frac{r+1}{2r}$*; здесь* $r = k+1$ *при* $t \in \mathbb{T}_k^{\mathrm{proper}}$*.*

Доказательство. Пусть $\lambda = (k+n, n)$, $\mu = (k+n+1, n+1)$ и $h \in H(\lambda, \mu)$ — вектор, задающий тензорное вложение Шура–Вейля в этих компонентах, так что $h = pt_{21} + qt_{12}$. Напомним, что согласно ортогональной форме Юнга (см., напр., [32]) кокстеровская транспозиция σ_{N+1}, где $N = 2n + k$, действует в пространстве $H(\lambda, \mu)$ и в базисе $\{t_{21}, t_{12}\}$ имеет следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} r^{-1} & \sqrt{1-r^{-2}} \\ \sqrt{1-r^{-2}} & -r^{-1} \end{pmatrix},$$

где аксиальное расстояние r между элементами $N+1$ и $N+2$ (определяемое для таблицы t как $c_{N+2}(t) - c_{N+1}(t)$) в рассматриваемом случае равно $k+1$. Искомое утверждение следует из того, что образ пространства $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ в $(\mathbb{C}^2)^{\otimes (N+2)}$ лежит в собственном подпространстве транспозиции $\sigma_{N+1} = (N+1, N+2)$ с собственным числом -1. $\square$

Очевидно, тензорное представление Шура–Вейля может быть реализовано в неполном тензорном произведении

$$(\mathbb{C}^4)^{\otimes\infty}_{v_0}, \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \in \mathbb{C}^4.$$

Возникает естественный вопрос: для данного вектора $w \in (\mathbb{C}^4)^{\otimes\infty}_{v_0}$ определить, в какой примарной компоненте $\mathcal{H}_k = \Pi_k \otimes M_{k+1}$ соответствующего разложения (1.6) он лежит. Ответ заключается в следующем. Пусть $w = u \otimes v_0 \otimes v_0 \otimes \ldots$, где $u \in (\mathbb{C}^4)^{\otimes N}$ для некоторого конечного N. Тогда вектору w соответствует то же значение j, что и конечному вектору u в соответствии с разложением (1.3). Чтобы найти это j, можно записать $(\mathbb{C}^4)^{\otimes N}$ в виде $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2N}$ и воспользоваться результатами о двустрочечных представлениях конечных симметрических групп из § 1.5.

В классе обобщенных представлений Шура–Вейля имеется много других тензорных представлений. А именно, «переходный множитель» $(\mathbb{C}^2)^{\otimes k}$ содержит одномерное представление M_1 группы $SL(2,\mathbb{C})$ с кратностью, равной числу Каталана C_k. Выбирая любой вектор из этого C_k-мерного $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантного пространства в качестве v_0 (в общем случае можно выбирать разные вектора на разных шагах) и строя соответствующее неполное тензорное произведение, мы получаем обобщенное тензорное представление Шура–Вейля.

1.2 Серпантинное представление

1.2.1 Серпантинное представление бесконечной симметрической группы и его связь с базисным представлением алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$

Для определенности в этом параграфе рассматривается только четный случай $N = 2n$. Нечетный случай рассматривается полностью аналогично; вместо базисного представления $L_{0,1}$ аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ он приводит к другому представлению уровня 1 этой алгебры, а именно $L_{1,1}$.

Определение 1.7. Серпантинным представлением Π *бесконечной симметрической группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *называется представление Шура–Вейля, задаваемое параметрами* $h_j^{(k)} = t_{21}$ *для всех* $k = 0, 1, \ldots,$ $j = 0, 1, \ldots$.

Это представление соответствует вложениям $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \hookrightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes (N+2)}$, индуцированным вложениями $i_N : \mathbb{T}_N^{\leq 2} \to \mathbb{T}_{N+2}^{\leq 2}$, при которых образ $i_N(\tau)$ данной стандартной таблицы τ с N клетками есть стандартная таблица с $N+2$ клетками, полученная из τ добавлением элемента $N+1$ в первую строку и элемента $N+2$ во вторую строку.

По теореме 1.1

$$\Pi = \sum_{k=0}^{\infty} M_{2k+1} \otimes \Pi_k, \tag{1.8}$$

где неприводимая компонента Π_k, которую будем называть *k-серпантинным* представлением, есть дискретное представление D_{τ_k}, связанное с бесконечной таблицей

$$\tau_k = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c}
\hline
1 & 2 & \cdots & 2k & 2k+1 & 2k+3 & \cdots \\
\hline
2k+2 & 2k+4 & \cdots & & & & \\
\cline{1-3}
\end{array};$$

в частности, τ_0 есть вакуумная таблица, введенная в определении 1.5.

Определение 1.8. *Таблицы τ_k, $k = 0, 1, \ldots$, будем называть* k-вакуумными. *Таблицы, конфинальные τ_k, будем называть* k-серпантинными, *а их множество обозначим через $\mathbb{T}_k^{\mathrm{serp}}$. Через $\mathbb{T}^{\mathrm{serp}} = \cup \mathbb{T}_k^{\mathrm{serp}}$ обозначим множество всех* серпантинных *таблиц.*

Главным индексом таблицы Юнга называется следующая величина (см. [59, § 7.19]):

$$\mathrm{maj}(\tau) = \sum_{i \in \mathrm{des}(\tau)} i,$$

где

$$\mathrm{des}(\tau) = \{i \le N - 1 : \text{ элемент } i + 1 \text{ в } \tau \text{ лежит ниже } i\}$$

есть множество спуска таблицы $\tau \in T_N$.

Очевидно,

$$\mathrm{maj}(i_N(\tau)) = \mathrm{maj}(\tau) + (N + 1). \tag{1.9}$$

Пусть $N = 2n$ и $\tau \in \mathbb{T}_N^{\le 2}$; обозначим $r_N(\tau) = n^2 - \mathrm{maj}(\tau)$. Тогда $r_{N+2}(i_N(\tau)) = r_N(\tau)$, поэтому для всех серпантинных таблиц $\tau \in \mathbb{T}^{\mathrm{serp}}$ корректно определена величина

$$r(\tau) = \lim_{n \to \infty} r_{2n}([\tau]_{2n}) = \lim_{n \to \infty} (n^2 - \mathrm{maj}([\tau]_{2n})). \tag{1.10}$$

Очевидно, для вакуумных таблиц имеем $r(\tau_k) = k^2$.

Определение 1.9. *Величину $r(\tau)$ будем называть* стабильным главным индексом *бесконечной таблицы $\tau \in \mathbb{T}^{\mathrm{serp}}$.*

Стабильный главный индекс задает градуировку на всех пространствах H_{Π_k}, а значит, и на всем пространстве H_Π: для $w = u \otimes v \in M_{2k+1} \otimes H_{\Pi_k}$ полагаем $\deg_r(w) = r(v)$.

Рассмотрим аффинную алгебру Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, ее базисный модуль $L_{0,1}$ с однородной градуировкой $\deg_H$ и естественное вложение $\mathfrak{sl}_2 \subset \widehat{\mathfrak{sl}_2}$, задаваемое формулой $\mathfrak{sl}_2 \supset x \mapsto x \otimes 1 \in \widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Следующая теорема есть основной результат данного параграфа.

Теорема 1.3. *Существует сохраняющий градуировку унитарный изоморфизм $\mathfrak{sl}_2$-модулей между $(L_{0,1}, \deg_H)$ и $(H_\Pi, \deg_r)$. Серпантинное представление есть единственное представление Шура–Вейля, удовлетворяющее этому условию.*

Замечания. 1. Как отмечено ранее, для простоты обозначений в работе подробно рассматривается только четный случай. Рассматривая цепочку вложений (1.5) вместо (1.4), при помощи полностью аналогичных рассуждений можно получить сохраняющий градуировку изоморфизм соответствующего модуля Шура–Вейля с модулем $L_{1,1}$ алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$.

2. Условия из формулировки теоремы 1.3 не определяют изоморфизм однозначно, поскольку в пространстве H_Π существует нетривиальная группа преобразований, коммутирующих с $\mathfrak{sl}_2$ и сохраняющих градуировку. См. замечание после следствия 1.2 в п. 1.2.3.

1.2.2 Доказательство основной теоремы

1. Градуированное тензорное произведение. Доказательство теоремы опирается на результат Б. Фейгина и Е. Фейгина [94] о конечномерной аппроксимации базисного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, которое, в свою очередь, использует понятие градуированного тензорного произведения, введенное Б. Фейгиным и С. Локтевым в [96]. Кратко опишем эту конструкцию.

Если ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ и $z \in \mathbb{C}$, обозначим через $\rho(z)$

соответствующее элементарное представление алгебры полиномиальных токов $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$, задаваемое формулой $(x \otimes t^i)v = z^i \cdot xv$. Для данного набора $\rho_1, \ldots, \rho_N$ неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ с векторами младшего веса $v_1, \ldots, v_N$ и набора $z_1, \ldots, z_N$ попарно различных комплексных чисел рассмотрим тензорное произведение соответствующих элементарных представлений: $\rho_1(z_1) \otimes \ldots \otimes \rho_N(z_N)$. В пространстве V_N этого произведения введем специальную градуировку. Положим $V_N^{(m)} = U^{(m)}(e \otimes \mathbb{C}[t])(v_1 \otimes \ldots \otimes v_N) \subset V_N$, где e — повышающий оператор в $\mathfrak{sl}_2$ и $U^{(m)}$ натянуто на однородные элементы степени m по t, т. е. на мономы вида $e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ с $i_1 + \ldots + i_k = m$, где $e_j = e \otimes t^j$. Рассмотрим соответствующую фильтрацию $V_N^{(\le m)} = \sum_{k \le m} V_N^{(k)}$ на V_N. *Градуированным тензорным произведением* представлений $\rho_1, \ldots, \rho_N$ называется градуированное представление относительно введенной фильтрации, которое реализуется в пространстве

$$V_N^* = \operatorname{gr} V_N = V_N^{(\le 0)} \oplus V_N^{(\le 1)}/V_N^{(\le 0)} \oplus V_N^{(\le 2)}/V_N^{(\le 1)} \oplus \ldots. \tag{1.11}$$

Пространство $V_N^*[k] = V_N^{(\le k)}/V_N^{(\le k-1)}$ есть подпространство элементов степени k, и элементы вида $x \otimes t^l \in \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ переводят $V_N^*[k]$ в $V_N^*[k+l]$. Степень элемента относительно этой градуировки будет обозначаться $\widetilde{\deg}$. В работе [96] доказано, что V_N^* есть $\mathfrak{sl}_2 \otimes (\mathbb{C}[t]/t^N)$-модуль, не зависящий от $z_1, \ldots, z_N$, если только все они попарно различны. Более того, V_N^* изоморфен $\rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_N$ как $\mathfrak{sl}_2$-модуль.

Применим эту конструкцию в случае, когда $\rho_1 = \ldots = \rho_N$ — двумерное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{sl}_2$ с вектором младшего веса v_0. В этом случае $V_N^* \simeq (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ как $\mathfrak{sl}_2$-модуль. Снабдим V_N^* скалярным произведением, относительно которого соответствующее представление алгебры $\mathfrak{sl}_2$ унитарно. В работе [94] доказано, что некоторый индуктивный предел пространств

V_N^* изоморфен базисному представлению $L_{0,1}$ аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, поэтому сначала мы устанавливаем сохраняющий градуировку изоморфизм конечномерных $\mathfrak{sl}_2$-модулей V_N^* и $\sum_{k=0}^n M_{2k+1} \otimes H_{\pi_k}$, а затем показываем, что его можно продолжить на индуктивные пределы соответствующих пространств.

2. Конечномерный результат. Рассмотрим разложение пространства V_N^* на неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули:

$$V_N^* = \bigoplus_{k=0}^{n} M_{2k+1} \otimes \mathcal{M}_k.$$

Согласно классической двойственности Шура–Вейля, пространство кратностей $\mathcal{M}_k$ совпадает с пространством H_{π_k} неприводимого представления симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ с диаграммой Юнга $(n+k, n-k)$. С другой стороны, оно наследует градуировку из V_N^*:

$$\mathcal{M}_k = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{M}_k[i], \tag{1.12}$$

где $\mathcal{M}_k[i] = \mathcal{M}_k \cap V^*[i]$. Рассмотрим соответствующий q-характер

$$\operatorname{ch}_q \mathcal{M}_k = \sum_{i \geq 0} q^i \dim \mathcal{M}_k[i].$$

В работе Р. Кедем [123] доказано, что

$$\operatorname{ch}_q \mathcal{M}_k = q^{\frac{N(N-1)}{2}} \cdot K_{(n+k,n-k),1^N}(1/q), \tag{1.13}$$

где $K_{\lambda,\mu}$ — многочлены Костки–Фулкса (см. [138, Sec. III.6]).

Воспользуемся известным комбинаторным описанием многочлена Костки–Фулкса, принадлежащим А. Ласку и М. Шютценберже [134]. В случае двустрочечной диаграммы λ их формула принимает вид

$$K_{\lambda,1^N}(q) = \sum_{\tau\in[\lambda]} q^{c(\tau)}, \tag{1.14}$$

где $c(\tau)$ — заряд таблицы $\tau \in \mathbb{T}_N$, определяемый как сумма таких элементов $i \le N-1$, что в τ элемент $i+1$ расположен правее i (см. [138]). Очевидно, при $\tau \in \mathbb{T}_N$ мы имеем $\operatorname{maj}(\tau) = \frac{N(N-1)}{2} - c(\tau)$. Тогда из (1.13) и (1.14) следует, что

$$\dim \mathcal{M}_k[i] = \#\{\tau \in [(n+k, n-k)] : \operatorname{maj}(\tau) = i\}. \tag{1.15}$$

Главный индекс задает градуировку в пространстве H_{π_k} (натянутом на стандартные таблицы Юнга формы $(n+k, n-k)$), а значит, и во всем пространстве $\mathcal{X}_N = \sum_{k=0}^n M_{2k+1} \otimes H_{\pi_k}$, которое мы снабдим стандартным скалярным произведением. Это дает следующий конечномерный аналог теоремы 1.3.

Предложение 1.4. *Существует сохраняющий градуировку унитарный изоморфизм $\mathfrak{sl}_2$-модулей между $(V_N^*, \widetilde{\deg})$ и $(\mathcal{X}_N, \operatorname{maj})$, такой, что пространство кратностей $\mathcal{M}_k$ натянуто на стандартные таблицы Юнга τ формы $(n+k, n-k)$ (и, следовательно, $\mathcal{M}_k[i]$ натянуто на τ с $\operatorname{maj}(\tau) = i$).*

Доказательство. Следует из того, что градуированное тензорное произведение V_N^* изоморфно $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ как $\mathfrak{sl}_2$-модуль, и формулы (1.15). □

3. Вложения и предел. В [94] доказано, что существует вложение $j_N : V_N^* \to V_{N+2}^*$, эквивариантное относительно действия алгебры $\mathfrak{sl}_2 \otimes (\mathbb{C}[t^{-1}]/t^{-n})$, и соответствующий индуктивный предел $\mathcal{V} = \lim(V_N^*, j_N)$ изоморфен базисному представлению $L_{0,1}$ аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Это вложение удовлетворяет условию

$$\widetilde{\deg}(j_N x) = \widetilde{\deg}(x) - (N+1). \tag{1.16}$$

Поскольку вместо $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ теперь рассматривается $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$, следует несколько модифицировать описанные выше конструкции. А именно, вместо (1.12) теперь получаем $\mathcal{M}_k = \oplus_{i \geq 0} \mathcal{M}_k[-i]$, и изоморфизм из предложения 1.4 отождествляет $\mathcal{M}_k[-i]$ с пространством, натянутым на таблицы τ формы $(n+k, n-k)$, такие, что $\mathrm{maj}(\tau) = i$. Обозначим этот изоморфизм между V_N^* и $\mathcal{X}_N$ через ρ_N. Заметим, что единственные условия, которые накладываются на ρ_N, таковы: (а) ρ_N есть унитарный изоморфизм $\mathfrak{sl}_2$-модулей, и (б) $\rho_N \circ \widetilde{\deg} = -\mathrm{maj}$.

Поскольку $L_{0,1} \simeq \lim(V_N^*, j_N)$, $H_\Pi = \lim(\mathcal{X}_N, i_N)$ и в силу предложения 1.4 для доказательства теоремы 1.3 достаточно показать, что можно выбрать такую последовательность изоморфизмов ρ_N, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_N^* & \xrightarrow{\rho_N} & \mathcal{X}_N \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j_N} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_N} \\ V_{N+2}^* & \xrightarrow{\rho_{N+2}} & \mathcal{X}_{N+2} \end{array}$$

коммутативна для всех N. Воспользуемся индукцией по N. База очевидна, поэтому предположим, что изоморфизм ρ_N уже построен, и построим изоморфизм ρ_{N+2}.

Рассмотрим разложение $V_{N+2}^* = j_N(V_N^*) \oplus (j_N(V_N^*))^\perp$. На первом подпространстве положим $\rho_{N+2}(x) := i_N(\rho_N(j_{N+2}^{-1}(x)))$. На втором подпространстве зададим изоморфизм произвольным образом так, чтобы он удовлетворял условиям (а) и (б). Тот факт, что это определение корректно и дает искомый изоморфизм между V_{N+2}^* и $\mathcal{X}_{N+2}$, следует из (1.16) и (1.9). Теорема доказана.

1.2.3 Свойства изоморфизма между серпантинным представлением группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и базисным представлением алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$

1. Реализация базисного $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$-модуля в пространстве Фока.

При рассмотрении базисного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ удобно реализовать фермионное пространство Фока как пространство полубесконечных мономов от двух наборов $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, т. е. пространство, натянутое на полубесконечные формы $u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_k} \wedge v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_l} \wedge u_N \wedge v_N \wedge u_{N-1} \wedge v_{N-1} \wedge \ldots$, $N \in \mathbb{Z}$, $i_1 > \ldots > i_k > N$, $j_1 > \ldots > j_l > N$. Как и выше, вводятся операторы ϕ_k внешнего умножения на u_k и операторы ψ_k внешнего умножения на v_k, сопряженные операторы ϕ_k^*, ψ_k^*, производящие функции $\phi(z), \phi^*(z), \psi(z), \psi^*(z)$, бозоны a_n^ϕ, a_n^ψ и их производящие функции $a^\phi(z), a^\psi(z)$.

Пусть V — оператор в $\mathcal{F}$, сдвигающий индексы на единицу:

$$V(w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots) = V_0(w_{i_1}) \wedge V_0(w_{i_2}) \wedge \ldots, \quad V_0(u_i) = u_{i+1}, \quad V_0(v_i) = v_{i-1}.$$

Вакуумный вектор в $\mathcal{F}$ есть $\Omega = u_{-1} \wedge v_{-1} \wedge u_{-2} \wedge v_{-2} \wedge \ldots$. Мы рассматриваем также семейство векторов

$$\Omega_0 = \Omega, \quad \Omega_{2n} = V^{-n}\Omega_0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В пространстве $\mathcal{F}$ действует каноническое представление аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, задаваемое следующими формулами. Для $x \in \mathfrak{sl}_2$ обозначим $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-(n+1)}$. Тогда

$$E(z) = \psi(z)\phi^*(z), \quad F(z) = \phi(z)\psi^*(z), \quad h_n = a_{-n}^\psi - a_{-n}^\phi, \quad c = 1.$$

Имеем $\mathcal{F} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{K}_0 + \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1$, где $\mathcal{H}_0 \simeq L_{0,1}$ и $\mathcal{H}_1 \simeq L_{1,1}$ — неприводимые $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-модули уровня 1, а $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ — пространства кратностей. Отметим также, что $e_{-(N+1)}\Omega_{-N} = \Omega_{-(N+2)}$.

Заметим, что операторы $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}h_n$ удовлетворяют ККС, т. е. образуют систему свободных бозонов, или порождают алгебру Гейзенберга $\mathfrak{A}_h$. Введенные выше векторы $\{\Omega_{2n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — это в точности особые векторы этой алгебры Гейзенберга: $h_k\Omega_m = 0$ при $k > 0$, $h_0\Omega_m = m\Omega_m$. Представление алгебры $\mathfrak{A}_h$ в пространстве $\mathcal{H}_0$ распадается в прямую сумму неприводимых:

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_0[2k], \tag{1.17}$$

где $\mathcal{H}_0[2k]$ — подпространство заряда $2k$, т. е. собственное подпространство оператора h_0 с собственным числом $2k$:

$$\mathcal{H}_0[2k] = \{v \in \mathcal{H}_0 : h_0 v = 2kv\} = \mathbb{C}[h_0, h_1, \ldots]\Omega_{2k}.$$

Если дано представление аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, стандартная конструкция позволяет получить соответствующее представление алгебры Вирасоро Vir. А именно, как отмечено выше, операторы $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}h_n$ образуют систему свободных бозонов. По такой системе представление алгебры Вирасоро Vir строится с помощью следующей формулы (восходящей к работе М. А. Вирасоро [177]; см. также [34, упр. 9.17]):

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{-j}a_{j+n}, \quad n \neq 0; \qquad L_0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}a_j. \tag{1.18}$$

Таким образом получается представление алгебры Vir в $\mathcal{F}$ и, в частности, в $\mathcal{H}_0$. В этом представлении алгебры, порожденные операторами Vir и $\mathfrak{sl}_2 \subset \widehat{\mathfrak{sl}}_2$, являются взаимными коммутантами, и имеет место разложение

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{2k+1} \otimes L(1, k^2), \tag{1.19}$$

где M_{2k+1} — $(2k+1)$-мерный неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модуль, а $L(1, k^2)$ — неприводимый модуль Вирасоро с центральным зарядом 1 и конформной размерностью k^2.

Подпространство $\mathcal{H}_0[k]$ заряда k содержит последовательность особых векторов $\xi_{k,m}$ алгебры Vir с энергией $(k+m)^2$:

$$L_n \xi_{k,m} = 0 \text{ при } n = 1, 2, \ldots, \qquad L_0 \xi_{k,m} = (k+m)^2.$$

Воспользуемся т. н. однородной вертекс-операторной конструкцией фундаментального представления аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, предложенной И. Френкелем и В. Кацем [103], см. также [34, § 14.8]. В этой реализации

$$E(z) = \Gamma_-(z)\Gamma_+(z) z^{-h_0} V^{-1}, \qquad F(z) = \Gamma_+(z)\Gamma_-(z) z^{h_0} V, \tag{1.20}$$

где

$$\Gamma_\pm(z) = \exp\left(\mp \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{\pm j}}{j} h_{\pm j} \right)$$

и операторы $\Gamma_\pm(z)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\Gamma_+(z)\Gamma_-(w) = \Gamma_-(w)\Gamma_+(z) \left(1 - \frac{z}{w}\right)^2. \tag{1.21}$$

Используя бозон-фермионное соответствие (см. [34, гл. 14]), можно отождествить $\mathcal{H}_0$ с пространством $\Lambda \otimes \mathbb{C}[q, q^{-1}]$, где Λ — алгебра симметрических функций (см. [138]). В частности, рассмотрим подпространство нулевого заряда $\mathcal{H}[0] = \mathcal{H}_0[0]$, которое отождествляется с Λ. Воспользуемся следующим представлением алгебры Гейзенберга $\mathfrak{A}_h$, порожденной операторами $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$h_n \leftrightarrow 2n\frac{\partial}{\partial p_n}, \qquad h_{-n} \leftrightarrow \text{умножение на } p_n, \qquad n > 0, \tag{1.22}$$

где p_j — степенные суммы Ньютона. Представление (1.22) алгебры $\mathfrak{A}_h$, а значит, и соответствующее представление (1.18) алгебры Vir, неунитарны относительно стандартного скалярного произведения в Λ. Чтобы добиться унитарности, следует рассмотреть в Λ скалярное произведение, задаваемое формулой

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \cdot z_\lambda \cdot 2^{l(\lambda)}, \tag{1.23}$$

где p_λ — степенные симметрические функции, $z_\lambda = \prod_i i^{m_i} m_i!$ для диаграммы Юнга λ с m_i частями длины i, а $l(\lambda)$ — число ненулевых строк в λ.

Обозначим особые векторы алгебры Vir в $\mathcal{H}[0]$ через $\xi_m := \xi_{0,m}$. Согласно результату Г. Сигала [158], в реализации (1.22)

$$\xi_n \leftrightarrow c \cdot s_{(n^n)}, \tag{1.24}$$

где $s_{(n^n)}$ — функция Шура, параметризованная квадратной диаграммой Юнга размера $n \times n$, а c — числовой коэффициент.

2. Дальнейший анализ ключевого изоморфизма.

Сравнение структуры (1.8) серпантинного представления с (1.19) приводит к следующему результату.

Следствие 1.1. *Пространство H_{Π_k}, в котором реализуется k-серпантинное представление бесконечной симметрической группы, имеет естественную структуру представления $L(1, k^2)$ алгебры Вирасоро.*

Цель данного раздела — изучить это представление алгебры Вирасоро в H_{Π_k} (или, что эквивалентно, соответствующее представление бесконечной симметрической группы в пространстве Фока). В частности, из известной теории базисного модуля $L_{0,1}$ немедленно получается следующий результат.

Следствие 1.2. *В описанной реализации представления $L(1,k^2)$ алгебры Вирасоро базис Гельфанда–Цетлина пространства H_{Π_k} (который состоит из бесконечных двустрочечных таблиц Юнга, конфинальных k-вакуумной таблице τ_k) является собственным базисом оператора L_0, а собственные значения даются стабильным главным индексом r:*

$$L_0\tau = r(\tau)\tau.$$

Таким образом, видно, что изоморфизм из теоремы 1.3 определен с точностью до коммутанта оператора L_0 в каждом представлении Π_k.

Пусть ω_{-2k} — младший вектор в M_{2k+1}. Естественный базис пространства $\mathcal{V}$ имеет вид $\{e_0^m\omega_{-2k}\otimes\tau : m = 0,1,\ldots,2k,\ \tau\in\mathbb{T}_k^{\mathrm{serp}}\}$. Обозначая $\mathcal{V}_k = M_{2k+1}\otimes H_{\Pi_k}$ и $\mathcal{V}_k[0] = \{v\in\mathcal{V}_k : h_0v = 0\}$, имеем $\mathcal{V}_k[0] = e_0^k\omega_{-2k}\otimes H_{\Pi_k}$, поэтому можно отождествить $\mathcal{V}_k[0]$ с H_{Π_k} при помощи соответствия

$$c(t)\cdot e_0^k\omega_{-2k}\otimes t\leftrightarrow t,$$

где $c(t)$ — нормировочная константа. С другой стороны, в [94] показано, что $V_{2n}^*\simeq\mathbb{C}[e_0,\ldots,e_{-(2n-1)}]\Omega_{-2n}\subset\mathcal{F}$ как $\mathfrak{sl}_2\otimes(\mathbb{C}[t^{-1}]/t^{-2n})$-модуль и предельное пространство $\mathcal{V}$ совпадает с $\mathcal{H}_0$. При этом соответствии подпространство нулевого заряда $\mathcal{H}[0]$ отождествляется с $\mathcal{V}[0] = \{v\in\mathcal{V} : h_0v = 0\}$. Таким образом,

$$\mathcal{H}[0]\simeq H_\Pi[0] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_{\Pi_k}, \tag{1.25}$$

где $H_\Pi[0]$ — пространство, натянутое на все серпантинные таблицы, в котором действует счетная прямая сумма k-серпантинных представлений Π_k группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ с единичными кратностями, что дает следующий результат.

Следствие 1.3. *Пространство $H_\Pi[0]$ имеет структуру неприводимого представления алгебры Гейзенберга $\mathfrak{A}$.*

Используя результаты работы [94], нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 1.1. *Базис в пространстве $F_{2n} = \mathbb{C}[e_0, \ldots, e_{-(2n-1)}]\Omega_{-2n}$ имеет вид*

$$\{e_0^{i_0} e_{-1}^{i_1} \ldots e_{-(2n-1)}^{i_{2n-1}} : 0 \le k \le 2n - (i_0 + \ldots + i_{2n-1})\}\Omega_{-2n}.$$

В частности, базис пространства $F_{2n}[0] = F_{2n} \cap \mathcal{H}[0]$ имеет вид

$$\{\prod e_0^{i_0} e_{-1}^{i_1} \ldots e_{-n}^{i_n} : i_0 + i_1 + \ldots + i_n = n\}\Omega_{-2n}. \tag{1.26}$$

С другой стороны, как отмечено выше, $\mathcal{H}[0]$ можно отождествить с алгеброй симметрический функций Λ с помощью соответствия (1.22). Обозначим через Φ полученный изоморфизм между $H_\Pi[0]$ и Λ, который сопоставляет каждой серпантинной таблице $\tau \in \mathbb{T}^{\mathrm{serp}}$ симметрическую функцию $\Phi(\tau) \in \Lambda$, такую, что $r(\tau) = \deg \Phi(\tau)$.

Предложение 1.5. *Под действием изоморфизма Φ вакуумные таблицы соответствуют функциям Шура с квадратными диаграммами Юнга:*

$$\Phi(\tau_k) = \mathrm{const} \cdot s_{(k^k)}.$$

Доказательство. Следует из результата Г. Сигала (1.24), поскольку, как нетрудно видеть, особые векторы алгебры Vir в $\mathcal{V}_k[0]$ — это $e_0^k \omega_{-2k} \otimes \tau_k$. $\square$

Обозначим через $T^{(N)}$ (конечное) множество бесконечных двустрочечных таблиц, совпадающих с какой-либо вакуумной таблицей τ_n, $n = 0, 1, \ldots$, начиная с уровня N.

Предложение 1.6. *Пусть $H_\Pi^{(N)}$ — подпространство в $H_\Pi[0]$, натянутое на все $\tau \in T^{(N)}$. Тогда*

$$\Phi(H_\Pi^{(2k)}) = \Lambda_{k\times k},$$

где $\Lambda_{k\times k}$ — подпространство в Λ, натянутое на функции Шура, параметризованные диаграммами Юнга, лежащими в квадрате $k \times k$.

Доказательство. Согласно всем рассмотренным отождествлениям, $H_\Pi^{(2k)} \leftrightarrow F_{2k}[0]$. Теперь утверждение следует из доказанного Б. Фейгиным и Е. Фейгиным [95] результата о том, что при реализации в алгебре симметрических функций подпространство $F_{2k}[0]$ соответствует $\Lambda_{k\times k}$. □

Этот результат уточняется в следующей теореме, где приведена явная формула для базиса Шура в пространстве $\Lambda_{k\times k}$ в терминах базиса (1.26) пространства $H_\Pi^{(2k)} \simeq F_{2k}[0]$. Предложения 1.5 и 1.6 легко выводятся из формулы (1.27), первое — рассмотрением диаграммы $\nu = (k^k)$, а второе — подсчетом размерностей.

Теорема 1.4. *При реализации в симметрических функциях соответствие между базисом Шура в $\Lambda_{k\times k}$ и базисом (1.26) в $H_\Pi^{(2k)} \simeq F_{2k}[0]$ задается формулой*

$$s_\nu = \sum_{\mu=(0^{r_0}1^{r_1}2^{r_2}\ldots)\subset(k^k)} \frac{K_{\nu\mu}}{\prod_{j=0}^k r_j!} e_{-(k-\mu_1)}\ldots e_{-(k-\mu_k)}\Omega_{-2k}, \qquad \nu \subset (k^k), \quad (1.27)$$

где $K_{\lambda\mu}$ — числа Костки.

Доказательство. Приведенное ниже рассуждение обобщает доказательство Э. Вассермана [180] (аналогичное вычисление приведено также в более ранней статье Дж. Бека, И. Френкеля и Н. Джинга [72]) результата Г. Сигала (1.24).

Пусть $0 \le i_1, \ldots, i_k \le k$. Очевидно,

$$e_{-i_1} \ldots e_{-i_k} \Omega_{-2k} = \left[\prod_{j=1}^{k} z_j^{i_j - 1} \right] E(z_k) \ldots E(z_1) \Omega_{-2k},$$

где через [моном]$F(z_1, \ldots, z_m)$ обозначается коэффициент при этом мономе в $F(z_1, \ldots, z_m)$ (в частности, $[1]F(z_1, \ldots, z_m)$ — это свободный член функции F). Используя представление (1.20), коммутационные соотношения (1.21) и очевидные факты $V^{-k}\Omega_{-2k} = \Omega_0$ и $\Gamma_+(z)\Omega_0 = \Omega_0$, получаем

$$E(z_k) \ldots E(z_1) \Omega_{-2k} = \prod_{j=1}^{k} z_j^{2(k-j)} \prod_{1 \le j < i \le k} \left(1 - \frac{z_i}{z_j} \right)^2 \Gamma_-(z_k) \ldots \Gamma_-(z_1) \Omega_0.$$

Заметим, что в силу (1.22) и хорошо известного факта из теории симметрических функций, $\Gamma_-(z)$ есть в точности производящая функция полных симметрических функций. Отсюда, раскладывая произведение $\Gamma_-(z_k) \ldots \Gamma_-(z_1) \Omega_0$ при помощи тождества Коши ([138, I.4.3]) и совершая несложные преобразования, получаем

$$E(z_k) \ldots E(z_1) \Omega_{-2k} = (-1)^{k(k-1)/2} \prod_{j=1}^{k} z_j^{k-1} a_\delta(z) a_\delta(z^{-1}) \sum_{\lambda \colon l(\lambda) \le k} s_\lambda(z^{-1}) s_\lambda,$$

где

$$a_\delta(z) = \prod_{1 \le i < j \le k} (z_i - z_j) = \det[z_i^{k-j}]_{1 \le i, j, \le k}$$

— определитель Вандермонда, $a_\delta(z^{-1})$ — аналогичный определитель для переменных $z^{-1} = (z_1^{-1}, \dots, z_k^{-1})$, $l(\lambda)$ — число ненулевых строк в диаграмме λ, $s_\lambda(z^{-1})$ — функция Шура от переменных z^{-1} и s_λ — функция Шура как элемент пространства Λ, отождествленного с $\mathcal{H}[0]$. Таким образом,

$$e_{-i_1} \dots e_{-i_k} \Omega_{-2k} = (-1)^{k(k-1)/2} \cdot [1] \left(\prod_{j=1}^{k} z_j^{k-i_j} a_\delta(z) a_\delta(z^{-1}) \sum_\lambda s_\lambda(z^{-1}) s_\lambda \right).$$

Для удобства положим $\widetilde{e}_p := e_{-(k-p)}$, $0 \le p \le k$. При $0 \le \alpha_1, \dots, \alpha_k \le k$ мы имеем

$$\widetilde{e}_{\alpha_1} \dots \widetilde{e}_{\alpha_k} \Omega_{-2k} = [1] \left(\prod_{j=1}^{k} z_j^{\alpha_j} a_\delta(z) \sum_{l(\lambda) \le k} a_{\lambda+\delta}(z^{-1}) s_\lambda \right), \tag{1.28}$$

где $a_{\lambda+\delta}(x) = \det[x_i^{\lambda_j+k-j}]_{1 \le i,j \le k} = s_\lambda(x) a_\delta(x)$. Рассмотрим диаграмму Юнга $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) = (0^{r_0} 1^{r_1} 2^{r_2} \dots)$. Просуммируем (1.28) по всем различным перестановкам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ последовательности $(\mu_1, \dots, \mu_k)$. Заметим, что операторы e_j коммутируют друг с другом, поэтому левая часть не зависит от порядка сомножителей. В правой части $\sum_\alpha \prod z_j^{\alpha_j} = m_\mu(z)$ — мономиальная симметрическая функция. Таким образом, имеем

$$\frac{k!}{\prod_{j=0}^{k} r_j!} \widetilde{e}_{\mu_1} \dots \widetilde{e}_{\mu_k} = [1] \left(m_\mu(z) a_\delta(z) \sum_{l(\lambda) \le k} a_{\lambda+\delta}(z^{-1}) s_\lambda \right). \tag{1.29}$$

Пусть ν — диаграмма Юнга с не более чем k строками и не более чем k столбцами, т. е. $\nu \subset (k^k)$. Имеем

$$s_\nu(z) = \sum_\mu K_{\nu\mu} m_\mu(z), \tag{1.30}$$

где $K_{\nu\mu}$ — числа Костки. Известно, что $K_{\nu\mu} \ne 0$ только при $\mu \trianglelefteq \nu$, где $\trianglelefteq$ —

стандартное упорядочение на разбиениях (см. [138, Sec. I.1]): $\mu \trianglelefteq \nu \iff \mu_1 + \ldots + \mu_i \leq \nu_1 + \ldots + \nu_i$ для всех $i \geq 1$. В частности, $\mu_1 \leq \nu_1 \leq k$. Кроме того, поскольку мы рассматриваем только k ненулевых переменных $z_1, \ldots, z_k$, отсюда следует, что $m_\mu(z) \neq 0$ только при $l(\mu) \leq k$. Таким образом, суммирование в (1.30) можно проводить лишь по диаграммам $\mu \subset (k^k)$, для которых выполнено равенство (1.29). Умножая это равенство на $K_{\nu\mu}$ и суммируя по μ, получаем

$$\sum_{\mu=(0^{r_0}1^{r_1}2^{r_2}\ldots)\subset(k^k)} \frac{k!}{\prod_{j=0}^{k} r_j!} K_{\nu\mu} \widetilde{e}_{\mu_1} \ldots \widetilde{e}_{\mu_k} = [1] \left(s_\nu(z) a_\delta(z) \sum_{l(\lambda)\leq k} a_{\lambda+\delta}(z^{-1}) s_\lambda \right).$$

В силу соотношений ортогональности правая часть равна $k! s_\nu$, откуда следует искомая формула (1.27). □

3. Примеры.

В этом пункте представлены результаты вычисления $\Phi(\tau)$ для серпантинных таблиц с $r(\tau) \leq 4$ (заметим, что хотя условия теоремы 1.3 не определяют изоморфизм однозначно, эти соотношения выполнены для *любого* удовлетворяющего им изоморфизма) в терминах степенных сумм Ньютона p_k. Выписана только «нетривиальная» часть таблицы, при этом подразумевается, что ее следует продолжить до бесконечной таблицы «серпантинным» образом, т. е. добавляя элементы в первую и вторую строку поочередно. Кроме того, опущены нормировочные коэффициенты, которые представляют собой величины, обратные к нормам соответствующих векторов относительно скалярного прозведения (1.23).

$r(\tau)$	τ	$\Phi(\tau)$ с точностью до константы	$r(\tau)$	τ	$\Phi(\tau)$ с точностью до константы
0	τ_0	$1 = s_\emptyset$	4	$\tau_2 = \begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}$	$p_1^4 + 3p_2^2 - 4p_1p_3 = s_{(2^2)}$
1	$\tau_1 = \begin{matrix}1&2\end{matrix}$	$p_1 = s_{(1)}$	4	$\begin{matrix}1&3&4\\2&5&6\end{matrix}$	$p_1^4 - 3p_2^2 + 2p_1p_3$
2	$\begin{matrix}1&2&4\\3&&\end{matrix}$	p_2	4	$\begin{matrix}1&2&4&6\\3&5&7&8\end{matrix}$	$p_1^4 + 12p_2^2 + 32p_1p_3$
2	$\begin{matrix}1&2\\3&4\end{matrix}$	p_1^2	4	$\begin{matrix}1&3&4&6\\2&5&&\end{matrix}$	$p_1^2p_2 - p_4$
3	$\begin{matrix}1&2&3\\4&&\end{matrix}$	$p_1^3 - p_3$	4	$\begin{matrix}1&2&4&6&8\\3&5&7&&\end{matrix}$	$p_1^2p_2 + 4p_4$
3	$\begin{matrix}1&2&4&6\\3&5&&\end{matrix}$	$p_1^3 + 8p_3$			
3	$\begin{matrix}1&2&4\\3&5&6\end{matrix}$	p_1p_2			

1.3 Марковские представления

Мера M на пространстве бесконечных таблиц Юнга $\mathbb{T}$ называется *марковской*, если при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется следующее условие: для любых диаграмм $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ и $\Lambda \in \mathbb{Y}_{n+1}$, таких, что $\lambda \subset \Lambda$, и для любого пути $u \in T_\lambda$ события C_u («прошлое») и C_Λ («будущее») независимы при условии C_λ («при фиксированном настоящем»). Иными словами, случайная таблица $t = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, рассматриваемая как последовательность случайных величин λ_n, где λ_n принимает значения в множестве $\mathbb{Y}_n$ диаграмм Юнга с n клетками, является цепью Маркова в обычном смысле слова. В терминах переходных вероятностей это означает, что переходная вероятность $\frac{M(C_\Lambda \cap C_u)}{M(C_u)}$ зависит только от формы λ таблицы u, но не от самой таблицы.

Нетрудно убедиться, что любая центральная мера является марковской.

Таким образом, центральные меры образуют класс марковских мер с фиксированными копереходными вероятностями, равными $\frac{\dim\lambda}{\dim\Lambda}$.

Рассмотрим циклическое представление π группы $\mathfrak{S}_n$ в пространстве V, имеющее простой спектр (т. е. раскладывающееся в сумму попарно неэквивалентных неприводимых представлений), и циклический вектор ξ единичной длины в этом представлении. Рассмотрим пару диаграмм $\mu \supset \lambda$ с числом клеток n и $n-1$ соответственно и предположим, что представление π содержит подпредставление, эквивалентное π_μ (для простоты будем обозначать его тем же символом). Спроектируем вектор ξ на пространство V_μ подпредставления π_μ и обозначим полученный вектор через ξ_μ, а затем спроектируем ξ_μ на пространство подпредставления π_λ группы $\mathfrak{S}_{n-1}$ (содержащееся в V_μ) и обозначим полученный вектор через $\xi_{\mu,\lambda}$. Отношение квадратов норм

$$(||\xi_{\mu,\lambda}||/||\xi_\mu||)^2 \tag{1.31}$$

назовем *копереходной вероятностью* пары μ, λ.

Определим меру на пространстве всех таблиц t с диаграммами, соответствующими представлениям, входящим в представление π группы $\mathfrak{S}_n$, следующим образом: вероятность таблицы (т. е. пути) равна произведению копереходных вероятностей вдоль всего пути. Нетрудно видеть, что это определение корректно и что полученная мера есть спектральная мера вектора ξ относительно алгебры Гельфанда–Цетлина; при этом величины (1.31) суть копереходные вероятности этой спектральной меры в обычном смысле.

Уточним также, что циклический вектор может быть умножен на скалярный множитель по модулю равный единице — это не меняет меру; любое другое изменение циклического вектора меняет меру.

Будем говорить, что циклический вектор ξ *марковский*, если его спектральная мера относительно алгебры Гельфанда–Цетлина является марковской. Таким образом, марковость циклического вектора означает, что для любого $k < n$ и любой диаграммы $\lambda \in \mathbb{Y}_k$ вероятность любой таблицы с этой диаграммой не зависит от того, как она продолжена до уровня n. С точки зрения представлений и циклических векторов, последнее означает, что норма проекции циклического вектора на подпространство представления группы $\mathfrak{S}_k$, эквивалентного π_λ, не зависит от того, каким путем мы пришли к данному подпространству.

Лемма 1.2. *Пусть π — унитарное представление группы $\mathfrak{S}_n$ с простым спектром. Циклический вектор ξ представления π является марковским тогда и только тогда, когда при любом $k < n$ представление группы $\mathfrak{S}_k$ в циклической оболочке $\mathfrak{S}_k\xi$ вектора ξ относительно $\mathfrak{S}_k$ имеет простой спектр.*

Доказательство. Воспользуемся следующей простой леммой (см. [27]).

Лемма. *Пусть в конечномерном гильбертовом пространстве H задано унитарное представление группы G, которое примарно, т. е. разлагается в прямую (необязательно ортогональную) сумму $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ эквивалентных неприводимых представлений, и в каждом из них задано по циклическому вектору $v_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$. Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) *Для любых i, j существует такая изометрия $T_{i,j} : H_i \to H_j$, сплетающая соответствующие представления, что $T_{i,j}v_i = v_j$.*

2) *В циклической оболочке вектора $v = \sum v_i$ представление неприводимо.*

Применяя эту лемму к прямой сумме подпредставлений, эквивалентных π_λ, получаем, что нормы проекции циклического вектора на соответствующие подпространства совпадают тогда и только тогда, когда π_λ входит в разложение представления группы $\mathfrak{S}_k$ в циклической оболочке $\mathfrak{S}_k\xi$ вектора ξ с единичной кратностью. Поскольку, как показано выше, совпадение норм проекций, в свою очередь, эквивалентно марковости, лемма 1.2 доказана. $\square$

Определение 1.10. *Представление с простым спектром бесконечной симметрической группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *называется* марковским*, если в пространстве представления существует циклический вектор, спектральная мера которого (относительно алгебры Гельфанда–Цетлина) является марковской.*

Теорема 1.5. *Представление бесконечной симметрической группы является марковским тогда и только тогда, когда оно простое.*

Доказательство. Если ξ — марковский циклический вектор, то при любом n представление группы $\mathfrak{S}_n$ в циклической оболочке $\mathfrak{S}_n\xi$ — марковское, а значит, по лемме 1.2, имеет простой спектр. Таким образом, рассматриваемое представление есть предел представлений с простым спектром. Обратно, если имеется индуктивный предел представлений с простым спектром, то по лемме 1.2 вектор, полученный последовательными вложениями из единичного вектора в исходном одномерном представлении группы $\mathfrak{S}_1$, является марковским циклическим вектором. $\square$

Определим *обобщенно марковскую меру* на пространстве $\mathbb{T}$ как меру, для которой существует такая возрастающая последовательность $N_1, N_2, \dots$ натуральных чисел, что при любом n условные меры на прошлом и будущем независимы при фиксации таблиц на интервале $N_n, \dots, N_{n+1}-1$. Нетрудно понять, как перенести теорему 1.5 на случай обобщенно марковских мер. Предположим, что спектральная мера представления является обобщенно марковской с интервалами марковости $N_1, N_2, \dots$ (т. е. для любого k при фиксировании таблиц с $N_{k-1}, \ldots, N_k - 1$ клетками диаграммы, предшествующие моменту N_{k-1} и последующие за моментом $N_k - 1$, независимы); тогда соответствующее представление является простым, но уже относительно разреженной цепочки подгрупп $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_{N_1}, \mathfrak{S}_{N_2}, \ldots$. Иначе говоря, представление есть предел представлений с простым спектром последовательности групп $\mathfrak{S}_{N_k}$, $k \to \infty$.

1.4 Представления, индуцированные с подгрупп Юнга

Рассмотрим разбиение $\Pi = (A_1, A_2, \ldots)$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на дизъюнктные подмножества $A_1, A_2, \ldots$. Соответствующая *подгруппа Юнга* бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ есть $\mathfrak{S}_\Pi = \mathfrak{S}_{A_1} \times \mathfrak{S}_{A_2} \times \ldots$, где $\mathfrak{S}_A$ — группа всех конечных перестановок элементов множества A.

Определение 1.11. *Пусть* $\Pi = (A_1, A_2, \ldots)$ *— разбиение множества* $\mathbb{N}$. *Для* $i = 1, 2, \ldots, \infty$ *обозначим через* $k_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *число таких* j, *что* $|A_j| = i$. *Мы говорим, что разбиение* Π *и соответствующая подгруппа Юнга* $\mathfrak{S}_\Pi$ *имеют* тип $\mathbf{k} = (\infty^{k_\infty}, 1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots)$.

Разбиение Π *и соответствующая подгруппа Юнга* $\mathfrak{S}_\Pi$ *называются* большими*, если* Π *имеет конечное число конечных блоков, и* малыми *в противном случае.*

Цель данного раздела — изучить представления $I_\Pi = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\Pi}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}} 1_{\mathfrak{S}_\Pi}$ бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, индуцированные с единичных представлений подгрупп Юнга.

Заметим, что две подгруппы Юнга $\mathfrak{S}_{\Pi_1}$ и $\mathfrak{S}_{\Pi_2}$ одного типа переводятся друг в друга автоморфизмом группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Если разбиения Π_1 и Π_2 эквивалентны относительно хвостового отношения эквивалентности, т. е. получаются друг из друга финитной перестановкой множества $\mathbb{N}$, то этот автоморфизм является внутренним, так что подгруппы $\mathfrak{S}_{\Pi_1}$ и $\mathfrak{S}_{\Pi_2}$ сопряжены в $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и представления I_{Π_1} и I_{Π_2}, очевидно, эквивалентны.

Лемма 1.3. *Представления I_{Π_1} и I_{Π_2} эквивалентны в том и только в том случае, когда подгруппы $\mathfrak{S}_{\Pi_1}$ и $\mathfrak{S}_{\Pi_2}$ сопряжены в $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Докажем его в другую сторону. Предположим, что представления I_{Π_1} и I_{Π_2} эквивалентны, и пусть A — сплетающий их оператор. Как в доказательстве теоремы 1.6, можно показать, что этот оператор определяется функцией α, заданной на левых классах смежности $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}/\mathfrak{S}_{\Pi_2}$ и постоянной на орбите левого действия группы $\mathfrak{S}_{\Pi_1}$, т. е. на левых классах смежности, лежащих в одном и том же двойном классе смежности $\mathfrak{S}_{\Pi_1}\backslash\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}/\mathfrak{S}_{\Pi_2}$; поэтому α сосредоточена на конечных орбитах, т. е. на двойных классах смежности, которые раскладываются в объединение конечного числа левых классов. Нетрудно показать, что такие конечные орбиты существуют только в случае, когда разбиения Π_1 и Π_2 отличаются лишь в конечном числе блоков, и лемма следует из того, что для конечной симметрической группы представления, индуцированные с единичных представлений двух подгрупп Юнга, эквивалентны тогда и только тогда, когда эти подгруппы сопряжены. □

Заметим, что для неприводимых индуцированных представлений это утверждение следует из результата Дж. Макки (см., напр., [139, Corollary 3, p. 158]).

Обозначим через ξ (нормированный) *выделенный циклический вектор* представления I_Π: если реализовать I_Π в пространстве $l^2(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}/\mathfrak{S}_\Pi)$, то ξ есть δ-функция на классе смежности $\mathfrak{S}_\Pi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}/\mathfrak{S}_\Pi$. Обозначим через Π_n ограничение разбиения Π на множество $\{1,\ldots,n\}$, положим $I_n = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{\Pi_n}}^{\mathfrak{S}_n} 1_{\mathfrak{S}_{\Pi_n}}$, и пусть ξ_n — выделенный циклический вектор в I_n. Тогда I_Π есть индуктивный предел представлений I_n, причем соответствующие вложения сохраняют выделенные циклические векторы. Заметим также, что I_n можно отождествить с ограничением представления I_Π на группу $\mathfrak{S}_n$ в циклической оболочке $\mathfrak{S}_n\xi$ вектора ξ; при этом ξ_n отождествляется с ξ. Обозначим через P_λ, где $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, проекцию на примарную компоненту V_λ представления I_n, кратную π_λ.

Лемма 1.4.

$$\|P_\lambda\xi\|^2 = \frac{\dim V_\lambda}{\dim I_n}. \tag{1.32}$$

Доказательство. Для краткости обозначим $H = \mathfrak{S}_{\Pi_n}$. Хорошо известно (см., напр., [54]), что проекция P_λ задается формулой

$$P_\lambda = \frac{\dim\lambda}{n!}\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\chi_\lambda(g)I_n(g),$$

откуда

$$(P_\lambda\xi, P_\lambda\xi) = (P_\lambda\xi, \xi) = \frac{\dim\lambda}{n!}\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\chi_\lambda(g)(I_n(g)\xi,\xi) = \frac{\dim\lambda}{n!}\sum_{h\in H}\chi_\lambda(h),$$

поскольку $(I_n(g)\xi,\xi) = 1$, если $g \in H$, и $(I_n(g)\xi,\xi) = 0$ в противном случае. Но последняя сумма равна $(\chi_\lambda|_H, 1_H)\cdot|H|$, что, в свою очередь, по двойственности Фробениуса есть $(\chi_\lambda, I_n)\cdot|H|$, и мы получаем, что

$$\|P_\lambda\xi\|^2 = \frac{(\chi_\lambda, I_n)\dim\lambda\cdot|H|}{n!} = \frac{\dim V_\lambda}{\dim I_n},$$

поскольку (χ_λ, I_n) есть кратность представления π_λ в I_n и $\dim I_n = \frac{n!}{|H|}$. $\square$

1.4.1 Представления типа I

Пусть $\Pi = (A_1, A_2, \ldots)$ — *большое* разбиение типа $\mathbf{k}$ с конечным числом конечных блоков: $\mathbf{k} = (\infty^{k_\infty}, 1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots)$, $N = k_1 + k_2 + \ldots < \infty$. Для удобства предположим, что блоки $A_1, \ldots, A_n$ конечны, а остальные блоки бесконечны. Обозначим через $\lambda = \lambda_{\mathrm{fin}}(\Pi) = 1^{k_1}2^{k_2}\ldots$ диаграмму Юнга размера N, пусть $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\Pi) = \mathfrak{S}_{A_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{A_n}$ — *конечная* подгруппа Юнга, соответствующая диаграмме λ, и $I_{\mathrm{fin}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_N} 1_{\mathfrak{S}_\lambda}$.

Теорема 1.6. *Пусть* $I_\Pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\Pi}^{\mathfrak{S}_\mathbb{N}} 1_{\mathfrak{S}_\Pi}$, *где* Π *— большое разбиение типа* $\mathbf{k} = (\infty^{k_\infty}, 1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots)$, $k_1 + k_2 + \ldots < \infty$. *Тогда*

(а) I_Π *имеет тип I и раскладывается в конечную сумму неприводимых;*

(б) I_Π *неприводимо тогда и только тогда, когда* $k_1 + k_2 + \ldots \leq 1$;

(в)

$$I_\Pi = \sum_{|\mu|=N,\, \mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \pi_\mu^{k_\infty},$$

где $\pi_\mu^{k_\infty}$ *— неприводимое представление группы* $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$.

Доказательство. (а) Для краткости положим $H = \mathfrak{S}_\Pi$. По определению индуцированное представление I_Π действует в пространстве $l^2(X)$, где $X = \mathfrak{S}_\mathbb{N}/H$. Обозначим через $R(I_\Pi)$ пространство сплетающих операторов для I_Π, и пусть $A \in R(I_\Pi)$. Базис пространства $l^2(X)$ состоит из δ-функций на левых классах смежности $sH \in X$ подгруппы H в $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$; будем обозначать элемент базиса тем же символом, что и соответствующий класс смежности. Тогда оператор A задается матрицей $(a_{sH,tH})_{sH,tH \in X}$ в этом базисе. Пусть $F \subset H \backslash G / H$ — множество тех двойных классов HgH, которые являются объединениями конечного числа левых классов смежности по H; и пусть $\mathrm{Comm}_{\mathfrak{S}_\mathbb{N}}(H)$ — группа, называемая соизмерителем подгруппы H в $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, состоящая из таких элементов $g \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}$, что $HgH \in F$. Обозначим через $\mathbf{1}_x$ характеристическую функцию двойного класса смежности $x \in F$. Используя стандартные рассуждения, восходящие к Дж. Макки, можно показать, что множество сплетающих операторов $R(I_\Pi)$ порождается операторами A_x, $x \in F$, с матричными элементами $a_{sH,tH} = \mathbf{1}_x(s^{-1}tH)$.

В рассматриваемом случае легко видеть, что $g \in \mathrm{Comm}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(H)$ тогда и только тогда, когда g оставляет инвариантными все бесконечные блоки разбиения Π, т. е. $g \in \mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}$. Отсюда следует, что $R(I_\Pi)$ изоморфно пространству $R(I_{\mathrm{fin}})$ сплетающих операторов для представления I_{fin}. Обозначим через $P_i \in R(I_{\mathrm{fin}})$ проекции на его неприводимые компоненты. Тогда их образы $\tilde{P}_i$ в $R(I_\Pi)$ задают конечное разложение представления I_Π на неприводимые, и п. (а) доказан.

(б) Легко видеть, что условие $k_1 + k_2 + \ldots \le 1$ эквивалентно условию $\mathrm{Comm}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(H) = H$, которое означает отсутствие нескалярных сплетающих операторов.

(в) Разложение представления $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_N} 1_{\mathfrak{S}_\lambda}$ группы $\mathfrak{S}_N$ на неприводимые задается формулой (см. [62])

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_N} 1_{\mathfrak{S}_\lambda} = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \pi_\mu, \tag{1.33}$$

где $\trianglerighteq$ — стандартное упорядочение на разбиениях (см. [138, Sec. I.1]), т. е. $\mu \trianglerighteq \lambda$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i \ge \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i$ для всех $i \ge 1$, а $K_{\mu,\lambda}$ — числа Костки (см. [138, Sec. I.6]). В сочетании с доказанным в п. (а) это дает искомое разложение. $\square$

Замечание. Пункт (б) этой теоремы был доказан в [75]. Он также легко следует из критерия Макки неприводимости для индуцированных представлений дискретных групп (см., напр., [139, Corollary 2, p. 158]).

Представление $\pi_\mu^{k_\infty}$ можно описать явно следующим образом. Пусть $m_i = |A_i|$. Нетрудно видеть, что однородное пространство $X_\Pi = \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}/\mathfrak{S}_\Pi$ можно реализовать как пространство *упорядоченных* разбиений множества $\mathbb{N}$ на дизъюнктные множества заданных мощностей $(R_1, R_2, \ldots)$, $|R_i| = m_i$, эквивалентных исходному разбиению Π в смысле хвостового отношения эквивалентности, с естественным действием группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ перестановками. Более того, подмножество таких разбиений с фиксированными бесконечными блоками $R_{n+1}, R_{n+2}, \ldots$ можно отождествить с однородным пространством $\mathfrak{S}_N/\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}$, а соответствующее множество функций — с пространством представления $I_{\mathrm{fin}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}}^{\mathfrak{S}_N} 1$. Пусть P_μ — проекция на неприводимую компоненту π_μ представления I_{fin}. Тогда представление $\pi_\mu^{k_\infty}$ действует в подпространстве, полученном применением проекции P_μ к первым «координатам» $(R_1, \ldots, R_n)$:

$$(\tilde{P}_\mu f)(R_1, R_2, \ldots) = f(P_\mu(R_1, \ldots, R_n), R_{n+1}, \ldots).$$

Пример 1. Индуцированные представления типа $\mathbf{k} = (\infty, k)$. Заметим, что все подгруппы Юнга типа $\mathbf{k} = (\infty, k)$ сопряжены, так что все такие представления изоморфны. Поэтому можно зафиксировать произвольное разбиение Π типа (∞, k), например $\Pi = (\{1, \ldots, k\}, \{k+1, k+2, \ldots\})$, и говорить о представлении $I_{(\infty,k)} = I_\Pi$. По теореме 1.6(б) оно неприводимо.

Предложение 1.7. *Представление $I_{(\infty,k)}$ элементарно.*

Доказательство. Заметим, что двустрочечная диаграмма $\lambda^{(n)} = (n-k, k)$ мажорируется в точности всеми диаграммами $(n-m, m)$ с $m \le k$, а все соответствующие числа Костки равны 1. В силу (1.33) имеем $I_n = \sum_{m \le k} \pi_{(n-m,m)}$. Рассмотрим проекцию $P_{\lambda^{(n)}}\xi$ выделенного циклического вектора ξ на компоненту $\pi_{\lambda^{(n)}} = \pi_{(n-k,k)}$. Имеем $\dim I_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\dim \lambda^{(n)} = \frac{n!(n-2k+1)}{k!(n-k+1)!}$, и, очевидно, $K_{\lambda^{(n)},\lambda^{(n)}} = 1$. Таким образом, по лемме 1.4

$$\|P_{\lambda^{(n)}}\xi\|^2 = \frac{K_{\lambda^{(n)},\lambda^{(n)}} \dim \lambda^{(n)}}{\dim I_n} = \frac{n-2k+1}{n-k+1} \to 1 \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Отсюда следует, что векторы $P_{\lambda^{(n)}}\xi$ сходятся к ξ, так что индуктивный предел неприводимых представлений $\pi_{\lambda^{(n)}}$ совпадает с I_Π. $\square$

Пример 2. Индуцированные представления типа $\mathbf{k} = (\infty, \lambda)$. Пусть Π — разбиение типа $\mathbf{k}$, где $k_\infty = 1$ и $N = k_1 + k_2 + \ldots = k < \infty$. Заметим, что все представления такого типа изоморфны. Обозначим $\lambda = \lambda_{\mathrm{fin}}(\Pi)$.

Предложение 1.8. *Разложение индуцированного представления I_Π на неприводимые имеет вид*

$$I_\Pi = \sum_{|\mu|=k,\, \mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \pi^1_\mu, \tag{1.34}$$

где π^1_μ — элементарное представление группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, представляющее собой индуктивный предел $\pi^1_\mu = \lim_{n\to\infty} \pi_{\mu^{(n)}}$ с $\mu^{(n)} = (n-k, \mu_1, \mu_2, \ldots)$.

Доказательство. Найдем спектральную меру выделенного циклического вектора ξ в этом случае. Рассуждения обобщают доказательство предложения 1.7. Пусть $\lambda^{(n)} = (n-k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$. Зафиксируем диаграмму $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \trianglerighteq \lambda$, $|\mu| = k$, положим $\mu^{(n)} = (n-k, \mu_1, \mu_2, \ldots)$, и пусть $n \to \infty$. По лемме 1.4

$$\|P_{\mu^{(n)}}\xi\|^2 = \frac{K_{\mu^{(n)},\lambda^{(n)}} \dim \mu^{(n)}}{\dim I_n},$$

где $I_n = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda^{(n)}}}^{\mathfrak{S}_n} 1$. Имеем $\dim I_n = \frac{n!}{(n-k)!\prod \lambda_i!} \sim \frac{n^k}{\prod \lambda_i!}$ при $n \to \infty$. Далее, из формулы крюков следует, что $\dim \mu^{(n)} \sim \frac{n^k \dim \mu}{k!}$ при $n \to \infty$. Наконец, из определения чисел Костки легко видеть, что $K_{\mu^{(n)},\lambda^{(n)}} = K_{\mu,\lambda}$ (действительно, $K_{\mu^{(n)},\lambda^{(n)}}$ есть число заполнений формы $\mu^{(n)}$ с $n-k$ нулями, λ_1 единицами и т. д.; но, очевидно, $n-k$ нулей должны занимать в точности первую строку диаграммы $\mu^{(n)}$). Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_{\mu^{(n)}}\xi\|^2 = \frac{K_{\mu,\lambda} \dim \mu \prod \lambda_i!}{k!}. \tag{1.35}$$

Заметим, что сумма правых частей по всем $\mu \trianglerighteq \lambda$ равна 1. Отсюда следует, что спектральная мера вектора ξ дискретна и сосредоточена на конечном множестве классов эквивалентных таблиц, индексированных диаграммами $\mu \trianglerighteq \lambda$. В частности, I_Π есть конечная сумма элементарных представлений. $\square$

Замечание 1. Таким образом, все элементарные представления группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, соответствующие индуктивным пределам последовательностей неприводимых представлений, связанных с диаграммами Юнга с растущей первой строкой, могут быть получены индуцированием с подгрупп Юнга.

Замечание 2. При $k_\infty \geq 2$ неприводимое представление $\pi_\mu^{k_\infty}$ группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ уже не является элементарным.

Пример 3. Индуцированные представления типа $\mathbf{k} = (\infty, 1^n)$, $n < \infty$. В этом случае $\lambda_{\text{fin}}(\Pi) = (1^n)$ и $\mathfrak{S}_{\text{fin}} = \{e\}$, так что I_{fin} есть регулярное представление Reg_n группы $\mathfrak{S}_n$. Таким образом, (1.33) превращается в известную формулу $\mathrm{Reg}_n = \sum_{|\mu|=n} \dim \mu \cdot \pi_\mu$, а разложение (1.34) принимает вид

$$I_{(\infty,1^n)} = \sum_{|\mu|=n} \dim \mu \cdot \pi_\mu^1. \tag{1.36}$$

Нетрудно понять, что представление I_Π можно реализовать с пространстве бесконечномерных тензоров ранга n. Регулярное представление $I_{\text{fin}} = \mathrm{Reg}_n$ имеет реализацию в пространстве тензоров размерности n, и проекторы P_μ на неприводимые компоненты представления I_{fin} суть стандартные симметризаторы Юнга, а проекторы на примарные компоненты — центральные симметризаторы Юнга (см., напр., [63, 4]). Применяя эти симметризаторы к бесконечномерным тензорам ранга n, получаем неприводимые (или примарные) компоненты представления $I_{(\infty,1^n)}$. Спектральная мера выделенного циклического вектора ξ в этом случае, как следует из (1.35), имеет планшерелевские

веса (5):
$$\lim_{n\to\infty} \|P_{\mu^{(n)}}\xi\|^2 = \frac{\dim^2 \mu}{k!}.$$

1.4.2 Представления типа II

Теперь рассмотрим малые подгруппы Юнга $\mathfrak{S}_\Pi$. Будем предполагать, что разбиение Π имеет конечное число конечных блоков конечных кратностей, и обозначим через $\nu = \nu(\Pi)$ диаграмму Юнга, образованную размерами этих блоков.

Теорема 1.7. *Пусть* $I_\Pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\Pi}^{\mathfrak{S}_\mathbb{N}} 1_{\mathfrak{S}_\Pi}$*, где* Π *— малое разбиение типа* $\mathbf{k} = (\infty^{k_\infty}, 1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots)$*,* $\sum_{j<\infty:\, k_j<\infty} k_j < \infty$*, и предположим, что* $k_i = \infty$ *хотя бы для одного* $i \in \mathbb{N}$*.*

(a) *Представление* I_Π *имеет тип* II*.*

(b) I_Π *есть фактор-представление (типа* II*) тогда и только тогда, когда диаграмма* $\nu(\Pi)$ *содержит не более одной строки.*

(c) *Пусть* $N = |\nu(\Pi)|$*. Представление* I_Π *есть конечная сумма фактор-представлений типа* II*, параметризованных примарными компонентами представления* $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\nu(\Pi)}}^{\mathfrak{S}_N} 1$*, т. е. диаграммами Юнга* μ *с* $|\mu| = N$ *и* $\mu \trianglerighteq \nu(\Pi)$*.*

Доказательство. Пусть $J = J_\Pi = \{j \in \mathbb{N} : k_j = \infty\}$. По предположению $J \neq \emptyset$. Для каждого $j \in J$ пусть $B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, \ldots$ — все блоки размера j, и пусть $\mathfrak{S}^{(j)} = \mathfrak{S}_{B_1^{(j)}} \times \mathfrak{S}_{B_2^{(j)}} \times \ldots$. Аналогично, пусть $A_1, \ldots, A_n$ — все конечные блоки конечных кратностей, и пусть $\mathfrak{S}_\nu = \mathfrak{S}_{\nu(\Pi)} = \mathfrak{S}_{A_1} \times \mathfrak{S}_{A_2} \times \ldots$ — соответствующая конечная подгруппа Юнга в $\mathfrak{S}_N$, где $N = |A_1| + |A_2| + \ldots = |\nu(\Pi)|$. Обозначим также $I_\nu = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\nu}^{\mathfrak{S}_N} 1$.

Из доказательства теоремы 1.6 следует, что множество сплетающих операторов для I_Π (т. е. коммутант $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной операторами представления) раскладывается в тензорное произведение

$$\mathfrak{A}' = R(I_\nu) \otimes \bigotimes_{j\in J} R_j,$$

где $R(I_\nu)$ — множество сплетающих операторов для I_ν, а R_j — алгебра операторов, порожденная конечными перестановками множеств $B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, \ldots$. Очевидно, R_j (алгебраически) изоморфна алгебре, порожденной регулярным представлением группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, которая есть фактор типа II_1. Таким образом, $\otimes \bigotimes_{j\in J} R_j$ есть фактор типа II. Если теперь ν состоит из единственной строки, то представление I_ν неприводимо и $R(I_\nu)$ состоит из скалярных операторов, так что вся алгебра $\mathfrak{A}'$ есть фактор типа II. В противном случае, рассматривая в $R(I_\nu)$ проекторы на примарные компоненты представления I_ν, получаем центральное разложение представления I_Π в сумму факторов. $\square$

Пример 4. Индуцированные представления типа $(\infty, 1^\infty)$. Заметим, что существует континуум неизоморфных представлений этого типа.

В этом случае однородное пространство X есть пространство бесконечных последовательностей $(i_1, i_2, \ldots)$ натуральных чисел. Его можно описать также следующим образом. Пусть $\mathbb{N}_0$ — подмножество $\mathbb{N}$, состоящее из элементов одноэлементных блоков разбиения Π. Тогда $l^2(X)$ можно отождествить с пространством суммируемых инъекций $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$. Представление $I = I_\Pi$ порождается левым действием группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ по формуле $I_g f(n) = g^{-1} f(n)$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ алгебру фон Неймана, порожденную этим представлением. Легко видеть, что ее коммутант $\mathfrak{A}'$ порождается правым действием группы $\mathfrak{S}(\mathbb{N}_0)$ финитных перестановок множества $\mathbb{N}_0$ подстановками: $T_\sigma f(n) = f(\sigma^{-1} n)$. В частности, $\mathfrak{A}'$ алгебраически изоморфна алгебре фон Неймана, порожденной регулярным представлением группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, т. е. является фактором типа II_1. Что касается самой алгебры $\mathfrak{A}$ легко видеть, что она раскладывается в бесконечную прямую сумму факторов типа II_1. Действительно, для каждого бесконечного подмножества $B \subset \mathbb{N}$, обозначим через H_B подпространство в $l^2(X)$, состоящее из таких функций f, что $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = B$. Оно, очевидно, инвариантно относительно $\mathfrak{A}'$, поэтому $l^2(X) = \oplus_B H_B$ есть искомое разложение алгебры $\mathfrak{A}$ в бесконечную прямую сумму факторов типа II_1. Таким образом, доказан следующий результат.

Предложение 1.9. *Индуцированное представление типа* $(\infty, 1^\infty)$ *есть фактор-представление. Алгебра фон Неймана* $\mathfrak{A}$*, порожденная операторами представления, есть фактор типа* II_∞*, прямая сумма изоморфных факторов типа* II_1*. Ее коммутант* $\mathfrak{A}'$ *есть фактор типа* II_1*, алгебраически изоморфный фактору, порожденному регулярным представлением группы* $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$*.*

Замечание. Описанная конструкция есть частный случай следующей ситуации. Имеется стандартное левое действие группы G на дискретном однородном пространстве $X = G/H$, где H — подгруппа в G, и соответствующее унитарное представление группы G в $l^2(X)$. Коммутант соответствующей алгебры порождается автоморфизмами G-пространства X, т. е. правым действием группы $N(H)/H$, где $N(H)$ — нормализатор подгруппы H в G. Специфическое свойство данной ситуации состоит в том, что и левое, и правое действие порождены подстановочными действиями групп G и $N(H)/H$ соответственно.

Пример 5. Индуцированные представления типа $(1^\infty, \nu)$**.** Пусть Π — разбиение типа $(1^\infty, 2^{k_2}, 3^{k_3}, \ldots)$, где $k_2 + k_3 + \ldots = n < \infty$. Обозначим $\nu = (2^{k_2}, 3^{k_3}, \ldots) \in \mathbb{Y}_n$.

По теореме 1.7 представление I_Π есть конечная сумма фактор-представлений ρ_μ, где $\mu \in \mathbb{Y}_n$ и $\mu \trianglerighteq \nu$. Найдем спектральную меру $M = M^\xi$ выделенного циклического вектора ξ относительно алгебры Гельфанда–Цетлина.

При $N \geq n$ обозначим через ν_N диаграмму, полученную из ν добавлением $N-n$ строк длины 1. Пусть $\lambda \in \mathbb{Y}_N$. Из формулы (1.33), определения спектральной меры и леммы 1.4 следует, что цилиндрическое распределение M_N меры M задается формулой

$$M_N(C_\lambda) = \|P_\lambda \xi\|^2 = \frac{\prod \nu_i!}{N!} K_{\lambda,\nu_N} \dim \lambda.$$

Из определения чисел Костки легко видеть, что $K_{\lambda,\nu_N} = \sum_{\mu \trianglerighteq \nu} \dim(\mu,\lambda) K_{\nu,\mu}$, где $\dim(\mu,\lambda)$ — число путей в графе Юнга от μ до λ. Следовательно,

$$\begin{aligned} M_N(C_\lambda) &= \sum_{\mu \trianglerighteq \nu} \frac{\dim(\mu,\lambda) K_{\nu,\mu} \dim \lambda \prod \nu_i!}{N!} \\ &= \sum_{\mu \trianglerighteq \nu} \frac{K_{\nu,\mu} \dim \mu \prod \nu_i!}{n!} \cdot \frac{n! \dim(\mu,\lambda) \dim \lambda}{\dim \mu \cdot N!}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что вторая дробь в правой части есть в точности условное распределение $\mathrm{Pl}(\cdot \,|\, t_n = \mu)$ меры Планшереля Pl на пространстве $\mathbb{T}$ бесконечных таблиц Юнга $t = (t_1, t_2, \ldots)$. Первая дробь есть относительная размерность примарного представления, соответствующего диаграмме μ, в $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\nu}^{\mathfrak{S}_n}$, т. е. $M_{\mathrm{fin}}(\mu)$, где M_{fin} — спектральная мера выделенного циклического вектора в представлении $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\nu}^{\mathfrak{S}_n}$. Таким образом, получен следующий результат.

Предложение 1.10. *Спектральная мера $M = M^\xi$ выделенного циклического вектора ξ в представлении I_Π есть выпуклая комбинация условных планшерелевских мер:*

$$M = \sum_{\mu \trianglerighteq \nu} M_{\mathrm{fin}}(\mu) \cdot \mathrm{Pl}(\cdot \,|\, t_n = \mu),$$

где $M_{\mathrm{fin}}(\mu) = \frac{K_{\nu,\mu}\dim\mu\prod\nu_i!}{n!}$ *— спектральная мера выделенного циклического вектора в представлении* $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\nu}^{\mathfrak{S}_n}$ *конечной симметрической группы* $\mathfrak{S}_n$*. В частности, она абсолютно непрерывна относительно меры Планшереля* Pl *с кусочно постоянной (цилиндрической) плотностью*

$$\frac{dM}{d\,\mathrm{Pl}}(t) = \frac{K_{\nu,\mu(t)}\prod\nu_i!}{\dim\mu(t)}, \quad \textit{если } t_n = \mu(t).$$

Заметим, что мера Планшереля — центральная марковская мера на $\mathbb{T}$, однако спектральная мера M не является ни центральной, ни марковской. Это *мультимарковская* мера, в том смысле, что она превращается в марковскую при «склеивании» первых n этажей в один блок.

Пример 6. Индуцированные представления типа $(1^\infty, n)$**.** По теореме 1.7(б) такое представление является фактор-представлением, а по предложению 1.10 спектральная мера выделенного циклического вектора в этом случае есть условное распределение $\mathrm{Pl}(\cdot\,|\,t_n = (n))$.

1.5 Двустрочечные представления

1.5.1 Базис Гельфанда–Цетлина в пространстве бесквадратных форм

В этом разделе рассматривается реализация двустрочечных представлений симметрической группы в пространстве бесквадратных форм, которая была предложена А. М. Вершиком и изучена в [47].

Пусть $0 \le k \le n$; обозначим через $F_{n,k}$ множество k-элементных подмножеств в $\{1,\dots,n\}$. Если $I = \{i_1,\dots,i_k\} \in F_{n,k}$, положим $x_I = x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$.

Обозначим через $A_{n,k} = \{\sum_{I\in F_{n,k}} c_I x_I\}$ векторное пространство бесквадратных однородных форм степени k от n переменных. Это пространство можно отождествить с пространством симметрических тензоров валентности k с нулевыми диагональными элементами над n-мерным пространством (форма $f = \sum_{I \in F_{n,k}} c_I x_I$ отождествляется с тензором $\{T_{j_1,\dots,j_k}\}_{j_1,\dots,j_k=1}^n$, где $T_{j_1,\dots,j_k} = c_{\{j_1,\dots,j_k\}}$, если индексы $j_1, \dots, j_k$ попарно различны, и $T_{j_1,\dots,j_k} = 0$ в противном случае).

Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартное скалярное произведение в пространстве форм (тензоров), задаваемое формулой

$$\|f\|^2 = \sum_{I \in F_{n,k}} |c_I|^2, \qquad f = \sum_{I \in F_{n,k}} c_I x_I \in A_{n,k}. \tag{1.37}$$

Пусть $A_{n,k}^0$ — подпространство в $A_{n,k}$, задаваемое следующим образом:

$$A_{n,k}^0 = \Big\{ \sum c_I x_I \in A_{n,k} \mid \sum_{j \notin J} c_{J \cup j} = 0 \text{ для любого } J \in F_{n,k-1} \Big\}.$$

Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ действует на пространстве $A_{n,k}$ подстановками индексов:

$$\sigma \cdot \sum_{I \in F_{n,k}} c_I x_I = \sum_{I \in F_{n,k}} c_I x_{\sigma I}, \quad \text{где} \quad \sigma\{i_1, \dots, i_k\} = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\},$$

или, в тензорной форме, $\sigma\{T_{j_1,\dots,j_k}\} = \{T'_{j_1,\dots,j_k}\}$, где $T'_{j_1,\dots,j_k} = T_{\sigma^{-1}(j_1),\dots,\sigma^{-1}(j_k)}$. Легко видеть, что подпространство $A_{n,k}^0$ инвариантно относительно этого действия. Заметим, что пространства $A_{n,k}^0$ и $A_{n,n-k}^0$ (а также $A_{n,k}$ и $A_{n,n-k}$) очевидным образом изометричны, а соответствующие представления группы $\mathfrak{S}_n$ эквивалентны.

Пусть $k \le n/2$. Представление симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ в пространстве $A_{n,k}^0$ (и $A_{n,n-k}^0$) эквивалентно неприводимому представлению $\pi_{n-k,k}$, соответствующему двустрочечной диаграмме $\lambda_{n,k} = (n-k,k)$ со строками длины $n-k$ и k, а ее представление в пространстве $A_{n,k}$ эквивалентно прямой сумме (без кратностей) неприводимых представлений $\pi_{n-l,l}$ по всем $l = 0, 1, \ldots, k$. В частности, представление группы $\mathfrak{S}_n$ в пространстве $A_{n,[n/2]}$ эквивалентно прямой сумме всех двустрочечных неприводимых представлений, т. е. является *моделью* двустрочечных представлений в смысле Гельфанда.

Выведем явные формулы для элементов базиса Гельфанда–Цетлина в рассматриваемой реализации двустрочечных представлений симметрических групп. Заметим прежде всего, что подпространство $A^0_{n,k}$ может быть определено следующим образом.

Лемма 1.5. *Пространство $A^0_{n,k}$ есть подпространство в $A_{n,k}$, состоящее из форм, инвариантных относительно одновременного сдвига переменных на константу. Оно натянуто на формы вида $(x_{i_1}-x_{j_1})\ldots(x_{i_k}-x_{j_k})$, где все индексы $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k$ попарно различны.*

Разумеется, формы вида $(x_{i_1}-x_{j_1})\ldots(x_{i_k}-x_{j_k})$ линейно зависимы, так что они образуют в $A^0_{n,k}$ переполненную систему. Будем называть их *псевдомономами.*

Заметим, что двустрочечная таблица Юнга u однозначно определяется последовательностью $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ элементов ее второй строки.

Предложение 1.11. *Рассмотрим двустрочечную таблицу Юнга $u \in \mathbb{T}_n$, и пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — элементы ее второй строки. Тогда элемент h^0_u базиса Гельфанда–Цетлина в пространстве $A^0_{n,k}$, отвечающий таблице u, задается формулой*

$$h^0_u = c^0_u \sum_{i_1,\ldots,i_k} (x_{i_1}-x_{p_1})\ldots(x_{i_k}-x_{p_k}), \tag{1.38}$$

где c_u^0 — нормировочная константа и сумма берется по всем наборам индексов $1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$, таким, что $i_j < p_j$ при всех $j = 1, \ldots, k$ и все элементы $i_1, \ldots, i_k, p_1, \ldots, p_k$ попарно различны.

Доказательство. Достаточно проверить, что при любом $l = 1, \ldots, n$ форма h_u^0 является собственным вектором для действия YJM-элемента X_l с собственным значением, равным $c_l(u)$. Это можно сделать при помощи прямых комбинаторных вычислений. □

Можно доказать, что нормировочная константа в формуле (1.38) равна

$$c_u^0 = \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^{k}(p_j - 2j + 1)(p_j - 2j + 2)\right)^{1/2}}. \tag{1.39}$$

Обозначим через $H_{n,m}^k$ подпространство в $A_{n,m}$, в котором реализуется представление $\pi_{n-k,k}$. Таким образом,

$$A_{n,m} = \bigoplus_{k=0}^{m} H_{n,m}^k. \tag{1.40}$$

Обозначим через ψ_n^l линейный оператор, который действует на мономы следующим образом:

$$\psi_n^l x_I = x_I \cdot \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_l \notin I \\ \text{различны}}} x_{j_1} \ldots x_{j_l}.$$

Как следует из результатов работы [47],

$$H_{n,m}^k = \psi_n^{m-k} A_{n,k}^0, \tag{1.41}$$

и ψ_n^{m-k} есть изоморфизм пространств $H_{n,m}^k$ и $A_{n,k}^0$, сплетающий соответствующие представления группы $\mathfrak{S}_n$.

Используя соотношение (1.41), из леммы 1.5 и теоремы 1.11 можно получить следующие утверждения.

Лемма 1.6. *Пространство* $H^k_{n,m}$ *натянуто на формы вида* $(x_{i_1}-x_{j_1})\ldots(x_{i_k}-x_{j_k})x_{s_1}\ldots x_{s_{m-k}}$, *где все индексы* $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k,s_1,\ldots,s_{m-k}$ *попарно различны.*

Теорема 1.8. *Рассмотрим двустрочечную таблицу Юнга* $u\in\mathbb{T}_n$, *и пусть* $p_1<p_2<\ldots<p_k$ *— элементы ее второй строки. Тогда элемент* h_u *базиса Гельфанда–Цетлина в пространстве* $H^k_{n,m}$, *отвечающий таблице* u, *задается формулой*

$$h_u = c_u \sum (x_{i_1}-x_{p_1})\ldots(x_{i_k}-x_{p_k})x_{s_1}\ldots x_{s_{m-k}}, \tag{1.42}$$

где c_u *— нормировочная константа, а сумма берется по всем наборам индексов* $1\le i_1,\ldots,i_k,s_1,\ldots,s_{m-k}\le n$, *таким, что* $i_j<p_j$ *для всех* $j=1,\ldots,k$ *и все элементы* $i_1,\ldots,i_k$, $p_1,\ldots,p_k$, $s_1,\ldots,s_{m-k}$ *попарно различны.*

1.5.2 Спектральный анализ

Пример 4. Индуцированные представления типа ∞^2. По теореме 1.6(б) представления типа ∞^2 неприводимы. (Заметим, что имеется континуум неизоморфных представлений такого типа.) Как упомянуто выше, в случае двустрочечной диаграммы λ все числа Костки $K_{\mu,\lambda}$ при $\mu\trianglerighteq\lambda$ равны 1. Таким образом, имеет место следующий результат.

Предложение 1.12. *Представление бесконечной симметрической группы, индуцированное с двублочной подгруппы Юнга, неприводимо и имеет простой спектр относительно алгебры Гельфанда–Цетлина.*

Разбиение $\mathbb{N} = A \cup B$ типа ∞^2 однозначно определяется бесконечной последовательностью $\xi = \xi_1\xi_2\ldots$ нулей и единиц, где $\xi_i = 1$ при $i \in A$ и $\xi_i = 0$ при $i \in B$. Поэтому рассматриваемое индуцированное представление изоморфно естественному подстановочному представлению группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ на бесконечных последовательностях в циклической оболочке последовательности ξ, которое будем обознать через π_ξ. Таким образом, π_ξ есть унитарное представление группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ в пространстве $l^2(O_\xi)$, где O_ξ — дискретное множество бесконечных последовательностей нулей и единиц, конфинальных с ξ.

Для простоты удобно предполагать, что число единиц среди первых n элементов последовательности ξ не превосходит $n/2$. Нетрудно видеть, что произвольный случай сводится к этому, но мы опускаем соответствующие технические подробности.

Рассмотрим циклическую оболочку $\mathfrak{S}_n\xi$ последовательности ξ относительно группы $\mathfrak{S}_n$. Она естественно отождествляется с пространством $A_{n,m}$, где $m = m(n)$ есть число единиц среди первых n элементов последовательности ξ. При этом скалярное произведение, индуцированное из $l^2(O_\xi)$, совпадает со стандартным скалярным произведением (1.37) в $A_{n,m}$. Таким образом, представление π^n_ξ группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathfrak{S}_n\xi$ унитарно эквивалентно рассмотренному в п. 1.5.1 представлению в пространстве $A_{n,m}$, причем элемент ξ можно отождествить с мономом $x_{i_1}\ldots x_{i_m} \in A_{n,m}$, где $i_1, \ldots, i_m$ — номера позиций от 1 до n, на которых в последовательности ξ стоят единицы. При этом имеется естественное вложение $\iota_n : \pi^n_\xi \hookrightarrow \pi^{n+1}_\xi$: если $\xi_{n+1} = 0$, то ι_n есть тождественное вложение $A_{n,m} \hookrightarrow A_{n+1,m}$; если $\xi_{n+1} = 1$, то $\iota_n : A_{n,m} \to A_{n+1,m+1}$ есть умножение на x_{n+1}, т. е. $\iota_n f = x_{n+1}f$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 1.7. *Индуцированное представление π_ξ группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ есть индуктивный предел тензорных представлений π^n_ξ групп $\mathfrak{S}_n$.*

Обозначим $\lambda_{n,k} = (n-k, k)$.

Теорема 1.9. *Спектральная мера μ_ξ циклического вектора ξ в представлении π_ξ относительно алгебры Гельфанда–Цетлина есть марковская мера на пространстве $\mathbb{T}$ бесконечных таблиц Юнга, и ее переходные вероятности задаются следующей формулой. Обозначим через $m(n)$ число единиц среди первых n элементов последовательности ξ.*

Если $\xi_{n+1} = 0$, то

$$\mathrm{Prob}(\lambda_{n,k}, \lambda_{n+1,k}) = \frac{n - m(n) - k + 1}{n - 2k + 1},\ \mathrm{Prob}(\lambda_{n,k}, \lambda_{n+1,k+1}) = \frac{m(n) - k}{n - 2k + 1}. \tag{1.43}$$

Если $\xi_{n+1} = 1$, то

$$\mathrm{Prob}(\lambda_{n,k}, \lambda_{n+1,k}) = \frac{m(n) - k + 1}{n - 2k + 1},\ \mathrm{Prob}(\lambda_{n,k}, \lambda_{n+1,k+1}) = \frac{n - m(n) - k}{n - 2k + 1}. \tag{1.44}$$

Доказательство. Как упомянуто выше, при любом n представление π_ξ^n реализуется в пространстве $A_{n,m}$, где $m = m(n)$ есть число единиц среди первых n элементов последовательности ξ. В частности, при любом $l \le n$ представление группы $\mathfrak{S}_l$ в соответствующей циклической оболочке $\mathfrak{S}_l \xi$ последовательности ξ имеет простой спектр. Отсюда по лемме 1.2 следует, что μ_ξ — марковская мера.

Найдем явные формулы для переходных вероятностей меры μ_ξ. Как следует из правила ветвления неприводимых представлений симметрических групп, для любой формы $f \in H^k_{n,m}$ имеем $\iota_n f = f_{n+1,k} + f_{n+1,k+1}$, где $f_{n+1,k} \in H^k_{n+1,m'}$, $f_{n+1,k+1} \in H^{k+1}_{n+1,m'}$ и $m' = m(n+1) = m + \xi_{n+1}$.

Лемма 1.8. *Пусть $f \in H^k_{n,m}$. Согласно* (1.41), $f = \psi_n^{m-k} f_0$, *где* $f_0 \in A^0_{n,k}$.

Если $\xi_{n+1} = 0$, *то*

$$
\begin{aligned}
f_{n+1,k} &= \frac{n-m-k+1}{n-2k+1}\big(f + x_{n+1}\psi_n^{m-k-1} f_0\big),\\
f_{n+1,k+1} &= \frac{1}{n-2k+1}\big((m-k)f - (n-m-k+1)x_{n+1}\psi_n^{m-k-1} f_0\big).
\end{aligned}
$$

Если $\xi_{n+1} = 1$, *то*

$$
\begin{aligned}
f_{n+1,k} &= \frac{m-k+1}{n-2k+1}\big(x_{n+1}f + \psi_n^{m-k+1} f_0\big),\\
f_{n+1,k+1} &= \frac{1}{n-2k+1}\big((n-m-k)x_{n+1}f - (m-k+1)\psi_n^{m-k+1} f_0\big).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что формы $f_{n+1,k}$ и $f_{n+1,k+1}$ лежат в нужных пространствах. Очевидно, их сумма равна $\iota_n f$. $\square$

Следствие 1.4. *Пусть* $f \in H^k_{n,m}$.

Если $\xi_{n+1} = 0$, *то*

$$
\|f_{n+1,k}\|^2 = \frac{n-m-k+1}{n-2k+1}\|f\|^2, \qquad \|f_{n+1,k+1}\|^2 = \frac{m-k}{n-2k+1}\|f\|^2.
$$

Если $\xi_{n+1} = 1$, *то*

$$
\|f_{n+1,k}\|^2 = \frac{m-k+1}{n-2k+1}\|f\|^2, \qquad \|f_{n+1,k+1}\|^2 = \frac{n-m-k}{n-2k+1}\|f\|^2.
$$

Доказательство. Искомые формулы получаются из леммы 1.8 прямыми вычислениями с учетом следующих очевидных соотношений: $(f_{n+1,k}, f_{n+1,k+1}) = 0$; $\|f_{n+1,k}\|^2 + \|f_{n+1,k+1}\|^2 = \|f\|^2$; $(f, x_{n+1}\psi_n^{m-k-1}f_0) = 0$ в случае $\xi_{n+1} = 0$, и $(x_{n+1}f, \psi_n^{m-k+1}f_0) = 0$ в случае $\xi_{n+1} = 1$ (первые два соотношения выполнены по определению, а последнее — в силу того, что один из векторов состоит из мономов, содержащих x_{n+1}, а другой — из мономов, не содержащих x_{n+1}). $\square$

Как следует из доказательства леммы 1.2, $\mathrm{Prob}(\mu \mid \lambda) = \left(\frac{\|f_\lambda\|}{\|f_\mu\|}\right)^2$, поэтому формулы (1.43), (1.44) вытекают из следствия 1.4. Теорема 1.9 доказана. $\square$

Заметим, что все спектральные меры индуцированных представлений, рассматриваемые в теореме 1.9, не являются центральными (кроме тривиального случая, когда одно из множеств разбиения пусто).

Следствие 1.5. *Оператор $\psi_n^{m-k} : A^0_{n,k} \mapsto H^k_{n,m}$ является изометрией с точностью до константы. А именно, при $f_0 \in A^0_{n,k}$*

$$\|\psi_n^{m-k} f_0\|^2 = C^{m-k}_{n-2k} \cdot \|f_0\|^2. \tag{1.45}$$

Доказательство. Искомая формула получается из леммы 1.8 и следствия 1.4 прямыми вычислениями. $\square$

В частности, из формул (1.39), (1.41) и (1.45) следует, что коэффициенты c_u в (1.42) задаются формулой

$$\frac{1}{c_u^2} = C^{m-k}_{n-2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (p_j - 2j + 1)(p_j - 2j + 2).$$

Пример 3. Пусть $\xi = 0101\ldots$. Тогда $m(n) = [n/2]$ при любом n, и формулы для переходных вероятностей спектральной меры μ_ξ принимают следующий вид.

Если n нечетно, то

$$\mathrm{Prob}(\lambda_{n,k}, \lambda_{n+1,k}) = \frac{n - 2k + 2}{2(n - 2k + 1)}, \qquad \mathrm{Prob}(\lambda_{n,k}, \lambda_{n+1,k+1}) = \frac{n - 2k}{2(n - 2k + 1)}; \tag{1.46}$$

Если n четно, то

$$\mathrm{Prob}(\lambda_{n,k}, \lambda_{n+1,k}) = \mathrm{Prob}(\lambda_{n,k}, \lambda_{n+1,k+1}) = \frac{1}{2}. \tag{1.47}$$

Интересно сравнить формулы (1.46), (1.47) с переходными вероятностями эргодической *центральной* меры $\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ на T, соответствующей параметрам Тома $\alpha = (1/2, 1/2, 0, \ldots)$, $\beta = 0$.

Лемма 1.9. *Переходные вероятности центральной меры* $\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ *задаются формулой* (1.46) *для всех* n.

Доказательство. Пусть $u \in T_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Y}_n$. Тогда

$$\mu_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(C_u) = s_\lambda(1/2, 1/2) = \frac{1}{2^n} s_\lambda(1,1) = \prod_{\square \in \lambda} \frac{2 + c(\square)}{h(\square)},$$

где s_λ — функция Шура, $c(\square)$ и $h(\square)$ — содержание и длина крюка клетки $\square \in \lambda$ соответственно и мы воспользовались известной формулой для $s_\lambda(1, \ldots, 1)$ (см. [138, пример I.3.4]). Утверждение леммы выводится отсюда при помощи элементарных вычислений. $\square$

Удобно переписать формулы (1.46), (1.47), введя замену индексов $j = n - 2k$. В этих обозначениях таблица Юнга задается последовательностью $(j_1, j_2, \ldots)$, где j_n принимает значения $0, 1, \ldots, n$, и переходные вероятности меры μ_ξ равны

$$\mathrm{Prob}(j, j+1) = \frac{j+2}{2(j+1)}, \qquad \mathrm{Prob}(j, j-1) = \frac{j}{2(j+1)}$$

в нечетный момент времени и

$$\mathrm{Prob}(j, j+1) = \mathrm{Prob}(j, j-1) = \frac{1}{2}$$

в четный момент времени. Следовательно, случайная таблица Юнга с распределением μ_ξ есть траектория неоднородного (как по времени, так и по пространству) случайного блуждания на $\mathbb{Z}_+$. Таким образом, рассмотренные в данной работе индуцированные представления бесконечной симметрической группы действуют в пространстве функций от траекторий естественных случайных блужданий. Явные формулы для описания этого действия даются ортогональной формой Юнга (см., напр., [120]).

1.6 Изоморфизм табличной и динамической модели фактор-представлений

Стандартная конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала дает т. н. табличную модель конечных фактор-представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{B}$ битаблиц с топологией индуктивного предела $\mathcal{B} = \varinjlim \mathcal{B}_n$, см. введение. Диагональ $\mathcal{B}_0 = \{(t,t),\ t \in \mathbb{T}\}$ гомеоморфна пространству таблиц $\mathbb{T}$. Заметим, что $\mathcal{B}$ можно рассматривать как главный группоид, порожденный хвостовым отношением эквивалентности на $\mathbb{T}$ (см. [155]); пространство единиц этого группоида отождествляется с диагональю $\mathcal{B}_0 \sim \mathbb{T}$. Для произвольной таблицы $t \in \mathbb{T}$ обозначим через G^t счетное множество битаблиц $G^t = \{(t,\cdot) \in \mathcal{B}\}$, и пусть λ^t — считающая мера на G^t.

Преобразование Фурье устанавливает канонический изоморфизм между групповой алгеброй $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\mathbb{N}]$ бесконечной симметрической группы и $*$-алгеброй $\mathbb{C}(\mathcal{B})$ локально постоянных финитных функций на $\mathcal{B}$ с умножением

$$fg(s,t) = \sum_{r\sim t} f(s,r)g(r,t) \tag{1.48}$$

и инволюцией $f^*(s,t) = \overline{f(t,s)}$.

Пусть $M^{\alpha,\beta}$ — центральная мера на $\mathbb{T}$, соответствующая характеру $\chi^{\alpha,\beta}$ фактор-представления $\pi^{\alpha,\beta}$ по формуле (4), и пусть $\{M_n^{\alpha,\beta}\}$ — семейство цилиндрических распределений меры $M^{\alpha,\beta}$. Тогда

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} M_n^{\alpha,\beta}(\lambda)\frac{\chi^\lambda(\sigma)}{\dim\lambda} = \phi^{\alpha,\beta}(\sigma), \qquad \sigma\in\mathfrak{S}_n.$$

Рассмотрим меру $\widetilde{M}^{\alpha,\beta}$ на группоиде $\mathcal{B}$, индуцированную мерой $M^{\alpha,\beta}$ на его диагонали $\mathbb{T}$:

$$\widetilde{M}^{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{T}} \lambda^t dM^{\alpha,\beta}(t).$$

Обозначим $H^{\alpha,\beta} = L^2(\mathcal{B},\widetilde{M}^{\alpha,\beta})$. Если f и g — n-цилиндрические функции, т. е. они сосредоточены на множестве $\mathcal{B}_n$ и зависят только от начальных n-отрезков путей, так что могут быть отождествлены с функциями на $\mathcal{B}_n$, то

$$(f,g) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n}\frac{M_n^{\alpha,\beta}(\lambda)}{\dim\lambda}\operatorname{tr}(\widehat{f}(\lambda)\widehat{g}^*(\lambda)).$$

Представление $U \approx \pi^{\alpha,\beta}$ группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ в $H^{\alpha,\beta}$ задается следующей формулой. Для $g\in\mathfrak{S}_n$ пусть $\widehat{\delta}_g$ — преобразование Фурье δ-функции в g, задаваемое формулой

$$\widehat{\delta}_g(s,t) = \begin{cases} (\pi_\lambda(g)h_{[s]_n}, h_{[t]_n}), & \text{если } s\sim_n t,\ \ [s]_n,[t]_n\in\lambda, \\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тогда $U_g f = \widehat{\delta}_g f$ при $g\in\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, где умножение понимается в смысле (1.48). Для n-цилиндрических функций f имеем

$$(U_g f)(\lambda) = \pi_\lambda(g) f(\lambda), \qquad g\in\mathfrak{S}_n,\ \lambda\in\mathbb{Y}_n.$$

Характеристическая функция диагонали Ψ — циклический вектор этого представления, и характер $\chi^{\alpha,\beta}$ есть соответствующая сферическая функция: $(U_g\Psi, \Psi) = \chi^{\alpha,\beta}(g)$.

Динамическая модель конечных фактор-представлений бесконечной симметрической группы была предложена в [19]. Рассмотрим простейший случай, когда $\sum \alpha_i = 1$ и $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда последовательность α можно рассматривать как меру на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Рассмотрим пространство последовательностей $\mathcal{X} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}$ с продакт-мерой $m_\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} \alpha$. Группа $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ действует на $\mathcal{X}$ подстановками координат, и это действие сохраняет меру m_α. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathcal{X}$ следующим образом: $x \sim y$, если существует такая подстановка $\sigma \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}$, что $y = \sigma x$. Пусть $\widetilde{\mathcal{X}} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathcal{X}, x \sim y\}$ — главный группоид с диагональю $\mathcal{X}$, построенный по этому отношению эквивалентности. Рассмотрим меру $\widetilde{m}_\alpha$ на группоиде $\widetilde{\mathcal{X}}$, индуцированную мерой m_α на диагонали $\mathcal{X}$, и положим $\mathcal{K}_\alpha = L^2(\mathcal{X}, \widetilde{m}_\alpha)$.

Представление $V \approx \pi^\alpha = \pi^{\alpha,0}$ группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ в пространстве $\mathcal{K}_\alpha$ задается формулой

$$(V_g h)(x, y) = h(g^{-1}x, y). \tag{1.49}$$

Пусть $\Phi \in \mathcal{K}_\alpha$ — характеристическая функция диагонали. Будем рассматривать представление V в циклической оболочке $\mathcal{K}^0$ вектора Φ (она совпадает с $\mathcal{K}_\alpha$, если последовательность α состоит из попарно различных координат). Имеем

$$(V_g\Phi, \Phi) = \chi_\alpha(g) = m_\alpha(\{x \in \mathcal{X} : \ gx = x\}) = \prod_{k \geq 2} (\sum_i \alpha_i^k)^{r_k(g)},$$

где $r_k(g)$ — число циклов длины k в перестановке $g \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}$.

Обозначим через H_n^α подпространство в $H^\alpha = H^{\alpha,0}$, состоящее из n-цилиндрических функций.

Теорема 1.10. *Изоморфизм табличной и динамической модели фактор-представления $\pi^\alpha = \pi^{\alpha,0}$ задается следующим сплетающим оператором. Пусть $f \in H^\alpha = L^2(\mathcal{B}, M^\alpha)$. Обозначим через f_n проекцию функции f на H_n^α. Тогда*

$$Tf = \lim_{n\to\infty} Tf_n, \qquad (Tf_n)(x,y) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\\ x=\sigma y}} \widehat{f}_n^{-1}(\sigma), \qquad (x,y) \in \widetilde{\mathcal{X}}, \tag{1.50}$$

где $\widehat{f}_n^{-1}$ — обратное преобразование Фурье (3) n-цилиндрической функции f_n.

Сопряженный оператор $S = T^*$ можно описать следующим образом. Пусть $g \in \mathcal{K}_\alpha$. Рассмотрим функцию G на $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, задаваемую формулой

$$G(w) = \int_{\mathcal{X}} g(wx,x)dm_\alpha(x), \qquad w \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}, \tag{1.51}$$

и обозначим через G_n ее ограничение на $\mathfrak{S}_n$. Тогда $Sg = \lim_{n\to\infty} S_n g$, где

$$(S_n g)(\lambda) = \frac{1}{\widehat{\chi_n^\alpha}(\lambda)}\widehat{G}_n(\lambda) = \frac{\dim^2\lambda}{n!M_n^\alpha(\lambda)}\widehat{G}_n(\lambda);$$

здесь χ_n^α — ограничение характера χ^α на $\mathfrak{S}_n$.

Доказательство. Преобразование Фурье дает реализацию ограничения табличной модели рассматриваемого представления на $\mathfrak{S}_n$ в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ со скалярным произведением

$$(a,b) = \sum_{u,v\in\mathfrak{S}_n} a(u)\overline{b(v)}\chi_\alpha(v^{-1}u), \qquad a,b \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n],$$

и естественным групповым действием $(U_g a)(w) = a(g^{-1}w)$. Циклический вектор, соответствующий вектору Ψ, есть δ-функция в единице δ_e.

Рассмотрим δ-функцию $\delta_g \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $g \in \mathfrak{S}_n$. Очевидно, $\delta_g = U_g\delta_e$. Поскольку $T\Psi = \Phi$, имеем $T(U_g\Psi) = V_g\Phi$, так что δ_g переходит в функцию

$$(T\delta_g)(x,y) = (V_g\Phi)(x,y) = \Phi(g^{-1}x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = gy, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

По линейности для $f \in H_n^\alpha$ имеем

$$(Tf)(x,y) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} \widehat{f}^{-1}(w)\Phi(w^{-1}x,y) = \sum_{\substack{w\in\mathfrak{S}_n,\\ x=wy}} \widehat{f}^{-1}(w),$$

что и требовалось.

Чтобы доказать формулу для сопряженного оператора, рассмотрим функции $f \in H_n^\alpha$ и $g \in \mathcal{K}_\alpha$ и скалярное произведение

$$\begin{aligned}(Tf,g) = \int_{\mathcal{X}} (Tf)(x,y) \sum_{y\sim x} \overline{g(x,y)}dm_\alpha(x) &= \int_{\mathcal{X}} \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ x=\sigma y}} \widehat{f}^{-1}(\sigma) \sum_{y\sim x} \overline{g(x,y)}dm_\alpha(x) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \widehat{f}^{-1}(\sigma) \int_{\mathcal{X}} \overline{g(\sigma x,x)}dm_\alpha(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \widehat{f}^{-1}(\sigma)\overline{G_n(\sigma)}.\end{aligned}$$

Применяя формулу обращения (3) для преобразования Фурье, получаем

$$\begin{aligned}(Tf,g) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim\lambda}{n!} \operatorname{tr}(f(\lambda)T^*_\lambda(\sigma))\overline{G_n(\sigma)} \\ &= \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim\lambda}{n!} \operatorname{tr}(f(\lambda) \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \overline{G_n(\sigma)}T^*_\lambda(\sigma)) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim\lambda}{n!} \operatorname{tr}(f(\lambda)\widehat{G}^*_n(\lambda)).\end{aligned}$$

Сравнение с формулой

$$(Tf, g) = (f, Sg) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \frac{M_n^\alpha(\lambda)}{\dim \lambda} \operatorname{tr}(f(\lambda)(Sg)^*(\lambda))$$

дает искомый результат. $\square$

Пример. Пусть $g = \Phi$ — характеристическая функция диагонали. Тогда

$$G(w) = \int_{\mathcal{X}} \Phi(wx, x) dm_\alpha(x) = m_\alpha(\{x \in \mathcal{X} : wx = x\}) = \chi^\alpha(w),$$

так что $\widehat{G}_n(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}_n} \frac{M_n^\alpha(\mu)}{\dim \mu} \widehat{\chi}^\mu(\lambda) = \frac{M_n^\alpha(\lambda)}{\dim \lambda} \frac{n!}{\dim \lambda} E_\lambda$, откуда

$$(Sg)(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n! M_n^\alpha(\lambda)} \widehat{G}_n(\lambda) = E_\lambda, \quad \text{т. е. } Sg = \Psi.$$

Глава 2

Процессы Леви и фоковские факторизации

Вторая глава диссертации посвящена изучению обобщенных процессов Леви — случайных процессов с независимыми значениями. В § 2.1 рассматриваются свойства гамма-процесса и родственных ему процессов и мер. Параграф 2.2 посвящен изучению структуры т. н. факторизации в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функционалов над обобщенным процессом Леви.

2.1 Гамма-процесс и бесконечномерная мера Лебега

2.1.1 Обобщенные субординаторы. Гамма-процесс

Пусть (X, ν) — стандартное борелевское пространство с непрерывной конечной мерой ν. Обозначим через $\mathcal{F}$ линейное пространство (классов $\operatorname{mod} 0$) ограниченных измеримых функций на X. Напомним, что обобщенный случайный процесс на вещественном топологическом векторном локально выпуклом пространстве $\mathcal{L}$ есть непрерывное линейное отображение $a \mapsto \langle a, \cdot \rangle$ из пространства $\mathcal{L}$ в пространство случайных величин на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Определение 2.1. *Обобщенный случайный процесс на пространстве $\mathcal{F}$ называется* процессом с независимыми значениями (процессом Леви), *если для любых функций $a_1, a_2 \in \mathcal{F}$, таких, что $a_1(x)a_2(x) = 0$ п. в., случайные величины $\langle a_1, \cdot \rangle$ и $\langle a_1, \cdot \rangle$ независимы. Процесс называется* однородным, *если он инвариантен относительно сохраняющих меру преобразований пространства (X, ν).*

Хорошо известно (см., напр, [97]), что однородные процессы с независимыми приращениями описываются при помощи теоремы Леви–Хинчина. Для каждого однородного процесса с независимыми значениями на (X, ν) существует борелевская мера Λ на $\mathbb{R}$, такая, что $\Lambda(\{0\}) = 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{1+t^2} d\Lambda(t) < \infty$ (мера Леви–Хинчина), неотрицательное число $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ (гауссовская дисперсия) и число $c \in \mathbb{R}$ (снос), такие, что для любой функции $a \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E}e^{i\langle a, \cdot \rangle} = \exp\left(\int_X \log \phi(a(x)) d\nu(x) \right),$$

где

$$\log \phi(y) = icy - \frac{\sigma^2 y^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{ity} - 1 - \frac{ity}{1+t^2} \right) d\Lambda(t),$$

причем параметры Λ, σ^2 и c однозначно определяются процессом. В частности, мера Λ является мерой скачков процесса.

В случае, когда гауссовская компонента и снос отсутствуют, а мера Λ сосредоточена на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяет условию $\int_0^\infty (1 - e^{-s}) d\Lambda(s) < \infty$ (при $X = \mathbb{R}$ такие процессы являются *субординаторами* — однородными процессами с положительными независимыми приращениями), процесс Леви удобнее задавать при помощи преобразования Лапласа. А именно, рассмотрим класс мер Λ на полупрямой $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\Lambda(0,\infty)=\infty,\ \Lambda(1,\infty)<\infty,\ \int_0^1 s d\Lambda(s)<\infty,\ \Lambda(\{0\})=0. \tag{2.1}$$

Пусть ψ_Λ — преобразование Лапласа безгранично делимого распределения F_Λ с мерой Леви Λ:

$$\psi_\Lambda(t)=\exp\left(-\int_0^\infty(1-e^{-ts})d\Lambda(s)\right).$$

Определение 2.2. (Обобщенный) субординатор *на пространстве* (X,ν) *с мерой Леви* Λ, *удовлетворяющей условиям* (2.1), *есть обобщенный случайный процесс, распределение* $P_\Lambda=P_\Lambda(\nu)$ *которого имеет преобразование Лапласа*

$$\mathbb{E}e^{-\langle a,\cdot\rangle}=\exp\left(\int_X \log\psi_\Lambda(a(x))d\nu(x)\right), \tag{2.2}$$

где a — *произвольная неотрицательная ограниченная борелевская функция на* X.

Заметим, что, как легко видеть, $P_\Lambda(\nu)=P_{c\Lambda}(\nu/c)$ для любого $c>0$.

Корректность определения 2.2 гарантируется следующей явной конструкцией (см. [36, гл. 8]). Пусть

$$D=\left\{\sum z_i\delta_{x_i},\ x_i\in X,\ z_i\in\mathbb{R},\sum|z_i|<\infty\right\}$$

— вещественное линейное пространство всех конечных вещественных дискретных мер на X, а $D^+=\{\sum z_i\delta_{x_i}\in D:\ z_i>0\}$ — конус в D, состоящий из положительных мер. Рассмотрим точечный пуассоновский процесс на пространстве $X \times \mathbb{R}_+$ со средней мерой $\nu \times \Lambda$. Реализации $\Pi = \{(X_i, Z_i)\}$ этого процесса сопоставим элемент

$$\eta = \sum_{(X_i, Z_i) \in \Pi} Z_i \delta_{X_i} \in D_+. \tag{2.3}$$

Тогда η — случайная дискретная мера, подчиняющаяся закону $P_\Lambda(\nu)$. В частности, распределение $P_\Lambda(\nu)$ сосредоточено на конусе D^+, и в дальнейшем мы будем писать $\langle a, \eta \rangle = \int_X a(x) d\eta(x) = f_a(\eta)$.

Пусть $L : X \to X$ — преобразование пространства X, сохраняющее меру ν. Оно действует на D подстановками:

$$L(\sum z_i \delta_{x_i}) = \sum z_i \delta_{Lx_i}. \tag{2.4}$$

Очевидно, распределение P_Λ субординатора инвариантно относительно таких преобразований.

Определение 2.3. Гамма-процесс *на пространстве* (X, ν) *с параметром* $\theta > 0$ *и масштабным параметром* $\beta > 0$ *есть обобщенный субординатор на* (X, ν) *с мерой Леви* $\Lambda_{\theta,\beta}$, *где* $d\Lambda_{\theta,\beta}(z) = \theta z^{-1} e^{-\beta z} dz$, $z > 0$.

Заметим, что если γ^β — гамма-процесс с масштабным параметром β, то $\gamma^\beta \overset{\text{dist}}{=} \beta\gamma$ (равенство по распределению), где γ — гамма-процесс с масштабным параметром 1. Поэтому мы будем рассматривать только гамма-процессы с масштабным параметром 1.

Соответствующее безгранично делимое распределение есть гамма-распределение Γ_θ на $\mathbb{R}_+$ с плотностью $\Gamma(\theta)^{-1} t^{\theta-1} e^{-t}$.

Таким образом, распределение $\mathcal{G}_\theta$ гамма-процесса (называемое *гамма-мерой* с параметром θ на пространстве (X, ν)) задается преобразованием Лапласа

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}_\theta}\left[\exp\left(-\int_X a(x)d\gamma(x)\right)\right] = \exp\left(-\theta\int_X \log\left(1+a(x)\right)d\nu(x)\right), \qquad (2.5)$$

где a — произвольная неотрицательная ограниченная борелевская функция на X. Из пуассоновской конструкции (2.3) и теоремы Кэмпбелла (см. [36, § 3.2]) следует, что на самом деле формула (2.5) справедлива для любой измеримой функции $a : X \to \mathbb{R}$, для которой $\int_X \log(a(x)+1)d\nu(x) < \infty$.

Лемма 2.1. 1) *Полный заряд* $\gamma(X)$ *гамма-процесса и нормированный гамма-процесс* $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma(X)$ *независимы. Распределение полного заряда есть гамма-распределение с параметром* $\theta|\nu|$*, где* $|\nu| = \nu(X)$ *— полный заряд меры* ν*.*

2) *Если для некоторого обобщенного субординатора полный заряд и нормированный процесс независимы, то это гамма-процесс (возможно, с неединичным масштабным параметром).*

Доказательство. Следует из хорошо известных свойств гамма-распределения (в частности, п. 2 следует из знаменитой теоремы Лукача [136]). □

2.1.2 Квазиинвариантность гамма-процесса

Пусть $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X,\nu)$ — множество (классов $\bmod 0$) неотрицательных измеримых функций на пространстве X с ν-суммируемым логарифмом:

$$\mathcal{M}^+ = \left\{a : X \to \mathbb{R}_+ :\ \int_X |\log a(x)|d\nu(x) < \infty\right\}.$$

Функция $a \in \mathcal{M}^+$ задает мультипликатор $M_a : D \to D$, где $(M_a\eta)(x) = a(x)\eta(x)$, т. е. $M_a\eta = \sum a(x_i)z_i\delta_{x_i}$ при $\eta = \sum z_i\delta_{x_i}$. Заметим, что множество $\mathcal{M}^+$ есть коммутативная группа относительно поточечного умножения функций и M_a — ее групповое действие.

Теорема 2.1. *Для любой функции $a \in \mathcal{M}^+$ гамма-мера $\mathcal{G}_\theta$ квазиинвариантна относительно мультипликатора M_a, и соответствующая плотность задается формулой*

$$\frac{d(M_a\mathcal{G}_\theta)}{d\mathcal{G}_\theta}(\gamma) = \exp\left(-\theta\int_X \log a(x)d\nu(x)\right)\cdot\exp\left(-\int_X\left(\frac{1}{a(x)}-1\right)d\gamma(x)\right).$$

Доказательство. Зафиксируем $a \in \mathcal{M}^+$, и пусть $\xi = M_a\gamma$. Рассмотрим произвольную функцию $b \in \mathcal{M}^+$. Тогда $f_b(\xi) = \int_X b(x)d\xi(x) = \int_X a(x)b(x)d\gamma(x) = f_{ab}(\gamma)$. Таким образом, в силу (2.5), преобразование Лапласа $\mathbb{E}\left[\exp\left(-f_b(\xi)\right)\right]$ относительно $\mathcal{G}_\theta$ равно

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-f_{ab}(\gamma)\right)\right] = \exp\left(-\theta\int_X \log\big(1+a(x)b(x)\big)d\nu(x)\right) =$$
$$= \exp\left(-\theta\int_X \log a(x)d\nu(x)\right)\cdot\exp\left(-\theta\int_X\log\left(\frac{1}{a(x)}+b(x)\right)d\nu(x)\right).$$

Еще раз применяя формулу (2.5), можно считать, что последний сомножитель есть преобразование Лапласа гамма-меры $\mathcal{G}_\theta$, вычисленное на функции $(\frac{1}{a(x)}-1)+b(x)$. Пусть $I(a) = \exp(-\theta\int_X \log a(x)d\nu(x))$. Тогда

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-f_b(\xi)\right)\right] = I(a)\cdot\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_X\left(\frac{1}{a(x)}-1+b(x)\right)d\gamma(x)\right)\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[I(a)\cdot\exp\left(-\int_X\left(\frac{1}{a(x)}-1\right)d\gamma(x)\right)\cdot\exp\left(-\int_X b(x)d\gamma(x)\right)\right],$$

и теорема 2.1 доказана. □

В частности, если функция a есть константа $c > 0$, то соответствующая плотность зависит только от полного заряда $\gamma(X)$ меры γ, а именно,

$$\frac{d(M_c\mathcal{G}_\theta)}{d\mathcal{G}_\theta}(\gamma) = \frac{1}{c^{\theta|\nu|}}\cdot\exp\left(\left(1-\frac{1}{c}\right)\gamma(X)\right). \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. *Действие группы $\mathcal{M}^+$ на пространстве $(D^+, \mathcal{G}_\theta)$ эргодично.*

Доказательство. Пусть $G : D^+ \to \mathbb{R}$ — измеримый (относительно $\mathcal{G}_\theta$) функционал на D^+, инвариантный относительно всех мультипликаторов M_a, т. е. $G(M_a\gamma) = G(\gamma)$ п. в. относительно $\mathcal{G}_\theta$. Рассмотрим произвольную борелевскую функцию $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда для каждой функции $a \in \mathcal{M}^+$ имеем

$$\mathbb{E}_\theta\big[k(G(\gamma))\big] = \mathbb{E}_\theta\big[k(G(M_a\gamma))\big]$$
$$= \mathbb{E}_\theta\left[k(G(\gamma)) \cdot \exp\left(-\int_X \widetilde{a}(x)d\gamma(x)\right)\right] \cdot \exp\left(-\theta\int_X \log a(x)d\nu(x)\right),$$

где $\widetilde{a}(x) = (1/a(x)) - 1$, а $\mathbb{E}_\theta$ обозначает математическое ожидание относительно $\mathcal{G}_\theta$. Но в силу (2.5) последний сомножитель равен

$$\left(\mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(-\int_X \widetilde{a}(x)d\gamma(x)\right)\right]\right)^{-1} = \left(\mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(-f_{\widetilde{a}}(\gamma)\right)\right]\right)^{-1},$$

откуда

$$\mathbb{E}_\theta\left[k(G(\gamma))\exp\left(-f_{\widetilde{a}}(\gamma)\right)\right] = \mathbb{E}_\theta\big[k(G(\gamma))\big] \cdot \mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(-f_{\widetilde{a}}(\gamma)\right)\right].$$

Значит, G не зависит от любого функционала f_a, и теорема доказана. □

Возникает естественный вопрос: является ли свойство, установленное в теореме 2.1, характеристическим для гамма-процесса. Ответ на этот вопрос отрицателен. Пример квазиинвариантного гамма-процесса, не эквивалентного никакому гамма-процессу, построен в работе М. А. Лифшица и Е. Ю. Шмилевой [41]. Следующий вопрос состоит в том, существуют ли квазиинвариантные относительно $\mathcal{M}^+$ меры, допускающие эквивалентные инвариантные меры. Ответ на этот вопрос, как доказано в работе Н. В. Цилевич, А. М. Вершика и М. Йора [165], положителен лишь в случае гамма-процессов. Соответствующее семейство мер описано в следующем разделе.

2.1.3 Мультипликативные меры и бесконечномерная мера Лебега

Вопрос о том, допускает ли распределение гамма-процесса эквивалентную инвариантную меру, ведет к следующему определению однопараметрического семейства σ-конечных мер на пространстве D^+ (неявным образом открытых в [11, 105] в совершенно ином контексте).

Определение 2.4. Мультипликативная мера *с параметром* $\theta > 0$ *на пространстве* $D^+(X, \nu)$ *есть* σ*-конечная (конечная на компактах) мера* $\mathcal{L}_\theta$*, эквивалентная гамма-мере* $\mathcal{G}_\theta$ *и задаваемая следующей формулой:*

$$\frac{d\mathcal{L}_\theta}{d\mathcal{G}_\theta}(\eta) = \exp(\eta(X)). \tag{2.7}$$

Мера $\mathcal{L}_1$ *называется* мерой Лебега *на* $D^+(X, \nu)$.

Замечание. σ-Конечные меры определены с точностью до константы $c > 0$, которую можно зафиксировать, например, нормировкой на некотором компактном множестве. Все утверждения о σ-конечных мерах следует понимать с учетом этого замечания.

Из формул (2.5) и (2.7) следует, что преобразование Лапласа мультипликативной меры $\mathcal{L}_\theta$ равно

$$\int_{D^+} \left[\exp\left(-\int_X a(x)d\eta(x)\right)\right] d\mathcal{L}_\theta(\eta) = \exp\left(-\theta \int_X \log a(x) d\nu(x)\right). \tag{2.8}$$

Заметим, что это преобразование определено лишь для класса $\mathcal{M}^+$ функций с суммируемым логарифмом, которое не является линейным пространством.

Переход от гамма-меры $\mathcal{G}_\theta$ к соответствующей мультипликативной мере $\mathcal{L}_\theta$ не меняет условное распределение меры при фиксированном полном заряде $\eta(X)$. Меняется только фактор-мера на $\mathbb{R}_+$, которая есть распределение случайной величины $\eta(X)$. Для $\mathcal{G}_\theta$ эта фактор-мера есть гамма-распределение с плотностью $\frac{1}{\Gamma(\theta)}t^{\theta-1}e^{-t}$, а для $\mathcal{L}_\theta$ — мера λ_θ с плотностью

$$\frac{d\lambda_\theta(t)}{dt} = \frac{1}{\Gamma(\theta)}t^{\theta-1}. \tag{2.9}$$

Меру λ_θ назовем *одномерной мультипликативной мерой* с параметром θ. В частности, λ_1 есть обычная мера Лебега. Отметим, что мультипликативные меры σ-конечны, но конечны на компактах.

Преобразование Лапласа мультипликативной меры λ_θ на $\mathbb{R}_+$ равно $\phi_\theta(t) = 1/t^\theta$. Поэтому из (2.8) следует, что

$$\int_{D^+} \exp\left(-f_a(\eta)\right) d\mathcal{L}_\theta(\eta) = \exp\left(\int_X \log \phi_\theta(a(x)) d\nu(x)\right),$$

и сравнение с (2.2) показывает, что бесконечномерная мультипликативная мера $\mathcal{L}_\theta$ связана с одномерной мультипликативной мерой λ_θ точно так же, как распределение субординатора связано с безгранично делимым распределением, имеющим ту же меру Леви.

Заметим, что мультипликативные меры $\mathcal{L}_\theta$, как и соответствующие одномерные меры λ_θ, образуют полугруппу относительно свертки: $\lambda_{\theta_1} * \lambda_{\theta_2} = \lambda_{\theta_1+\theta_2}$ и $\mathcal{L}_{\theta_1} * \mathcal{L}_{\theta_2} = \mathcal{L}_{\theta_1+\theta_2}$.

Следующее определение навеяно теорией представлений и было впервые использовано в работе [105].

Определение 2.5. *Пусть (Y, μ) — пространство с мерой, а G — группа, действующая на нем преобразованиями T_g, $g \in G$. Мера μ называется* проективно инвариантной *относительно* G, *если она квазиинвариантна относительно всех* T_g, $g \in G$, *и все плотности* $\frac{dT_g\mu}{d\mu}(y)$ *являются константами.*

Теорема 2.3. *Мультипликативная мера* $\mathcal{L}_\theta$ *проективно инвариантна относительно группы мультипликаторов* $\mathcal{M}^+$, *а именно,*

$$\frac{dM_a(\mathcal{L}_\theta)}{d\mathcal{L}_\theta} = \exp\left(-\theta \int_X \log a(x) d\nu(x)\right). \tag{2.10}$$

Доказательство. Следует из теоремы 2.1. □

Пусть $\mathcal{M}_0^+ = \{a \in \mathcal{M}^+ : \int_X \log a(x) d\nu(x) = 0\}$ — подгруппа в $\mathcal{M}^+$, состоящая из функций с нулевым интегралом от логарифма.

Следствие 2.1. *Мультипликативные меры инвариантны относительно подгруппы* $\mathcal{M}_0^+$.

В работе Н. В. Цилевич, А. М. Вершика и М. Йора [165] доказана следующая теорема, которая показывает, что в классе обобщенных субординаторов только гамма-процессы обладают эквивалентными проективно инвариантными мерами.

Теорема 2.4 ([165])**.** *Пусть* μ — σ*-конечная мера на* $D^+(X,\nu)$, *конечная на компактных множествах, эквивалентная распределению некоторого субординатора и проективно инвариантная относительно действия группы* $\mathcal{M}^+$. *Тогда* μ — *мультипликативная мера.*

Заметим, что теорема 2.3 и следствие 2.1 — аналоги соответствующих свойств конечномерных мультипликативных мер. А именно, рассмотрим произведение $\lambda_\theta^n = \lambda_\theta \times \ldots \times \lambda_\theta$ (n сомножителей), где λ_θ — одномерная мультипликативная мера. Нетрудно видеть, что мера λ_θ^n *проективно инвариантна* относительно действия диагональной подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ и *инвариантна* относительно действия диагональной подгруппы группы $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

Мультипликативные меры были определены на конусе $D^+(X)$ положительных дискретных мер. Теперь можно стандартным образом распространить это определение на все пространство $D(X)$. Пусть $\mathcal{L}_\theta^+ = \mathcal{L}_\theta$. Рассмотрим меру $\mathcal{L}_\theta^-$ на пространстве $D^- = \{\eta = \sum z_i\delta_{x_i} \in D : z_i < 0\}$, являющуюся образом меры $\mathcal{L}_\theta^+$ при отображении $\eta \to -\eta$. *Мультипликативная мера* с параметром θ (*мера Лебега*) *на пространстве* $D(X)$ есть свертка $\mathcal{L}_\theta^+ * \mathcal{L}_\theta^-$ (соответственно $\mathcal{L}_1^+ * \mathcal{L}_1^-$). Это определение соответствует представлению общего процесса $\xi \in D$ как разности положительных процессов: $\xi = \xi_1 - \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 \in D^+$. Будем обозначать эту меру тем же символом $\mathcal{L}_\theta$, при необходимости указывая пространство D или D^+.

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{M} = \left\{ a : X \to \mathbb{R} : \int_X |\log|a(x)||d\nu(x) < \infty \right\}.$$

Теорема 2.5. *Мультипликативная мера* $\mathcal{L}_\theta$ *на пространстве* $D(X,\nu)$ *проективно инвариантна относительно группы* $\mathcal{M}$ *мультипликаторов, и*

$$\frac{dM_a(\mathcal{L}_\theta)}{d\mathcal{L}_\theta} = \exp\left(-\theta \int_X \log|a(x)|d\nu(x)\right). \tag{2.11}$$

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 2.3. □

Следствие 2.2. *Мультипликативные меры на пространстве* $D(X,\nu)$ *инвариантны относительно подгруппы* $\mathcal{M}_0 = \{a \in \mathcal{M} : \int_X \log|a(x)|d\nu(x) = 0\}$.

2.1.4 Коническое и симплициальное разложение. Распределения Пуассона–Дирихле

Рассмотрим конус

$$C = \{y = (y_1, y_2, \ldots) : \ y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq 0, \ \sum y_i < \infty\}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — вероятностный вектор ($p_i > 0$, $\sum p_i = 1$). Рассмотрим последовательность ξ_i независимых одинаково распределенных случайных величин, таких, что $\mathrm{Prob}(\xi_i = k) = p_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Для $(Q_1, Q_2, \ldots) \in C$ положим $S_k = \sum_{i:\xi_i = k} Q_i$. Пусть $\varkappa$ — мера на конусе C, такая, что распределение F суммы $\sum Q_i$ относительно $\varkappa$ безгранично делимо. Будем говорить, что мера $\varkappa$ есть *мера типа произведения*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого вероятностного вектора $p = (p_1, \ldots, p_n)$ суммы $S_1, \ldots, S_n$ независимы и S_k имеет распределение F^{*p_k}.

Зададим отображение $T : D^+ \to C \times X^\infty$ формулой

$$T\big(\sum Q_i \delta_{X_i}\big) = \big((Q_1, Q_2, \ldots), \ (X_1, X_2, \ldots)\big).$$

Пусть P — вероятностная мера на пространстве D^+, и пусть η — случайный процесс с распределением P. Случайную последовательность нагрузок $Q_1, Q_2, \ldots$ будем называть *конической частью* процесса, а ее распределение на конусе C — *конической частью* меры P.

Первая часть следующей теоремы есть фундаментальное свойство обобщенных субординаторов, впервые доказанное в [99] гораздо более сложным образом. Вторая часть является новой.

Теорема 2.6. 1. *Пусть P_Λ — распределение обобщенного субординатора на пространстве (X, ν) с мерой Леви Λ. Тогда $TP_\Lambda = \varkappa_\Lambda \times \bar{\nu}^\infty$, где $\varkappa_\Lambda$ — кони-*

ческая часть меры P_Λ.

2. *Мера $\varkappa$ на конусе C есть коническая часть распределения P_Λ некоторого обобщенного субординатора в том и только том случае, если это мера типа произведения и $F = F_\Lambda$.*

Доказательство. Пусть (X, ν) — стандартное борелевское пространство с непрерывной вероятностной мерой ν. Обозначим $X^k = X \times \ldots \times X$ (k сомножителей), $\nu^k = \nu \times \ldots \times \nu$ (k сомножителей), и пусть ν_{diag} — образ меры ν под действием диагонального отображения $x \to (x, \ldots, x)$.

Лемма 2.2. *Пусть τ — вероятностная борелевская мера на X^k. Если для любого сохраняющего меру преобразования L пространства (X, ν) преобразование $L^k = L \times \ldots \times L$ (k сомножителей) сохраняет τ, то τ есть выпуклая комбинация мер ν^k и ν_{diag}.*

Доказательство. Для простоты положим $k = 2$; общий случай доказывается аналогично. Диагональ $\Delta = \{(x, x),\ x \in X\}$, очевидно, инвариантна относительно группы $G = \{L \times L\}$, где L пробегает множество всех преобразований пространства X, сохраняющих меру ν. Поэтому достаточно показать, что если τ сосредоточена на множестве $(X \times X) \setminus \Delta$, то $\tau = \nu \times \nu$, а если τ сосредоточена на Δ, то $\tau = \nu_{diag}$.

В первом случае пусть $\xi_n = \{A_i\}_{i=1}^{2^n}$ — произвольное разбиение пространства X на 2^n подмножеств равной ν-меры $1/2^n$. Обозначим через ξ_n^2 соответствующее разбиение пространства $X \times X$, состоящее из элементов $A_{ij} = A_i \times A_j$, где A_i, A_j — элементы разбиения ξ. Группа G действует транзитивно на множестве внедиагональных элементов разбиения ξ_n, поэтому все внедиагональные элементы имеют равную τ-меру. Обозначим $Y_n = (X \times X) \setminus \cup (A_i \times A_i)$ и $\varepsilon_n = \tau(Y_n)$. Так как мера τ сосредоточена на $(X \times X) \setminus \Delta$, имеем $\varepsilon_n \to 1$ при $n \to \infty$. Переходя к более мелким разбиениям и применяя приведенное выше рассуждение, мы видим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ если $A \times B \subset Y_n$ и $\nu(A) = \nu(B) = \nu(Y_n)/2^k$, то $\tau(A \times B) = \varepsilon_n/4^k$. Но тогда ограничение меры τ на множество Y_n есть $\varepsilon_n \cdot (\nu \times \nu)$. Устремляя n к бесконечности, мы получаем, что $\tau = \nu \times \nu$.

Во втором случае, отождествляя диагональ Δ с X, мы получаем, что τ есть мера на X, инвариантная относительно всех преобразований, сохраняющих меру ν, откуда с очевидностью следует, что $\tau = \nu$. $\square$

Пусть теперь $L : X \to X$ — преобразование пространства X, сохраняющее меру ν. Оно действует на пространстве D подстановками (2.4), и распределение P_Λ инвариантно относительно этого действия. Обозначим через P_Λ^z условное распределение меры P_Λ при конической части, равной $z \in C$. Преобразование L действует «послойно», т. е. не меняет коническую часть, поэтому L сохраняет почти все условные меры P_Λ^z. В частности, обозначив через $(P_\Lambda^z)_k$ условное распределение первых k точек $X_1, \ldots, X_k$ на пространстве X^k, мы видим, что преобразование L^k сохраняет меру $(P_\Lambda^z)_k$. Теперь из леммы 2.2 следует, что для п. в. z имеем $(P_\Lambda^z)_k = \nu^k$ для всех k, т. е. $P_\Lambda^z = \nu^\infty$, и первое утверждение теоремы доказано.

Зафиксировав $n \in \mathbb{N}$ и вероятностный вектор $p = (p_1, \ldots, p_n)$, рассмотрим разбиение $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ пространства X, такое, что $\nu(A_k) = p_k$, $k = 1, \ldots, n$. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с одинаковым распределением ν, и положим $\xi_i = k$ при $X_i \in A_k$. Тогда $\{\xi_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, и $\mathrm{Prob}(\xi_i = k) = p_k$. Рассмотрим случайный процесс

$$\eta = \sum Q_i \delta_{X_i}, \tag{2.12}$$

где последовательность $Q_1, Q_2, \ldots$ независима от $\{X_i\}$ и имеет распределение $\varkappa$. Пусть $S_k^{(p)} = \sum_{i:\xi_i=k} Q_i$. Легко видеть, что при $t_1, \ldots, t_n > 0$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} t_k S_k^{(p)}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_X a(x)d\eta(x)\right)\right], \tag{2.13}$$

где a — ступенчатая функция, такая, что $a(x) = t_i$ при $x \in A_i$.

Пусть теперь $\varkappa$ — коническая часть распределения P_Λ некоторого обобщенного субординатора. Тогда по доказанному в первой части процесс η, задаваемый формулой (2.12), имеет распределение P_Λ, и из соотношения (2.2) следует, что правая часть формулы (2.13) равна

$$\prod_{i=1}^{n} \psi_\Lambda(t_i)^{\nu(A_i)} = \prod_{i=1}^{n} \psi_\Lambda(t_i)^{p_i}.$$

Так как левая часть формулы (2.13) есть преобразование Лапласа совместного распределения случайных величин $S_1^{(p)}, \ldots, S_n^{(p)}$, эти величины независимы и $S_k^{(p)}$ имеет распределение F^{*p_k}, т. е. $\varkappa$ есть мера типа произведения.

Наоборот, пусть $\varkappa$ — мера типа произведения, соответствующая безгранично делимому распределению F. Зададим случайный процесс η на произвольном измеримом пространстве (X, ν) формулой (2.12). Приведенное выше рассуждение показывает, что η удовлетворяет формуле (2.2), где Λ есть мера Леви распределения F, для всех положительных ступенчатых функций a, и по непрерывности ее легко распространить на все ограниченные борелевские функции. Таким образом, η имеет распределение P_Λ, и $\varkappa$ есть коническая часть меры P_Λ. $\square$

Рассмотрим теперь бесконечномерный симплекс

$$\Sigma = \{y = (y_1, y_2, \ldots) : \ y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq 0, \ y_1 + y_2 + \cdots = 1\}$$

и отображение $T' : D^+ \to \mathbb{R}_+ \times \Sigma \times X^\infty$, где

$$T'\bigl(\sum Q_i\delta_{X_i}\bigr) = \bigl(\eta(X), (Q_1/\eta(X), Q_2/\eta(X), \ldots), (X_1, X_2, \ldots)\bigr).$$

Нормированная последовательность нагрузок $Q_1/\eta(X)$, $Q_2/\eta(X), \ldots$ называется *симплициальной частью* процесса, а ее распределение σ_Λ — *симплициальной частью* меры P_Λ.

Напомним определение мер Пуассона–Дирихле $\mathrm{PD}(\theta)$, $\theta > 0$. Эти распределения, введенные Дж. Кингманом [129], возникают в самых различных областях математики и приложений и обладают множеством замечательных свойств (см. обзоры в [36, 69]). Среди многочисленных возможных определений этих мер приведем одно из простейших — с помощью т. н. процесса ломания палки. Пусть Y_1 — с. в. на отрезке $[0,1]$ с распределением $\theta(1-t)^{\theta-1}dt$, $t \in [0,1]$. Если с. в. $Y_1, \ldots, Y_n$ уже построены, то Y_{n+1} имеет то же (отмасштабированное нужным образом) распределение, но на отрезке $[Y_n, 1]$. Положим $Z_k = Y_k - Y_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, и пусть $Z_{(1)} \geq Z_{(2)} \geq \ldots$ — порядковые статистики последовательности $Z_1, Z_2, \ldots$. Тогда мера Пуассона–Дирихле $\mathrm{PD}(\theta)$ есть распределение точки $Z = (Z_{(1)}, Z_{(2)}, \ldots)$ на симплексе Σ.

Следующий факт хорошо известен (см., напр., [36]), но преимущества одновременного изучения мер $\mathcal{G}_\theta$ and $\mathrm{PD}(\theta)$ ранее систематически не использовались.

Предложение 2.1. *Симплициальная часть гамма-меры $\mathcal{G}_\theta$ на пространстве (X, ν), где $\nu(X) = \theta$, есть распределение Пуассона–Дирихле* $\mathrm{PD}(\theta)$ *с параметром θ.*

Из леммы 2.1 следует, что коническая часть гамма-меры $\mathcal{G}_\theta$ равна $\Gamma_\theta \times \mathrm{PD}(\theta)$, где Γ_θ — гамма-распределение на $\mathbb{R}_+$ с параметром θ. Конической частью мультипликативной меры $\mathcal{L}_\theta$ является мера $\widetilde{\mathrm{PD}}(\theta) = \lambda_\theta \times \mathrm{PD}(\theta)$, где λ_θ — одномерная мультипликативная мера (2.9).

Пусть $a \in \mathcal{M}^+$. В соответствии с общей теорией полиморфизмов (см. [6]) преобразование M_a индуцирует марковский оператор R_a на конусе C. А именно, пусть $z = (z_1, z_2, \ldots) \in C$. Рассмотрим условное распределение P_Γ^z гамма-меры при конической части процесса равной z. Тогда случайный образ точки z под действием R_a есть коническая часть процесса $M_a\eta$, где η подчиняется закону P_Γ^z. Из теоремы 2.6 следует, что $R_a z = V(a(X_1)z_1, a(X_2)z_2, \ldots)$, где $(X_1, X_2, \ldots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин на X с распределением ν, а V — оператор, переставляющий координаты в неубывающем порядке.

Аналогичным образом M_a индуцирует марковский оператор S_a на симплексе Σ:

$$S_a y = V\left(\frac{a(X_1)y_1}{\sigma}, \frac{a(X_2)y_2}{\sigma}, \ldots\right),$$

где $(X_1, X_2, \ldots)$ определяется как раньше, а $\sigma = a(X_1)y_1 + a(X_2)y_2 + \ldots$.

Заметим, что определения операторов S_a и R_a зависят только от распределения функции a. Таким образом, можно считать, что $X = [0,1]$ и $\nu = \theta\lambda$, где λ — мера Лебега на отрезке.

Теорема 2.7. 1. *Распределение Пуассона–Дирихле* $\mathrm{PD}(\theta)$ *квазиинвариантно относительно марковского оператора* S_a *для всех* $a \in \mathcal{M}^+$, *и*

$$\frac{dS_a \,\mathrm{PD}(\theta)}{d\,\mathrm{PD}(\theta)}(y) = \exp\left(-\theta \int_0^1 \log a(s) ds\right) \cdot \int_0^\infty \frac{\sigma^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} \left(\prod_{i=1}^\infty L_{1/a}(\sigma y_i)\right) d\sigma,$$

где $L_{1/a}(\cdot)$ *— преобразование Лапласа распределения функции* $1/a(t)$ *относительно меры Лебега на отрезке* $[0,1]$.

2. *Распределение Пуассона–Дирихле* $\mathrm{PD}(\theta)$ *эргодично относительно груп-*

пы преобразований $\{S_a\}_{a\in\mathcal{M}^+}$.

3. *Сигма-конечная мера* $\widetilde{\mathrm{PD}}(\theta)$ *на конусе* C *инвариантна относительно марковского оператора* R_a *для всех* $a \in \mathcal{M}^+$.

Доказательство. Следует из теорем 2.1 и 2.2. □

2.1.5 Тождество Маркова–Крейна для средних от процессов Дирихле

Процессы Дирихле, введенные в [98], играют ключевую роль в непараметрической байесовской статистике. Классическое их определение таково. Пусть $\Delta_n = \{x = (x_0, \ldots, x_n) : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ — n-мерный симплекс. Распределение Дирихле $\mathrm{Dir}(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ на Δ_n с параметрами $\tau_0, \ldots, \tau_n > 0$ задается плотностью $\frac{\Gamma(\tau_0+\ldots+\tau_n)}{\Gamma(\tau_0)\ldots\Gamma(\tau_n)} x_0^{\tau_0-1} \ldots x_n^{\tau_n-1}$.

Определение 2.6. *Пусть* (X, ν) *— стандартное борелевское пространство с неатомической конечной положительной мерой* ν. *Процесс Дирихле на пространстве* X *с параметрической мерой* ν *— это случайное вероятностное распределение* P *на* X, *такое, что для любого конечного измеримого разбиения* $X = A_0 \cup \ldots \cup A_n$ *вектор* $(P(A_0), \ldots, P(A_n))$ *имеет распределение Дирихле* $\mathrm{Dir}(\nu(A_0), \ldots, \nu(A_n))$ *на* Δ_n.

Пусть $\theta = \nu(X)$ — полный заряд меры ν, и обозначим через $\bar{\nu} = \nu/\theta$ нормированную меру ν. Явная конструкция процесса Дирихле дается формулой $P = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \delta_{Y_i}$, где $Y = (Y_1, Y_2, \ldots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением $\bar{\nu}$, а $Q = (Q_1, Q_2, \ldots)$ — случайная точка симплекса Σ, не зависящая от Y и имеющая распределение Пуассона–Дирихле $\mathrm{PD}(\theta)$ с параметром θ. Таким образом, в рассматриваемых терминах процесс Дирихле есть не что иное, как *нормированный гамма-процесс* $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma(X)$.

Множество работ посвящено изучению распределений случайных средних от процесса Дирихле, т. е. распределениий μ_a функционалов $f_a(\xi) = \int_X a(x)d\xi(x)$ на пространстве борелевских мер на X, задаваемых борелевскими функциями $a : X \to \mathbb{R}$, относительно процесса Дирихле P. Ответ заключается в следующем. Пусть ν_a — распределение функции a относительно меры $\bar{\nu}$. Тогда меры μ_a и ν_a связаны следующим интегральным тождеством:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+zu)^\theta} d\mu_a(u) = \exp\left(-\int_X \log(1+zu)^\theta d\nu_a(u)\right). \tag{2.14}$$

Эта формула была впервые получена Д. М. Чифарелли и Э. Регаццини [86] при помощи сложных аналитических выкладок. В случае $\theta = 1$ тождество означает, что μ_a есть *преобразование Маркова–Крейна* меры ν_a (см. [124]). Ниже представлено новое, удивительно простое доказательство тождества Маркова–Крейна (2.14) для распределения средних от процесса Дирихле, основанное на связи между процессами Дирихле и гамма-процессами и теореме 2.1 о квазиинвариантности гамма-процессов.

Теорема 2.8. *Меры μ_a и ν_a связаны интегральным тождеством Маркова–Крейна* (2.14).

Доказательство. Используя (2.5), лемму 2.1 и теорему Фубини, получаем, что правая часть (2.14) равна

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\int_X \log(1+za(x))d\nu(x)\right) = \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\left[\exp\left(-z\int_X a(x)d\gamma(x)\right)\right] \\
= \ & \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\left[\exp\left(-z\gamma(X)\int_X a(x)d\bar{\gamma}(x)\right)\right] \\
= \ & \mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[\frac{1}{\Gamma(\theta)}\int_0^\infty t^{\theta-1}\exp\left(-t-zt\int_X a(x)d\bar{\gamma}(x)\right)\right] \\
= \ & \mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[\frac{1}{(1+z\int_X a(x)d\bar{\gamma}(x))^\theta}\right],
\end{aligned}$$

откуда следует искомое тождество. □

Многомерная версия тождества Маркова–Крейна для совместных распределений нескольких линейных функционалов от процесса Дирихле впервые получена С. В. Керовым и Н. В. Цилевич [128]. Легко распространить доказательство теоремы 2.8 на этот случай.

Теорема 2.9. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$, и пусть μ_a — совместное распределение линейных функционалов $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$ на D относительно процесса Дирихле. Пусть ν_a — совместное распределение функций $a_1, \ldots, a_n$ относительно нормированной параметрической меры $\bar{\nu}$. Тогда меры μ_a и ν_a связаны многомерным тождеством Маркова–Крейна*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+z_1u_1+\ldots+z_nu_n)^\theta} d\mu_a(u) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^n} \log(1+z_1u_1+\ldots+z_nu_n)^\theta d\nu_a(u)\right).
\end{aligned}$$

Доказательство. В точности повторяет доказательство теоремы 2.8 с заменой функции $za(x)$ на $z_1a_1(x)+\ldots+z_na_n(x)$. □

В работе [18] А. М. Вершика, М. Йора и Н. В. Цилевич представлено также новое доказательство аналога (впервые полученного Н. В. Цилевич [64]) тождества Маркова–Крейна для распределения случайных средних относительно обобщенного двупараметрического процесса Дирихле, основанное на связи двупараметрических мер Пуассона–Дирихле $\mathrm{PD}(\alpha, \theta)$ с устойчивыми субординаторами, установленной Дж. Питманом и М. Йором [153].

2.1.6 Лебеговская модель канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$

Применим разработанную теорию к построению удобной модели канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$, которое впервые было описано А. М. Вершиком, И. М. Гельфандом и М. И. Граевым в [8], см. также [9, 11, 105].

Определение 2.7. Группа токов $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$ *на стандартном борелевском пространстве* (X, ν) *с фиксированной конечной мерой* ν *есть группа борелевских ограниченных функций* $T : X \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Определение 2.8. Каноническое представление *группы* $G^X = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$ *есть унитарное неприводимое представление, сферическая функция которого задается формулой*

$$\Psi(g(\cdot)) = C \exp\left(-\int_X \log\big(2 + \mathrm{Tr}(g(x)g^*(x))\big)d\nu(x)\right), \qquad g(\cdot) \in G^X. \quad (2.15)$$

Ограничение сферической функции (2.15) на подгруппу постоянных функций (изоморфную группе $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$) есть $\Psi_0(g) = \frac{C}{2+\mathrm{Tr}\, gg^*}$ — т. н. *каноническое состояние* группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, см. [8].

Известно несколько моделей канонического представления, см. [105]. Общая конструкция представления группы токов G^X в пространстве Фока описана в [67]. Она требует существования нетривиального коцикла группы G

со значениями в неприводимом унитарном представлении. Для $\mathrm{SU}(n,1)$ и $\mathrm{SO}(n,1)$ (в частности, для $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) такой коцикл был найден в [9]. Фоковская модель канонического представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$ в явном виде описана в п. 2.2.5. Заметим, что она не является коммутативной относительно какой-либо естественной подгруппы в G^X, т. е. никакая естественная подгруппа в этом представлении не диагонализируется.

Модель канонического представления, коммутативная относительно унипотентной подгруппы $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(\cdot) & 1 \end{pmatrix} \right\}$, приведена в [105]. Заметим, что ограничение сферической функции Ψ на подгруппу $\mathcal{U}$ равно

$$\Psi_{\mathrm{unip}}(b(\cdot)) = C \exp\left(-\int_X \log(4 + b^2(x)) d\nu(x) \right).$$

Это положительно определенная функция, следовательно, она является преобразованием Фурье некоторой меры на X. Легко видеть, что это в точности мультипликативная мера на $D(X,\nu)$.

Ограничение канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$ на треугольную подгруппу $\mathcal{T} = \left\{ T_{a,b} = \begin{pmatrix} a(\cdot)^{-1} & 0 \\ b(\cdot) & a(\cdot) \end{pmatrix} \right\}$ остается неприводимым, поэтому удобнее сначала строить представление этой подгруппы, а затем продолжать его на всю группу токов.

Теорема 2.10. *Формула*

$$\mathcal{U}(T_{a,b})F(\eta) = \exp\left(\int_X \log|a(x)| d\nu(x) + i \int_X a(x)b(x) d\eta(x) \right) F(M_{a^2}\eta) \quad (2.16)$$

задает унитарное неприводимое представление треугольной подгруппы $\mathcal{T}$ в пространстве $L^2(D, \mathcal{L}_1)$.

Доказательство. Корректность определения данного представления и его унитарность следуют из теоремы 2.5, а неприводимость — из теоремы 2.2. $\square$

Построенное представление (2.16) продолжается до унитарного неприводимого представления всей группы токов $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$. Заметим, что для этого достаточно задать действие одной инволюции $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Явная формула для этого действия выводится ниже в п. 2.2.5 из результата об изоморфизме гильбертовых факторизаций. Приведем также явную конструкцию этого представления как индуктивного предела тензорных произведений представлений дополнительной серии. Она по существу воспроизводит конструкцию из [105], но использование пространств $L^2(\mathbb{R},\lambda_\theta)$ над одномерными мультипликативными мерами позволяет значительно ее упростить.

Пусть T_τ, $\tau \in (0,1)$, — представление дополнительной серии группы $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Оно действует в пространстве $L^2(\mathbb{R},\lambda_\tau)$ над мультипликативной мерой λ_τ следующими операторами:

$$\begin{aligned}
\left(T_\tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \phi\right)(t) &= e^{i\tau bt}\phi(t), \\
\left(T_\tau \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \phi\right)(t) &= |a|^\tau \phi(a^2 t), \\
\left(T_\tau \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \phi\right)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\tau(t,s)\phi(s)ds,
\end{aligned}$$

где

$$K_\tau(t,s) = \frac{\tau}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\tau-2} e^{i\tau(tu+su^{-1})}du.$$

Пусть $|\nu| = 1$. Если π — конечное измеримое разбиение $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ базового пространства X и $\nu(X_k) = \tau_k$, положим $H_\pi = H_{\tau_1} \otimes \ldots \otimes H_{\tau_n}$; очевидно, $H_\pi = L^2(\lambda_\pi)$, где $\lambda_\pi = \lambda_{\tau_1} \times \ldots \times \lambda_{\tau_n}$. Мы отождествляем H_π с пространством функций $\phi : X \to \mathbb{R}$, постоянных на элементах разбиения π. Пусть $G_\pi = G_{X_1} \times \ldots \times G_{X_n}$, где G_{X_k} — подгруппа в G, изоморфная группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ и состоящая из функций, постоянных на X_k и равных 1 вне X_k.

Заметим, что если разбиение π_2 измельчает разбиение π_1, то имеются естественные вложения $G_{\pi_1} \hookrightarrow G_{\pi_2}$ и $H_{\pi_1} \hookrightarrow H_{\pi_2}$, коммутирующие с действием группы G_{π_1}. Пусть $\widetilde{G}^X = \varinjlim G_\pi$ и $H = \varinjlim H_\pi$ — соответствующие индуктивные пределы. Легко видеть, что группа $\widetilde{G}^X$ действует на предгильбертовом пространстве H и ограничение этого действия на треугольную подгруппу задается формулой (2.16). Это представление продолжается до унитарного представления всей группы $G^X = \mathrm{SL}(2, \mathcal{F})$ в пополнении $\widetilde{H}$ пространства H.

Вопрос об изоморфизме между моделями канонического представления, коммутативными относительно различных подгрупп, связан с вопросом об изоморфизмах специального вида между пространствами L^2 над различными процессами Леви и рассматривается в п. 2.2.5.

2.2 Факторизации, порожденные общими процессами Леви

2.2.1 Гильбертовы и метрические факторизации

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ алгебру всех ограниченных линейных операторов на пространстве $\mathcal{H}$ и через $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ — решетку всех алгебр фон Неймана на $\mathcal{H}$ (напомним, что операции в решетке $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ определены следующим образом: $R_1 \wedge R_2 = R_1 \cap R_2$ и $R_1 \vee R_2 = (R_1 \cup R_2)''$, где R' — коммутант алгебры R; изложение теории алгебр фон Неймана см., напр., в [43]). Следующее определение гильбертовой факторизации восходит к Дж. фон Нейману [144, 178].

Определение 2.9. Гильбертовой факторизацией *(типа I) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ называется отображение $\xi : \mathcal{A} \to \mathcal{R}(\mathcal{H})$, такое, что каждая алгебра операторов $\xi(A)$ является фактором типа I и при всех $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ выполняются следующие условия: $\xi(A_1 \wedge A_2) = \xi(A_1) \wedge \xi(A_2)$; $\xi(A_1 \vee A_2) = \xi(A_1) \vee \xi(A_2)$; $\xi(A') = \xi(A)'$; $\xi(0_{\mathcal{A}}) = \{\alpha \cdot \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \alpha \in \mathbb{C}\} = 1_{\mathcal{H}}$, где $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ — тождественный оператор в $\mathcal{H}$; $\xi(1_{\mathcal{A}}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Если ξ — факторизация гильбертова пространства $\mathcal{H}$, то, как доказано в [68], для каждого элемента $A \in \mathcal{A}$ существует подпространство $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$, такое, что для любого конечного разбиения $A_1, \ldots, A_n$ единичного элемента $1_{\mathcal{A}}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ выполняются равенства $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{A_n}$ и $\xi(A_k) = 1_{\mathcal{H}_{A_1}} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_{k-1}}} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_{A_k}) \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_{k+1}}} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_n}}$.

Понятие метрической факторизации было введено Дж. Фельдманом [97]. Используемый в диссертации подход следует изложению, принятому в работе [173].

Определение 2.10. *Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство (мы всегда будем предполагать, что оно является непрерывным пространством Лебега). Обозначим через $\Sigma(\mathbb{P})$ полную решетку всех σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{A}$, содержащих все множества меры нуль.* Метрической факторизацией *вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ называется отображение $\zeta : \mathcal{A} \to \Sigma(\mathbb{P})$, такое, что для всех $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ выполняются следующие условия: $\zeta(A_1 \wedge A_2) = \zeta(A_1) \wedge \zeta(A_2)$; $\zeta(A_1 \vee A_2) = \zeta(A_1) \vee \zeta(A_2)$; $\zeta(A')$ есть независимое дополнение[1] σ-алгебры $\zeta(A)$; $\zeta(0_{\mathcal{A}}) = \mathfrak{A}_0$ (тривиальная σ-алгебра); $\zeta(1_{\mathcal{A}}) = \mathfrak{A}$.*

[1]Это означает, что $\zeta(A) \wedge \zeta(A') = 0$, $\zeta(A) \vee \zeta(A') = 1$ и σ-алгебры $\zeta(A)$ и $\zeta(A')$ независимы (т. е. для любых множеств $E_1 \in \zeta(A)$ и $E_2 \in \zeta(A')$ выполнено равенство $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$). Такое дополнение не единственно.

Факторизованным гильбертовым пространством $(\mathcal{H}, \xi)$ (соответственно *факторизованным вероятностным пространством* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \zeta)$) называется гильбертово пространство $\mathcal{H}$ (вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$), снабженное гильбертовой факторизацией ξ (метрической факторизацией ζ) над некоторой булевой алгеброй $\mathcal{A}$, которая называется *базой факторизации.*

В работе рассматриваются только *непрерывные* факторизации в смысле следующего условия, и в дальнейшем под «факторизацией» понимается «непрерывная факторизация».

Определение 2.11. *Гильбертова факторизация ξ (соответственно метрическая факторизация ζ) над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ называется* непрерывной*, если $\bigvee_{A \in S} \xi(A) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (соответственно $\bigvee_{A \in S} \zeta(A) = \mathfrak{A}$) для любого максимального идеала $S \subset \mathcal{A}$.*

Наиболее важными примерами являются факторизации над булевой алгеброй $\mathfrak{B}$ всех борелевских множеств некоторого стандартного борелевского пространства $(X, \mathfrak{B})$ и над булевой алгеброй классов совпадающих $\bmod 0$ измеримых подмножеств некоторого пространства Лебега (X, ν). В работе рассматриваются только факторизации этих двух типов, которые называются *факторизациями над борелевским пространством* $(X, \mathfrak{B})$ и *над пространством Лебега* (X, ν) соответственно.

Определение 2.12. *Факторизованные гильбертовы пространства $(\mathcal{H}_1, \xi_1)$ и $(\mathcal{H}_2, \xi_2)$ над булевыми алгебрами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответственно называются* изоморфными*, если существуют изоморфизм булевых алгебр $S : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ и изометрия гильбертовых пространств $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, такие, что следую-*

щая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{S} & \mathcal{A}_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_2} \\ \mathcal{R}(\mathcal{H}_1) & \xrightarrow{\bar{T}} & \mathcal{R}(\mathcal{H}_2). \end{array}$$

Здесь $\bar{T} : \mathcal{R}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{R}(\mathcal{H}_2)$ — оператор в решетках алгебр фон Неймана, индуцированный изометрией T гильбертовых пространств.

Аналогичным образом определяются изоморфные метрические факторизации.

Определение 2.13. *Если T — изоморфизм факторизаций (гильбертовых или метрических), определенных над одной и той же булевой алгеброй $\mathcal{A}$, причем соответствующий изоморфизм S является тождественным автоморфизмом булевой алгебры $\mathcal{A}$, то T называется* специальным *изоморфизмом.*

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.3. *Каждая метрическая факторизация $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \zeta)$ над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ порождает гильбертову факторизацию в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{P})$ с той же базой. А именно, для каждого элемента $A \in \mathcal{A}$ положим $H_A = L^2(\Omega, \zeta(A), \mathbb{P}|_{\zeta(A)}) \subset L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Тогда отображение $\xi : \mathcal{A} \to \mathcal{R}(\mathcal{H})$, задаваемое формулой*

$$\xi(A) = \mathcal{B}(H_A) \otimes 1_{H_{A'}}, \tag{2.17}$$

является гильбертовой факторизацией в пространстве $\mathcal{H}$.

В работе рассматриваются гильбертовы факторизации только такого типа. Заметим, что неизоморфные метрические факторизации могут порождать изоморфные гильбертовы факторизации, поскольку не любая изометрия пространства $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ порождается изоморфизмом пространства с мерой $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Ключевую роль при изучении факторизаций играет понятие мультипликативных и аддитивных функционалов.

Определение 2.14. *Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \zeta)$ — факторизованное вероятностное пространство над булевой алгеброй $\mathcal{A}$. Измеримая функция $F : \Omega \to \mathbb{C}$ называется* аддитивным *(соответственно* мультипликативным*)* функционалом*, если для любого конечного разбиения $A_1, \dots, A_n$ единичного элемента $1_\mathcal{A}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ существуют функции $F_{A_1}, \dots, F_{A_n} : \Omega \to \mathbb{C}$, такие, что F_{A_k} измерима относительно $\zeta(A_k)$ и $F = F_{A_1} + \dots + F_{A_k}$ (соответственно $F = F_{A_1} \cdot \ldots \cdot F_{A_k}$).*

Определение 2.15. *Пусть $(\mathcal{H}, \xi)$ — факторизованное гильбертово пространство над булевой алгеброй $\mathcal{A}$. Вектор $h \in \mathcal{H}$ называется* факторизуемым*, если для любого конечного разбиения $A_1, \dots, A_n$ единичного элемента $1_\mathcal{A}$ существуют операторы $P_k \in \xi(A_k)$, такие, что одномерный проектор P_h на вектор h представляется в виде $P_h = P_1 \otimes \ldots \otimes P_n$. Альтернативным образом, существуют векторы $h_{A_i} \in H_{A_i}$ (где H_{A_i} — подпространства из замечания после определения 2.9), такие, что $h = h_{A_1} \otimes \ldots \otimes h_{A_n}$.*

Аналогично, вектор $h \in \mathcal{H}$ называется аддитивным*, если для любого конечного разбиения $A_1, \dots, A_n$ единичного элемента $1_\mathcal{A}$ существуют векторы $h_{A_i} \in H_{A_i}$, такие что $h = h_{A_1} + \ldots + h_{A_n}$.*

Если гильбертова факторизация ξ в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{P})$ порождена факторизацией ζ вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ в соответствии с конструкцией леммы 2.3, то множество факторизуемых векторов в $(L^2(\Omega, \mathbb{P}), \xi)$ совпадает с множеством квадратично интегрируемых мультипликативных функционалов в $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \zeta)$. Поскольку в данной работе рассматриваются гильбертовы факторизации только такого типа, термин «мультипликативные функционалы» используется для факторизуемых векторов в пространстве $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Множество аддитивных векторов в факторизованном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ образует линейное подпространство (возможно, нулевое) и в случае $\mathcal{H} = (L^2(\Omega, \mathbb{P}), \xi)$ совпадает с множеством квадратично интегрируемых аддитивных функционалов в $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \zeta)$.

Важнейший пример гильбертовой факторизации дает следующая конструкция. Пусть H — гильбертово пространство; будем обозначать через $\operatorname{EXP} H = S^0 H \oplus S^1 H \oplus \ldots \oplus S^n H \oplus \ldots$ бозонное пространство Фока над H, и для $h \in H$ положим $\operatorname{EXP} h = 1 \oplus h \oplus \frac{1}{\sqrt{2!}} h \otimes h \oplus \frac{1}{\sqrt{3!}} h \otimes h \otimes h \oplus \ldots$. Векторы $\{\operatorname{EXP} h\}_{h \in H}$ линейно независимы, и $(\operatorname{EXP} h_1, \operatorname{EXP} h_2)_{\operatorname{EXP} H} = \exp(h_1, h_2)_H$, где $(\cdot, \cdot)_{\operatorname{EXP} H}$ — скалярное произведение в $\operatorname{EXP} H$. В частности, $\| \operatorname{EXP} h\|^2 = \exp \|h\|^2$.

Определение 2.16. *Пусть (X, ν) — пространство Лебега. Рассмотрим прямой интеграл гильбертовых пространств $\mathcal{K} = \int^{\oplus} K(x) d\nu(x)$ и соответствующее пространство Фока $\mathcal{H} = \operatorname{EXP} \mathcal{K}$. Для каждого измеримого множества $A \subset X$ положим $H_A = \operatorname{EXP} \mathcal{K}(A)$, где $\mathcal{K}(A) = \int_A^{\oplus} K(x) d\nu(x)$, и $\xi(A) = \mathcal{B}(H_A) \otimes 1_{H_{A'}}$. Полученная гильбертова факторизация $(\mathcal{H}, \xi)$ (и любая факторизация, ей изоморфная) называется* фоковской факторизацией.

Если $\dim K(x) \equiv 1$, то $\mathcal{H} = \operatorname{EXP} L^2(X, \nu)$ и $H_A = \operatorname{EXP} L^2(A, \nu_A)$, где ν_A — ограничение меры ν на подмножество A. Более общо, если $\dim K(x) \equiv n$ (где $n = 1, 2, \ldots, \infty$), то $\mathcal{H}$ можно отождествить с $\operatorname{EXP} L^2((X, \nu); H)$, где H — гильбертово пространство размерности n и $L^2((X, \nu); H)$ — пространство квадратично интегрируемых H-значных функций на (X, ν). Соответствующая факторизация (и любая факторизация, ей изоморфная) называется *однородной фоковской факторизацией размерности* n.

Множество мультипликативных (факторизуемых) векторов в пространстве Фока $\mathrm{EXP}\,\mathcal{K}$ есть $\mathcal{M} = \{c \cdot \mathrm{EXP}\,h,\ h \in \mathcal{K}, c \in \mathbb{C}\}$. Линейное подпространство аддитивных функционалов в $\mathrm{EXP}\,\mathcal{K}$ можно отождествить с пространством $\mathcal{K} = \int^{\oplus} K(x) d\nu(x)$, где $\mathcal{K}$ вкладывается в $\mathrm{EXP}\,\mathcal{K}$ как подпространство «первого хаоса»: $\mathcal{K} \ni h \mapsto 0 \otimes h \otimes 0 \otimes \ldots \in \mathrm{EXP}\,\mathcal{K}$. Таким образом, пространство первого хаоса, также как и множество мультипликативных функционалов определено инвариантно; оно имеет структуру прямого интеграла гильбертовых пространств, при этом база интеграла есть, очевидно, база факторизации.

Фоковские факторизации могут быть охарактеризованы при помощи следующей важной теоремы.

Теорема 2.11 (Араки–Вудс [68])**.** 1. *Гильбертова факторизация* $(\mathcal{H}, \xi)$ *над неатомической булевой алгеброй* $\mathcal{A}$ *является фоковской тогда и только тогда, когда множество факторизуемых векторов тотально в* $\mathcal{H}$*.*

2. *Полным инвариантом фоковской факторизации является множество значений, принимаемых функцией размерности* $\dim K(x)$ *на множестве положительной меры:* $\{n \in \{0, 1, \ldots; \infty\} : \ \nu(\{x : \dim K(x) = n\}) > 0\}$. *Таким образом, две фоковские факторизации изоморфны тогда и только тогда, когда их функции размерности эквивалентны в следующем смысле: совокупность значений обеих функций, принимаемых на множествах положительной меры, совпадают.*

Если известно множество мультипликативных функционалов факторизованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \zeta)$, то пространство аддитивных функционалов можно построить при помощи операции «логарифмирования», введенной Б. Цирельсоном и А. М. Вершиком [173]. В частности, если множество мультипликативных функционалов тотально в $L^2(\Omega,\mathbb{P})$, так что по теореме Араки–Вудса соответствующая гильбертова факторизация в $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ является фоковской, то логарифмическая конструкция позволяет построить пространство первого хаоса, а значит, и восстановить всю фоковскую структуру в пространстве $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ при помощи стандартного процесса ортогонализации (см. ниже). Операция логарифмирования существенно зависит от факторизации и в общем случае не совпадает со взятием обычного логарифма от мультипликативного функционала. Опишем эту конструкцию.

Пусть $(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P},\zeta)$ — факторизованное вероятностное пространство над пространством Лебега (X,ν). Обозначим через Add пространство всех квадратично интегрируемых аддитивных функционалов, а через Mult — пространство всех квадратично интегрируемых мультипликативных функционалов на этом пространстве. Пусть $F\in\mathrm{Mult}$. Для каждого измеримого множества $A\subset X$ обозначим через $F_A(\cdot)$ измеримую относительно $\zeta(A)$ функцию из определения мультипликативного функционала (она определена с точностью до скалярного множителя) и положим $m_F(A)=\log\mathbb{E}|F_A(\cdot)|^2-\log|\mathbb{E}F_A(\cdot)|^2$.

Теорема 2.12 ([173, Theorem A6]). *Существует естественное взаимно однозначное соответствие* $\mathrm{LOG}_\zeta:\mathrm{Mult}\to\mathrm{Add}$. *Если* $F\in\mathrm{Mult}$ *и* $\mathbb{E}F=1$, *то*

$$\mathrm{LOG}_\zeta F(\cdot)=\lim_{\max m_F(A_k)\to 0}\sum_k(F_{A_k}(\cdot)-1)\qquad\text{в}\quad L^2(\Omega,\mathbb{P}),\tag{2.18}$$

где $A_1,\dots,A_k$ *— измеримое разбиение пространства* X, *и все функционалы* F_{A_k} *предполагаются нормированными таким образом, что* $\mathbb{E}F_{A_k}(\cdot)=1$.

2.2.2 Гауссовские, пуассоновские и леви-факторизации. Ортогональные разложения

Рассмотрим *гауссовский белый шум* α на пространстве Лебега (X, ν), т. е. обобщенный случайный процесс на гильбертовом пространстве $L^2(X, \nu)$, характеристический функционал которого задается формулой

$$\mathbb{E}e^{i\langle h,\cdot\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\|h\|^2}, \quad h \in L^2(X, \nu). \tag{2.19}$$

Общеизвестно (см., напр., [52]), что пространство $L^2(\alpha)$ квадратично интегрируемых функционалов от белого шума канонически изоморфно пространству Фока $\mathrm{EXP}\, H$, где $H = L^2(X, \nu)$. Этот изоморфизм задается формулой

$$\mathrm{EXP}\, h \leftrightarrow e^{-\frac{\|h\|^2}{2}+\langle h,\cdot\rangle}. \tag{2.20}$$

В частности, вакуумный вектор $\mathrm{EXP}\, 0$ соответствует единичной функции $1 \in L^2(\alpha)$, а n-частичное подпространство $S^n H$ отождествляется с подпространством в $L^2(\alpha)$, натянутом на n-кратные стохастические интегралы, т. е. обобщенные функционалы Эрмита порядка n.

Для каждого измеримого множества $A \subset X$ рассмотрим σ-алгебру $\zeta_\alpha(A)$, порожденную ограничением процесса α на A. Легко убедиться, что ζ_α — метрическая факторизация над (X, ν), которая называется *гауссовской* факторизацией. В соответствии с общей конструкцией леммы 2.3, белый шум α задает также гильбертову факторизацию ξ_α в пространстве $L^2(\alpha)$.

Лемма 2.4. *Гауссовский белый шум на произвольном пространстве Лебега (X, ν) порождает фоковскую факторизацию.*

Доказательство. Следует из изоморфизма (2.20) между гильбертовыми пространствами $L^2(\alpha)$ и $\mathrm{EXP}\, L^2(X,\nu)$. $\square$

В частности, множество мультипликативных функционалов в пространстве $L^2(\alpha)$ есть $\{c \cdot e^{\langle h,\cdot\rangle},\ h \in L^2(X,\nu),\, c \in \mathbb{C}\}$, а множество аддитивных функционалов — $\{c \cdot \langle h,\cdot\rangle,\ h \in L^2(X,\nu),\, c \in \mathbb{C}\}$.

Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ множество всех точечных конфигураций на пространстве X, т. е. множество (неупорядоченных) не более чем счетных наборов точек из X с положительными (целочисленными) кратностями. *Точечный пуассоновский процесс* π на пространстве (X,ν) — это случайная конфигурация точек из X, такая, что для каждого измеримого множества $A \subset X$ случайная величина $\#\{\pi \cap A\}$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\nu(A)$, т. е. $\mathrm{Prob}\{\#\{\pi \cap A\} = n\} = \frac{\nu(A)^n}{n!} e^{-\nu(A)}$, и для любых дизъюнктных измеримых множеств $A_1,\ldots,A_n \subset X$ случайные величины $\#\{\pi \cap A_k\}$, $k = 1,\ldots,n$, независимы. Обозначим через $\mathcal{P}$ меру на множестве $\mathcal{E}$, являющуюся распределением этого процесса.

Аналогично гауссовскому случаю, для каждого измеримого множества $A \subset X$ рассмотрим σ-алгебру $\zeta_\pi(A)$, порожденную ограничением пуассоновского процесса π на A. Так получается *пуассоновская* метрическая факторизация над (X,ν). В соответствии с общей конструкцией леммы 2.3, пуассоновский процесс π задает также гильбертову факторизацию ξ_π в пространстве $L^2(\pi)$.

Пусть теперь η — *общий процесс Леви* на стандартном борелевском пространстве $(X,\mathfrak{B})$ с непрерывной конечной мерой ν (см. определение 2.1). Для каждого $A \in \mathfrak{B}$ рассмотрим σ-алгебру $\zeta_\eta(A)$, порожденную ограничением процесса η на подмножество A. Следующая лемма хорошо известна (см., напр., [97]).

Лемма 2.5. *Отображение ζ_η определяет метрическую факторизацию над* *борелевским пространством $(X, \mathfrak{B})$, которая продолжается до метрической факторизации над соответствующим пространством Лебега.*

В соответствии с общей конструкцией леммы 2.3, процесс Леви η задает также гильбертову факторизацию ξ_η в пространстве квадратично интегрируемых функционалов $\mathcal{H} = L^2(\eta)$; а именно, $\xi_\eta(A) = \mathcal{B}(H_A) \otimes 1_{H_{X \setminus A}}$, где H_A — множество квадратично интегрируемых функционалов, зависящих только от ограничения процесса η на подмножество A.

Заметим, что гауссовский и пуассоновский процессы являются процессами Леви ($\Pi = 0$, $c = 0$ и $\sigma = 0$, $\Pi = \delta_1$, $c = \frac{1}{2}$ соответственно). Более того, всякий процесс Леви η однозначно раскладывается в сумму $\eta = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2$, где η_0 — детерминированная компонента (а именно, $\langle \eta_0, a \rangle = c \cdot \int_X a(x) d\nu(x)$), а η_1 и η_2 — независимые процессы Леви, причем процесс η_1 — гауссовский, а η_2 — чисто скачкообразный (не имеющий гауссовской компоненты) с нулевым сносом. Гауссовский случай рассмотрен выше. Если же η — чисто скачкообразный процесс Леви с нулевым сносом, то он однозначно восстанавливается по мере скачков, которая является пуассоновским процессом $\pi_{\nu \times \Pi}$ на пространстве $(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$, поэтому пространство $L^2(\eta)$ можно отождествить с пространством $L^2(\pi_{\nu \times \Pi})$, причем ясно, что такое отождествление сохраняет структуру факторизации над (X, ν). Таким образом, изучение факторизаций, задаваемых произвольным процессом Леви, сводится к случаю гауссовского и пуассоновского процессов.

Под ортогональным разложением в пространстве квадратично интегрируемых функционалов от процесса Леви η мы понимаем результат стандартного процесса ортогонализации в $L^2(\eta)$, примененного к симметрическим тензорным степеням подпространства аддитивных функционалов («первого хаоса»). Задача построения такого разложения для произвольного процесса Леви может быть решена в соответствии со следующей общей схемой.

Пусть η — процесс Леви на X, который может рассматриваться как случайная мера на X. Положим $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{H}_1$ — подпространство центрированных (ортогональных константам) аддитивных функционалов относительно факторизации ξ_η (если известно множество мультипликативных функционалов в этой факторизации, то подпространство $\mathcal{H}_1$ может быть получено при помощи конструкции логарифма, описанной в теореме 2.12). Предполагая, что подпространства $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{n-1}$ уже построены, определим следующее подпространство $\mathcal{H}_n$ как ортогональное дополнение к $\mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{n-1}$ в подпространстве, натянутом на функционалы порядка n, т. е. произведения n аддитивных функционалов:

$$\mathcal{H}_n = \overline{\{F_1(\eta) \cdot \ldots \cdot F_n(\eta),\ F_k \in \mathcal{H}_1\}} \ominus (\mathcal{H}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{n-1}).$$

Подпространство $\mathcal{H}_n$ называется подпространством *n-го хаоса*. Имеем:

$$L^2(\eta) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Заметим, что для общих процессов Леви пространство аддитивных функционалов $\mathcal{H}_1$ шире, чем пространство линейных функционалов L_1. Если применить описанный выше процесс ортогонализации к подпространству L_1 вместо $\mathcal{H}_1$, то n-е полученное подпространство L_n будет пространством n-кратных стохастических интегралов от η, но сумма этих пространств не будет исчерпывать все $L^2(\eta)$. Однако для гауссовского и пуассоновского процессов пространства аддитивных и линейных функционалов совпадают, поэтому $\mathcal{H}_n = L_n$ при любом n.

Пространство L_n можно описать явно, используя общий комбинаторный подход к теории стохастических интегралов, предложенный в работе Дж. Роты и Т. Уоллстрома [156]. Пусть Δ_n — n-я диагональная мера процесса η, определяемая формулой $\Delta_n(A) = \eta^{\otimes n}\{(x, \ldots, x) : x \in A\}$ для любого измеримого множества A. Из результатов работы [156] (см. также [159]) нетрудно получить, что L_n натянуто на n-кратные стохастические интегралы вида

$$
\begin{aligned}
I^{(n)}_{f_1,\ldots,f_n}(\eta) &= \int f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)\, d\eta(x_1,\ldots,x_n) \\
&= \sum_{g\in\mathfrak{S}_n(x_1,\ldots,x_n)} (-1)^{n-c(g)} \prod_{(x_{i_1}\ldots x_{i_k})\in C(g)} \int f_{i_1}(x)\ldots f_{i_k}(x) d\Delta_k(x), \quad (2.21)
\end{aligned}
$$

где $\mathfrak{S}_n(x_1,\ldots,x_n)$ — симметрическая группа степени n, реализованная как группа перестановок множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $C(g)$ — множество циклов перестановки g а $c(g) = \#C(g)$ — число циклов перестановки g.

2.2.3 Канонический изоморфизм между гауссовской и пуассоновской факторизацией

В этом разделе изучается изометрия между пространствами квадратично интегрируемых функционалов от гауссовского и пуассоновского процессов над одним и тем же базовым пространством. Во многих работах отмечалось, что они обладают рядом похожих свойств. Однако факт существования естественной изометрии между этими пространствами был впервые установлен в работе А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева [10] из соображений, связанных с теорией представлений групп токов; явным образом она была описана Ю. А. Неретиным [44] как изометрия между пространством квадратично интегрируемых функционалов от пуассоновского процесса и т. н. голоморфной моделью бозонного пространства Фока. В диссертации этот результат формулируется и доказывается в контексте теории факторизаций, а также выводятся новые явные формулы, описывающие его на различных уровнях.

Зафиксируем пространство Лебега (X,ν) с непрерывной мерой, и пусть α и π — гауссовский белый шум и пуассоновский процесс на (X,ν) соответственно.

Теорема 2.13. *Существует единственный сохраняющий единицу специальный вещественный*[2] *изоморфизм гильбертовых факторизаций ξ_α и ξ_π в пространствах $L^2(\alpha)$ и $L^2(\pi)$. Соответствующая изометрия $\Phi : L^2(\alpha) \to L^2(\pi)$ гильбертовых пространств задается следующей формулой на множестве мультипликативных функционалов: для произвольной функции $h \in L^2(X,\nu) \cup L^1(X,\nu)$*

$$\Phi : \quad e^{<h,\cdot>-\frac{\|h\|^2}{2}} \mapsto \prod_{x\in\omega}(1+h(x)) \cdot e^{-\int h(x)d\nu(x)}, \qquad \omega \in \mathcal{E}(\mathcal{X}). \tag{2.22}$$

Замечания. 1. Так как отображение $L^2(X,\nu) \ni h \mapsto \Phi h \in L^2(\pi)$, задаваемое формулой (2.22), непрерывно в топологии пространства $L^2(X,\nu)$ (поскольку норма функционала, определяемого правой частью, равна, как нетрудно подсчитать, $e^{\|h\|^2}$), то оно продолжается по непрерывности на все $L^2(X,\nu)$.

2. Сама формула (2.22) встречалась, например, в [88], однако тот факт, что она задает изометрию гильбертовых пространств и изоморфизм факторизаций, замечен не был.

Доказательство. Формула (2.22) следует из формулы для бозон-пуассоновского соответствия, описанного в работе [44] в терминах голоморфной модели пространства Фока, и формулы (2.20), задающей изоморфизм между $L^2(\alpha)$ и бозонным пространством Фока. С другой стороны, нетрудно непосредственно

[2] Т. е. переводящий вещественное подпространство вещественнозначных функционалов от одного процесса в такое же подпространство для другого процесса.

убедиться в том, что отображение, задаваемое формулой (2.22), есть изоморфизм с требуемыми свойствами.

Очевидно, что любые два таких изоморфизма отличаются друг от друга на сохраняющий единицу специальный автоморфизм фоковской факторизации в пространстве $\mathrm{EXP}\, L^2(X,\nu)$. Из приведенного в [67] описания групп автоморфизмов фоковской факторизации следует, что любой такой автоморфизм порождается мультипликатором $h(\cdot) \mapsto a(\cdot)h(\cdot)$, где $a : X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция и $|a| = 1$, откуда в силу вещественности следует единственность. □

Следствие 2.3. *Множество квадратично интегрируемых мультипликативных функционалов от пуассоновского процесса имеет вид*

$$\{c \cdot \prod_{x\in\omega}(1 + h(x)),\ h \in L^2(X,\nu)\}.$$

Цель оставшейся части данного раздела — изучить изометрию (2.22) более подробно. В частности, найти ее *ядро*, т. е. обобщенную функцию $K(\omega, f)$ на $\mathcal{E} \times \hat{H}$, такую, что для каждого функционала $F \in L^2(\pi)$

$$(\Phi^{-1}F)(\cdot) = \int_{\mathcal{E}} K(\omega,\cdot)F(\omega)d\mathcal{P}(\omega). \tag{2.23}$$

Пусть η — процесс Леви на пространстве (X,ν). Будем называть функционал $F \in L^2(\eta)$ *однопорожденным*, если он зависит только от интеграла $\langle\eta, 1\rangle$ от процесса η по всему пространству X. Аналогично, F называется *конечнопорожденным* (n-порожденным), если существует конечное измеримое разбиение $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, такое, что F зависит только от интегралов $\langle\eta, \chi_{A_1}\rangle, \ldots, \langle\eta, \chi_{A_n}\rangle$ от процесса η по множествам $A_1, \ldots, A_n$. Заметим, что $L^2(\eta)$ есть проективный предел подпространств конечнопорожденных функционалов относительно измельчения разбиений. Ясно, что изоморфизм факторизаций, порожденных процессами η_1 и η_2, должен переводить множество n-порожденных функционалов от η_1 в такое же множество для η_2.

Рассмотрим ограничение изоморфизма (2.22) на подпространства однопорожденных функционалов. Если η — гауссовский белый шум на (X, ν), причем $\nu(X) = a$, то $\eta(X) = \langle \eta, 1 \rangle$ есть гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией a, так что пространство однопорожденных функционалов от η естественно отождествляется с пространством $L^2(\mathbb{R}, N(0, a))$, где $N(0, a)$ — нормальное распределение на прямой с этими параметрами, которое можно рассматривать также как пространство L^2 над гауссовским процессом на пространстве $X = \{x\}$, состоящем из единственной точки с весом a. Аналогично, пространство однопорожденных функционалов от пуассоновского процесса π на (X, ν) отождествляется с пространством $L^2(\mathbb{Z}_+, P_a)$ последовательностей $b = \{b_n\}_{n \geq 0}$ со скалярным произведением

$$(b, b') = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} b_n b'_n$$

(т. е. пространством L^2 над пуассоновским процессом на одноточечном пространстве). Рассмотрим эту ситуацию более подробно.

Формула (2.22) принимает следующий вид: для всех $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tx - \frac{at^2}{2}} \leftrightarrow \left\{ e^{-at} (1+t)^k \right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{2.24}$$

Заметим, что левая часть формулы (2.24) есть производящая функция для многочленов Эрмита $H_n^a(x)$, а правая часть — производящая функция для многочленов Шарлье $C_n^a(k)$ (см., напр., [53]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^a(y)t^n}{n!} = (1+t)^y e^{-ta}. \tag{2.25}$$

Эти многочлены образуют ортогональные семейства в $L^2(\mathbb{R}, N(0,a))$ и $L^2(\mathbb{Z}_+, P_a)$ соответственно, причем $\|H_n^a\|^2_{L^2(\mathbb{R},N(0,a))} = \|C_n^a\|^2_{L^2(\mathbb{Z}_+,P_a)} = a^n n!$, поэтому

$$\Phi(H_n^a) = C_n^a. \tag{2.26}$$

Таким образом, формула (2.24) есть в точности выражение соотношения (2.26) в терминах производящих функций.

Предложение 2.2. *Ядро* (2.23) *канонического изоморфизма между пространствами* $L^2(\mathbb{R}, N(0,a))$ *и* $L^2(\mathbb{Z}_+, P_a)$ *задается формулой*

$$K^a(k,x) = e^{-\frac{a}{2}-x} \frac{H_k^a(x+2a)}{a^k}. \tag{2.27}$$

Доказательство. Заметим, что если ν_1 и ν_2 — произвольные меры на $\mathbb{R}$, имеющие конечные моменты любого порядка, и $\{P_n^{(j)}\}$ — семейство ортонормированных многочленов относительно меры ν_j, $j=1,2$, то ядро изометрии между $L^2(\mathbb{R},\nu_1)$ и $L^2(\mathbb{R},\nu_2)$ задается формулой

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(x) P_n^{(2)}(y),$$

в случае, если ряд сходится в $L^2(\mathbb{R},\nu_1)$ для п. в. y.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x) C_n^a(k)}{a^n n!}.$$

Покажем, что он сходится в $L^2(\mathbb{R}, N(0,a))$ при любом $k \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку

H_n^a — ортогональные многочлены в $L^2(\mathbb{R}, N(0,a))$ и $\|H_n^a\|^2 = n!a^n$, то достаточно проверить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|C_n^a(k)|^2}{a^n n!} < \infty. \tag{2.28}$$

Используя известное соотношение

$$\frac{(-1)^n}{a^n} C_n^a(k) = \frac{(-1)^k}{a^k} C_k^a(n) \tag{2.29}$$

для многочленов Шарлье, получаем $\frac{|C_n^a(k)|^2}{a^n} = |C_k^a(n)|^2 a^{n-2k} \leq \mathrm{const} \cdot n^{2k} a^{n-2k}$, поскольку C_k^a есть многочлен степени k, откуда немедленно следует (2.28).

Таким образом,

$$K(k,x) := K^a(k,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x) C_n^a(k)}{a^n n!}.$$

Рассмотрим производящую функцию

$$\mathcal{K}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} K(k,x).$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$\mathcal{K}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x)}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{C_n^a(k)}{a^n}.$$

Ввиду (2.29) и (2.25), внутренняя сумма равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{t^k}{a^k k!} C_k^a(n) = (-1)^n e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^n.$$

Таким образом,

$$\mathcal{K}(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^a(x)a^n}{n!}\left(\frac{t}{a}-1\right)^n e^t=\exp\left(2t+\frac{tx}{a}-x-\frac{t^2}{2a}-\frac{a}{2}\right),$$

что совпадает с производящей функцией для $e^{-\frac{a}{2}-x}\frac{H_k^a(x+2a)}{a^k}$. □

Следствие 2.4. *Ортогональные многочлены Эрмита и Шарлье связаны следующим тождеством:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^a(x)C_n^a(k)a^n}{n!}=e^{-\frac{a}{2}-x}\frac{H_k^a(x+2a)}{a^k}. \tag{2.30}$$

В частности, полагая $C_n(\cdot)=C_n^1(\cdot)$, *получаем*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)C_n(k)}{n!}=e^{-\frac{1}{2}-x}H_k(x+2). \tag{2.31}$$

Пусть теперь $X=A_1\cup\ldots\cup A_m$ — измеримое разбиение пространства X, причем $\nu(A_j)=a_j$. Рассмотрим соответствующие подпространства конечно-порожденных функционалов в $L^2(\alpha)$ и $L^2(\pi)$. Аналогично случаю однопорожденных функционалов, они могут быть отождествлены с пространствами L^2 над соответствующими процессами на конечном пространстве $X=\{s_1,\ldots,s_m\}$, состоящем из m точек с весами $\nu(s_j)=a_j$, $j=1,\ldots,m$. Используя результаты предыдущего раздела, получаем, что

$$L^2(\alpha) = \bigotimes_{j=1}^{m} L^2(\mathbb{R}, N(0, a_j)), \quad L^2(\pi) = \bigotimes_{j=1}^{m} L^2(\mathbb{Z}_+, P_{a_j}),$$
$$\Phi\left(\prod_{j=1}^{m} H_{k_j}^{a_j}(\cdot)\right) = \prod_{j=1}^{m} C_{k_j}^{a_j}(\cdot),$$
$$K(k, x) = \prod_{j=1}^{m} e^{-\frac{a_j}{2} - x_j} \frac{H_{k_j}^{a_j}(x_j + 2a_j)}{a_j^{k_j}}. \tag{2.32}$$

где $k = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^n$ и $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^n$.

Теперь применим операцию логарифмирования, описанную в теореме 2.12, для нахождения пространств аддитивных функционалов от гауссовского и пуассоновского процессов. Заметим, что под действием канонического изоморфизма Φ операция логарифмирования в пуассоновской факторизации переходит в операцию логарифмирования в гауссовской факторизации, поэтому аддитивные функционалы переходят в аддитивные.

В случае пуассоновского процесса имеем $(\Omega, \mathbb{P}) = (\mathcal{E}(X), \mathcal{P})$, множество нормированных мультипликативных функционалов задается формулой

$$F(\omega) = \prod_{x\in\omega} (1 + h(x)) e^{-\int_X h(x) d\nu(x)}, \qquad h \in L^2(X, \nu),$$

и пусть $F_A(\omega) = \prod_{x\in\omega\cap A} (1 + h(x)) e^{-\int_A h(x) d\nu(x)}$ (где $A \subset X$ — измеримое множество) — соответствующие функционалы из определения мультипликативного функционала.

Лемма 2.6. $\mathrm{LOG}\, F_A(\omega) = \sum_{x\in\omega\cap A} h(x) - \int_A h(x) d\nu(x)$.

Доказательство. Обозначим правую часть искомой формулы через $G_A(\omega)$.

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
\|\sum_k (F_{A_k}(\cdot)-1) - G(\cdot)\|^2 &= \|\sum_k (F_{A_k}(\cdot)-1-G_{A_k}(\cdot))\|^2 \\
&= \sum_k \|F_{A_k}(\cdot)-1-G_{A_k}(\cdot)\|^2,
\end{aligned}
$$

поскольку ограничения пуассоновского процесса на дизъюнктные подмножества независимы. Используя теорему Кэмпбелла для пуассоновских процессов (см., напр., [36]), нетрудно вычислить, что в этом случае $m_F(A) = \int_A h^2(x)d\nu(x)$ и $\|F_{A_k}(\cdot)-1-G_{A_k}(\cdot)\|^2 = e^{m_F(A_k)}-1-m_F(A_k)$. Пусть $m_F(A_k) < \delta$ при любом k. Тогда для достаточно малых δ имеем

$$
\|F_{A_k}(\cdot)-1-G_{A_k}(\cdot)\|^2 < C \cdot m_F(A_k)^2.
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\|\sum_k (F_{A_k}(\cdot)-1-G_{A_k}(\cdot))\|^2 &\le C \cdot \sum_k m_F(A_k)^2 \\
&\le C \cdot \sum_k \delta \cdot \int_{A_k} h^2(x)d\nu(x) \le C \cdot \|h\|^2 \cdot \delta.
\end{aligned}
$$

Правая часть сколь угодно мала при малых δ, и лемма доказана. $\square$

Следствие 2.5. *Постранство аддитивных функционалов от пуассоновского процесса («первый хаос») есть*

$$
\left\{ \sum_{x\in\omega} h(x) - \int_X h(x)d\nu(x), \quad h \in L^2(X,\nu) \right\}. \tag{2.33}
$$

Вычислим теперь логарифм для гауссовского процесса. В этом случае нормированные мультипликативные функционалы задаются формулой

$$F(\eta) = e^{\langle h,\eta\rangle - \frac{1}{2}\int_X h^2(x)d\nu(x)}, \qquad h \in L^2(X,\nu),$$

а соответствующие функционалы F_A — формулой $F_A(\eta) = e^{\langle h,\eta_A\rangle - \frac{1}{2}\int_A h^2(x)d\nu(x)}$, где η_A — ограничение процесса η на измеримое подмножество $A \subset X$.

Лемма 2.7. $\mathrm{LOG}\, F(\eta) = \langle h, \eta\rangle$.

Доказательство. Пусть $G_A(\eta) = \langle h, \eta_A\rangle$. Нетрудно вычислить, что в этом случае

$$m_F(A) = \log \mathbb{E}\|e^{\langle h,\eta_A\rangle - \frac{1}{2}\int_A h^2(x)d\nu(x)}\|^2 = \int_A h^2(x)d\nu(x)$$

и

$$\begin{aligned} \|F_A(\cdot) - 1 - G_A(\cdot)\|^2 &= \mathbb{E}\|e^{\langle h,\eta_A\rangle - \frac{1}{2}\int_A h^2(x)d\nu(x)} - 1 - \langle h, \eta_A\rangle\|^2 \\ &= e^{m_F(A)} - 1 - m_F(A), \end{aligned}$$

что в точности совпадает с соответствующими формулами для пуассоновского случая, поэтому дальнейшее доказательство буквально воспроизводит доказательство леммы 2.6. □

Теперь сформулируем канонический изоморфизм (2.22) на уровне ортогональных разложений. Ортогональное разложение

$$L^2(\alpha) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \tag{2.34}$$

в пространстве квадратично интегрируемых функционалов от гауссовского белого шума есть хорошо известное разложение Винера–Ито–Камерона–Мартина. Хотя соответствующие формулы являются классическими, полезно отметить, как они получаются в общей комбинаторной схеме. Напомним, что для гауссовского и пуассоновского процессов пространства аддитивных и линейных функционалов совпадают, поэтому пространство n-го хаоса $\mathcal{H}_n$ совпадает с пространством n-кратных стохастических интегралов L_n, и для построения ортогонального разложения применима комбинаторная схема, описанная в п. 2.2.2. Если η — гауссовский белый шум на пространстве (X,ν), то $\Delta_2 = \nu$, $\Delta_3 = \Delta_4 = \ldots = 0$ ([156, Example G]), откуда получаем, что подпространство $\mathcal{H}_n = L_n$ натянуто на функционалы вида

$$\mathfrak{H}^{(n)}_{f_1,\ldots,f_n}(\cdot) = \sum_{g\in\mathrm{Inv}_n} \prod_{i\in C_1(g)} \langle f_i, \cdot\rangle \prod_{\{j,k\}\in C_2(g)} \left(-(f_j, f_k)\right), \tag{2.35}$$

где Inv_n — множество всех инволюций в $\mathfrak{S}_n$, $C_k(g)$ — число циклов длины k перестановки $g \in \mathfrak{S}_n$ и $(f_j, f_k) = \int_X f_j(x) f_k(x) d\nu(x)$ — скалярное произведение в $L^2(X,\nu)$.

Функционал $\mathfrak{H}^{(n)}_{f_1,\ldots,f_n}$ назовем n-м *обобщенным функционалом Эрмита*. В частности, при $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$ имеем

$$\mathfrak{H}^{(n)}_{f,\ldots,f}(\cdot) = \sum_{g\in\mathrm{Inv}_n} \langle f, \cdot\rangle^{c_1(g)} \cdot (-\|f\|^2)^{c_2(g)} = H_n^{\sigma}(\langle f, \cdot\rangle), \tag{2.36}$$

т. е. $\mathfrak{H}^{(n)}_{f,\ldots,f}(\cdot)$ — обычный многочлен Эрмита степени n с параметром $\sigma = \|f\|^2$ от $\langle f, \cdot\rangle$.

Соответствующее ортогональное разложение для пуассоновского процесса впервые обсуждалось К. Ито [118], а в явном виде было построено в работе Х. Огуры [148]. В рамках общего комбинаторного подхода оно получается следующим образом. В этом случае $\eta = \sum_{x\in\omega} \delta_x - \nu$, где ω — пуассоновский процесс на (X,ν), и диагональные меры равны $\Delta_2 = \Delta_3 = \ldots = \omega$ ([156, Example CP]). Таким образом,

$$L^2(\mathcal{E},\mathcal{P})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V_n, \tag{2.37}$$

где $V_0=\mathbb{C}$ и V_n есть подпространство, натянутое на n-кратные стохастические интегралы от пуассоновского процесса, которые задаются формулой

$$\mathfrak{C}^{(n)}_{f_1,\dots,f_n}=\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{n-c(g)}\prod_{i\in C_1(g)}\left(\sum_{x\in\omega}f_i(x)-\int_X f_i(x)d\nu(x)\right)\\ \cdot\prod_{(x_{i_1},\dots,x_{i_k})\in C(g)}\sum_{x\in\omega}f_{i_1}(x)\dots f_{i_k}(x). \tag{2.38}$$

Функционал $\mathfrak{C}^{(n)}_{f_1,\dots,f_n}$ назовем n-м *обобщенным функционалом Шарлье*. Если $f_1=\ldots=f_n=\chi_A$, где χ_A — характеристическая функция измеримого множества $A\subset X$, то

$$\mathfrak{C}^{(n)}_{\chi_A,\dots,\chi_A}=\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}(\#(\omega\cap A)-\nu(A))^{c_1(g)}\cdot\#(\omega\cap A)^{-c_2(g)+c_3(g)-\dots}=C^{\sigma}_n(\#(\omega\cap A)), \tag{2.39}$$

т. е. $\mathfrak{C}^{(n)}_{\chi_A,\dots,\chi_A}$ — обычный многочлен Шарлье степени n с параметром $\sigma=\nu(A)$ от $\omega(A)$. В частности, из (2.38) следует, что первый хаос пуассоновского процесса состоит из функционалов вида $\mathfrak{C}^{(1)}_f(\omega)=\sum_{x\in\omega}f(x)-\int_X f(x)d\nu(x)$ (ср. (2.33)), а второй хаос порожден функционалами вида

$$\mathfrak{C}^{(2)}_{f,g}(\omega)=\mathfrak{C}^{(1)}_f(\omega)\mathfrak{C}^{(1)}_g(\omega)-\sum_{x\in\omega}f(x)g(x). \tag{2.40}$$

Следствие 2.6. *Канонический изоморфизм* Φ *переводит обобщенный функ-*

ционал Эрмита в соответствующий обобщенный функционал Шарлье:

$$\Phi\mathfrak{H}^{(n)}_{f_1,\dots,f_n} = \mathfrak{C}^{(n)}_{f_1,\dots,f_n}. \tag{2.41}$$

Теперь выпишем ядро (2.23) пуассон-гауссовской изометрии Φ, для простоты предполагая, что $X = [0,1]$ и ν есть мера Лебега. Случай произвольного непрерывного пространства Лебега (X,ν) полностью аналогичен.

Для данной точечной конфигурации $\omega \in \mathcal{E}$ (поскольку параметрическая мера ν непрерывна, мы можем рассматривать только конфигурации, не имеющие кратных точек) обозначим через $\Pi_{\le 2}(\omega)$ множество разбиений множества ω на подмножества, состоящие не более чем из двух точек. Для каждого разбиения $R \in \Pi_{\le 2}$ обозначим через $C_k(R)$ множество k-точечных подмножеств в R, $k = 1, 2$, и положим $|R| = \#C_2(R)$.

Теорема 2.14. *Ядро* (2.23) *канонического изоморфизма* (2.22) *между* $L^2(\alpha)$ *и* $L^2(\pi)$ *задается следующей формулой:*

$$K(\omega,\eta) = e^{-\frac{1}{2}-\langle\eta,1\rangle} \sum_{R\in\Pi_{\le 2}(\omega)} (-1)^{|R|} \prod_{z\in C_1(R)} (\eta+2)(z) \prod_{\{x,y\}\in C_2(R)} \delta(x-y) \tag{2.42}$$

для почти всех ω, η.

(Здесь $\eta+2$ есть обобщенная функция $\langle\eta+2,h\rangle = \langle\eta,h\rangle + 2\int h(t)dt$ и произведение есть прямое произведение обобщенных функций.)

Доказательство. Достаточно проверить, что соотношение (2.23) выполняется для мультипликативных функционалов F, т. е. показать, что

$$\mathbb{E}\left(\prod_{x\in\omega}(1+h(x))K(\omega,\eta)\right) = \exp\left(-\frac{\|h\|^2}{2} + \langle\eta+1,h\rangle\right) \tag{2.43}$$

для всех $h \in L^2(X,\nu)$. Удобнее переписать сумму в формуле (2.42) через перестановки. Для данной n-точечной конфигурации $\omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ пусть $\mathfrak{S}_n(\omega)$ — симметрическая группа степени n, реализованная как группа всех перестановок множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть $C_i(g)$ — множество всех циклов длины i в перестановке $g \in \mathfrak{S}_n$, и $c_i(g) = \#C_i(g)$. Наконец, пусть $\mathrm{Inv}(\omega)$ — подмножество в $\mathfrak{S}_n(\omega)$, состоящее из всех инволюций. Пользуясь свойствами пуассоновского процесса, получаем, что левая часть формулы (2.43) равна

$$e^{-3/2-\langle\eta,1\rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \ldots \int_0^1 (1+h(x_1)) \ldots (1+h(x_n))$$
$$\cdot \sum_{g \in \mathrm{Inv}(x_1,\ldots,x_n)} \prod_{\{x_i,x_j\} \in C_2(g)} (-\delta(x_i - x_j)) \cdot \prod_{x_k \in C_1(g)} (\eta(x_k)+2)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Вклад каждой пары $\{x, y\} \in C_2(g)$ равен

$$-\int_0^1 \int_0^1 (1+h(x))(1+h(y))\delta(x-y)dxdy = -\int_0^1 (1+h(x))^2 dx,$$

а вклад каждого элемента $x \in C_1(g)$ составляет

$$\int_0^1 (1+h(x))(\eta(x)+2)dx = \langle \eta+2, 1+h \rangle.$$

Таким образом, рассматриваемая сумма равна

$$e^{-3/2-\langle\eta,1\rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g \in \mathrm{Inv}_n} t_1^{c_1(g)} t_2^{c_2(g)}, \tag{2.44}$$

где

$$t_1 = \langle \eta+2, 1+h \rangle, \qquad t_2 = -\int_0^1 (1+h(x))^2 dx.$$

Но сумма (2.44) есть в точности (присоединенный) цикловый индекс

$\tilde{Z}(\mathfrak{S}_n)[t_1, t_2, 0, 0, \ldots]$, где $\widetilde{Z}(\mathfrak{S}_n)[t] = \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} t_1^{c_1(g)} t_2^{c_2(g)} \cdot \ldots$. Хорошо известно (см., напр., [59, (5.30)]), что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Z}(\mathfrak{S}_n)[t] \frac{z^n}{n!} = \exp \sum_{i=1}^{\infty} t_i \frac{z^i}{i}.$$

Применяя эту формулу с $z = 1$, получаем, что выражение (2.44) равно

$$\exp\left(-3/2 - \langle \eta, 1\rangle + \langle \eta + 2, 1 + h\rangle - \frac{1}{2}\int (1 + h(x))^2 dx\right),$$

и (2.43) следует из элементарных вычислений. $\square$

Замечание. Имеется другое доказательство теоремы 2.14, которое позволяет вывести формулу (2.42), а не только проверить ее. Его идея заключается в следующем. Заметим, что $L^2(\alpha) = \varinjlim A_n$, где A_n — подпространство, состоящее из функционалов $F(\eta)$, зависящих только от $\langle \eta, \chi_{[0,\frac{1}{n}]}\rangle$, ..., $\langle \eta, \chi_{[\frac{n-1}{n},1]}\rangle$. Очевидно, что A_n изометрично пространству $\bigotimes_{j=1}^m L^2(\mathbb{R}, N(0, 1/n))$. Теперь можно применить формулу (2.32) и перейти к пределу.

Пример 1. Пусть A_n — подпространство в $L^2(\pi)$, состоящее из функций, носитель которых содержится в множестве n-точечных конфигураций, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда из (2.42) следует, что образ подпространства A_1 при каноническом изоморфизме есть подпространство функционалов вида

$$e^{-\frac{3}{2}-\langle \eta,1\rangle}\langle \eta + 2, f\rangle, \quad f \in L^2([0, 1], \nu);$$

образ подпространства A_2 состоит из функционалов вида

$$e^{-\frac{3}{2}-\langle \eta,1\rangle}\frac{1}{2!}\left[\int_0^1\int_0^1 f(x, y)(\eta + 2)(x)(\eta + 2)(y)dxdy - \int_0^1 f(x, x)dx\right],$$

где $f \in L^2([0,1]\times[0,1], \nu\times\nu)$; а образ подпространства L_3 есть

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{3}{2}-\langle\eta,1\rangle} & \cdot \frac{1}{3!}\Big[\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)(\eta+2)(x)(\eta+2)(y)(\eta+2)(z)dxdydz \\
& - \int_0^1\int_0^1 f(x,x,z)(\eta+2)(z)dxdz - \int_0^1\int_0^1 f(x,y,y)(\eta+2)(x)dxdy \\
& - \int_0^1\int_0^1 f(z,y,z)(\eta+2)(y)dydz\Big],
\end{aligned}
$$

$f \in L^2([0,1]\times[0,1]\times[0,1], \nu\times\nu\times\nu)$.

Пример 2. Каждая функция $h \in L^2(X,\nu)$ задает «линейный» функционал $F_h(\omega) = \sum_{x\in\omega} h(x)$ от пуассоновского процесса. Вычислим его образ в $L^2(\alpha)$. Имеем:

$$
\mathbb{E}K(\omega,\eta)F_h(\omega) = e^{-3/2-\langle\eta,1\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\dots\int_0^1\sum_{l=1}^{n}h(x_l)
$$
$$
\sum_{g\in\mathrm{Inv}(x_1,\dots,x_n)}\prod_{\{x_i,x_j\}\in C_2(g)}(-\delta(x_i-x_j))\cdot\prod_{x_k\in C_1(g)}(\eta+2)(x_k)dx_1\dots dx_n.
$$

Легко проверить, что каждое слагаемое $h(x_l)$ вносит вклад

$$
\begin{cases}
\langle h,\eta+2\rangle(\langle 1,\eta\rangle+2)^{c_1(g)-1}(-1)^{c_2(g)}, & \text{если } x_l\in C_1(g);\\
\langle h\rangle(\langle 1,\eta\rangle+2)^{c_1(g)}(-1)^{c_2(g)}, & \text{если } x_l\in C_2(g),
\end{cases}
$$

где $\langle h\rangle = \int_X h(x)d\nu(x)$. Таким образом, рассматриваемая сумма равна $e^{-3/2-\langle\eta,1\rangle}(S_1+S_2)$, где

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \langle h,\eta+2\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathrm{Inv}(x_1,\dots,x_n)}c_1(g)(\langle 1,\eta\rangle+2)^{c_1(g)-1}(-1)^{c_2(g)},\\
S_2 &= 2\langle h\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathrm{Inv}(x_1,\dots,x_n)}c_2(g)(\langle 1,\eta\rangle+2)^{c_1(g)}(-1)^{c_2(g)}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что сумма в S_1 есть производная циклового индекса $\widetilde{Z}(\mathfrak{S}_n)$ по t_1, вычисленная в точке $t = (\langle 1,\eta\rangle+2, -1, 0, 0, \dots)$, поэтому $S_1 = \langle h, \eta+2\rangle e^{\langle 1,\eta\rangle+3/2}$. Аналогично, S_2 есть производная того же циклового индекса по t_2, так что $S_2 = -\langle h\rangle e^{\langle 1,\eta\rangle+3/2}$, и элементарные вычисления показывают, что образ функционала F_h в $L^2(\alpha)$ равен $F_h(\eta) = \langle h,\eta\rangle + \int_X h d\nu(x)$, в соответствии с формулой (2.33).

2.2.4 Фоковская структура факторизаций, порожденных общими процессами Леви

Цель этого раздела — применить результаты о пуассон-гауссовском изоморфизме к анализу факторизаций, порожденных общими процессами Леви.

Как было отмечено в п. 2.2.2, пространство $L^2(\eta_\Pi)$ квадратично интегрируемых функционалов от процесса Леви η_Π с мерой Леви Π может быть отождествлено с пространством $L^2(\pi_{\nu\times\Pi})$ квадратично интегрируемых функционалов от пуассоновского процесса $\pi_{\nu\times\Pi}$ на пространстве $(X\times\mathbb{R}, \nu\times\Pi)$. Поэтому естественно ввести в рассмотрение белый шум $\alpha_{X\times\mathbb{R}}$ на пространстве $(X\times\mathbb{R}, \nu\times\Pi)$. Заметим, что его можно рассматривать также как $L^2(\mathbb{R},\Pi)$-значный белый шум $\alpha^{L^2(\mathbb{R},\Pi)}$ на пространстве (X,ν), т. е. $L^2(\alpha_{X\times\mathbb{R}})$ можно отождествить с однородным пространством Фока $\mathrm{EXP}\, L^2((X,\nu); L^2(\mathbb{R},\Pi))$. Пространства $L^2(\alpha^{L^2(\mathbb{R},\Pi)})$ и $L^2(\eta_\Pi)$ снабжены естественными гильбертовыми факторизациями над (X,ν).

Теорема 2.15. *Существует сохраняющая единицу изометрия (изоморфизм гильбертовых факторизаций) $\Phi : L^2(\alpha^{L^2(\mathbb{R},\Pi)}) \to L^2(\eta_\Pi)$. На множестве мультипликативных функционалов она задается следующей формулой: для* *любой функции* $h \in L^2(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi) \cap L^1(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$

$$\Phi: \quad e^{<h,\cdot> - \frac{\|h\|^2}{2}} \mapsto \prod_i (1 + h(x_i, t_i)) \cdot e^{-\iint h(x,t) d\nu(x) d\Pi(t)}. \tag{2.45}$$

Это единственный вещественный специальный сохраняющий вакуум изоморфизм гильбертовых факторизаций, тождественно действующий на пространстве значений $L^2(\mathbb{R}, \Pi)$.

Под тождественным действием изоморфизма на пространстве значений имеется в виду, что он является изоморфизмом факторизаций над пространством $(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$. Иными словами, рассмотрим ограничение изоморфизма на подпространство первого хаоса, которое для обоих процессов может быть отождествлено с $L^2((X, \nu); L^2(\mathbb{R}, \Pi))$. Тогда для произвольного подмножества $A \subset L^2(\mathbb{R}, \Pi)$ изоморфизм сохраняет подмножество пространства $L^2((X, \nu); L^2(\mathbb{R}, \Pi))$, состоящее из функций, значения которых лежат в множестве A.

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 2.13 и приведенных выше замечаний. □

Следствие 2.7. *Пусть* η *— процесс Леви на пространстве* (X, ν) *с мерой Леви–Хинчина* Π. *Тогда гильбертова факторизация, задаваемая процессом* η, *является однородной фоковской факторизацией, причем ее размерность равна числу точек в* $\operatorname{supp} \Pi$.

Таким образом, единственным инвариантом гильбертовых факторизаций, порождаемых процессами Леви, является число точек в носителе меры Леви–Хинчина. В частности, например, гамма-процесс порождает такую же факторизацию, как гауссовский белый шум со счетномерным пространством значений. Заметим, что соответствующие метрические факторизации не обязательно изоморфны: Дж. Фельдман [97] показал, что метрические факторизации, порожденные процессами с независимыми значениями без гауссовской компоненты, изоморфны тогда и только тогда, когда пространства $(\mathbb{R}, \Pi_1)$ и $(\mathbb{R}, \Pi_2)$, где Π_1 и Π_2 — соответствующие меры Леви–Хинчина, изоморфны как пространства с мерой. При этом гауссовская метрическая факторизация неизоморфна негауссовской.

Теорема 2.15 устанавливает леви-гауссовский изоморфизм на уровне мультипликативных функционалов. Опишем его в терминах ортогональных разложений, применяя общую схему, представленную в п. 2.2.2, и предполагая для простоты, что процесс является обобщенным субординатором (см. определение 2.2). Согласно (2.37) имеем $L^2(\eta_\Pi) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$, где V_n — подпространство, порожденное обобщенными функционалами Шарлье (2.38) порядка n в пространстве $(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$. В частности, аддитивные функционалы имеют вид $\sum_i h(x_i, t_i)$. Как отмечено выше, в случае гауссовского и пуассоновского процессов все аддитивные функционалы линейны. Если же носитель меры Леви–Хинчина состоит более чем из одной точки, т. е. процесс Леви не является ни гауссовским, ни пуассоновским, то пространство аддитивных функционалов не совпадает с пространством линейных функционалов, которые задаются формулой

$$\langle a, \eta \rangle = \int_X a(x) d\eta(x) = \sum_i a(x_i) t_i, \qquad a \in L^2(X, \nu). \tag{2.46}$$

Именно этим объясняется хорошо известный факт (см., напр., [89]), что единственные процессы Леви, обладающие т. н. свойством хаотического представления (которое означает, что пространство L^2 над процессом раскладывается в прямую сумму подпространств, натянутых на обычные стохастические интегралы от процесса) — это гауссовский и пуассоновский процессы.

В оставшейся части этого раздела предполагается, что мера Π удовлетворяет условию (2.1), т. е. процесс Леви является обобщенным субординатором, и, кроме того, мера $t^2\Pi(t)$ имеет конечные моменты любого порядка и проблема моментов для этой меры является определенной. В этом случае можно получить более подробное описание ортогонального разложения.

Пусть $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — семейство ортогональных многочленов на $\mathbb{R}_+$ относительно меры $t^2\Pi(t)$, и пусть $V_{n,k}$ — подпространство, натянутое на обобщенные функционалы Шарлье $\mathfrak{C}^{(n)}_{f_1,\dots,f_n}$ порядка n, соответствующие функциям вида $f_i(x,t) = a_i(x)tP_{k-1}(t)$, т. е. функциям k-й степени по t.

Нетрудно видеть, что

$$V_n = \sum_{\lambda \vdash n} \bigoplus_{\substack{(i_1,\dots,i_k) \\ \text{различны}}} \bigotimes_{j=1}^{k} V_{\lambda_j, i_j},$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ — разбиение числа n, а тензорное произведение предполагается симметричным. Таким образом, переупорядочивая слагаемые (и полагая $\lambda = 1^{n_1}2^{n_2}\dots$), мы получаем следующее ортогональное разложение:

$$\begin{aligned} L^2(\eta) &= \bigoplus_{n} \bigoplus_{\lambda \vdash n} \bigotimes_{k} V_{n_k,k} \\ &= \mathbb{C} \oplus V_{1,1} \oplus (V_{1,2} \oplus V_{2,1}) \oplus (V_{3,1} \oplus (V_{1,1} \otimes_s V_{1,2}) \oplus V_{1,3}) \oplus \dots . \end{aligned}$$

То же разложение может быть описано по-другому (см. [145]). Для данного обобщенного субординатора $\eta = \sum t_i \delta_{x_i}$ рассмотрим процессы $\eta_k = \sum_i t_i P_{k-1}(t_i)\delta_{x_i}$ (в частности, $\eta_1 = \eta$). Тогда $V_{n,k}$ есть пространство n-кратных стохастических интегралов от процесса η_k.

Соответствующее разложение для пространства L^2 над векторнозначным гауссовским белым шумом получается аналогичным образом. А именно,

$$
\begin{aligned}
L^2(\alpha^{L^2(\mathbb{R},\Pi)}) &= \bigoplus_n \bigoplus_{\lambda\vdash n} \bigotimes_k \mathcal{H}_{n_k,k} \\
&= \mathbb{C} \oplus \mathcal{H}_{1,1} \oplus (\mathcal{H}_{1,2} \oplus \mathcal{H}_{2,1}) \oplus (\mathcal{H}_{3,1} \oplus (\mathcal{H}_{1,1} \otimes_s \mathcal{H}_{1,2}) \oplus \mathcal{H}_{1,3}) \oplus \dots,
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{H}_{n,k}$ — подпространство, натянутое на обобщенные функционалы Эрмита порядка n, соответствующие функциям вида $f(x,t) = a(x)tP_{k-1}(t)$.

Следствие 2.8. *В терминах ортогональных разложений канонический изоморфизм* (2.45) *имеет вид* $\Phi\mathfrak{H}^{(n)}_{f_1,\dots,f_n} = \mathfrak{C}^{(n)}_{f_1,\dots,f_n}$, *где* $f_k(x,t) = a_k(x)tP_{k-1}(t)$.

Пример. Гамма-процесс. Пусть γ — гамма-процесс на пространстве (X,ν). К пространству $L^2(\gamma)$ применимы все рассуждения этого раздела, причем ортогональные многочлены относительно меры $t^2\Lambda_\Gamma(t) = te^{-t}dt$ суть многочлены Лагерра с единичным параметром: $P_n(t) = L_n^{(1)}(t)$. Заметим, что появление многочленов Лагерра в этом примере связано не с тем хорошо известным фактом, что они являются ортогональными многочленами относительно гамма-распределения, т. е. безгранично делимого распределения, соответствующего гамма-процессу, а с тем, что они являются ортогональными многочленами относительно $t^2\Lambda_\Gamma(t)$, т. е. меры с плотностью t^2 относительно меры Леви гамма-процесса.

2.2.5 Изоморфизм моделей канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$

В качестве одного из приложений полученных результатов рассмотрим изоморфизм между пространством Фока и пространством L^2 над гамма-процессом и применим эту конструкцию к анализу изоморфизма между различными моделями канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$, описанного в п. 2.1.6. Полученный результат позволяет, в частности, найти явную формулу для действия инволюции σ в лебеговской модели.

Опишем фоковскую модель этого представления. Рассмотрим т. н. особое представление группы $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, которое реализуется в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R}, \frac{dt}{|t|})$ и задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \left(T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\phi\right)(t) &= e^{ibt}\phi(t), \\ \left(T\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\phi\right)(t) &= \phi(a^2 t), \\ \left(T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\phi\right)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_0(t,s)\phi(s)ds, \end{aligned} \tag{2.47}$$

где

$$K_0(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|^2} e^{-i(tu+su^{-1})}du. \tag{2.48}$$

Это неприводимое унитарное представление дискретной серии и единственное представление, обладающее нетривиальным коциклом.

Положим $\phi_0(t) = e^{-|t|}$ и зафиксируем коцикл $\beta : G \times H \to H$, задаваемый формулой

$$\beta(g,t) = T_g\phi_0(t) - \phi_0(t). \tag{2.49}$$

Рассмотрим гильбертово пространство $H^X = L^2\left(X \times \mathbb{R},\, \nu \times \frac{dt}{|t|}\right)$ и соответствующее пространство Фока $\mathrm{EXP}\, H^X$. Реализация канонического представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$ в пространстве $\mathrm{EXP}\, H^X$ задается формулой

$$U_{g(\cdot)}\,\mathrm{EXP}\, h(\cdot,\cdot) = \lambda(g(x), h(x,t)) \cdot \mathrm{EXP}(T_{g(x)}h(x,t) + \beta(g(x),t)), \tag{2.50}$$

где

$$\lambda(g,h) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\beta\|^2 - \langle T_g h, \beta\rangle\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_X\int_{\mathbb{R}} \frac{|\beta(g(x),t)|^2}{|t|} dt\, d\nu(x) - \int_X\int_{\mathbb{R}} \frac{T_{g(x)}h(x,t)\cdot\bar{\beta}(g(x),t)}{|t|} dt\, d\nu(x)\right).$$

Вакуумным вектором в фоковской реализации является вектор $\mathrm{EXP}\,0$, и соответствующая сферическая функция равна (2.15).

Используя изоморфизм (2.20) между пространством Фока и пространством L^2 над гауссовским белым шумом, можно получить гауссовскую реализацию канонического представления. Соответствующие формулы могут быть найдены в работе [105].

Коммутативная модель канонического представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$ относительно унипотентной подгруппы была предложена в [105]. Ее реализация в пространстве L^2 над бесконечномерной мерой Лебега описана в п. 2.1.6. Используя канонический изоморфизм между пространством квадратично интегрируемых функционалов от гамма-процесса и пространством Фока, можно в явном виде построить изоморфизм фоковской и лебеговской реализаций.

Теорема 2.16. *Изометрия пространств* $\mathrm{EXP}\,H^X$ *и* $L^2(D,\mathcal{L})$*, сплетающая фоковскую и лебеговскую модели канонического представления группы токов* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^X$*, задается формулой*

$$\mathrm{EXP}\,h \leftrightarrow \Psi_h, \qquad h \in L^2(X\times\mathbb{R}, \nu\times\frac{dt}{|t|}) \cap L^1(X\times\mathbb{R}, \nu\times\frac{dt}{|t|}),$$

где

$$\Psi_h(\eta) = \prod_i \left(h(x_i,t_i) + e^{-|t_i|/2}\right)\cdot \exp\left(-\int_X\int_{\mathbb{R}} \frac{h(x,t)\cdot e^{-|t|/2}}{|t|} dt\, d\nu(x)\right) \quad (2.51)$$

для $\eta = \sum t_i \delta_{x_i} \in D$.

Доказательство. Формула (2.51) задает изометрию пространств $\mathrm{EXP}\, H^X$ и $L^2(D, \mathcal{L})$, как следует из теоремы 2.15, примененной к гамма-процессу, и очевидной изометрии между $L^2(D, \mathcal{G})$ и $L^2(\gamma)$, задаваемой формулой $F(\eta) \leftrightarrow F(\eta)e^{-\eta(X)/2}$. Нетрудно проверить при помощи явных вычислений, что эта изометрия сплетает рассматриваемые представления группы токов. □

Заметим, что в лебеговской модели вакуумный вектор есть $\Psi_0(\eta) = e^{-\frac{|\eta|(X)}{2}}$, где $|\eta| = \sum |t_i|$ — полная вариация заряда η.

Следствие 2.9. *Инволюция* $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *в лебеговской модели канонического представления группы* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$ *действует по формуле* $U_\sigma \Psi_{f(\cdot,\cdot)} = \Psi_{T_\sigma f(\cdot,\cdot)}$, *где*

$$T_\sigma f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(t,s) f(s) ds$$

и ядро K_0 *задается формулой* (2.48).

Доказательство. Следует из теоремы 2.16 и (2.50), поскольку $\beta(\sigma, t) \equiv 0$. □

Глава 3

Приложения к физическим моделям

В этой главе рассмотрены некоторые приложения теории представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ (в частности, теории бесконечномерной двойственности Шура–Вейля, развиваемой в § 1.1, и теории индуцированных представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, развиваемой в § 1.4), а также тесно связанной с ней теории симметрических функций (необходимые сведения из которой могут быть найдены в [138]) к моделям теоретической физики.

3.1 Фазовая и q-бозонная модель

3.1.1 Фазовая модель и функции Шура

Фазовая модель ([81, 82, 78]) представляет собой частный случай $q = 0$ т. н. q-бозонной модели ([79, 80, 82]), которая описывает систему сильно коррелированных бозонов на конечной одномерной решетке.

Рассмотрим бозонное пространство Фока $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H}$ — одномерное пространство. Следуя традиции, принятой в физике, будем обозначать вакуумный вектор в $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$ через $|0\rangle$, а нормированный n-частичный фоковский вектор (очевидно, в $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$ все n-частичные подпространства одномерны) через $|n\rangle$. Рассмотрим операторы $\phi, \phi^\dagger$ и N, которые действуют в $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$ как операторы фазы и оператор числа частиц соответственно:

$$\phi^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle, \qquad \phi|n\rangle = |n-1\rangle, \ \phi|0\rangle = 0, \qquad N|n\rangle = n|n\rangle.$$

Таким образом, ϕ есть односторонний сдвиг, и

$$\phi\phi^\dagger = 1, \qquad \phi^\dagger\phi = 1 - \pi,$$

где π — вакуумный проектор: $\pi|0\rangle = |0\rangle$, $\pi|n\rangle = 0$ при $n \geq 1$. Введенные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[N, \phi] = -\phi, \qquad [N, \phi^\dagger] = \phi^\dagger, \qquad [\phi, \phi^\dagger] = \pi. \tag{3.1}$$

Теперь зафиксируем натуральное число M (число узлов решетки) и рассмотрим тензорное произведение $M+1$ копий $\mathcal{F}_i$, $i = 0, \ldots, M$, пространства $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_M$. Обозначим через $\phi_i, \phi_i^\dagger, N_i$ операторы, которые действуют как $\phi, \phi^\dagger, N$ соответственно в $\mathcal{F}_i$ и тождественно на остальных пространствах; например,

$$\phi_i = I_1 \otimes \ldots \otimes I_{i-1} \otimes \phi \otimes I_{i+1} \otimes \ldots \otimes I_M,$$

где I_j — тождественный оператор в $\mathcal{F}_j$. Таким образом, операторы коммутируют, если они относятся к различным узлам, и удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1) в одном и том же узле.

Гамильтониан фазовой модели имеет вид

$$H_{\text{phase}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}(\phi_n^\dagger \phi_{n+1} + \phi_n \phi_{n+1}^\dagger - 2N_n)$$

с периодическими граничными условиями $M + 1 \equiv 1$.

Следуя квантовому методу обратной задачи (см., напр., [3]), рассмотрим L-матрицу

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & uI \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, \ldots, M,$$

где u — скалярный параметр, а I — тождественный оператор в $\mathcal{F}$. При каждом $n = 0, 1, \ldots, M$ матрица L_n удовлетворяет билинейному соотношению

$$R(u,v)(L_n(u) \otimes L_n(v)) = (L_n(v) \otimes L_n(u))R(u,v) \tag{3.2}$$

с R-матрицей $R(u,v) = R_{\text{phase}}(u,v)$ размера 4×4, которая задается формулой

$$R_{\text{phase}}(u,v) = \begin{pmatrix} f(v,u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v,u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v,u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v,u) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где

$$f(v,u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \qquad g(v,u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}. \tag{3.4}$$

Матрица монодромии определяется как

$$T(u) = L_M(u)L_{M-1}(u)\ldots L_0(u) \qquad \text{(матричное произведение).}$$

Она удовлетворяет билинейному соотношению с той же R-матрицей:

$$R(u,v)(T(u)\otimes T(v)) = (T(v)\otimes T(u))R(u,v). \tag{3.5}$$

Пусть

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы $A(u), B(u), C(u), D(u)$ матрицы монодромии $T(u)$ действуют в пространстве $\mathcal{F}$. Если обозначить через $\hat{N} = N_0 + \ldots + N_m$ оператор полного числа частиц, то

$$\hat{N}B(u) = B(u)(\hat{N}+1), \qquad \hat{N}C(u) = C(u)(\hat{N}-1),$$

так что $B(u)$ есть оператор рождения, а $C(u)$ — оператор уничтожения. Операторы $A(u)$ и $C(u)$ не меняют числа частиц.

Обозначим через $|0\rangle_j$ вакуумный вектор в $\mathcal{F}_j$, а через $|0\rangle = \bigotimes_{j=0}^{M} |0\rangle_j$ глобальный вакуумный вектор в $\mathcal{F}$. Рассмотрим N-частичные векторы состояний вида

$$|\Psi_N(u_1,\ldots,u_N)\rangle = \prod_{j=1}^{N} B(u_j)|0\rangle;$$

согласно алгебраическому анзацу Бете (см. [3]), именно такой вид имеют собственные функции гамильтониана. Требуется разложить эти векторы по базисным N-частичным векторам

$$\psi_{n_0,\ldots,n_M} = \bigotimes_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j, \qquad n_0 + \ldots + n_M = N, \tag{3.6}$$

где $|n_j\rangle_j = (\phi^{\dagger})^n |0\rangle_j$ — n_j-частичный вектор в j-м пространстве Фока $\mathcal{F}_j$;

числа n_k называются *числами заполнения* вектора (3.6).

Базисному вектору (3.6) с числами заполнения $n_0, \ldots, n_M$ сопоставим диаграмму Юнга $\lambda = 1^{n_1}2^{n_2}\ldots$, имеющую n_j строк длины j, $j = 1, \ldots, M$, и соответствующую функцию Шура s_λ:

$$\bigotimes_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j \leftrightarrow s_\lambda, \qquad \lambda = 1^{n_1}2^{n_2}\ldots. \tag{3.7}$$

Имея в виду, с одной стороны, соответствие (3.7), а с другой — стандартную реализацию пространства Фока в алгебре симметрических функций (см., напр., [34, гл. 14]), естественно называть j-е пространство Фока $\mathcal{F}_j$ *пространством частиц энергии* j.

Заметим, что соответствие (3.7) не учитывает число n_0 частиц нулевой энергии. Таким образом, формула (3.7) задает реализацию подпространства положительной энергии $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_M$ в алгебре симметрических функций Λ, точнее в ее подпространстве Λ_M, порожденном функциями Шура s_λ с диаграммами, имеющими не более M столбцов. В силу тождества Якоби–Труди [138, I.3.4] подпространство Λ_M можно задать, выбирая аргументы симметрических функций так, чтобы

$$h_{M+1} = h_{M+2} = \ldots = 0 \tag{3.8}$$

(подробности см. в доказательстве теоремы 3.2).

С другой стороны, если известно полное число частиц N, то можно восстановить число частиц нулевой энергии в базисном векторе, соответствующем функции s_λ, по формуле $n_0 = N - l(\lambda)$, где $l(\lambda)$ — число строк диаграммы λ. Рассмотрим разложение $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}^N \oplus \ldots$ пространства $\mathcal{F}$ на N-частичные подпространства $\mathcal{F}^N$, и пусть Λ_M^N — пространство симметрических функций, соответствующее $\mathcal{F}^N$. Заметим, что пространство Λ_M^N натянуто на функции Шура s_λ с диаграммами λ, содержащимися в ящике размера $M \times N$, т. е. имеющими не более N строк и не более M столбцов. Таким образом, все пространство $\mathcal{F}$ может быть реализовано как прямая сумма $\mathcal{F} \equiv \Lambda_M^0 \oplus \Lambda_M^1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_M^N \oplus \ldots$.

Поскольку $B(u)$ — оператор рождения, т. е. увеличивает число частиц на единицу, он переводит Λ_M^N в Λ_M^{N+1}. Поэтому достаточно изучить его действие на пространстве $\widehat{\mathcal{F}} \equiv \Lambda_M$, т. е. оператор $\mathcal{B}(u) := PB(u)P$, где P — проектор из $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}}$ («забывающий частицы нулевой энергии»).

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{B}(u) = u^{-M}\tilde{\mathcal{B}}(u)$. Оператор $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ действует в Λ_M как оператор умножения на $H_M(u^2)$, где $H_M(t) = \sum_{k=0}^M t^k h_k$ — (усеченная) производящая функция полных симметрических функций h_k.*

Доказательство. Легко видеть, что оператор $\tilde{\mathcal{B}}$ имеет вид $\tilde{\mathcal{B}} = \sum_{k=0}^M u^{2k}\mathcal{B}_k$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathcal{B}_k$ — оператор умножения на k-ю полную симметрическую функцию h_k. Положим $\phi_j^{-1} = \phi_j$, $\phi_j^0 = 1$, $\phi_j^1 = \phi_j^\dagger$. Поскольку

$$B(u) = \sum_{j_M,\ldots,j_1=1}^{2} (L_M(u))_{1j_M}(L_{M-1}(u))_{j_Mj_{M-1}}\ldots(L_0(u))_{j_12},$$

мы имеем

$$\mathcal{B}_k = \sum_{\varepsilon_M,\ldots,\varepsilon_0} \phi_M^{\varepsilon_M}\ldots\phi_1^{\varepsilon_1} = \sum_{\varepsilon_M,\ldots,\varepsilon_0} \mathcal{B}_{\varepsilon_M,\ldots,\varepsilon_0},$$

где суммирование производится по всем наборам $\varepsilon_j \in \{-1,0,1\}$, $j = 0,\ldots,M$, удовлетворяющим следующим условиям: (a) пусть ε_l — старший ненулевой элемент, т. е. $\varepsilon_M = \ldots\varepsilon_{l+1} = 0$ и $\varepsilon_l \neq 0$; тогда $\varepsilon_l = 1$; (b) $\varepsilon_0 \neq -1$; (c) соседние члены имеют разные знаки, т. е. $\varepsilon_{j+1}\varepsilon_j \neq 1$ для любого j; (d) $\sum_{j=1}^M j\varepsilon_j = k$. Очевидно, что оператор $\mathcal{B}_{\varepsilon_M,\ldots,\varepsilon_0}$ переводит базисный вектор (3.6) в базисный вектор.

В терминах функций Шура имеем $\phi_j^\dagger s_\mu = s_\lambda$, где диаграмма λ получается из μ вставкой строки длины j, и $\phi_j s_\mu = s_\lambda$, где λ получается из μ удалением строки длины j (при этом $\phi_j s_\mu = 0$, если μ не содержит строк длины j). Обозначим через ν_i' длину i-го столбца диаграммы ν и через $n_i(\nu)$ число строк длины i в ν. Имеем $\nu_i' - \nu_{i+1}' = n_i(\nu)$. Пусть теперь $\mathcal{B}_{\varepsilon_M,\dots,\varepsilon_0} s_\mu = s_\lambda$, и положим $\theta_i' = \lambda_i' - \mu_i'$. Тогда $n_i(\lambda) = n_i(\mu) + \varepsilon_i$, так что $\theta_i' = \theta_{i+1}' + n_i(\lambda) - n_i(\mu) = \theta_{i+1}' + \varepsilon_i$, откуда

$$\theta_M' = \varepsilon_M, \qquad \theta_{M-1}' = \varepsilon_M + \varepsilon_{M-1}, \quad \dots, \quad \theta_1' = \varepsilon_M + \ldots + \varepsilon_1.$$

Из условия (a) следует, что $\theta_M' = \ldots = \theta_{l+1}' = 0$, $\theta_l' = 1$. Из условия (c) получаем, что $\theta_i' \in \{0, 1\}$, а это означает, что $\lambda \supset \mu$ и косая диаграмма $\lambda\backslash\mu$ содержит не более одной клетки в каждом столбце, т. е. является горизонтальной полосой. Более того, $\sum \theta_i' = k$, так что $\lambda \setminus \mu$ содержит k клеток. Обозначая через $\mathcal{H}_k$ множество горизонтальных полос, состоящих из k клеток, мы получаем

$$\mathcal{B}_k s_\mu = \sum_{\lambda\colon \lambda\backslash\mu\in\mathcal{H}_k} s_\lambda,$$

откуда следует, в силу формулы Пиери [138, I.5.16], что $\mathcal{B}_k s_\mu = h_k s_\mu$. $\square$

Замечание. Усеченную производящую функцию $H_M(t) = \sum_{k=0}^{M} t^k h_k$ можно также рассматривать как образ полной производящей функции $H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k h_k$ под действием специализации (3.8): $H_M(t) = H(t)\big|_{h_{M+1}=h_{M+2}=\ldots=0}$.

Следствие 3.1. *Предел регуляризованных операторов рождения $\tilde{\mathcal{B}}(u) = u^M \mathcal{B}(u)$ на подпространстве положительной энергии $\widehat{\mathcal{F}}$ при $M \to \infty$ есть в точности оператор умножения на $H(u^2)$ в алгебре симметрических функций Λ.*

Используя интерпретацию оператора $\mathcal{B}(u)$, полученную в теореме 3.1, можно легко найти требуемое разложение N-частичного вектора (3.6) по базисным векторам.

Теорема 3.2. *Разложение N-частичного вектора* (3.6) *по базисным векторам имеет вид*

$$|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = \sum_\lambda s_\lambda(u_1^2, \dots, u_N^2) \bigotimes_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j,$$

где сумма берется по всем диаграммам Юнга λ, имеющим не более N строк и не более M столбцов.

Доказательство. По формуле для производящей функции полных симметрических функций [138, I.2.5] имеем

$$H(u^2) = \prod_i \frac{1}{1 - u^2 x_i}.$$

Заметим, что $\Psi_N(u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{F}^N$, и отождествим $\mathcal{F}^N$ с Λ_M^N как описано выше. Замечая, что вакуумный вектор соответствует единичной функции $s_\emptyset \equiv 1$, и используя теорему 3.1, получаем

$$\begin{aligned} |\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle &= \prod_{j=1}^{N} B(u_j)|0\rangle = (u_1 \dots u_M)^{-M} \prod_{j=1}^{N} \tilde{B}(u_j)|0\rangle = \\ &= (u_1 \dots u_M)^{-M} \prod_j \prod_i \frac{1}{1 - u_j^2 x_i}. \end{aligned}$$

Применяя хорошо известное тождество Коши [138, I.4.3], имеем

$$|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = (u_1 \dots u_M)^{-M} \sum_\lambda s_\lambda(u_1^2, \dots, u_N^2) s_\lambda(x),$$

откуда, ввиду (3.7), следует искомая формула. Ограничения на диаграмму λ получаются из следующих соображений. Во-первых, функция Шура обращается в нуль, если число ненулевых аргументов меньше, чем число ее строк. Поэтому $s_\lambda(u_1^2,\dots,u_N^2) = 0$ при $l(\lambda) > N$. С другой стороны, согласно тождеству Якоби–Труди [138, I.3.4], имеем $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{i,j=1}^n$, где $n \geq l(\lambda)$. Таким образом, видно, что под действием специализации (3.8) первая строка этого определителя, а следовательно, и s_λ обращаются в нуль при $\lambda_1 > M$. □

Лемма 3.1. *Матричные элементы матрицы монодромии $T(u)$ связаны следующими формулами:*

$$B(u) = uA(u)\phi_0^\dagger, \qquad C(u) = u^{-1}\phi_0 A^\dagger(u^{-1}), \qquad D(u) = \phi_0 A^\dagger(u^{-1})\phi_0^\dagger.$$

Доказательство. Простая индукция по M. □

В частности, полагая $\mathcal{A}(u) = PA(u)P, \mathcal{C}(u) = PC(u)P$ и $\mathcal{D}(u) = PD(u)P$, имеем

$$\mathcal{A}(u) = u^{-1}\mathcal{B}(u), \qquad \mathcal{C}(u) = \mathcal{B}^\dagger(u^{-1}), \qquad \mathcal{D}(u) = u\mathcal{B}^\dagger(u^{-1}).$$

Отсюда следует, например, что при реализации фазовой модели в алгебре симметрических функций оператор уничтожения $\mathcal{C}(u)$ имеет представление

$$\mathcal{C}(u) = u^M \tilde{\mathcal{C}}(u), \qquad \tilde{\mathcal{C}}(u) = \tilde{\mathcal{B}}^\dagger(u^{-1}) = H_M^\perp(u^{-2}) = \sum_{n=0}^{M} u^{-2n} h_n^{\perp,M},$$

где $h_n^{\perp,M}$ — оператор, сопряженный к оператору умножения на h_n в пространстве Λ_M со стандартным скалярным произведением (относительно которого функции Шура образуют ортонормированный базис). Заметим, что оператор $h_n^{\perp,M}$ существенно зависит от M. В пределе $M \to \infty$ мы имеем

$$\tilde{\mathcal{C}}(u) = H^{\perp}(u^{-2}) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n} h_n^{\perp}, \tag{3.9}$$

где $h_n^{\perp}$ — оператор, сопряженный к оператору умножения на h_n во всей алгебре Λ (ср. [138, Ex. I.5.3, Ex. I.5.29]).

Лемма 3.2. *В пределе $M \to \infty$ оператор $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ представляется в виде вертексного оператора*

$$\tilde{\mathcal{B}}(u) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k} \alpha_{-k}\right), \tag{3.10}$$

где α_{-k}, $k = 1, 2, \ldots,$ — операторы рождения свободных бозонов.

Доказательство. Согласно известной формуле [138, I.2.10],

$$\frac{d}{dt} \log H(t) = P(t),$$

где $P(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} p_k$ — производящая функция степенных сумм Ньютона p_k. Таким образом,

$$H(t) = \exp\left(\int P(t)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} p_k\right).$$

С другой стороны, известно, что при реализации пространства Фока как алгебры симметрических функций оператор рождения свободного бозона α_{-k} соответствует умножению на p_k, откуда, в силу теоремы 3.1, следует формула (3.10). □

Заметим, что вертексный оператор, стоящий в правой части формулы (3.10), есть в точности оператор, использовавшийся А. Окуньковым и Н. Решетихиным в работе [149] в связи с вычислением корреляционных функций для плоских разбиений. А именно, в обозначениях упомянутой работы

$$\tilde{B}_0(q^{\frac{j}{2}}) = \Gamma_+(\phi_j), \qquad \text{где} \qquad \phi_j(z) = \phi_{3\mathrm{D}}[j](z) = \frac{1}{1-q^j z}.$$

В частности, при реализации пространства Фока как алгебры симметрических функций вертексный оператор, связанный с процессом Шура, описывающим плоские разбиения, есть в точности оператор умножения на производящую функцию полных симметрических функций:

$$\Gamma_+(\phi_{3\mathrm{D}}[j]) = H(q^j).$$

Ввиду (3.9), предел регуляризованных операторов уничтожения $\tilde{\mathcal{C}}(v) = v^{-M}\mathcal{C}(v)$ при $M \to \infty$ представляется в виде вертексного оператора

$$\tilde{\mathcal{C}}(v) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^{-2k}}{k}\alpha_k\right).$$

Используя коммутационные соотношения для вертексных операторов (см., напр., [34, (14.10.12)] или [149, (11)]), нетрудно получить известное коммутационное соотношение [138, Ex. I.5.29, (2)] для операторов H и $H^{\perp}$ во всей алгебре симметрических функций Λ:

$$H^{\perp}(u)H(v) = \frac{1}{1-uv}H(v)H^{\perp}(u). \tag{3.11}$$

Однако в подпространстве Λ_M, натянутом на функции Шура с диаграммами, имеющими не более M столбцов, вертексное представление (3.10) и коммутационное соотношение (3.11) уже не выполняются. Тем не менее коммутационное соотношение для оператора $H_M(v) = \sum_{k=0}^{M} v^k h_k$ и сопряженного к нему в Λ_M оператора $H^{\perp}_M(v)$ можно получить, используя аппарат КМОЗ и описанную выше интерпретацию фазовой модели в терминах симметрических функций. А именно, из билинейного соотношения (3.5) следует, в частности, что

$$D(u)B(v)=\frac{u^2}{u^2-v^2}B(v)D(u)-\frac{uv}{u^2-v^2}B(u)D(v).$$

Применяя теорему 3.1 и лемму 3.1, получаем

$$H^{\perp}_M(u)H_M(v)=\frac{1}{1-uv}\left[H_M(v)H^{\perp}_M(u)-(uv)^{M+1}H_M(u^{-1})H^{\perp}_M(v^{-1})\right]. \quad (3.12)$$

Отсюда видно, что в формальном пределе $M\to\infty$ при $|uv|<1$ соотношение (3.12) сводится к (3.11).

Раскладывая обе части равенства (3.12) в степенной ряд по u, v и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем следующие коммутационные соотношения в Λ_M.

Следствие 3.2.

$$h^{\perp,M}_m h_n=\sum_{i=0}^{\min\{m,n\}} h_{n-i}h^{\perp,M}_{m-i}-\sum_{i=0}^{\min\{m,n\}-1} h_{M+1-m+i}h^{\perp,M}_{M+1-n+i}.$$

Примеры. При $M=1$ получаем в Λ_1 соотношение $h^{\perp,1}_1 h_1=1$. Действительно, Λ_1 порождается функциями Шура с одностолбцовыми диаграммами, так что операторы h_1 и $h^{\perp,1}_1$ соответствуют добавлению и удалению одной клетки, т. е. являются односторонними сдвигами.

При $M=2$ получаем

$$h^{\perp,2}_1 h_1=h_1h^{\perp,2}_1+1-h_2h^{\perp,2}_2,\qquad h^{\perp,2}_1h_2=h_1,\qquad h^{\perp,2}_2h_1=h^{\perp,2}_1,\qquad h^{\perp,2}_2h_2=1.$$

3.1.2 q-Бозонная модель и функции Холла–Литлвуда

Пусть теперь q — неотрицательный параметр. Рассмотрим *q-бозонную алгебру*, порожденную тремя операторами $B, B^\dagger, N$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[N, B] = -B, \qquad [N, B^\dagger] = B^\dagger, \qquad [B, B^\dagger] = q^{2N}.$$

Обозначим

$$[n] = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}, \qquad [n]! = \prod_{j=1}^{n} [j].$$

Стандартная реализация q-бозонной модели в пространстве Фока $\mathcal{F}_+(\mathfrak{H})$, где $\dim \mathfrak{H} = 1$, имеет вид

$$B^\dagger|n\rangle = [n+1]^{\frac{1}{2}}|n+1\rangle, \qquad B|n\rangle = [n]^{\frac{1}{2}}|n-1\rangle,\ B|0\rangle = 0, \qquad N|n\rangle = n|n\rangle.$$

Однако здесь будет удобнее использовать другую реализацию, а именно

$$B^\dagger|n\rangle = [n+1]|n+1\rangle, \qquad B|n\rangle = |n-1\rangle,\ B|0\rangle = 0, \qquad N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (3.13)$$

Для того, чтобы операторы B и $B^\dagger$ были сопряжены, необходимо нормировать фоковские векторы таким образом, чтобы

$$\langle n|n\rangle^2 = \frac{1}{[n]!}. \quad (3.14)$$

Еще одна реализация q-бозонной модели в пространстве Фока задается формулами

$$B^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle, \qquad B|n\rangle = [n]|n-1\rangle,\ B|0\rangle = 0, \qquad N|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.15)$$

с нормировкой

$$\langle n|n\rangle^2 = [n]!. \tag{3.16}$$

Легко видеть, что фазовая модель является частным случаем q-бозонной модели при $q = 0$. При $q \to 1$ операторы B и $B^\dagger$ переходят в канонические бозонные операторы b и $b^\dagger$, удовлетворяющие коммутационному соотношению $[b, b^\dagger] = 1$.

Теперь применим ту же схему, что и при рассмотрении фазовой модели в п. 3.1.1: зафиксируем число узлов решетки M, возьмем $M + 1$ копий $\mathcal{F}_i$, $i = 0, \ldots, M$, пространства Фока $F_+(\mathfrak{H})$, рассмотрим их тензорное произведение $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_M$ и обозначим через $B_i, B_i^\dagger, N_i$ операторы, действующие как $B, B^\dagger, N$ соответственно в $\mathcal{F}_i$ и тождественно на остальных пространствах. При этом будем использовать реализацию (3.13) q-бозонной алгебры при $i = 1, \ldots, M$ и реализацию (3.15) при $i = 0$.

Заметим, что ввиду (3.14) и (3.16) квадраты норм базисных N-частичных векторов (3.6) равны

$$\|\psi_{n_0,\ldots,n_M}\|^2 = \frac{[n_0]}{\prod_{j=1}^{M}[n_j]!}. \tag{3.17}$$

Гамильтониан q-бозонной модели имеет вид

$$H_{q\text{-boson}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}(B_n^\dagger B_{n+1} + B_n B_{n+1}^\dagger - 2N_n)$$

с периодическими граничными условиями $M + 1 \equiv 1$.

L-Матрица для q-бозонной модели задается формулами

$$L_0(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & B_0^\dagger \\ (1-q^2)B_0 & uI \end{pmatrix}, \qquad L_n(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & (1-q^2)B_n^\dagger \\ B_n & uI \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

$n = 1, \ldots, M$, и удовлетворяет билинейному соотношению (3.2) с R-матрицей

$$R_{q\text{-boson}}(u,v) = \begin{pmatrix} f(v,u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v,u) & q^{-1} & 0 \\ 0 & q & g(v,u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v,u) \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

где

$$f(v,u) = \frac{q^{-1}u^2 - qv^2}{u^2 - v^2}, \qquad g(v,u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}(q^{-1} - q). \tag{3.20}$$

Заметим, что R-матрица (3.3), (3.4) фазовой модели получается из R-матрицы q-бозонной модели в нормализованном пределе $q \to 0$: $R_{\text{phase}} = \lim_{q\to 0} qR_{q\text{-boson}}$.

Обозначим через

$$T(u) = L_M(u) \ldots L_0(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}$$

матрицу монодромии q-бозонной модели. Она удовлетворяет билинейному соотношению (3.5) с R-матрицей (3.19), (3.20).

Кратко напомним основные факты, связанные с симметрическими функциями Холла–Литлвуда; подробности см. в [138, Ch. III].

Симметрические функции Холла–Литлвуда с параметром $t \geq 0$, индексируемые диаграммами Юнга λ, могут быть определены, например, следующим образом. Сначала для конечного числа $n \geq l(\lambda)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ положим

$$P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \frac{1}{v_\lambda(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w\left(x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\right),$$

где $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа степени n, действующая подстановками переменных, и

$$v_\lambda(t) = \prod_{i\geq 0} v_{n_i(\lambda)}(t), \qquad v_n(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-t^i}{1-t}.$$

Далее, заметим, что для любой диаграммы λ, такой, что $l(\lambda) \leq n$, выполнено равенство $P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = P_\lambda(x_1, \ldots, x_n, 0; t)$, так что можно определить симметрическую функцию $P_\lambda(x; t)$ от бесконечного числа переменных с коэффициентами из $\mathbb{Z}[t]$ как индуктивный предел функций $P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$ относительно проекций, заменяющих последнюю переменную на нуль. Функции $P_\lambda(x; t)$ образуют $\mathbb{Z}[t]$-базис алгебры $\Lambda[t]$ симметрических функций с коэффициентами из $\mathbb{Z}[t]$. Они являются интерполяцией между функциями Шура s_λ и мономиальными симметрическими функциями m_λ:

$$P_\lambda(x; 0) = s_\lambda(x), \qquad P_\lambda(x; 1) = m_\lambda(x). \tag{3.21}$$

Удобно ввести еще одно семейство симметрических функций $Q_\lambda(x; t)$, которые отличаются от $P_\lambda(x; t)$ скалярным множителем. А именно, положим

$$Q_\lambda(x; t) = b_\lambda(t) P_\lambda(x; t),$$

где

$$b_\lambda(t) = \prod_{i\geq 1} \phi_{n_i(\lambda)}(t), \qquad \phi_n(t) = (1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^n).$$

В случае $q = 0$ имеем $Q_\lambda(x; 0) = P_\lambda(x; 0) = s_\lambda(x)$.

Теперь положим

$$q_r(x; t) = Q_{(r)}(x; t) = (1-t)P_{(r)}(x; t), \quad r \geq 1; \qquad q_0(x, t) = 1.$$

Производящая функция для q_r равна

$$Q(u) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(x;t)u^r = \prod_i \frac{1 - x_i t u}{1 - x_i u} = \frac{H(u)}{H(tu)}, \tag{3.22}$$

где $H(u)$ — производящая функция полных симметрических функций. В частности,

$$q_r(x,0) = h_r(x), \tag{3.23}$$

$$q_r(x;1) = 0 \quad \text{при } r \geq 1. \tag{3.24}$$

Положим

$$q_\lambda(x;t) = \prod_{i \geq 0} q_{\lambda_i}(x;t). \tag{3.25}$$

Симметрические функции $q_\lambda(x;t)$ образуют $\mathbb{Q}[t]$-базис в $\Lambda[t]$.

При $t \neq 1$ введем в $\Lambda[t]$ скалярное произведение, потребовав, чтобы базисы $\{q_\lambda\}$ и $\{m_\lambda\}$ были двойственны друг другу:

$$\langle q_\lambda(x;t), m_\lambda(x) \rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Тогда базисы $\{P_\lambda\}$ и $\{Q_\lambda\}$ также двойственны:

$$\langle P_\lambda(x;t), Q_\lambda(x;t) \rangle = \delta_{\lambda\mu},$$

так что квадрат нормы функции Холла–Литлвуда $P_\lambda(x;t)$ равен

$$\langle P_\lambda(x;t), P_\lambda(x;t) \rangle = \frac{1}{b_\lambda(t)}. \tag{3.26}$$

Заметим, что в случае $t = 0$ это скалярное произведение совпадает со стандартным скалярным произведением в Λ (относительно которого функции Шура образуют ортонормированный базис).

Обобщение тождества Коши на случай функций Холла–Литлвуда имеет вид

$$\prod_{i,j} \frac{1 - t x_i y_j}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} P_\lambda(x;t) Q_\lambda(y;t) = \sum_{\lambda} b_\lambda(t) P_\lambda(x;t) P_\lambda(y;t). \tag{3.27}$$

Имеется также обобщение формулы Пиери; а именно,

$$P_\mu q_r = \sum_{\lambda:\lambda\setminus\mu\in\mathcal{H}_k} \phi_{\lambda\setminus\mu}(t) P_\lambda, \tag{3.28}$$

где

$$\phi_{\lambda\setminus\mu}(t) = \prod_{i\in I} (1 - t^{n_i(\lambda)}); \tag{3.29}$$

здесь $\theta = \lambda \setminus \mu$ и $I = \{i : \theta'_i = 1,\ \theta'_{i+1} = 0\}$ (напомним, что θ'_i есть длина i-го столбца косой диаграммы θ, которая в случае горизонтальной полосы может быть равна 0 или 1).

Будем следовать той же схеме, что в п. 3.1.1 для фазовой модели.

Базисному вектору (3.6) сопоставим функцию Холла–Литлвуда $P_\lambda(x;q^2)$, диаграмма которой определяется числами заполнения:

$$\bigotimes_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j \leftrightarrow P_\lambda(x;q^2), \qquad \lambda = 1^{n_1} 2^{n_2} \ldots .$$

Заметим, что в силу (3.17) и (3.26) это соответствие не является изометрией.

Положим $\mathcal{B}(u) = PB(u)P$, где P — проектор на подпространство положительной энергии. Пусть $\Lambda_M[q^2]$ — подпространство в $\Lambda[q^2]$, натянутое на функции $P_\lambda(x;q^2)$, диаграммы λ которых имеют не более M столбцов.

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathcal{B}(u) = u^{-M}\tilde{\mathcal{B}}(u)$. *Оператор* $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ *действует в* $\Lambda_M[q^2]$ *как оператор умножения на* $Q_M(u^2)$, *где* $Q_M(t) = \sum_{k=0}^{M} t^k q_k(x; q^2)$.

Доказательство. Рассуждая как в доказательстве теоремы 3.1, получаем, что

$$\mathcal{B}_k(u)P_\mu(x;q^2) = \sum_{\lambda\colon \lambda\setminus\mu\in\mathcal{H}_k} c(\mu,\lambda)P_\lambda(x;q^2),$$

но теперь коэффициент $c(\mu,\lambda)$ не обязательно равен единице. Нетрудно вычислить этот коэффициент. В самом деле, он возникает при применении операторов рождения $B_j^\dagger$ с $j \geq 1$. А именно, если $\mathcal{B}_{\varepsilon_M,\dots,\varepsilon_0}s_\mu = s_\lambda$, то $c(\mu,\lambda)$ есть произведение множителей $(1-q^2)[n_i(\mu)+1] = 1 - q^{2(n_i(\mu)+1)}$ по всем $i \geq 1$, таким, что $\varepsilon_i = 1$. Но последнее условие эквивалентно тому, что $n_i(\lambda) = n_i(\mu)+1$, или $\theta'_i = 1$, $\theta'_{i+1} = 0$, т. е. произведение берется по всем i из множества I в обозначении (3.29). Таким образом,

$$c(\mu,\lambda) = \prod_{i\in I}(1 - q^{2n_i(\lambda)}) = \phi_{\lambda\setminus\mu}(q^2),$$

и предложение следует из формулы типа Пиери (3.28) для функций Холла–Литлвуда. □

Замечание. Как и в случае полных симметрических функций, усеченную производящую функцию $Q_M(t)$ можно рассматривать как образ полной производящей функции $Q(t)$ под действием подходящей специализации:

$$Q_M(t) = Q(t)\,\Big|_{q_{M+1}=q_{M+2}=\ldots=0}. \tag{3.30}$$

Следствие 3.3. *Имеется корректно определенный предел операторов* $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ *при* $M\to\infty$. *При реализации* q*-бозонной модели в алгебре симметрических функций он совпадает с оператором умножения на* $Q(u^2) = \frac{H(u^2)}{H(q^2u^2)}$.

Теорема 3.4. *Пусть* $|\Psi_N(u_1,\ldots,u_N)\rangle = \prod_{j=1}^N B(u_j)|0\rangle$. *Тогда*

$$|\Psi_N(u_1,\ldots,u_N)\rangle = \sum_\lambda Q_\lambda(u_1^2,\ldots,u_N^2;q^2)\bigotimes_{j=0}^M |n_j\rangle_j,$$

где сумма берется по всем диаграммам Юнга λ, *имеющим не более* N *строк и не более* M *столбцов.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2 и использует теорему 3.3, формулу (3.22) для производящей функции функций $q_k(x;t)$ и тождество типа Коши (3.27) для функций Холла–Литлвуда. Ограничение на диаграммы λ следует из того, что (a) $P_\lambda(x;t) = 0$, если число ненулевых переменных x_i меньше, чем число строк $l(\lambda)$ (это легко следует из определения функций Холла–Литлвуда) и (b) матрица перехода от базиса $\{Q_\lambda\}$ к базису $\{q_\lambda\}$ является строго нижнетреугольной ([138, III.2.16]), так что из специализации (3.30) вытекает, в силу (3.25), что $Q_\lambda = 0$ при $\lambda_1 > M$. □

Замечание. При $q = 0$ результаты этого раздела в точности воспроизводят результаты п. 3.1.1 ввиду соотношений (3.21), (3.23).

В случае $q = 1$ L-матрица (3.18) вырождается в нижнетреугольную матрицу при $n = 1,\ldots,M$ и в верхнетреугольную матрицу при $n = 0$, так что $B(u) = u^{-M}B_0^\dagger$, откуда $\tilde{\mathcal{B}}(u) = 1$, в соответствии с (3.24).

3.2 Изотропная цепочка Гейзенберга и оператор Кокстера–Лапласа

Изотропная цепочка (XXX-модель) Гейзенберга описывает цепочку N взаимодействующих спинов с квантовым числом $s = 1/2$ на одномерной решетке. Гамильтониан этой модели действует в гильбертовом пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$

и задается формулой

$$
\begin{aligned}
H &= -J\sum_{n=1}^{N}\left[\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x+\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y+\sigma_n^z\sigma_{n+1}^z\right] \\
&= -J\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{2}(\sigma_n^+\sigma_{n+1}^-+\sigma_n^-\sigma_{n+1}^+)+\sigma_n^z\sigma_{n+1}^z\right];
\end{aligned}
$$

здесь

$$\sigma_n^a = I\otimes\ldots\otimes I\otimes\sigma^a\otimes I\otimes\ldots\otimes I,\quad a=x,y,z,$$

где оператор σ_n^a действует как матрица Паули σ^a в n-м пространстве $\mathbb{C}^2$ и как единичная матрица I в остальных сомножителях, $\sigma_n^{\pm}\equiv\sigma_n^x\pm i\sigma_n^y$, а J — параметр ($J>0$ соответствует т. н. ферромагнитной цепочке, а $J<0$ — антиферромагнитной). Везде в этом разделе рассматриваются периодические граничные условия, т. е. $N+1\equiv 1$.

Обозначим через s_k кокстеровскую транспозицию $(k,k+1)\in\mathfrak{S}_N$ при $k=1,\ldots,N-1$ и, в соответствии с периодическими граничными условиями, положим $s_N=(N,1)$.

Определение 3.1. Оператором Кокстера–Лапласа *в симметрической группе $\mathfrak{S}_N$ будем называть оператор*

$$L_N = Ne-(s_1+\ldots+s_N), \tag{3.31}$$

где e — тождественная перестановка.

Зафиксируем N, обозначим через π^{SW} «представление Шура–Вейля» симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ в пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ и положим $L=\pi^{\mathrm{SW}}(L_N)$. Легко убедиться, что $H=\frac{J}{4}(2L-N)$. Таким образом, операторы H и L имеют одни и те же собственные функции, и собственные значения E_j оператора H связаны с собственными значениями λ_j оператора L формулой

$$E_j = \frac{J}{4}(2\lambda_j - N), \quad \text{или} \quad E_j - E_0 = \frac{J}{2}\cdot\lambda_j, \tag{3.32}$$

где $E_0 = -JN/4$.

Важное свойство операторов H и L — коммутирование с периодическим сдвигом $T = \pi^{\mathrm{SW}}((1,2,\ldots,N))$, где $(1,2,\ldots,N)$ — одноцикловая перестановка. Собственными значениями оператора T, очевидно, являются N корней из единицы $\alpha_k = e^{2\pi ik/N}$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, степени N.

Пусть $S^z = \sum_{n=1}^N \sigma_n^z$ — оператор полного спина. Тогда $[H, S^z] = 0$, т. е. гамильтониан XXX-модели сохраняет полный спин. При этом разложение пространства $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ в сумму собственных подпространств оператора S^z есть разложение в сумму индуцированных представлений симметрической группы: $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} = \bigoplus_{r=0}^n \varrho_N^r$, где $\varrho_N^r = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_r\times\mathfrak{S}_{N-r}}^{\mathfrak{S}_N} 1$.

Очевидно, оператор Кокстера–Лапласа положителен, его наименьшее собственное число равно 0, и соответствующий собственный вектор лежит в тривиальном представлении $\pi_{(N)}$ группы $\mathfrak{S}_N$. Поэтому основное состояние ферромагнитной цепочки Гейзенберга ($J > 0$) лежит в $\pi_{(N)} = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_0\times\mathfrak{S}_N}^{\mathfrak{S}_N} 1$ и его энергия равна $E_0 = -JN/4$. Соответственно, под изучением оператора Кокстера–Лапласа в ферромагнитном асимптотическом режиме понимается анализ этого оператора в представлении ϱ_N^r при фиксированном r и $N \to \infty$. Наоборот, в случае антиферромагнитной цепочки, как показано в теореме 3.6, основное состояние лежит в представлении $\pi_{(n,n)}$ (для простоты будем предполагать, что N четно и $n = N/2$), и под изучением оператора Кокстера–Лапласа в антиферромагнитном асимптотическом режиме понимается его анализ в представлении $\varrho_{2n}^n = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{2n}}$ при $n \to \infty$.

3.2.1 Ферромагнитный асимптотический режим

В этом разделе приводятся результаты анализа оператора Кокстера–Лапласа в ферромагнитном асимптотическом режиме. Через $\lambda_k(A)$ будем обозначать k-е по величине собственное число матрицы A.

Напомним необходимые факты о предельных распределениях собственных значений матриц. Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — матрица размера $n \times n$; обозначим через $\|A\|$ ее спектральную норму $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ (здесь $\|x\|$ — евклидова норма вектора x), а через $|A|$ — нормированную норму Фробениуса (Гильберта–Шмидта) $|A|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$. Имеет место неравенство

$$\|A\| \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}, \tag{3.33}$$

где $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ и $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Будем говорить, что последовательности матриц $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где C_n и D_n — матрицы размера $n \times n$, эквивалентны (и писать $\{C_n\} \sim \{D_n\}$), если выполнены следующие два условия:

$$\text{существует такое } M < \infty, \text{ что } \|C_n\|, \|D_n\| \leq M \text{ для всех } n; \tag{3.34}$$

$$\lim_{n\to\infty} |C_n - D_n| = 0. \tag{3.35}$$

Из (3.34) следует, что спектры всех матриц C_n и D_n равномерно ограничены, т. е. существует такой ограниченный интервал $[m, M]$, что $\lambda_k(C_n), \lambda_k(D_n) \in [m, M]$ для всех n, k.

Следующий результат об асимптотически одинаковой распределенности спектров, заимствованный из [108], по существу сводится к известной теореме Виландта–Хоффмана (см., напр., [183]).

Лемма 3.3. *Пусть* $\{C_n\}$ *и* $\{D_n\}$ *— эквивалентные последовательности эрмитовых матриц. Тогда для произвольной непрерывной функции* $f(x)$ *на отрезке* $[m, M]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |f(\lambda_k(C_n)) - f(\lambda_k(D_n))| = 0.$$

В частности, если один из пределов существует, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k(C_n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k(D_n)). \tag{3.36}$$

Предложение 3.1. *Предельная плотность* $p^{(1)}$ *собственных значений оператора Кокстера–Лапласа в представлении* ϱ_N^1 *при* $N \to \infty$ *имеет вид*

$$p^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}, \qquad x \in [0, 4]. \tag{3.37}$$

Доказательство. В представлении ϱ_N^1 оператор Кокстера–Лапласа задается матрицей A_N, отличающейся от трехдиагональной теплицевой матрицы

$$B_N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

лишь двумя дополнительными минус единицами в правом верхнем и левом нижнем углу. Однако, как легко проверить, $\{A_N\} \sim \{B_N\}$ (действительно, (3.34) легко следует из неравенства (3.33), и, очевидно, $|A_N - B_N|^2 \le \frac{2}{N}$), так что из леммы 3.3 заключаем, что эти последовательности матриц имеют одинаковое предельное распределение собственных значений. Осталось применить известный результат из теории теплицевых матриц (см., напр., [108]). А именно, для данной последовательности $\{t_k\}$ рассмотрим последовательность теплицевых матриц $T_n = (t_{j-k})_{k,j=1,\dots,n}$. Пусть $a(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda}$ — соответствующий символ. Если матрицы $T_n = T_n(a)$ симметричны, то для любой непрерывной функции f

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k(T_n)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a(\lambda))\, d\lambda. \tag{3.39}$$

В рассматриваемом случае $B_N = T_N(a)$, где

$$a(\lambda) = 2 - 2\cos\lambda, \tag{3.40}$$

так что, применяя (3.39) и делая подходящую замену переменной, получаем плотность (3.37). $\square$

Заметим, что плотность $p^{(1)}$ есть линейное преобразование т. н. чебышевской плотности $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in [-1, 1]$, являющейся предельной плотностью корней для большого класса ортогональных многочленов, включая многочлены Чебышева.

Рассмотрим теперь представление ϱ_N^2. Пусть e_{kl}, $1 \le k < l \le N$, — естественный базис пространства $\mathcal{H}^{(2)}$ этого представления (группа $\mathfrak{S}_N$ действует на базисные элементы подстановками индексов). Легко видеть, что в этом базисе оператор Кокстера–Лапласа имеет вид

$$L_N e_{kl} = \begin{cases} 4e_{kl} - e_{k-1,l} - e_{k+1,l} - e_{k,l-1} - e_{k,l+1}, & l \ne k+1, \\ 2e_{k,k+1} - e_{k-1,k+1} - e_{k,k+2}, & l = k+1. \end{cases}$$

Обозначим соответствующую матрицу через $A_N^{(2)}$.

Пусть $\mathcal{H}^{(1)}$ — пространство представления ϱ_N^1; рассмотрим оператор $B_N^{(2)} = A_N^{(1)} \otimes I + I \otimes A_N^{(1)}$ в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}$. Очевидно, что его собственные значения — это суммы $\lambda + \mu$ собственных значений оператора $A_N^{(1)}$, так что их предельное распределение при $N \to \infty$ есть свертка $p^{(1)} * p^{(1)}$.

Отождествим $\mathcal{H}^{(2)}$ с подпространством в $\mathcal{H}$, натянутом на e_{kl} с $k < l$, и продолжим оператор L_N на все $\mathcal{H}$, положив $Le_{kl} = Le_{lk}$ при $k > l$ и $Le_{kk} = 0$. Обозначим соответствующую матрицу через $\tilde{A}_N^{(2)}$. Очевидно, $\tilde{A}_N^{(2)}$ имеет то же предельное распределение собственных значений, что и $A_N^{(2)}$.

Лемма 3.4. $\{\tilde{A}_N^{(2)}\} \sim \{B_N^{(2)}\}$.

Доказательство. Очевидно, $\|\tilde{A}_N^{(2)}\| \leq (\|\tilde{A}_N^{(2)}\|_1 \|\tilde{A}_N^{(2)}\|_\infty)^{1/2} \leq 8$, и аналогичная оценка имеет место для $B_N^{(2)}$, так что первое условие из определения эквивалентности выполнено. Далее, матрицы имеют порядок N^2, и

$$(B_N^{(2)} - \tilde{A}_N^{(2)})e_{kl} = \begin{cases} 0, & |l-k| > 1, \\ 2e_{kl} - e_{kk} - e_{ll}, & l = k \pm 1, \\ 4e_{kk} - e_{k-1,k} - e_{k+1,k} - e_{k,k-1} - e_{k+1}, & l = k, \end{cases}$$

поэтому матрица $B_N^{(2)} - \tilde{A}_N^{(2)}$ имеет не более $O(N)$ ненулевых элементов, каждый из которых есть $O(1)$. Отсюда следует, что $|B_N^{(2)} - \tilde{A}_N^{(2)}| = \frac{1}{N^2} \cdot O(N) \cdot O(1) \to 0$ при $N \to \infty$, и второе условие также выполнено. $\square$

Следствие 3.4. *Предельная плотность $p^{(2)}$ собственных значений оператора Кокстера–Лапласа в представлении ϱ_N^2 при $N \to \infty$ есть свертка двух копий функции $p^{(1)}$:*

$$p^{(2)}(u) = (p^{(1)} * p^{(1)})(u), \qquad u \in [0, 8].$$

Совершенно аналогично доказывается следующий общий результат.

Теорема 3.5. *Предельная плотность $p^{(k)}$ собственных значений оператора Кокстера–Лапласа в представлении ϱ_N^k при $N \to \infty$ есть свертка k копий функции $p^{(1)}$:*

$$p^{(k)}(u) = (\underbrace{p^{(1)} * \ldots * p^{(1)}}_{k})(u), \qquad u \in [0, 4k]. \tag{3.41}$$

Следствие 3.5. *При фиксированном $k = 1, 2, \ldots$ предельная плотность распределения собственных значений оператора Кокстера–Лапласа в* неприводимом *представлении $\pi_{(N-k,k)}$ при $N \to \infty$ совпадает с* (3.41).

Доказательство. Следует из того, что относительная размерность представления $\pi_{(N-k,k)}$ в ϱ_N^k стремится к 1 при $N \to \infty$:

$$\frac{\dim \pi_{(N-k,k)}}{\dim \varrho_N^k} = \frac{N!(N-2k+1)}{k!(N-k+1)!} \cdot \frac{k!(N-k)!}{N!} = \frac{N-2k+1}{N-k+1} \to 1.$$

□

Для нахождения предельной плотности $p^{(k)}$ в явном виде естественно воспользоваться преобразованием Фурье. Пусть $F(t)$ — преобразование Фурье плотности $p^{(1)}$. Тогда $p^{(k)}$ есть обратное преобразование Фурье функции $F(t)^k$. Но (см., напр., [31, 3.387.2])

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^4 \frac{e^{-itx}}{\sqrt{x(4-x)}}\, dx = e^{-2it} J_0(-2t),$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода. Таким образом, нас интересуют обратные преобразования Фурье степеней функций Бесселя. При $k = 2$, используя известные формулы для интегральных преобразований произведения двух функций Бесселя, получаем

$$p^{(2)}(u) = \frac{1}{2\pi^2} K'\left(1 - \frac{u}{4}\right), \quad u \in [0, 8], \tag{3.42}$$

где $K'(v) = K(\sqrt{1-v^2})$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Пусть $A_N^{(k)}$ — матрица оператора Кокстера–Лапласа в представлении ϱ_N^k. Индуктивный предел этих представлений при $N \to \infty$ есть неприводимое представление $\rho^{(k)}$ бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, индуцированное с подгруппы Юнга $\mathfrak{S}_{\{1,\dots,k\}} \times \mathfrak{S}_{\{k+1,k+2,\dots\}}$ (см. § 1.4).

Предложение 3.2. *При $N \to \infty$ операторы $A_N^{(k)}$ слабо сходятся к некоторому оператору $A^{(k)}$ в пространстве представления $\rho^{(k)}$. В частности, $A^{(1)}$ есть бесконечная теплицева матрица с символом $a(p) = 2 - 2\cos p$.*

Доказательство. Представление $\rho^{(k)}$ реализуется в пространстве $L^2(\Pi_k)$ над множеством k-наборов различных натуральных чисел со считающей мерой. Обозначим через $H_m \subset L^2(\Pi_k)$ подмножество функций, сосредоточенных на k-наборах натуральных чисел, не превосходящих m. Тогда $\cup_{m=1}^{\infty} H_m$ плотно в $L^2(\Pi_k)$, и достаточно проверить, что пределы $\lim_{N\to\infty}(A_N^{(k)} f, g)$ существуют при $f, g \in H_m$ для всех m. Очевидно, что в этом случае $((k, k+1)f, g) = (f, g)$ при $k > m$ и $((1, N)f, g) = 0$, поэтому искомые пределы существуют и операторы $A_N^{(k)}$ слабо сходятся к некоторому оператору $A^{(k)}$, такому, что $A^{(k)} f = \big((m+1)E - \big((1,2) + \ldots + (m, m+1)\big)\big) f$ при $f \in H_m$. □

3.2.2 Антиферромагнитный асимптотический режим

В этом разделе рассматривается оператор Кокстера–Лапласа (3.31) в «антиферромагнитном» асимптотическом режиме; для простоты обозначений предполагается, что $N = 2n$ четно (случай нечетного N полностью аналогичен).

Теорема 3.6. *Основное состояние антиферромагнитной цепочки Гейзенберга лежит в неприводимом представлении $\pi_{(n,n)}$ группы $\mathfrak{S}_N$.*

Лемма 3.5. *Основное состояние лежит в собственном подпространстве сдвига T, соответствующем собственному значению $\alpha = 1$ при четном n и $\alpha = -1$ при нечетном n.*

Доказательство. Представление ϱ_{2n}^n реализуется в линейном пространстве с базисом (e_I), параметризованном n-наборами $I \subset \{1, \ldots, 2n\}$, $|I| = n$. Рассмотрим граф $G = (V, E)$, вершины которого — такие наборы, а ребра соединяют наборы, получающиеся друг из друга изменением одного числа на 1 $(\mathrm{mod}\ 2n)$. Тогда оператор Кокстера–Лапласа есть в точности лапласиан графа G в смысле теории графов. Поэтому его максимальное собственное число λ можно найти по известной формуле (см., напр., [85])

$$\lambda = \max_x \frac{\sum_{(I_1,I_2)\text{ – ребро}} (x_{I_1} - x_{I_2})^2}{\sum_{I \in V} (x_I)^2}, \tag{3.43}$$

где максимум берется по всем ненулевым векторам $(x_I)_{I \in V}$, ортогональным подпространству констант.

Заметим, что граф G, очевидно, двудолен, где доли V_e и V_o состоят из наборов I с четной (соответственно нечетной) суммой элементов. Пусть x — единичный старший собственный вектор оператора L, который одновременно является собственным вектором оператора сдвига T с собственным числом α. Мы хотим доказать, что $\alpha = 1$, если n четно, и $\alpha = -1$, если n нечетно. Заметим, что при замене x_I на $|x_I|$ при $I \in V_e$ и на $-|x_I|$ при $I \in V_o$ норма вектора не изменится, а сумма в числителе (3.43) не уменьшится. Отсюда следует, что для старшего собственного вектора мы имеем $x_I \geq 0$ при $I \in V_e$ и $x_I \leq 0$ при $x \in V_o$ (или наоборот). Пусть теперь n четно. Тогда орбиты оператора T содержатся в V_e или V_o, откуда следует, что $\alpha = 1$. Если n нечетно, аналогичным образом получаем, что $\alpha = -1$. □

Доказательство теоремы. Ввиду разложений $\rho_N^n = \oplus_{k=0}^n \pi_{(N-k,k)}$ и $\rho_N^{n-1} = \oplus_{k=0}^{n-1} \pi_{(N-k,k)}$, достаточно показать, что старший собственный вектор оператора L в представлении ρ_N^n не лежит в подпространстве представления ρ_N^{n-1}. Но это следует из леммы. Действительно, если, скажем, n четно, то старший собственный вектор оператора L в ρ_N^n лежит в собственном подпространстве сдвига T с $\alpha = 1$, но в точности то же рассуждение, что и в доказательстве леммы, показывает, что старший собственный вектор оператора L в ρ_N^{n-1} должен лежать в собственном подпространстве T с $\alpha = -1$. □

Рассматривая вопрос о предельном распределении собственных значений оператора Кокстера–Лапласа в антиферромагнитном асимптотическом режиме, оператор необходимо нормировать. Положим также $\tilde{L}_N = Ne - L_N = (1,2) + (2,3) + \ldots + (N-1,N) + (N,1)$.

Предложение 3.3. *Предельное распределение собственных значений оператора $\frac{1}{N} L_N$ в представлении $\pi_{(n,n)}$ есть $\delta_{1/2}$.*

Доказательство. Воспользуемся следующим результатом. Пусть π — представление симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ (и ее групповой алгебры), χ — его характер, а $M = \dim \pi$ — его размерность. Пусть $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_M$ — все собственные значения оператора $\tilde{L}_N$ в представлении π. Из результатов работы [70] следует, что для любого натурального k

$$\sum_{j=1}^{M} \tilde{\lambda}_j^k = \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_k=1}^{N} \chi(\sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_k}). \tag{3.44}$$

Пусть теперь $\pi = \pi_{(n,n)}$, и обозначим $\mu_N = (n, n)$. Тогда

$$\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\tilde{\lambda}_j}{N}\right)^k = \frac{1}{N^k}\sum_{j_1=1}^{N}\dots\sum_{j_k=1}^{N}\frac{\chi_{\mu_N}(\sigma_{j_1}\dots\sigma_{j_k})}{\dim\chi_{\mu_N}}.$$

Нетрудно видеть, что старший член последнего выражения равен $\frac{\chi_{\mu_N}(\sigma_{k,N})}{\dim\chi_{\mu_N}}$, где $\sigma_{k,N}$ — перестановка циклового типа $(2^k, 1^{N-2k})$. Из асимптотической теории характеров симметрической группы (см. [20]) следует, что этот предел равен значению характера $\chi_{\alpha,0}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ с параметрами Тома $\alpha = (1/2, 1/2)$, $\beta = 0$ на перестановке циклового типа 2^k, и из той же теории следует, что это значение равно $(\frac{1}{2})^k$. Таким образом,

$$\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\tilde{\lambda}_j}{N}\right)^k \to \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

откуда следует, что предельное распределение собственных значений $\frac{1}{N}\tilde{\lambda}_j$ оператора $\frac{1}{N}\tilde{L}_N$ равно $\delta_{1/2}$, так что предельное распределение собственных значений оператора $\frac{1}{N}\lambda_j = 1 - \frac{1}{N}\tilde{\lambda}_j$ также равно $\delta_{1/2}$. □

Предложение 3.4. *Предельное распределение собственных значений оператора $\frac{1}{N}L_N$ в индуцированном представлении $\varrho_N^{N/2}$ также есть $\delta_{1/2}$.*

Доказательство. Легко следует из предыдущего предложения. □

Перейдем теперь к рассмотрению пределов оператора Кокстера–Лапласа в естественных представлениях бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, соответствующих антиферромагнитному асимптотическому режиму.

Индуктивный предел представлений $\varrho_N^{N/2}$ при $N \to \infty$ есть неприводимое «двублочное» *индуцированное* представление $\varrho^{\infty,\infty}$ бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ типа ∞^2 (см. § 1.4), а именно представление, индуцированное с тождественного представления подгруппы Юнга $\mathfrak{S}_{\{1,3,5,\dots\}} \times \mathfrak{S}_{\{2,4,6,\dots\}}$.

Предложение 3.5. *Слабый предел операторов* $\frac{1}{N}L_N$ *в представлениях* $\varrho_N^{N/2}$ *при* $N \to \infty$ *есть тождественный оператор* E *в пространстве представления* $\varrho^{\infty,\infty}$.

Доказательство. Представление $\varrho^{\infty,\infty}$ можно реализовать в пространстве $L^2(\Pi)$, где Π — множество последовательностей из нулей и единиц, конфинальных последовательности $\xi = 010101\dots$. Пусть H_m — подпространство функций, сосредоточенных на последовательностях, совпадающих с ξ начиная с m-й позиции. Тогда множество $\cup_{m=1}^{\infty} H_m$ плотно $L^2(\Pi)$. Но для $f, g \in H_m$, очевидно, $((k, k+1)f, g) = 0$ при $k > m$. Поэтому $\lim(\frac{1}{N}\tilde{L}_N f, g) = 0$. □

Рассмотрим теперь примарные представления $\dim \pi_{(n,n)} \cdot \pi_{(n,n)}$. Их индуктивный предел есть *фактор-представление* $\rho_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2};0)}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ с параметрами Тома $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\beta = 0$.

Предложение 3.6. *Слабый предел операторов* $\frac{1}{N}L_N$ *в примарных представлениях* $\dim \pi_{(n,n)} \cdot \pi_{(n,n)}$ *при* $N \to \infty$ *есть скалярный оператор* $\frac{1}{2}E$ *в пространстве фактор-представления* $\rho_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2};0)}$.

Доказательство. Рассмотрим «динамическую» реализацию (1.49) фактор-представления $\rho_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2};0)}$, которая описана в §1.6. Пусть $H_m \subset \mathcal{K}^0$ — множество функций, сосредоточенных на парах (x, y), совпадающих с m-й позиции. Множество $\cup_{m=1}^{\infty} H_m$ плотно в $\mathcal{K}^0$. Но для $f, g \in H_m$ и $k > m$ имеем $((k, k+1)f, g) = \frac{1}{2}(f, g)$, откуда следует искомое утверждение. □

Замечание. Нетрудно видеть, что слабый предел операторов $\frac{1}{N}L_N$ в фактор-представлении с параметрами Тома $\alpha = (p, 1-p)$, $\beta = 0$ есть скалярный оператор с константой $1 - p^2 - (1-p)^2$.

Интересно взглянуть на этот результат, используя «табличную» реализацию фактор-представления в пространстве $L^2(\mathcal{B}, \widetilde{M}^{(1/2,1/2;0)})$, см. §1.6. Действие кокстеровских образующих в этой модели задается ортогональной формой Юнга, и нетрудно видеть, что результат предложения 3.6 эквивалентен следующему утверждению: для любого $n = 1, 2, \ldots$, для любой таблицы s длины n

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{n+N}\frac{1}{r_k(t)}\,\middle|\,[t]_n = s\right) = \frac{1}{2}, \tag{3.45}$$

где $r_k(t)$ — k-е аксиальное[1] расстояние таблицы t и условное ожидание берется относительно центральной меры $M^{1/2,1/2}$ на пространстве бесконечных таблиц $\mathbb{T}$. Это утверждение можно доказать напрямую, используя выражение для цилиндрических распределений меры $M^{1/2,1/2}$ через функции Шура и тождества типа Пиери.

Далее рассмотрим *элементарное* представление, являющееся индуктивным пределом неприводимых представлений $\pi_{(n,n)}$.

Предложение 3.7. *Слабый предел операторов $\frac{1}{N}L_N$ в представлениях $\pi_{(n,n)}$ при $N \to \infty$ есть скалярный оператор $\frac{5}{4}E$ в пространстве соответствующего элементарного представления.*

Доказательство. Элементарное представление действует в дискретном пространстве l^2, натянутом на таблицы, конфинальные «вакуумной» таблице $\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & \ldots \end{pmatrix}$. Как следует из ортогональной формы Юнга, $s_k\tau_0 = -\tau_0$ для нечетных k и $s_k\tau_0 = \frac{1}{2}\tau_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_0^k$ для четных k, где τ_0^k — таблица, полученная из τ_0 переменой мест элементов k и $k+1$. Отсюда легко следует, что $\lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N}L_N\tau_0, \tau) = \frac{5}{4}\delta_{\tau_0\tau}$. Очевидно, та же формула имеет место для любой таблицы s, конфинальной τ_0, откуда следует искомое утверждение. □

[1] Напомним, что $r_k(t) = c_{k+1}(t) - c_k(t)$, где c_l — содержание l-й клетки таблицы t.

Наконец, рассмотрим предел операторов Кокстера–Лапласа в представлениях Шура–Вейля, см. § 1.1.

Предложение 3.8. *Слабый предел операторов* $\frac{1}{N}L_N$ *в старшей компоненте* Π_1 *стационарного представления Шура–Вейля группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *с параметрами* p*,* $q = \sqrt{1-p^2}$ *есть скалярный оператор* $\phi(p)E$*, где*

$$\phi(p) = \frac{13}{12} + \frac{8}{6}p^4 - \frac{7}{6}p^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}p\sqrt{1-p^2}.$$

Доказательство. Представление Π_1 есть индуктивный предел неприводимых представлений $\pi_{(1)}$, $\pi_{(2,1)}$, $\pi_{(3,2)}, \dots$ симметрических групп $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_5, \dots$ относительно стационарной последовательности $i_{2k+1} : \mathfrak{S}_{2k+1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{2k+3}$ вложений Шура–Вейля, задаваемых параметром p. Таким образом, базис в Π_1 состоит из образов конечных таблиц Юнга $t \in \mathbb{T}((k+1,k))$, $k = 0, 1, \dots$. Пусть t, s — такие таблицы и $n = 2k+1$. Очевидно,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(L_N t, s) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=n+1}^{N-1} (\sigma_j t, s).$$

Далее, в силу стационарности имеем $((\sigma_{j+2} + \sigma_{j+3})t, s) = ((\sigma_j + \sigma_{j+1})t, s)$ для всех $j > n$, откуда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(L_N t, s) = ((\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2})t, s),$$

где последнее выражение зависит только от образов таблиц t и s в $\pi_{(k+3,k+2)}$ относительно вложения $i = i_{n+2} \circ i_n$. Теперь имеем

$$i(t) = p^2 t_{pp} + q^2 t_{qq} + pq(t_{pq} + t_{qp}),$$

где t_{pp} — таблица, полученная из t добавлением $n+1$ во вторую строку и $n+2$ в первую строку, а затем $n+3$ во вторую строку и $n+4$ в первую строку; t_{pq} — таблица, полученная из t добавлением $n+1$ во вторую строку и $n+2$ в первую, а затем $n+3$ в первую и $n+4$ во вторую, и т. д. Аналогичная формула имеет место для s, а остальное следует из прямых вычислений, основанных на ортогональной форме Юнга. □

В частности, для тензорного вложения Шура–Вейля имеем $\phi(-1/2) = 5/4$ (на самом деле нетрудно показать, что $\frac{1}{N}L_N$ имеет один и тот же предел во всех компонентах Π_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$). Максимально возможное значение $\phi(p)$ для рассматриваемого класса представлений соответствует $p = -0.95543\ldots$ и равно $c_{SW} = 1.3736684\ldots$.

Как доказано в [184], максимальное собственное значение λ_N оператора $\pi_N(L_N)$ удовлетворяет соотношению $\frac{\lambda_N}{N} \to c_{\max} = 2\log 2 = 1.38629436\ldots$. В теореме 3.7 показано, что, используя обобщенные вложения Шура–Вейля, можно построить представление с собственным числом, сколь угодно близким к $c_{\max}$.

Теорема 3.7. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$ и такая стационарная последовательность обобщенных вложений Шура–Вейля*

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_{1+2k} \subset \mathfrak{S}_{1+4k} \subset \ldots,$$

что слабый предел операторов $\frac{1}{N}L_N$ в старшей компоненте соответствующего обобщенного представления Шура–Вейля бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ есть скалярный оператор cE с $c > c_{\max} - \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $t, s \in \mathbb{T}((mk+1, mk))$, и положим $N = 2nk + 1$ при

$n > m$. Рассуждая как в доказательстве предложения 3.8, имеем

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}(L_N t, s) &= \frac{1}{2k}\big((\sigma_{mk+2}+\ldots+\sigma_{(m+2)k+1})t, s\big)\\ &= \frac{1}{2k}\big((T^{mk}L_{2k+1})t, s\big)+\frac{1}{2k}\big(R_k t, s\big),\end{aligned}$$

где $R_k = \sigma_{(m+2)k+1} - \sigma_{mk+1} - (mk+1, (m+2)k+1)$ и T — эндоморфизм группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, задаваемый формулами $(Tg)(1) = 1$, $(Tg)(i) = g(i-1)+1$ при $i > 1$ (бесконечный сдвиг). Пусть теперь $v_{\max}$ — собственный вектор оператора L_{2k+1}, соответствующий максимальному собственному значению $\lambda^{(k)}_{\max}$. Как доказано в теореме 3.6, вектор $v_{\max}$ лежит в неприводимом представлении $\pi_{(k+1,k)}$. Выберем вложение $\pi_{(1)} \hookrightarrow \pi_{(k+1,k)}$ так, чтобы единственная таблица из $\mathbb{T}((1))$ перешла в $v_{\max}$. Тогда, в силу стационарности, имеем

$$\frac{1}{2k}\big((T^{mk}L_{2k+1})t, s\big) = \frac{1}{2k}\big(L_{2k+1}[t]_{2k+2}, [s]_{2k+2}\big) = \frac{\lambda^{(k)}_{\max}}{2k},$$

и предложение доказано. $\square$

Заключение

В диссертации решен ряд задач асимптотической теории представлений бесконечной симметрической группы, объединенных общим индуктивным подходом и связями с различными моделями и структурами фоковского пространства, а также приложениями в математической физике. Исследования велись по трем основным направлениям. Первое направление — это анализ некоторых классов представлений бесконечной симметрической группы и установление их связи с представлениями групп и алгебр, играющих важную роль в приложениях к теоретической физике. Основные результаты, полученные в этом направлении, включают: введение и изучение класса представлений Шура–Вейля бесконечной симметрической группы; установление сохраняющего градуировку унитарного изоморфизма $\mathfrak{sl}_2$-модулей между т. н. серпантинным представлением бесконечной симметрической группы и базисным представлением аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ и изучение его свойств; исследование класса марковских представлений бесконечной симметрической группы, классификация и структурное описание представлений бесконечной симметрической группы, индуцированных с подгрупп Юнга.

Второе направление связано с исследованием фоковской структуры в пространствах L^2 от процессов Леви и ее применением к теории представлений. Основные результаты по этому направлению таковы: развита теория фоковских факторизаций в пространствах квадратично интегрируемых функционалов от процессов с независимыми значениями; установлена квазиинвариантность гамма-процесса относительно большой группы мультипликаторов, из которой выведен ряд следствий относительно процессов Дирихле, мер Пуассона–Дирихле, бесконечномерной меры Лебега; рассмотрены приложения полученных результатов к теории представлений групп токов.

Третье направление касается применения теории представлений симметрических групп и теории симметрических функций к изучению некоторых физических моделей. Дана интерпретация квантового метода обратной задачи для q-бозонной модели в терминах алгебры симметрических функций: показано, что в случае фазовой модели ($q = 0$) волновые функции выражаются через функции Шура, а в общем случае q-бозонной модели — через функции Холла–Литтлвуда. Исследованы асимптотические спектральные свойства оператора Кокстера–Лапласа, тесно связанного с гамильтонианом изотропной цепочки Гейзенберга.

Полученные результаты могут быть использованы в теории представлений бесконечной симметрической группы, других бесконечных групп и бесконечномерных алгебр, теории случайных процессов, теории интегрируемых систем. Многие результаты, представленные в диссертации, уже получили развитие в работах других исследователей. Так, например, теория бесконечномерной меры Лебега была в дальнейшем продолжена в работах [7, 175, 174], а весь цикл результатов, изложенных во второй главе, применяется и развивается во многих работах, среди которых можно упомянуть, например, серию статей А. М. Вершика и М. И. Граева по теории представлений групп токов [12, 107, 13, 14, 15, 16, 17], работы по гамма-процессам [57, 109], квазиинвариантности процессов Леви и их обобщений [102, 179, 161, 58, 160] и других процессов на бесконечномерных пространствах [110, 112], ортогональным разложениям [137], распределениям Пуассона–Дирихле [111], процессам Дирихле [135, 121, 122]. Результаты по квантовому методу обратной задачи для q-бозонной модели получили развитие, например, в работах по интегрируемым моделям [185] и их связям с комбинаторными задачами [2, 101] и симметрическими функциями [131, 162]. Результаты о представлениях бесконечной симметрической группы, индуцированных с подгрупп Юнга, используются в работах [46, 23]. Среди перспективных направлений для дальнейшего применения полученных результатов выделим уточнение и развитие установленных связей теории представлений симметрических групп с теорией представлений аффинных алгебр Ли и алгебры Вирасоро; дальнейшее исследование свойств факторизаций, порожденных случайными процессами, и их приложений к теории представлений.

Литература

[1] *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. 2 изд. М.: Наука, 1986.

[2] *Боголюбов Н. М.* Форм-факторы, плоские разбиения и случайные блуждания // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2008. Т. 360. С. 5–30.

[3] *Боголюбов Н. М., Изергин А. Г., Корепин В. Е.* Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: УРСС, 1992.

[4] *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947.

[5] *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.

[6] *Вершик А. М.* Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1977. Т. 109. С. 26–61.

[7] *Вершик А. М.* Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве? // Труды МИАН. 2007. Т. 259. С. 248–272.

[8] *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления группы $\mathrm{SL}(2, R)$, где R — кольцо функций // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28. С. 83–128.

[9] *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Неприводимые представления группы G^X и когомологии // Функц. анал. и прил. 1974. Т. 8, № 3. С. 67–68.

[10] *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления групп диффеоморфизмов, связанных с бесконечными конфигурациями // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30. С. 3–50.

[11] *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Коммутативная модель представления группы токов $SL(2,\mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой // Функц. анал. и прил. 1983. Т. 17, № 2. С. 70–72.

[12] *Вершик А. М., Граев М. И.* Коммутативная модель представления группы $O(n,1)^X$ и обобщенная лебегова мера в пространстве распределений // Функц. анал. и прил. 2005. Т. 39, № 2. С. 81–90.

[13] *Вершик А. М., Граев М. И.* Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n,1)$ и $U(n,1)$ // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 5(371). С. 3–88.

[14] *Вершик А. М., Граев М. И.* Интегральные модели унитарных представлений групп токов // Функц. анал. и прил. 2008. Т. 42, № 1. С. 22–32.

[15] *Вершик А. М., Граев М. И.* Интегральные модели унитарных представлений групп токов со значениями в полупрямых произведениях // Функц. анал. и прил. 2008. Т. 42, № 4. С. 37–49.

[16] *Вершик А. М., Граев М. И.* Интегральные модели представлений групп токов простых групп Ли // Успехи мат. наук. 2009. Т. 64, № 2(386). С. 5–72.

[17] *Вершик А. М., Граев М. И.* Пуассонова модель фоковского пространства и представления групп токов // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23, № 3. С. 63–136.

[18] *Вершик А. М., Йор М., Цилевич Н. В.* О тождествах Маркова–Крейна и квазиинвариантности гамма-процесса // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2001. Т. 283. С. 21–36.

[19] *Вершик А. М., Керов С. В.* Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы // Доклады АН СССР. 1981. Т. 257, № 5. С. 1037–1040.

[20] *Вершик А. М., Керов С. В.* Асимптотическая теория характеров симметрической группы // Функц. анал. и прил. 1982. Т. 15, № 4. С. 246–255.

[21] *Вершик А. М., Керов С. В.* Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0-функтор // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундам. напр. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 26. С. 3–56.

[22] *Вершик А. М., Нессонов Н. И.* Стабильные состояния и представления бесконечной симметрической группы // Докл. Акад. наук. 2012. Т. 445, № 1. С. 9.

[23] *Вершик А. М., Нессонов Н. И.* Стабильные представления бесконечной симметрической группы // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. В печати.

[24] *Вершик А. М., Окуньков А. Ю.* Новый подход к теории представлений симметрических групп. II // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 307. С. 57–98.

[25] *Вершик А. М., Цилевич Н. В.* Фоковские факторизации и разложения пространств L^2 над общими процессами Леви // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, № 3(351). С. 3–50.

[26] *Вершик А. М., Цилевич Н. В.* Преобразование Фурье на бесконечной симметрической группе // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2005. Т. 325. С. 61–82.

[27] *Вершик А. М., Цилевич Н. В.* Марковские меры на таблицах Юнга и индуцированные представления бесконечной симметрической группы // Теор. вероятн. и примен. 2006. Т. 51, № 1. С. 47–63.

[28] *Вершик А. М., Цилевич Н. В.* Индуцированные представления бесконечной симметрической группы и их спектральная теория // Докл. Акад. наук. 2007. Т. 412, № 1. С. 7–10.

[29] *Гельфанд И. М.* Обобщенные случайные процессы // Докл. Акад. наук СССР. 1955. Т. 100, № 5. С. 853–856.

[30] *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961.

[31] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4 изд. М.: Физматгиз, 1962.

[32] *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.

[33] *Изюмов Ю. А., Скрябин Ю. Н.* Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. М.: Наука, 1987.

[34] *Кац В.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.

[35] *Керов С. В., Кириллов А. Н., Решетихин Н. Ю.* Комбинаторика, анзац Бете и представления симметрической группы // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 50–64.

[36] *Кингман Д.* Пуассоновские процессы. М.: Издательство МЦНМО, 2007.

[37] *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972.

[38] *Кириллов А. Н., Решетихин Н. Ю.* Анзац Бете и комбинаторика таблиц Юнга // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 65–115.

[39] *Кулиш П. П.* Контракция квантовых алгебр и q-осцилляторы // Теор. мат. физ. 1991. Т. 86, № 1. С. 157–160.

[40] *Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю.* Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 101. С. 101–110.

[41] *Лифшиц М. А., Шмилева Е. Ю.* Пуассоновские меры, квазиинвариантные относительно мультипликативных преобразований // Теор. вероятн. и примен. 2001. Т. 46, № 4. С. 697–712.

[42] *Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.* Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. М.: Издательство МЦНМО, 2005.

[43] *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.

[44] *Неретин Ю. А.* О соответствии между бозонным пространством Фока и пространством L^2 по мере Пуассона // Мат. сборник. 1997. Т. 188. С. 19–50.

[45] *Неретин Ю. А.* Одно замечание о представлениях бесконечных симметрических групп // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2012. Т. 403. С. 103–109.

[46] *Нессонов Н. И.* Представления $\mathfrak{S}_\infty$, допустимые относительно подгрупп Юнга // Мат. сборник. 2012. Т. 203, № 3. С. 127–160.

[47] *Никитин П. П.* Реализация неприводимых двустрочечных представлений S_n в бесквадратных симметрических формах // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. Т. 301. С. 212–219.

[48] *Окуньков А. Ю.* Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы // Функц. анал. и прил. 1994. Т. 28, № 2. С. 31–40.

[49] *Окуньков А. Ю.* О представлениях бесконечной симметрической группы // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 240. С. 166–228.

[50] *Ольшанский Г. И.* Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 4. С. 178–209.

[51] *Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантование групп Ли и алгебр Ли // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 1. С. 178–206.

[52] *Саймон Б.* Модель $P(\phi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.

[53] *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

[54] *Серр Ж.-П.* Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970.

[55] *Сигал И.* Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир, 1968.

[56] *Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантовый метод обратной задачи. I // Теор. и мат. физика. 1979. Т. 40, № 2. С. 194–220.

[57] *Смородина Н. В.* Кратные стохастические интегралы и «непуассоновские» трансформации гамма-меры // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2005. Т. 328. С. 191–220.

[58] *Смородина Н. В.* Преобразования мер, порожденных скачкообразными процессами Леви // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2007. Т. 341. С. 174–188.

[59] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика, т. 2. М.: Мир, 2005.

[60] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 5(209). С. 13–63.

[61] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 109. С. 134–178.

[62] *Фултон У.* Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии. М.: Издательство МЦНМО, 2006.

[63] *Хамермеш М.* Теория групп и её применение к физическим проблемам. М.: Мир, 1966.

[64] *Цилевич Н. В.* Распределение среднего значения для некоторых случайных мер // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 240. С. 268–279.

[65] *Цилевич Н. В.* Стационарные случайные разбиения натурального ряда // Теор. вероятн. и примен. 1999. Т. 44, № 1. С. 55–73.

[66] *Цилевич Н. В.* Квантовый метод обратной задачи для q-бозонной модели и симметрические функции // Функц. анал. и прил. 2006. Т. 40, № 3. С. 53–65.

[67] *Araki H.* Factorizable representations of current algebra // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A. 1969/1970. Vol. 5. P. 361–422.

[68] *Araki H., Woods E. J.* Complete Boolean algebras of type I factors // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A. 1966. Vol. 2. P. 157–242.

[69] *Arratia R., Barbour A. D., Tavaré S.* Logarithmic Combinatorial Structures: A Probabilistic Approach. Zürich: European Mathematical Society, 2003.

[70] *Babai L.* Spectra of Cayley graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. 1979. Vol. 27. P. 180–189.

[71] *Bargmann V.* On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14. P. 187–214.

[72] *Beck J., Frenkel I. B., Jing N.* Canonical basis and Macdonald polynomials // Adv. Math. 1998. Vol. 140, no. 1. P. 95–127.

[73] *Bertoin J.* Lévy Processes. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[74] *Bethe H.* Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette // Z. Phys. 1931. Vol. 71. P. 205–226.

[75] *Binder M. W.* Irreducible induced representations of ICC-groups // Math. Ann. 1992. Vol. 294, no. 1. P. 37–47.

[76] *Binder M. W.* Induced factor representations of discrete groups and their types // J. Funct. Anal. 1993. Vol. 115, no. 2. P. 294–312.

[77] *Binder M. W.* On induced representations of discrete groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 118, no. 1. P. 301–309.

[78] *Bogoliubov N. M.* Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model // J. Phys. A. 2005. Vol. 38, no. 43. P. 9415–9430.

[79] *Bogoliubov N. M., Bullough R. K., Pang G. D.* Exact solution of a q-boson hopping model // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 47, no. 17. P. 11495–11498.

[80] *Bogoliubov N. M., Bullough R. K., Timonen J.* Critical behavior for correlated strongly coupled boson systems in $1+1$ dimensions // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72, no. 25. P. 3933–3936.

[81] *Bogoliubov N. M., Izergin A. G., Kitanine N. A.* Correlators of the phase model // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 231, no. 5–6. P. 347–352.

[82] *Bogoliubov N. M., Izergin A. G., Kitanine N. A.* Correlation functions for a strongly correlated boson system // Nucl. Phys. B. 1998. Vol. 516, no. 3. P. 501–528.

[83] *Borodin A., Olshanski G.* Point processes and the infinite symmetric group // Math. Res. Lett. 1998. Vol. 5, no. 6. P. 799–816.

[84] *Ceccherini-Silberstein T., Scarabotti F., Tolli F.* Representation Theory of the Symmetric Groups. The Okounkov–Vershik Approach, Character Formulas, and Partition Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[85] *Chung F. R. K.* Spectral Graph Theory. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.

[86] *Cifarelli D. M., Regazzini E.* Distribution functions of means of a Dirichlet process // Ann. Stat. 1990. Vol. 18, no. 1. P. 429–442.

[87] *Curtis C. W.* Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.

[88] *Dellacherie C., Meyer P.-A.* Probabilités et Potentiel. 2nd edition. Paris: Hermann, 1987.

[89] *Dermoune A.* Distribution sur l'espace de P. Lévy et calcul stochastique // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1990. Vol. 26, no. 1. P. 101–119.

[90] *Diaconis P., Kemperman D.* Some new tools for Dirichlet priors // Bayesian Statistics 5 / edited by J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, A. F. M. Smith. Oxford: Oxford University Press, 1996. P. 97–106.

[91] *Diaconis P., Mayer-Wolf E., Zeitouni O., Zerner M. P.* The Poisson–Dirichlet law is the unique invariant distribution for uniform split-merge transformations // Ann. Probab. 2004. Vol. 32, no. 1B. P. 915–938.

[92] *Engel D. D.* The multiple stochastic integral // Mem. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 38, no. 265.

[93] *Faddeev L.* Instructive history of the quantum inverse scattering method // Acta Appl. Math. 1995. Vol. 39, no. 1–3. P. 69–84.

[94] *Feigin B., Feigin E.* Integrable $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$-modules as infinite tensor products // Фундаментальная математика сегодня / Под ред. С. К. Ландо, О. К. Шейнмана. М.: Издательство МЦНМО, 2003. С. 304–334.

[95] *Feigin B., Feigin E.* Principal subspace for the bosonic vertex operator $\phi_{\sqrt{2m}}(z)$ and Jack polynomials // Adv. Math. 2006. Vol. 206, no. 2. P. 307–328.

[96] *Feigin B., Loktev S.* On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule // Differential Topology, Infinite-Dimensional Lie Algebras, and Applications. D. B. Fuchs' 60th anniversary collection. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999. P. 61–79.

[97] *Feldman J.* Decomposable processes and continuous products of probability spaces // J. Funct. Anal. 1971. Vol. 8, no. 1. P. 1–51.

[98] *Ferguson T. S.* A Bayesian analysis of some nonparametric problems // Ann. Stat. 1973. Vol. 1. P. 209–230.

[99] *Ferguson T. S., Klass M. J.* A representation of independent increment processes without Gaussian components // Ann. Math. Stat. 1972. Vol. 43. P. 1634–1643.

[100] *Fock V.* Konfigurationsraum und zweite Quantelung // Z. Phys. 1932. Vol. 75. P. 622–647.

[101] *Foda O., Wheeler M.* Hall–Littlewood plane partitions and KP // Int. Math. Res. Not. 2009. Vol. 2009, no. 14. P. 2597–2619.

[102] *Franz U., Privault N.* Quasi-invariance formulas for components of quantum Lévy processes // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2004. Vol. 7, no. 1. P. 131–145.

[103] *Frenkel I. B., Kac V. G.* Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models // Invent. Math. 1980. Vol. 62. P. 23–66.

[104] *Friedrichs K. O.* Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields. New York: Interscience Publishers, 1953.

[105] *Gelfand I. M., Graev M. I., Vershik A. M.* Models of representations of current groups // Representations of Lie Groups and Lie Algebras / edited by A. A. Kirillov. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1985. P. 121–179.

[106] *Goddard P., Kent A., Olive D.* Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras // Comm. Math. Phys. 1986. Vol. 103, no. 1. P. 105–119.

[107] *Graev M. I., Vershik A. M.* The basic representation of the current group $\mathrm{O}(n,1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure // Indag. Math. (N.S.). 2005. Vol. 16, no. 3–4. P. 499–529.

[108] *Gray R. M.* Toeplitz and Circulant Matrices: A Review. Boston, MA: Now, 2006.

[109] *Hagedorn D., Kondratiev Y., Pasurek T., Röckner M.* Gibbs states over the cone of discrete measures // J. Funct. Anal. 2013. Vol. 264, no. 11. P. 2550–2583.

[110] *Handa K.* Quasi-invariant measures and their characterization by conditional probabilities // Bull. Sci. Math. 2001. Vol. 125, no. 6–7. P. 583–604.

[111] *Handa K.* The two-parameter Poisson–Dirichlet point process // Bernoulli. 2009. Vol. 15, no. 4. P. 1082–1116.

[112] *Handa K.* Stationary distributions for a class of generalized Fleming–Viot processes // Ann. Probab. 2014. Vol. 42, no. 3. P. 1257–1284.

[113] *Hirai T.* Some aspects in the theory of representations of discrete groups. I // Proc. Japan Acad., Ser. A. 1990. Vol. 66, no. 10. P. 315–318.

[114] *Hirai T.* Construction of irreducible unitary representations of the infinite symmetric group $\mathfrak{S}_\infty$ // J. Math. Kyoto Univ. 1991. Vol. 31, no. 2. P. 495–541.

[115] *Hjort N. L., Ongaro A.* On the distribution of random Dirichlet jumps // Intern. J. Stat. 2006. Vol. LXIV, no. 1. P. 61–92.

[116] *Hulthén L.* Über das Austauschproblem eines Kristalls // Ark. Mat. Astron. Fys. 1938. Vol. 26, no. 11. P. 106.

[117] *Iohara K., Koga Y.* Representation Theory of the Virasoro Algebra. London: Springer-Verlag, 2011.

[118] *Itô K.* Multiple Wiener integral // Proc. Math. Soc. Japan. 1951. Vol. 13, no. 1. P. 157–169.

[119] *Itô K.* Stationary random distributions // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. 1954. Vol. 28. P. 209–223.

[120] *James G., Kerber A.* The Representation Theory of the Symmetric Group. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981.

[121] *James L. F.* Functionals of Dirichlet processes, the Cifarelli–Regazzini identity and beta-gamma processes // Ann. Statist. 2005. Vol. 33, no. 2. P. 647–660.

[122] *James L. F., Lijoi A., Prünster I.* Distributions of linear functionals of two-parameter Poisson–Dirichlet random measures // Ann. Appl. Probab. 2008. Vol. 18, no. 2. P. 521–551.

[123] *Kedem R.* Fusion products, cohomology of GL_N flag manifolds, and Kostka polynomials // Int. Math. Res. Not. 2004. Vol. 2004, no. 25. P. 1273–1298.

[124] *Kerov S.* Interlacing measures // Kirillov's Seminar on Representation Theory. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998. P. 35–83.

[125] *Kerov S.* Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and Its Applications in Analysis. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

[126] *Kerov S., Olshanski G.* Polynomial functions on the set of Young diagrams // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1994. Vol. 319, no. 2. P. 121–126.

[127] *Kerov S., Olshanski G., Vershik A.* Harmonic analysis on the infinite symmetric group // Invent. Math. 2004. Vol. 158, no. 3. P. 551–642.

[128] *Kerov S. V., Tsilevich N. V.* The Markov–Krein correspondence in several dimensions // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2001. Т. 283. С. 98–122.

[129] *Kingman J. F. C.* Random discrete distributions. Discussion // J. R. Stat. Soc., Ser. B. 1975. Vol. 37. P. 1–22.

[130] *Kleshchev A.* Linear and Projective Representations of Symmetric Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[131] *Korff C.* Cylindric versions of specialised Macdonald functions and a deformed Verlinde algebra // Comm. Math. Phys. 2013. Vol. 318, no. 1. P. 173–246.

[132] *Kulish P. P., Damaskinskii E. V.* On the q oscillator and the quantum algebra $\mathfrak{su}_q(1,1)$ // J. Phys. A, Math. Gen. 1990. Vol. 23, no. 9. P. l415–l419.

[133] *Kulish P. P., Sklyanin E. K.* Quantum spectral transform method. Recent developments // Integrable quantum field theories / edited by J. Hietarinta, C. Montonen. Berlin–New York: Springer, 1982. Vol. 151 of *Lecture Notes in Phys.* P. 61–119.

[134] *Lascoux A., Schützenberger M.-P.* Sur une conjecture de H. O. Foulkes // C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A. 1978. Vol. 286. P. 323–324.

[135] *Lijoi A., Regazzini E.* Means of a Dirichlet process and multiple hypergeometric functions // Ann. Probab. 2004. Vol. 32, no. 2. P. 1469–1495.

[136] *Lukacs E.* A characterization of the gamma distribution // Ann. Math. Stat. 1955. Vol. 26. P. 319–324.

[137] *Lytvynov E.* Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2003. Vol. 6, no. 1. P. 73–102.

[138] *Macdonald I. G.* Symmetric Functions and Hall Polynomials. 2nd edition. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[139] *Mackey G. W.* The Theory of Unitary Group Representations. Chicago–London: The University of Chicago Press, 1976.

[140] *Markow A.* Nouvelles applications des fractions continues // Math. Ann. 1896. Vol. 47. P. 579–597.

[141] *McCloskey J. W.* A model for the distribution of individuals by species in an environment // Ph. D. Thesis / Michigan State University. 1975.

[142] *Mukhin E., Tarasov V., Varchenko A.* Bethe algebra of homogeneous XXX Heisenberg model has simple spectrum // Comm. Math. Phys. 2009. Vol. 288, no. 1. P. 1–42.

[143] *Mukhin E., Tarasov V., Varchenko A.* Bethe subalgebras of the group algebra of the symmetric group // Transform. Groups. 2013. Vol. 18, no. 3. P. 767–801.

[144] *Murray F. J., von Neumann J.* On rings of operators // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 116–229.

[145] *Nualart D., Schoutens W.* Chaotic and predictable representations for Lévy processes // Stoch. Proc. Appl. 2000. Vol. 90. P. 109–202.

[146] *Obata N.* Certain unitary representations of the infinite symmetric group. I // Nagoya Math. J. 1987. Vol. 105. P. 109–119.

[147] *Obata N.* Some remarks on induced representations of infinite discrete groups // Math. Ann. 1989. Vol. 284, no. 1. P. 91–102.

[148] *Ogura H.* Orthogonal functionals of the Poisson process // IEEE Trans. on Information Theory. 1972. Vol. IT-18, no. 4. P. 473–481.

[149] *Okounkov A., Reshetikhin N.* Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram // J. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 16, no. 3. P. 581–603.

[150] *Okounkov A., Vershik A.* A new approach to representation theory of symmetric groups // Selecta Math. (N.S.). 1996. Vol. 2, no. 4. P. 581–605.

[151] *Pedersen G. K.* C^*-Algebras and Their Automorphism Groups. London–New York–San Francisco: Academic Press, 1979.

[152] *Penkov I., Styrkas K.* Tensor representations of classical locally finite Lie algebras // Developments and Trends in Infinite-Dimensional Lie Theory. Basel: Birkhäuser, 2011. P. 127–150.

[153] *Pitman J., Yor M.* The two-parameter Poisson–Dirichlet distribution derived from a stable subordinator. // Ann. Probab. 1997. Vol. 25, no. 2. P. 855–900.

[154] *Regazzini E., Guglielmi A., Di Nunno G.* Theory and numerical analysis for exact distributions of functionals of a Dirichlet process // Ann. Stat. 2002. Vol. 30, no. 5. P. 1376–1411.

[155] *Renault J.* A Groupoid Approach to C*-Algebras. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1980.

[156] *Rota G.-C., Wallstrom T. C.* Stochastic integrals: a combinatorial approach // Ann. Prob. 1997. Vol. 25, no. 3. P. 1257–1283.

[157] *Sagan B. E.* The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions. Pacific Grove, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1991.

[158] *Segal G.* Unitary representations of some infinite dimensional groups // Comm. Math. Phys. 1981. Vol. 80. P. 301–342.

[159] *Segall A., Kailath T.* Orthogonal functionals of independent-increment processes // IEEE Trans. on Information Theory. 1976. Vol. IT-22, no. 3. P. 287–298.

[160] *Smorodina N. V.* The measure preserving and nonsingular transformations of the jump Lévy processes // Theory Stoch. Process. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 144–154.

[161] *Stannat W.* Spectral properties for a class of continuous state branching processes with immigration // J. Funct. Anal. 2003. Vol. 201, no. 1. P. 185–227.

[162] *Sułkowski P.* Deformed boson-fermion correspondence, Q-bosons, and topological strings on the conifold // J. High Energy Phys. 2008. No. 10. P. 104–130.

[163] *Thoma E.* Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe // Math. Z. 1964. Vol. 85. P. 40–61.

[164] *Tsilevich N., Vershik A.* Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson–Dirichlet measures // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1999. Vol. 329. P. 163–168.

[165] *Tsilevich N., Vershik A., Yor M.* An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process // J. Funct. Anal. 2001. Vol. 185. P. 274–296.

[166] *Tsilevich N. V.* On the simplest split-merge operator on the infinite-dimensional simplex // PDMI Preprint. 2001. No. 3/2001.

[167] *Tsilevich N. V.* Spectral properties of the periodic Coxeter Laplacian in the two-row ferromagnetic case // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2010. Т. 378. С. 111–132.

[168] *Tsilevich N. V.* On the behavior of the periodic Coxeter Laplacian in some representations related to the antiferromagnetic asymptotic mode and continual limits // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2011. Т. 390. С. 286–298.

[169] *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* On different models of representations of the infinite symmetric group // Adv. Appl. Math. 2006. Vol. 37, no. 4. P. 526–540.

[170] *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* Induced representations of the infinite symmetric group // Pure Appl. Math. Q. 2007. Vol. 3, no. 4. P. 1005–1026.

[171] *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* Infinite-dimensional Schur–Weyl duality and the Coxeter–Laplace operator // Comm. Math. Phys. 2014. Vol. 327, no. 3. P. 873–885.

[172] *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* The serpentine representation of the infinite symmetric group and the basic representation of the affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ // Lett. Math. Phys. 2015. Vol. 105, no. 1. P. 11–25.

[173] *Tsirelson B. S., Vershik A. M.* Examples of non-linear continuous tensor products of measure spaces and non-Fock factorizations // Rev. Math. Phys. 1998. Vol. 10, no. 1. P. 81–145.

[174] *Vershik A. M.* The behavior of the Laplace transform of the invariant measure on the hypersphere of high dimension // J. Fixed Point Theory Appl. 2008. Vol. 3, no. 2. P. 317–329.

[175] *Vershik A. M.* Invariant measures for the continual Cartan subgroup // J. Funct. Anal. 2008. Vol. 255, no. 9. P. 2661–2682.

[176] *Vershik A. M., Kerov S. V.* The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of K_0-functor of AF-algebras) // Representation of Lie Groups and Related Topics / edited by A. M. Vershik, D. P. Zhelobenko. New York: Gordon and Breach, 1990. P. 39–117.

[177] *Virasoro M. A.* Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models // Phys. Rev. D. 1970. Vol. 1, no. 10. P. 2933–2936.

[178] *von Neumann J.* On infinite direct products // Compos. Math. 1938. Vol. 6. P. 1–77.

[179] *von Renesse M.-K., Yor M., Zambotti L.* Quasi-invariance properties of a class of subordinators // Stochastic Process. Appl. 2008. Vol. 118, no. 11. P. 2038–2057.

[180] *Wasserman A.* Direct proof of the Feigin–Fuchs character formula for unitary representations of the Virasoro algebra. `arXiv:1012.6003v`.

[181] *Wasserman A.* Kac–Moody, Virasoro and vertex algebras in infinite dimensions. `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~ajw/course11-2.pdf`.

[182] *Wiener N.* The homogeneous chaos // Amer. J. Math. 1938. Vol. 60. P. 897–936.

[183] *Wilkinson J. H.* The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford: Clarendon Press, 1965.

[184] *Yang C. N., Yang C. P.* One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system // Phys. Rev. 1966. Vol. 150, no. 1. P. 321–327.

[185] *Zuparic M.* Phase model expectation values and the 2-Toda hierarchy // J. Stat. Mech. Theory Exp. 2009. No. 8. P. P08010.