САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

ЧЕРКАШИН ДАНИЛА ДМИТРИЕВИЧ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В РАСКРАСКАХ ГИПЕРГРАФОВ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени кандидата
физико–математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
кандидат физико–математических наук
Петров Ф. В.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
доктор физико–математических наук
Райгородский А. М.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2018

Оглавление

Глава 1. Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Раскраски гиперграфов являются относительно молодой и очень бурно развивающейся областью комбинаторики. Задачи, поставленные в работах Эрдёша и Хайнала [26] и Эрдёша и Ловаса [27] получили дальнейшее развитие в работах Алона [9], Алона, Клейтмана, Померанке, Сакса и Сеймура [8], Бека [14, 15], Спенсера [52], Плухара [45], Франкла, Оты и Токушиге [29], Косточки [36, 35], Косточки и Вудалла [38] и других выдающихся математиков.

Отметим следующие результаты, полученные за последние 5 лет: Гебауэр построила [30] *явный* пример n-однородного гиперграфа с $(r + o(1))^n$ ребрами и хроматическим числом $r+1$; автор и Козик (независимо) придумали [22], как объединить стандартные вероятностные методы и жадный подход Плухара [45], тем самым улучшив нижнюю оценку на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом $r + 1$. Затем Шабанов и Козик применили [39] эти идеи к раскраскам простых гиперграфов. Также Остегард (используя компьютерный перебор) показал [43], что наименьшее число ребер в 4-однородном гиперграфе с хроматическим числом 3 равняется 23.

Таким образом, тематика диссертации весьма актуальна.

Цели и задачи работы. Цель работы заключается в оценке минимального количества ребер в “нетривиальном” гиперграфе, лежащем в некотором классе гиперграфов. В большинстве случаев под “нетривиальным” имеется в виду гиперграф с большим хроматическим числом. Задачами работы являются различные вариации и обобщения задачи Эрдёша – Хайнала.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Основной результат работы уже широко цитируется [31, 16, 39], в том числе и в центральной монографии по теме диссертации [11].

Достоверность результатов и апробация работы. Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием строгих математическим доказательств. Результаты работы докладывались на семинарах:

- на семинаре по алгебраической комбинаторике Лаборатории имени П. Л. Чебышева СПбГУ;
- на семинаре ПОМИ РАН по теории представлений и динамическим системам;
- на семинаре “Алгебраические и вероятностное методы в комбинаторике” А. М. Райгородского механико-математического факультета МГУ;
- на семинаре Лаборатории теории игр и принятия решений НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге;

и международных конференциях:

- the Hajnal 80 conference, Будапешт, Венгрия, июнь 2011;
- the Summit 240 conference, Будапешт, Венгрия, июль 2014;
- the RuFiDiM-2014, Петрозаводск, сентябрь 2014;
- the First Russian-Hungarian Workshop on Discrete Mathematics, Москва, апрель 2017;
- the RuFiDiM-2017, Турку, Финляндия, май 2017.

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [21, 17, 22, 3, 19, 18] и опубликован препринт [20]. Статьи [17, 22, 3, 19, 18] опубликованы в рецензируемых журналах, удовлетворяющих рекомендациям ВАК. В работе [17] соискателю принадлежит лемма 2 и теорема 4, а в работе [3] — лемма 1 и теорема 2. Результаты статьи [22] получены соавторами независимо, о чем сообщается непосредственно в тексте статьи. В работе [20] диссертанту принадлежит сведение исходной задачи к вопросам геометрии чисел.

Методология и методы исследования. Большинство результатов первых двух глав диссертации получены вероятностным методом. Результаты третьей главы использую линейную алгебру; четвертая глава посвящена структурным комбинаторным теоремам.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из четырех глав и выполнена в стиле минимализма. Список литературы включает 52 названия.

Благодарности. Я люто бешено благодарен своему научному руководителю Ф. В. Петрову за проявленные терпение, великодушие и кротость. Выражаю огромную благодарность соруководителю А. М. Райгородскому за постановку задач и внимание к работе. Без замечаний М. Баска, Н. Растегаева, Я. Теплицкой, А. Купавского, Р. Просанова и Н. Алона эта работа содержала бы куда больше существенных неточностей, чем сейчас. Усидчивости при написании текста диссертации я обязан стримам А. Корня.

Положения, выносимые на защиту.

- Получено более простое доказательство нижней оценки Радхакришнана – Сринивасана на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом 3.

- Улучшена нижняя оценка на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом $r+1$.

- Улучшены оценки на наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе без полноцветной раскраски (каждое ребро содержит вершину каждого цвета) в r цветов при условии $r(n) > r_0(n)$. В случае $\frac{n}{r} \leq c \log n$ предложенные оценки являются первыми нетривиальными оценками.

- Предложены аналоги классических результатов Эрдёша и Ловаса о раскрасках пересекающихся семейств для накрест-пересекающихся семейств.

Содержание работы. Первая глава содержит определения и основной результат: упрощение доказательства Радхакришнана – Сринивасана нижней оценки в задаче Эрдёша – Хайнала и улучшение нижней оценки Косточки на величину $m(n, r)$ в случае фиксированного r.

Вторая глава посвящена задаче поиска наименьших гиперграфов, не обладающих полноцветной раскраской. В ней содержатся наилучшие на данный момент оценки на число ребер в n-однородном гиперграфе, не обладающем полноцветной r-раскраской в случае когда r достаточно велико относительно n. В случае $\frac{n}{r} \leq c \log n$ ранее не было известно нетривиальных оценок.

Третья глава посвящена минимальным гиперграфам с положительным разбросом. В ней улучшается верхняя оценка Алона, Клейтмана, Померанке, Сакса и Сеймура на минимальное количество ребер в n-однородном гиперграфе с положительным разбросом.

И, наконец, четвертая глава посвящена раскраскам специальных классов гиперграфов — пересекающихся и накрест-пересекающихся семейств.

Глава 2. Задача Эрдёша – Хайнала

2.1. Введение и основные определения

Пара $H := (V, E)$ называется гиперграфом, если V конечно, а $E \subset 2^V$. При этом V называется множеством вершин, а E множеством ребер. Заметим, что обычный конечный граф является гиперграфом. Гиперграф называется n-однородным, если мощность любого его ребра равна n. Соответственно, обычный граф является 2-однородным гиперграфом.

Правильной раскраской гиперграфа (V, E) в r цветов называется такое отображение $f : V \to \{1 \dots r\}$, что для любого ребра $e \in E$ существует пара вершин $v_1, v_2 \in e$, такие что $f(v_1) \neq f(v_2)$. Другими словами, правильная раскраска гиперграфа в r цветов означает, что его множество вершин можно разбить на r подмножеств $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots V_r$ так, что не существует ребра, являющегося подмножеством V_i.

Возникает естественный вопрос, впервые сформулированный Эрдёшом и Хайналом в 1961 году: найти наименьшее число ребер в n-однородном гиперграфе, не допускающем раскраски в 2 цвета. Они же ввели обозначение $m(n)$ для этой величины. В той же работе было замечено, что

$$m(n) \leq \binom{2n-1}{n};$$

оценка достигается на множестве всех n-элементных подмножеств $(2n-1)$-элементного множества.

Попробуем объяснить, почему этот вопрос естественен. В каком-то смысле хроматическое число является способом понять, насколько нетривиален граф. Это хорошо согласуется с тем фактом, что все примеры, дающие n-однородный гиперграф с большим хроматическим числом и маленьким количеством ребер, строятся с применением вероятностной техники. Также довольно быстро становится понятно, что естественно считать размером гиперграфа именно число ребер, а не число вершин; более того, не очень осмысленно рассматривать количество вершин как дополнительный параметр.

2.2. Раскраски в 2 цвета

В 1963 году Эрдёш [23, 25] получил первые нетривиальные оценки на величину $m(n)$.

Теорема 2.2.1. *Для любого $n \geq 2$ выполняется*

$$2^{n-1} \leq m(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n. \tag{2.1}$$

Примечательно, что обе оценки были получены не очень сложными вероятностными аргументами, в то время как явные методы до сих пор не дают даже близких результатов. Наилучшая *явная* верхняя оценка получена Гебауэр [30] в 2013 году:

Теорема 2.2.2. *Для любого $n > 2$ можно явно указать n-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с хроматическим числом 3, такой что*

$$|E(H)| \leq 2^n \cdot 2^{O(n^{2/3})}. \tag{2.2}$$

Также примечательно, что верхняя оценка (2.1) до сих пор не улучшена. Ловас также отметил [41], что жадный метод дает аналогичный результат.

Нижние же оценки улучшались неоднократно:

Теорема 2.2.3 (Шмидт, 1964 [47])**.**

$$m(n) \geq \frac{n}{n+2} 2^n. \tag{2.3}$$

Далее, серия работ Бека и Спенсера привела к следующей теореме.

Теорема 2.2.4 (Бек – Спенсер, 1977–1981 [14, 15, 52])**.**

$$m(n) \geq c \cdot \left(\frac{n}{\log n}\right)^{1/3} \cdot 2^n. \tag{2.4}$$

Наконец, наилучшая на данный момент оценка получена в конце 20-ого века.

Теорема 2.2.5 (Радхакришнан – Сринивасан, 1998 [46])**.**

$$m(n) \geq c \cdot \left(\frac{n}{\log n}\right)^{1/2} \cdot 2^n. \tag{2.5}$$

В 2009 году Плухар предложил [45] совершенно новый подход к раскраскам гиперграфов, показав неожиданную эффективность жадных алгоритмов. Для случая двух цветов можно несколько упростить доказательство его результата. Рассмотрим случайный линейный порядок π на множестве вершин гиперграфа H. Попробуем покрасить самую маленькую вершину каждого ребра в цвет 1, а самую большую в цвет 2. Если это не дает правильную раскраску, то какая-то вершина является одновременно самой большой в одном ребер и самой маленькой в другом. Оценив вероятность этого, получаем следующую оценку.

Теорема 2.2.6 (Плухар, 2009 [45])**.**

$$m(n) \geq c \cdot n^{1/4} \cdot 2^n. \tag{2.6}$$

Заметим, что эта оценка слабее оценки (2.5), однако обобщения такого подхода дают оценку (2.5) для двух цветов и улучшает нижние оценки в случае r цветов.

2.3. Раскраски в r цветов

В 1972 Херцог и Шёнхайм обобщили [33] задачу Эрдёша – Хайнала на случай r цветов. Обозначим искомую функцию за $m(n,r)$. До конца этой главы, мы по умолчанию считаем r **фиксированным**.

Большая работа по переносу результатов со случая $r = 2$ на случай произвольного r была проделана Шабановым [49, 50, 6, 5, 4]. Затем Косточка предложил метод итеративной перекраски.

Теорема 2.3.1 (Косточка, 2004 [36]). *Если* $r < \sqrt{\frac{1}{8}\ln\frac{\ln n}{2}}$, *то при* $a = \lceil \log_2 n \rceil$ *выполняется неравенство*

$$m(n,r) > e^{-4r^2} \cdot \left(\frac{n}{\log n}\right)^{a/(a+1)} r^n. \tag{2.7}$$

На самом деле теорема 2.2.6 — частный случай следующей теоремы.

Теорема 2.3.2 (Плухар, 2009 [45]; Шабанов, 2009 [5]).

$$m(n,r) \geq c \cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}} \cdot r^n. \tag{2.8}$$

Опишем вкратце метод Плухара.

Определение 2.3.3. *Пусть на множестве вершин* V *гиперграфа* $H = (V,E)$ *задан порядок* π. *Набор ребер* $e_1, \ldots, e_r$ *называется упорядоченной* r*-цепью, если*

- $|e_i \cap e_j| = 1$, *если* $|i-j| = 1$ *и* $|e_i \cap e_j| = 0$ *иначе;*
- $\pi(v_i) \leq \pi(v_j)$ *для всех* $i < j$ *и всех* $v_i \in e_i$, $v_j \in e_j$.

Следующее утверждение позволяет рассматривать случайный порядок вместо случайной раскраски.

Утверждение 2.3.4 (Плухар, 2009 [45]). *Рассмотрим гиперграф* $H = (V,E)$. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) H *допускает правильную раскраску в* r *цветов;*

(ii) найдется порядок элементов V *без упорядоченных* r*-цепей.*

Далее рассматривается случайный порядок π на множестве вершин гиперграфа H. Вершины красятся по очереди в соответствии с этим порядком в наименьший цвет, так чтобы на уже покрашенных вершинах не образовывалось одноцветных ребер. Если это невозможно, то в нашем порядке образовалась упорядоченная r-цепь. После этого оценивается вероятность противоречия.

Следующая теорема представляет собой один из центральных результатов диссертации.

Теорема 2.3.5 (Черкашин – Козик, 2015 [22]). *Для любого фиксированного $r \geq 2$ верно*

$$m(n,r) \geq c \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{r-1}{r}} r^n. \tag{2.9}$$

Ее доказательство основано на совмещении двух подходов — классических случайных раскрасок вершин и подхода Плухара. Также она допускает локальную форму.

Следствие 2.3.6. *Пусть $r \geq 2$ – фиксированное число, $H = (V,E)$ – n-однородный гиперграф. Если каждое ребро H пересекает не более*

$$c \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{r-1}{r}} r^n$$

других ребер, то $\chi(H) \leq r$.

Замечание 2.3.7. *В случае $r = 2$ теорема 2.3.5 совпадает с теоремой 2.5 (на самом деле, совпадают даже константы).*

2.4. Доказательство Теоремы 2.3.5

Нам потребуются модификации Определения 2.3.3 и Утверждения 2.3.4.

Определение 2.4.1. *Пусть на множестве вершин мультигиперграфа $H = (V,E)$ задан порядок π, а на множестве ребер – функция f в $\{1,\ldots,r\}$. Тогда упорядоченная цепь $e_1,\ldots,e_r$ является сильно упорядоченной, если $f(e_i) = i$.*

Утверждение 2.4.2. *Рассмотрим мультигиперграф $H = (V,E)$ и функцию f из E в $\{1,\ldots,r\}$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) существует раскраска V в r цветов без ребер $e \in E$, состоящих только из вершин цвета $f(e)$;

(ii) существует порядок элементов V без сильно упорядоченных r-цепей.

Доказательство Утверждения 2.4.2. (ii) влечет (i). Зафиксируем порядок вершин σ, и будем красить вершины в соответствии с порядком σ. Вершину с номером i красим в минимальный возможный цвет так, чтобы не существовало одноцветного ребра e, такого что $e \subset \{1, \ldots, i\}$ и $f(e)$ совпадает с цветом e.

Пусть какую-то вершину покрасить не получается. Тогда красить текущую вершину в цвет r нельзя, иначе найдется ребро e_r цвета r с $f(e_r) = r$. Смотрим на первую вершину ребра e_r. Ее нельзя красить в цвет $r-1$. И так далее. На последнем шаге у нас есть ребро e_2, все вершины которого, кроме последней имеют цвет 2, а последняя цвет 3. Посмотрим на первую вершину ребра e_2. Ее нельзя красить в цвет 1, иначе найдется ребро e_1 с $f(e_1) = 1$, остальная часть которого уже покрашена в цвет 1. Противоречие, поскольку мы нашли сильно упорядоченную r-цепь.

(i) влечет (ii). У нас есть правильная раскраска. Упорядочим вершины по возрастанию их цвета. Предположим, что существует сильно упорядоченная r-цепь $e_1, \ldots, e_r$, тогда e_i содержит вершину с цветом больше i (это доказывается по индукции), что невозможно для e_r. Противоречие. $\square$

Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$, такой что

$$|E| \le q \left(\frac{n}{\log n} \right)^{\frac{r-1}{r}} r^{n-1}.$$

Мы хотим показать, что его хроматическое число не превосходит r. Рассмотрим случайную раскраску в два шага. На первом шаге, мы красим каждую вершину (независимо) в цвет $i \in \{1, \ldots, r\}$ с вероятностью $\frac{1-p}{r}$ для некого $p \in [0, 1]$. Соответственно, с вероятностью p вершина остается бесцветной. Предположим, что после первого шага у нас нет одноцветных, почти одноцветных (все вершины кроме одной имеют одинаковый цвет) и полностью бесцветных ребер.

На втором шаге мы рассматриваем множество $W \subseteq V$ бесцветных вершин и гиперграф $H' := (W, F)$, где

$$F := \{e \cap W \mid e \in E,\, e \setminus W \text{ одноцветно}\}.$$

Заметим, что F **является мультимножеством** и не содержит элементов размера

0, 1 и n.

Для каждого элемента $e \in F$ определим $f(e)$ как цвет его дополнения в W. Рассмотрим случайный порядок на W. Если в нем нет сильно упорядоченных r-цепей, то по Утверждению 2.4.2 существует правильная раскраска.

Наша задача — доказать, что вероятность неудачи меньше 1. Положим

$$p := \frac{(r-1)\log\left(r^{\frac{r}{r-1}} n \log^2 n\right)}{rn}.$$

Вероятность появления одноцветного ребра после первого шага ограничена сверху выражением

$$|E| \cdot r \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right)^n \leq |E| r^{1-n} n^{\frac{1-r}{r}} r^{-1} \left(\log^2 n\right)^{\frac{1-r}{r}} \leq$$

$$q\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{r-1}{r}} r^{n-1} r^{1-n} n^{\frac{1-r}{r}} r^{-1} \left(\log^2 n\right)^{\frac{1-r}{r}} \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Вероятность почти одноцветного ребра после первого шага ограничена сверху выражением

$$|E| \cdot rnp \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right)^{n-1} \leq (1+o(1)) q \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{r-1}{r}} r^{n-1} r^{2-n} (\log n) n^{\frac{1-r}{r}} \times$$

$$\times r^{-1} \left(\log^2 n\right)^{\frac{1-r}{r}} \sim q (\log n)^{1-3\frac{r-1}{r}} \to 0.$$

Вероятность полностью бесцветного ребра после первого шага равна $|E| p^n$, то есть является ничтожно малой.

Зафиксируем r-цепь C в H'. Пусть $a_1, \ldots, a_r \geq 2$ — размеры ребер, составляющих C. Вероятность, что C упорядоченна равна

$$2 \frac{(a_1-1)!(a_r-1)! \prod_{i=2}^{r-1} (a_i-2)!}{\left(\sum a_i - r + 1\right)!} =: M(a_1, \ldots, a_r).$$

Вероятность, что C сильно упорядоченна равна

$$p^{r-1}p^{a_1-1}\left(\frac{1-p}{r}\right)^{n-a_1}C_{n-1}^{a_1-1}\left(\prod_{i=2}^{r-1}p^{a_i-2}\left(\frac{1-p}{r}\right)^{n-a_i}C_{n-2}^{a_i-2}\right)\times$$

$$\times p^{a_r-1}\left(\frac{1-p}{r}\right)^{n-a_r}C_{n-1}^{a_r-1} =: N(a_1,\ldots,a_r).$$

Очевидно, количество r-цепей в H не превосходит $\frac{1}{r!}|E|^r$. Значит, суммарная вероятность неудачи не превышает

$$\frac{|E|^r}{r!}\sum_{a_1,\ldots,a_r}M(a_1,\ldots,a_r)N(a_1,\ldots,a_r)\leq$$

$$\frac{2|E|^r}{r!}\sum_{a_1,\ldots,a_r}\frac{p^{\sum a_i-r+1}n^{\sum a_i-2r+2}\left(\frac{1-p}{r}\right)^{nr-\sum a_i}}{(\sum a_i-r+1)!}.$$

Зафиксируем $t\in\mathbb{N}$. Количество наборов a_i-ых с $\sum a_i-2r+2=t$ меньше чем t^{r-1}. Следовательно, мы можем написать оценку

$$\frac{2|E|^r}{r!}\sum_{t=0}^{\infty}t^{r-1}\frac{p^{t+r-1}n^t\left(\frac{1-p}{r}\right)^{nr-t-2r+2}}{(t+r-1)!}\leq\frac{2|E|^r}{r!}p^{r-1}\left(\frac{1-p}{r}\right)^{nr-2r+2}\times$$

$$\times\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^tn^t\left(\frac{1-p}{r}\right)^{-t}}{t!}\leq\frac{q}{q'}(1+o(1))\left(1-\frac{1}{r}\right)^{1-r}r^{2-r}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{r-1}\times$$

$$\times r^{nr-r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{r-1}n^{1-r}(\log n)^{r-1}r^{2r-2-nr}e^{\frac{pnr}{1-p}-pnr}=\frac{q}{q'}(1+o(1)),$$

где

$$q' := \frac{(r!)^{\frac{1}{r}}}{2^{\frac{1}{r}}}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{\frac{r-1}{r}}r^{\frac{r-2}{r}}$$

константа, зависящая от r.

Теорема 2.3.5 доказана.

Глава 3. Полноцветные раскраски

3.1. Постановка задачи

Определение 3.1.1. *Раскраска вершин гиперграфа называется полноцветной, если каждое ребро содержит вершину каждого цвета.*

Нас интересует минимальное количество ребер в n-однородном гиперграфе без полноцветной r-раскраски (обозначим эту величину за $p(n,r)$).

Проблема существования полноцветной раскраски гиперграфа была поставлена [27] в локальной форме Эрдёшем и Ловасом. Они доказали, что если любое ребро n-однородного гиперграфа пересекает не более $r^{n-1}/4(r-1)^n$ других ребер, тогда гиперграф обладает полноцветной r-раскраской. Затем Косточка сформулировал [35] задачу в ее современной форме и связал ее с r-choosability problem, используя идеи Эрдёша, Рубина и Тейлора. Также Косточка и Вудалл нашли [38] достаточные условия существования полноцветной раскраски гиперграфа в терминах отношения Холла.

3.2. Верхние оценки

Используя результаты Алона [10], Косточка доказал [35] что для неких констант c_1, $c_2 > 0$ выполняется

$$\frac{1}{r}e^{c_1\frac{n}{r}} \le p(n,r) \le re^{c_2\frac{n}{r}}. \tag{3.1}$$

В работах [7, 48] Шабанов дал следующие верхние оценки:

$$p(n,r) \le c\frac{n^2\log r}{r^2}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n, \text{ если } 3 \le r = o(\sqrt{n}), n > n_0;$$

$$p(n,r) \le c\frac{n^{3/2}\log r}{r}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n, \text{ если } r = O(n^{2/3}) \text{ и } n_0 < n = O(r^2); \qquad (3.2)$$

$$p(n,r) \le c\max\left(\frac{n^2}{r}, n^{3/2}\right)\log r\left(\frac{r}{r-1}\right)^n \text{ для всех } n, r \ge 2.$$

Введем величину $p'(n,r)$ — минимальное количество ребер в n-однородном гиперграфе $H = (V,E)$, таком что любое подмножество $V' \subset V$ размера $|V'| \ge \left\lceil \frac{r-1}{r}|V| \right\rceil$ содержит ребро. На самом деле $p'(n,r)$ совпадает с

$$\min_{|V|} T\left(|V|, \frac{r-1}{r}|V|, n\right),$$

где $T(a,b,c)$ означает *число Турана* (обзор содержится в [51]).

По принципу Дирихле любая r-цветная вершинная раскраска содержит цвет размером не более $\left\lfloor \frac{1}{r}|V| \right\rfloor$. Дополнение к этому цвету имеет размер хотя бы $|V| - \left\lfloor \frac{1}{r}|V| \right\rfloor = \left\lceil \frac{r-1}{r}|V| \right\rceil$. Следовательно, $p(n,r) \le p'(n,r)$. По духу этот аргумент похож на стандартную оценку хроматического числа графа через число независимости.

Следующая теорема улучшает верхнюю оценку в случае $n = o(r^{3/2})$.

Теорема 3.2.1. *Следующее неравенство выполняется для всех $n \ge 2$, $r \ge 2$*

$$p'(n,r) \le c\frac{n^2\log r}{r}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n.$$

Оно немедленно влечет

$$p(n,r) \le c\frac{n^2\log r}{r}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n.$$

3.3. Нижние оценки

Мы начнем с простого вероятностного аргумента $p(n,r) \geq \frac{1}{r}(\frac{r}{r-1})^n$. Это дает нижнюю оценку (3.1) с $c_1 = 1$. Она была существенно улучшена Шабановым в [7]:

$$p(n,r) \geq c\frac{1}{r^2}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1/3}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n \text{ for } n,r \geq 2, r < n.$$

Затем Розовская и Шабанов [1] показали, что

$$p(n,r) \geq c\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{n}{\log n}}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n \text{ для } n,r \geq 2, r \leq \frac{n}{2\log n}.$$

Используя Alterations method (смотри главу 3 [11]), мы получаем нижеприведенную оценку для всех n, r. Она является наилучшей из известных при $r \geq c\sqrt{n}$.

Теорема 3.3.1. *Для $n \geq r \geq 2$ выполняется оценка*

$$p(n,r) \geq e^{-1}\frac{r-1}{n-1}e^{\frac{n-1}{r-1}}.$$

Существует и совершенно другой путь получить почти такую же оценку. Прежде всего докажем промежуточную оценку, основанную на геометрическом переосмыслении идей Плухара [45].

Теорема 3.3.2. *Для $n \geq r \geq 2$, таких что $r \leq c\frac{n}{\log n}$ выполняется оценка*

$$p(n,r) \geq c\max\left(\frac{n^{1/4}}{r\sqrt{r}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{r}{r-1}\right)^n.$$

Комбинируя теоремы 3.3.1 и 3.3.2, мы получаем следующий результат.

Теорема 3.3.3. *Для $n \geq r \geq 2$, таких что $\sqrt{n} \leq r \leq c'\frac{n}{\log n}$ выполняется*

$$p(n,r) \geq c\frac{r}{n}e^{\frac{n}{r}}.$$

Замечание 3.3.4. *Теорема 3.3.2, в отличие от теорем 3.3.1 и 3.3.3, имеет локальную версию.*

3.4. Случай малого n/r

Рассмотрим случай, когда отношение n/r мало; $n/r = const$ — хороший модельный пример. В случае $\frac{n}{r} \leq c \log n$ лучшая верхняя оценка была $re^{cn/r}$ [35], где $c \geq 4$ является константой. Используя следующую теорему, мы доказываем оценку, зависящую только от n/r.

Теорема 3.4.1. *Для всех натуральных m, n, r выполняется*

$$p(mn, mr) \leq p'(n, r).$$

Как следствие теоремы 3.4.1 и очевидного неравенства

$$\max(p(n, r), p(n+1, r+1)) \leq p(n+1, r)$$

мы получаем оценку, которая является наилучшей в случае, когда n/r мало.

Следствие 3.4.2. *Для любого натурального $k \leq r$ выполняется*

$$p(n, r) \leq p'\left(\left\lceil \frac{n}{r-k+1} \right\rceil k, k\right).$$

В частности, если $n < r^2$, то можно взять $k := \alpha\frac{n}{r}$ и получить $p(n, r) \leq c(\frac{n}{r})^2 \log \frac{n}{r} \cdot e^{\frac{n}{r}}$.

Не было известно никаких нижних оценок в этом случае (все предыдущие методы давали что-то меньшее 1). Теорема 3.3.1 устраняет этот пробел, но перед этим стоит отметить существование элементарного жадного алгоритма.

Утверждение 3.4.3. *Следующее неравенство выполняется для всех натуральных $n \geq r$*

$$p(n,r) \geq \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor.$$

Доказательство Утверждения 3.4.3. Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$ с $|E| \leq \lfloor n/r \rfloor$. Выберем произвольное $e \in E$ и покрасим его произвольные r вершин в разные цвета. Теперь удалим ребро e и все покрашенные вершины из H. Оставшийся гиперграф имеет $|E| - 1$ ребро, а размер каждого ребра не менее $n - r$. Поэтому мы можем повторить эту операцию $\lfloor n/r \rfloor$ раз, и утверждение доказано. □

3.5. Явные конструкции

Недавно Гебауэр [30] предложила явный пример n-однородного гиперграфа с хроматическим числом $r+1$ и $(r+o(1))^n$ ребрами для фиксированного r. Мы обобщаем этот пример на случай полноцветных раскрасок.

Теорема 3.5.1. *Пусть $r = o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$. Тогда есть явная конструкция n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ без полноцветной r-раскраски, такого что*

$$|E(H)| = \left(\frac{r}{r-1} + o(1)\right)^n.$$

3.6. Доказательства

Следующее доказательство по сути повторяет доказательство Эрдёша верхней оценки (2.1) [25].

Доказательство теоремы 3.2.1. Рассмотрим множество вершин V размера $|V| = n^2$. Давайте построим гиперграф $H = (V, E)$ случайным образом (равномерно и независимо) выбрав $m := c\frac{n^2 \log r}{r}(\frac{r}{r-1})^n$ ребер. Мы можем выбрать одно и то же ребро несколько раз, но от этого общее количество ребер только уменьшится, поэтому $|E| \leq m$.

Зафиксируем подмножество вершин $V' \subset V$ размера $|V'| = \left\lceil \frac{r-1}{r}|V| \right\rceil$. Обозначим вероятность того, что случайное ребро является подмножество V' за p. Очевидно,

$$p = \frac{\binom{|V'|}{n}}{\binom{|V|}{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\left\lceil \frac{r-1}{r} n^2 \right\rceil - i}{n^2 - i} \geq \left(\frac{\left\lceil \frac{r-1}{r} n^2 \right\rceil - n}{n^2 - n} \right)^n$$

$$\geq \left(\frac{\left\lceil \frac{r-1}{r} n^2 \right\rceil - 2\left\lceil \frac{r-1}{r} n \right\rceil}{n(n-1)} \right)^n = e \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1 + o(1)).$$

Вероятность того, что V' не содержит ребро равна $(1-p)^m$. Количество способов выбрать такое множество V' равно $\binom{n^2}{\lceil (r-1)n^2/r \rceil} = \binom{n^2}{\lfloor n^2/r \rfloor}$. Если $\binom{n^2}{\lceil (r-1)n^2/r \rceil}(1-p)^m < 1$, то гиперграф, реализующий неравенство $p'(n,r) \leq m$, существует с положительной вероятностью. Легко видеть, что

$$\binom{n^2}{\lfloor n^2/r \rfloor}(1-p)^m \leq \frac{n^{2\lfloor n^2/r \rfloor}}{\lfloor n^2/r \rfloor !} e^{-pm} = e^{c \log r \lfloor n^2/r \rfloor - e\left(\frac{r-1}{r}\right)^n m}.$$

Подстановка $m = c\frac{n^2 \log r}{r}(\frac{r}{r-1})^n$ завершает доказательство теоремы. □

Доказательство теоремы 3.3.1. Пусть $H = (V, E)$ — данный гиперграф, удовлетворяющий условию

$$|E| \leq e^{-1} \frac{r-1}{n-1} e^{\frac{n-1}{r-1}}.$$

Мы должны показать, что H обладает полноцветной раскраской.

Рассмотрим равномерную и независимую случайную раскраску множества вершин в $a > r$ цветов. Матожидание числа пар (e, q), таких что ребро $e \in E$ не содержит цвета q равно $|E|a(\frac{a-1}{a})^n$. Поэтому, если $|E|a(\frac{a-1}{a})^n < a - r$, то с положительной вероятностью существуют r цветов, содержащихся в каждом ребре. Подставляя $a = \frac{(n-1)}{n-r} r$, получаем существование полноцветной раскраски при

$$|E| \leq \frac{r-1}{n-1} \left(\frac{nr - r}{nr - n} \right)^n \leq e^{-1} \frac{r-1}{n-1} e^{\frac{n-1}{r-1}}.$$

□

Доказательство теоремы 3.3.2. Пусть $H = (V, E)$ — данный гиперграф, удовле-

творяющий
$$|E| \leq c \max\left(\frac{n^{1/4}}{r\sqrt{r}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{r}{r-1}\right)^n.$$
Мы должны показать, что H обладает полноцветной раскраской.

Рассмотрим $(r-1)$-мерный единичный симплекс, и построим случайное отображение из вершин H на 1-мерный скелет (ребра симплекса), в соответствии с равномерной мерой и независимо. Затем зафиксируем биекцию f между цветами и вершинами симплекса. Мы пытаемся покрасить гиперграф следующим образом: для каждого ребра e и каждого цвета i, мы красим в цвет i ближайшую (в индуцированной метрике) вершину ребра e (с вероятностью 1 она единственная; назовем ее $v_i(e)$) к вершине симплекса $f(i)$. Если этот метод внутренне непротиворечив, очевидно, раскраска полноцветна.

Давайте оценим вероятность внутреннего противоречия; мы покажем, что она меньше 1, тем самым доказав утверждение. Назовем *плохим событием первого типа*, событие, что для некого ребра $e \in E$ и некого цвета i вершина $v_i(e)$ не лежит на соседнем с вершиной $f(i)$ ребре симплекса. Вероятность этого события равна $\left(\frac{r-2}{r}\right)^n$. Суммируя по всем ребрам и цветам, получаем вероятность $Poly(r,n)\left(\frac{r}{r-1}\right)^n\left(\frac{r-2}{r}\right)^n = Poly(r,n)\left(\frac{r-2}{r-1}\right)^n$, которая стремится к нулю при $r \leq c\frac{n}{\log n}$.

Теперь перейдем к *плохим событиям второго типа*: пусть есть вершина x, такая что она должна получить цвета i и j одновременно (назовем x *конфликтной вершиной*). Рассмотрим, пару ребер $(e_1, e_2) \in E^2$; обозначим размер их пересечения за $t := |e_1 \cap e_2|$. Мы оценим вероятность (обозначим ее за q) того, что e_1 и e_2 требуют раскраски конфликтной вершины $x \in e_1 \cap e_2$ в разные цвета, а затем просуммируем эту вероятность по всем парам ребер. Случай $e_1 = e_2$ (то есть $t = n$) соответствует событию, то раскраска противоречит себе уже на ребре e_1.

Сначала выберем конфликтную вершину x (существует t способов это сделать) и конфликтную пару цветов (i,j) (существует $r(r-1)/2$ способов это сделать). Заметим, что x должно лежать на ребре $(f(i), f(j))$ симплекса (вероятность этого события равна $\frac{2}{(r-1)r}$), иначе мы уже посчитали их на предыдущем шаге. Если $\operatorname{dist}(x, f(i)) = a$, то $\operatorname{dist}(x, f(j)) = 1-a$. Поскольку x — ближайшая к $f(i)$ вершина в ребре e_1, любая вершина $y \in e_1$ не может лежать в объединении $(r-1)$-ого отрезка длины a с концом в $f(i)$. Аналогично, любая вершина $z \in e_2$ не может лежать в объединении $(r-1)$-ого отрезка длины $1-a$ с концом в $f(j)$. Ясно, что любая вершина $w \in e_1 \cap e_2$ не может лежать в объединении запрещенных множеств (заметим, что запрещенные множества не пересекаются). Поэтому для фиксированного a вероятность плохого события составляет

$$\left(\frac{r-2}{r}\right)^{t-1}\left(1-\frac{2a}{r}\right)^{n-t}\left(1-\frac{2-2a}{r}\right)^{n-t}.$$

Суммируя, получаем

$$q = t\frac{(r-1)r}{2}\frac{2}{(r-1)r}\left(\frac{r-2}{r}\right)^{t-1}\int_0^1\left(1-\frac{2a}{r}\right)^{n-t}\left(1-\frac{2-2a}{r}\right)^{n-t}da$$

$$= t\left(1-\frac{1}{(r-1)^2}\right)^{t-1}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{2(t-1)}\int_0^1\left(1-\frac{2a}{r}\right)^{n-t}\left(1-\frac{2-2a}{r}\right)^{n-t}da.$$

Положим $A := te^{-tr^{-2}} > te^{-t(r-1)^{-2}} \geq t\left(1-\frac{1}{(r-1)^2}\right)^t \geq \frac{1}{2}t\left(1-\frac{1}{(r-1)^2}\right)^{t-1}$. Теперь покажем, что $A \leq c\min(r^2,n)$. В самом деле, $A = r^2\frac{t}{r^2}e^{-tr^{-2}} \leq cr^2$ и $A \leq t \leq n$, то есть $A \leq c\min(r^2,n)$. Положим также

$$B := \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2(t-1)}\int_0^1\left(1-\frac{2a}{r}\right)^{n-t}\left(1-\frac{2-2a}{r}\right)^{n-t}da.$$

Очевидно, $(1-\frac{2a}{r})(1-\frac{2-2a}{r}) \leq (1-\frac{1}{r})^2$, то есть $B \leq \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-2}$. Замена $x = 1-\frac{2a}{r}$ дает

$$B = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2(t-1)}\frac{r}{2}\int_{1-2/r}^1 x^{n-t}\left(2-\frac{2}{r}-x\right)^{n-t}dx.$$

После замены $y = \frac{1}{2}\frac{r}{r-1}x$ мы получаем

$$B = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-1}2^{2(n-t)+1}\frac{r}{2}\int_{\frac{r-2}{2(r-1)}}^{\frac{r}{2(r-1)}} y^{n-t}(1-y)^{n-t}dy,$$

этот интеграл не превосходит бета-функции

$$B(n-t+1, n-t+1) = \frac{1}{2(n-t)+1} \frac{1}{\binom{2(n-t)}{n-t}} \leq c\frac{1}{\sqrt{n-t}} 2^{2(t-n)}.$$

Суммируя все вышесказанное, получаем $B \leq c\frac{r}{\sqrt{n-t}}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n}$, что влечет $B \leq c\min\left(1, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n}$. Итого,

$$q \leq AB \leq c\min(r^2, n)\min\left(1, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n} =$$

$$c\min\left(n, \frac{r^3}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n}.$$

Общее количество пар (e_1, e_2) равно $|E|^2$, значит

$$q|E|^2 \leq AB|E|^2 \leq \frac{1}{2}$$

для подходящего c. Напомним, что вероятность плохих событий первого типа стремится к нулю, таким образом доказательство завершено.

$\square$

Доказательство теоремы 3.3.3. Пусть $H = (V, E)$ — данный гиперграф, удовлетворяющий условию

$$|E| \leq c\frac{r}{n}e^{\frac{n}{r}}.$$

Мы должны показать, что H обладает полноцветной раскраской.

Положим $a := r + \frac{r^2}{n}$. Поскольку $r \leq c'\frac{n}{\log n}$, мы имеем $a \leq 2r \leq \frac{c}{2}\frac{n}{\log n}$, где c — константа из теоремы 3.3.2. Значит мы можем повторить доказательство теоремы 3.3.1.

Вероятность объединения плохих событий первого типа все еще очень быстро стремится к нулю. Заметим, что при $r \geq \sqrt{n}$ мы имеем $\min\left(n, \frac{r^3}{\sqrt{n}}\right) = n$. Следовательно, матожидание количества таких троек (e_1, e_2, q), что ребра e_1, $e_2 \in E$

конфликтуют по цвету q меньше чем

$$|E|^2 cn\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2n} = c\frac{r^2}{n}e^{\frac{2n}{r}}\left(1-\frac{1}{r+\frac{r^2}{n}}\right)^{2n} \le ce^2\frac{r^2}{n}.$$

Суммируя, получаем

$$\mathbb{E}(\#\text{плохих троек}) \le c\frac{r^2}{n} = \frac{a-r}{2}.$$

По неравенству Маркова имеем

$$\mathbb{P}(\#\text{плохих троек} > a-r) \le \frac{1}{2}.$$

Это значит, что с положительной вероятностью есть r цветов, содержащихся в каждом ребре. □

Доказательство теоремы 3.4.1. Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф, реализующий величину $p'(n, r)$. Положим $J = (W, F)$, где $W := \{(v, i) | v \in V, 1 \le i \le m\}$, $F := \{\cup_{v \in e, 1 \le i \le m}(v, i) | e \in E\}$. Очевидно, J является mn-однородным и $|F| = |E|$. Назовем подмножество $A_v := \{(v, i) \in W | 1 \le i \le m\}$ *блоком*, и заметим, что они не пересекаются.

Рассмотрим произвольную раскраску $|W|$ в mr цветов. По принципу Дирихле найдется цвет i, содержащий не более $\left\lfloor \frac{|W|}{mr} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|V|}{r} \right\rfloor$ вершин. Следовательно, существует не более $\left\lfloor \frac{|V|}{r} \right\rfloor$ блоков с вершинами цвета i. Пусть $V' \subset V$ — множество таких вершин $v \in V$, что блок A_v не содержит цвет i. Оно имеет размер хотя бы $|V| - \left\lfloor \frac{|V|}{r} \right\rfloor = \left\lceil \frac{r-1}{r}|V| \right\rceil$, что влечет существование ребра $e \in E$, такого что $e \subset V'$. Значит соответствующее ребро J не содержит цвет i, то есть $p(mn, mr) \le |F| = p'(n, r)$. □

Доказательство следствия 3.4.2. Очевидно,

$$p(n, r) \le p\left(n, \left\lfloor \frac{r}{k} \right\rfloor k\right) \le p\left(\left\lceil \frac{n}{\lfloor r/k \rfloor k} \right\rceil \left\lfloor \frac{r}{k} \right\rfloor k, \left\lfloor \frac{r}{k} \right\rfloor k\right),$$

то есть по теореме 3.4.1

$$p(n,r) \le p'\left(\left\lceil \frac{n}{\lfloor r/k \rfloor k} \right\rceil k, k\right) \le p'\left(\left\lceil \frac{n}{r-k+1} \right\rceil k, k\right).$$

На самом деле, оценка (3.2) доказана для $p'(n,r)$ (см. [7]). Таким образом, положив $k := \alpha \frac{n}{r}$, мы получим (3.2). Из чего следует $p\left(\frac{k^2}{\alpha}, k\right) \le c \frac{k^3 \log k}{k} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{k^2}{\alpha}} = ck^2 \log k \cdot e^{\frac{k}{\alpha}}$, и утверждение доказано.

□

Доказательство теоремы 3.5.1. Построим гиперграф $H_1 = (V_1, E_1)$ следующим образом. Зафиксируем число $t|n$ и положим

$$k := \left\lceil \left(\frac{r}{r-1}\right)^t \right\rceil \frac{n}{t},$$

Тогда $V := \{(i,j) | 1 \le i \le k, 1 \le j \le rt\} = [k] \times [rt]$. Определим множество ребер следующим образом:

$$E := \bigcup_{A \subset [rt]} \bigcup_{\substack{0 \le i_\alpha < k \\ \alpha \in A}} \bigcup_{\substack{B \subset [k] \\ |B| = \frac{n}{t}}} \{((\beta + i_\alpha) \bmod k, \alpha) \,|\alpha \in A, \beta \in B\}.$$

Заметим, что

$$|E| \le \binom{rt}{t} k^t \binom{k}{n/t} \le (rt)^t \left(\left(\frac{r}{r-1}\right)^t \frac{n}{t}\right)^t \left(e\left(\frac{r}{r-1}\right)^t\right)^{n/t} \le$$

$$(rn)^t \left(\frac{r}{r-1}\right)^{t^2} e^{n/t} \left(\frac{r}{r-1}\right)^n.$$

Положим $t := \sqrt{\frac{n}{\log n}}$. Поскольку $r = o(\sqrt{\frac{n}{\log n}})$, можно видеть, что $(rn)^t \le n^{2t} = e^{2t \log n} = e^{o(n/r)}$. Также, $\left(\frac{r}{r-1}\right)^{t^2} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^{o(n)}$ и $e^{n/t} = e^{o(n/r)}$. Итого, $|E(H)| = \left(\frac{r}{r-1} + o(1)\right)^n$.

А теперь покажем, что H не допускает полноцветной раскраски. Предположим противное и рассмотрим полноцветную раскраску. Назовем цвет q *минорным* в линии $[k] \times \{i\}$ если он содержит в ней не более $\left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor$ вершин. По принципу Дирихле любая линия $[k] \times \{i\}$ содержит хотя бы один минорный цвет. Аналогично, получаем такое множество линий $A \subset [rt]$, что у них есть общий минорный цвет q и $|A| \geq t$. Далее, для любого фиксированного β относительно количество таких $\{i_\alpha\}_{\alpha \in A}$, что $\{((\beta + i_\alpha) \bmod k, \alpha) \,|\alpha \in A\}$ не содержат q, не меньше $\left(\frac{r-1}{r}\right)^t$. По линейности матожидания существует такой выбор $\{i_\alpha\}_{\alpha \in A}$, что хотя бы $k\left(\frac{r-1}{r}\right)^t = \frac{n}{t}$ индексов $\beta \in B$ дают q-свободные множества $\{((\beta + i_\alpha) \bmod k, \alpha) \,|\alpha \in A\}$. Таким образом, найдется ребро без цвета q, что дает противоречие.

$\square$

Глава 4. Гиперграфы с положительным разбросом

4.1. Введение

Назовем *разбросом 2-раскраски* вершин гиперграфа максимум модуля разности между количествами вершин красного и синего цвета в ребре по всем ребрам. Назовем также *разбросом гиперграфа* наименьший разброс по всем раскраскам гиперграфа. Пусть $f(n)$ — наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с положительным разбросом.

Очевидно, если $2 \nmid n$, то $f(n) = 1$; если же $2|n$, но $4 \nmid n$, тогда $f(n) = 3$. Эрдёш и Шош поинтересовались, является ли $f(n)$ неограниченной функцией. Алон, Клейтман, Померанке, Сакс и Сеймур [8] доказали следующую теорему, в частности, показав, что $f(n)$ неограниченна.

Теорема 4.1.1 (Алон, Клейтман, Померанке, Сакс и Сеймур [8])**.** *Пусть n — такое натуральное число, что $4 \,|\, n$. Тогда*

$$c_1 \frac{\log \operatorname{snd}(n/2)}{\log\log \operatorname{snd}(n/2)} \leq f(n) \leq c_2 \frac{\log^3 \operatorname{snd}(n/2)}{\log\log \operatorname{snd}(n/2)}, \tag{4.1}$$

где $\operatorname{snd}(x)$ *означает наименьшее натуральное число, не делящее x.*

Для доказательства верхней оценки авторы ввели следующие понятия. Пусть $\mathcal{M}$ обозначает множество матриц M со элементами в $\{0, 1\}$, таких что $Mx = e$ имеет ровно одно неотрицательное решение (здесь e означает вектор из единиц). Это решение обозначается x^M. Пусть $z(M)$ — наименьшее натуральное число, такое что вектор $z(M)x^M$ — целочисленный; положим $y^M = z(M)x^M$. Для каждого натурального n, определим $t(n)$ как наименьшее r, такое что существует $M \in \mathcal{M}$ с r строками, такая что $z(M) = n$ (очевидно $t(n) \leq n+1$ так как $z(J_{n+1} - I_{n+1}) = n$, где J_{n+1} — это $(n+1)\times(n+1)$-матрица из единиц; I_{n+1} — это единичная матрица размера $(n+1)\times(n+1)$). Верхняя оценка в (4.1) следует из неравенства $f(n) \le t(m)$ для таких m, что $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ нечетно.

Затем, Алон и Ву [12] показали, что $t(m) \le (2+o(1))\frac{\log m}{\log\log m}$ для бесконечного количества значений m. Однако, они отметили, что справедливость неравенства $t(m) \le c\log m$ для произвольного m неочевидна.

Основной результат этой главы — следующая теорема:

Теорема 4.1.2. *Пусть n — положительное натуральное число. Тогда*

$$f(n) \le c\log \operatorname{snd}(n), \tag{4.2}$$

для некоторой константы $c > 0$.

Следствие 4.1.3. *Пусть n — положительное натуральное число. Тогда*

$$f(n) \le c\log\log n,$$

для некоторой константы $c > 0$.

Основная идея доказательства — найти матрицу с определителем $\operatorname{snd}(n)$ и маленькими элементами, удовлетворяющую некоторым техническим условиям.

4.2. Пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, и предположим, что n не делится на $\det A = 19$. Рассмотрим также систему

$$Ax = \begin{pmatrix} n \\ n+t \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Она имеет решение тогда и только тогда, когда $19 \,|\, 2n + 3t$ то есть t имеет предписанный остаток при делении на 19. Поскольку n не делится на 19, t не равен нулю по модулю 19. Поэтому можно выбрать $-19 < t < 19$ так что t имеет нужный остаток по модулю 19 и t нечетно.

Теперь построим n-однородный гиперграф H с положительным разбросом. Пусть (a, b) — решение (4.3); заметим, что a, b — положительные, и стремятся к бесконечности вместе с n. Рассмотрим непересекающиеся множества вершин $A_1, \ldots, A_3$ размера a и $B_1, \ldots, B_8$ размера b. Если $t < 0$, тогда рассмотрим множество вершин T размера $|t|$, не пересекающее все A_i и B_j; если же $t > 0$ то обозначим за T некое t-вершинное подмножество B_1. Определим C как $B_1 \cup T$ в случае $t < 0$, и $C := B_1 \setminus T$ иначе. Перечислим ребра H:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_6$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_7$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_8$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_8$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_8$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_8$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_5 \cup B_8$$

$$A_1 \cup C \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8$$

$$A_2 \cup C \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8$$

$$A_3 \cup C \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8.$$

Очевидно, если H имеет раскраску с разбросом 0, то $d(B_5) = d(B_6)$, где $d(X)$ — разница между количеством синих и красных вершин в X, поскольку второе ребро отличается от первого заменой B_5 на B_6. Аналогично, можно получить $d(A_i) = d(A_j)$ и $d(B_i) = d(B_j)$ для всех i, j. Положим $k := d(A_i)$, $l := d(B_i)$. Первое ребро накладывает условие $3k + 5l = 0$. Очевидно, что поскольку k и l нечетны, минимальным решением является $k = 5$, $l = -3$ (или $k = -5$, $l = 3$ что то же самое из-за красно-синей симметрии). С другой стороны, глядя на последнее ребро, видим $|k + 8l| \leq |t|$, что противоречит с $|k + 8l| \geq 19 > |t|$.

Поэтому в случае $19 \nmid n$ мы получили пример n-однородного гиперграфа с 11-ю ребрами и положительным разбросом.

4.3. Доказательства

Доказательство теоремы 4.1.2. Для краткости обозначим $\operatorname{snd}(n)$ за q. Мы должны построить гиперграф с не более чем $c \log q$ ребрами и положительным разбросом. Возьмем такое m, что $2^m - 1 \leqslant q \leqslant 2^{m+1} - 2$. Тогда

$$q - (2^m - 1) = \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_i 2^i \quad \text{для некого} \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\},$$

таким образом,

$$q = \sum_{i=0}^{m-1} \eta_i 2^i, \text{ где } \eta_i = 1 + \varepsilon_i \in \{1, 2\}.$$

Сначала предположим, что q нечетно. Рассмотрим m векторов в $\mathbb{Z}^m$:

$$v_0 = (\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}),$$

$$v_i = (\eta_0, \ldots, \eta_{i-2}, \eta_{i-1} + 2, \eta_i - 1, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_{m-1}) \ \text{ для } \ i = 1, \ldots, m-1.$$

Заметим, что вектор $u = (1, 2, \ldots, 2^{m-1})$ удовлетворяет системе линейных уравнений:

$$\langle v_i, u \rangle = q; \quad i = 0, \ldots, m-1.$$

Выберем такое нечетное $\delta \in (-q, q)$, что $x_0 := \frac{n + \eta_{m-1}\delta}{q}$ — натуральное. Определим

$$x_i := 2^i x_0 \ \text{ для } \ i = 1, \ldots, m-2; \quad x_{m-1} := 2^{m-1} x_0 - \delta,$$

тогда вектор $x = (x_0, \ldots, x_{m-1})$ удовлетворяет $\langle v_i, x \rangle = n$ для $i = 1, \ldots, m-2$, $\langle v_{m-1}, x \rangle = n + \delta$.

В случае $q = 2^m \geqslant 8$ мы имеем $n \equiv 2^{m-1} \pmod q$ и $\eta_0 = 2, \eta_1 = \cdots = \eta_{m-1} = 1$.

Выберем $x = (x_0, \ldots, x_{m-1})$, так что $\langle v_1, x \rangle = \langle v_{m-1}, x \rangle = n + 1$ и $\langle v_i, x \rangle = n$

для $i=0,2,3,\ldots,m-2$. Тогда единственное решение системы

$$x_0 := \frac{n+2^{m-1}}{q}; \quad x_1 := 2x_0 - 1;$$

$$x_i := 2^{i-1}x_1 \text{ для } i=2,\ldots,m-2; \quad x_{m-1} := 2^{m-2}x_1 - 1.$$

Теперь построим гиперграф следующим образом: для $i=1,\ldots m$ рассмотрим 4 множества вершин A_i^j ($j=1,\ldots,4$) размера x_i так что все A_i^j не пересекаются. Положим ребро e_0 объединением A_i^j по $1\le i\le m$ и $1\le j\le \eta_i$. По определению x_i и η_i имеем $|e_0|=n$. Теперь рассмотрим ребро

$$\bigcup_{\substack{1\le j\le \eta_i \quad \text{для} \quad i\ne k\\ j\in R \quad \text{для} \quad i=k}} A_i^j$$

для каждого k и для каждого $R\subset[4]$, такого что $|R|=\eta_k$. Ясно, что на данный момент мы взяли не более $6m$ ребер. Наконец для каждого $1\le k\le m-1$ добавим ребро

$$\bigcup_{\substack{1\le j\le \eta_i \quad \text{для} \quad i\ne k,k-1\\ 1\le j\le \eta_i+2 \quad \text{для} \quad i=k-1\\ 1\le j\le \eta_i-1 \quad \text{для} \quad i=k}} A_i^j.$$

В итоге, мы построили гиперграф с не более чем $7m$ ребрами; размер не более двух из них отличен от n. Исправим их самым простым способом: если ребро имеет размер меньше n, тогда добавим произвольные вершины, иначе удалим произвольные вершины.

Предположим, что наш гиперграф имеет разброс 0, то есть существует подходящая раскраска π. Для множества вершин A_i^j обозначим за $d(A_i^j)$ разницу между количествами красных и синих вершин в раскраске π в A_i^j. Очевидно, $d(A_i^{j_1}) = d(A_i^{j_2})$ поскольку найдутся ребра e_1, e_2, такие что $e_1\Delta e_2 = A_i^{j_1}\cup A_i^{j_2}$. Значит можно писать d_i вместо $d(A_i^j)$.

Если q нечетно, тогда вектор $d=(d_0,\ldots,d_{m-1})$ удовлетворяет

$$\langle v_i, d\rangle = 0 \;\text{ для }\; i=0,1,\ldots,m-2 \;\text{ и }\; \langle v_{m-1}, d\rangle = s$$

для некого нечетного $s \in (-q, q)$. Таким образом,

$$d_i = 2^i d_0 \text{ для } i = 0, \dots, m-2; \quad d_{m-1} = 2^{m-1} d_0 - s;$$

$$0 = \sum \eta_i d_i = d_0 q - \eta_{m-1} s,$$

что неверно по модулю q. Противоречие. В случае $q = 2^m$ получается похожее противоречие, поскольку $(2^{m-1} - 1) \pm 1$ не делится на 2^m.

Поэтому, мы получили гиперграф с $7m = O(\log q)$ ребрами и положительным разбросом; утверждение доказано. $\square$

4.4. Следствия и дальнейшие вопросы

- На самом деле, по ходу доказательства мы построили матрицу размера $O(\log k)$ с ограниченными целыми элементами и определителем k. По неравенству Адамара, определитель k матрицы $m \times m$ с ограниченными элементами удовлетворяет $k = O(\sqrt{m})^m$, следовательно $\log k = O(m \log m)$, $m \geq \text{const} \cdot \log k / \log\log k$. Мы предполагаем, что матрица размера $O(\log k / \log\log k)$ с ограниченными натуральными элементами и определителем k всегда существует; более того, она удовлетворяет дополнительным свойствам, позволяющим заменить верхнюю оценку на $f(n) \leq c \log \operatorname{snd}(n) / \log\log \operatorname{snd}(n)$ (что асимптотически совпадает с нижней оценкой с точностью до константы).

- Случается, что для некоторых значений t (зависящих только от $n \mod \det A$) гиперграф, построенный их матрицы, имеет разброс отделенный от нуля. В частности, в примере из Параграфа 4.2 выбор $t \in \{\pm 9, \pm 11\}$ приводит к гиперграфу с разбросом 6.

- Используя Теорему 4.1.2, можно построить n-однородный гиперграф с разбросом не менее r и $O(\log \operatorname{snd}[n/r])^r$ ребрами (здесь $[x]$ означает ближайшее число к x), следующим способом: пусть H_0 — гиперграф, реализующий $f([n/r])$, $H_1, \dots, H_{2r-1}$ — непересекающиеся по вершинам копии H. Пусть $V := V(H_1) \sqcup \dots \sqcup V(H_{2r-1})$, $E := \{\sqcup e_i \mid i \in A \subset [2r-1], |A| = r\}$. По определению, H_i имеет разброс хотя бы 2; следовательно по принципу Дирихле (V, E) имеет разброс хотя бы $2r$. Определим $l := r[n/r] - n$. Наконец, если $l > 0$, исключим произвольные l вершин из каждого ребра $e \in E$; иначе добавим произвольные l вершин в каждое ребро $e \in E$; обозначим результат за H. По определению $l \leq r$, то есть разброс H не меньше r. Поскольку $|E(H_i)| = f([n/r])$, имеем

$$|E(H)| = \binom{2r-1}{r} f([n/r])^r = O(\log \operatorname{snd}[n/r])^r \leq O(\log\log n)^r.$$

- А. М. Райгородский независимо поставил основной вопрос этой главы в более общей форме: рассмотрим величину $m_k(n)$ — минимальное количество ребер в гиперграфе без вершинной 2-раскраски, такой что любое ребро содержит хотя бы k синих вершин и хотя бы k красных вершин. То есть $m_k(n)$ это минимальное количество ребер в гиперграфе с разбросом хотя бы $n - 2k + 2$, в частности $f(n) = m_{n/2}(n)$ и $m_1(n) = m(n)$.

  Посмотреть историю вопроса и лучшие оценки на $m_k(n)$ можно в [2]. Заметим, что основной результат этой главы заменяет оценку $m_k(2k + r) = O(\log k)^{r+1}$ [3] на $m_k(2k + r) = O(\log\log k)^{r+1}$ при фиксированном r. Стоит отметить, что при $n = O(k)$ поведение $m_k(n)$ совершенно неизвестно.

Глава 5. Раскраски пересекающихся семейств и накрест-пересекающихся семейств

5.1. Постановка задачи

Определение 5.1.1. *Пересекающееся множество — это гиперграф* $H = (V, E)$, *такой что* $e \cap f \neq \emptyset$ *для любых* $e, f \in E$.

Пересекающиеся семейства появились в комбинаторике в статье Эрдёша, Ко и Радо [24], в которой находится максимальное количество элементов в n-однородном пересекающемся семействе на данном множестве вершин.

Затем Эрдёш и Ловас [27] перенесли классические задачи о раскрасках гиперграфов на подкласс пересекающихся семейств. Нетрудно видеть, что пересекающееся семейство может иметь хроматическое число только 2 или 3; основной интерес представляют гиперграфы с хроматическим числом 3.

Определение 5.1.2. *Накрест-пересекающееся семейство — это гиперграф* $H = (V, E)$, *снабженный (не обязательно непересекающимся) покрытием* $E = A \cup B$ *непустыми множествами ребер* A *и* B, *таким что любое* $a \in A$ *пересекает любое* $b \in B$. *Допуская небольшие нарушения обозначений, мы используем как* $H = (V, E)$ *так и* $H = (V, A, B)$.

Накрест-пересекающиеся семейства появились при изучении максимальных и почти максимальных пересекающихся семейств (обозначения появились в [42]). Теорема Хилтона – Милнера [34] использует это понятие для определения максимального числа ребер в n-однородном пересекающемся семействе с пустым пересечением на данном множестве вершин. Теорема Франкла [28] уточняет теорему Хилтона – Милнера в случае, когда максимальная степень вершины ограничена.

Недавно общий подход к упомянутым проблемам был предложен Купавским и Захаровым [40] (читатель может также использовать эту работу как обзор).

5.2. Хроматическое число

Сперва заметим, что накрест-пересекающееся семейство может иметь произвольно большое хроматическое число.

Пример 5.2.1. *Рассмотрим произвольное натуральное $r > 1$. Рассмотрим гиперграф $H_0 = (V_0, E_0)$ с хроматическим числом r. Положим $A := E_0$, $B := \{V_0\}$. Очевидно, $H := (V_0, A, B)$ — накрест-пересекающееся семейство с хроматическим числом r.*

Однако, при естественных условиях (которые, очевидно, выполняются для n-однородных гиперграфов) хроматическое число накрест-пересекающегося семейства ограничено.

Утверждение 5.2.2. *Пусть $H = (V, A, B)$ — накрест-пересекающееся семейство. Предположим, что A и B оба содержат минимальные элементы E, то есть найдутся такие $a \in A$, $b \in B$, что a и b не содержат подребер H. Тогда $\chi(H) \leq 4$.*

Доказательство. Покрасим $a \cap b$ в цвет 1, $a \setminus b$ в цвет 2, $b \setminus a$ в цвет 3, а все остальные вершины в цвет 4. Нетрудно видеть, что раскраска правильная, поскольку a и b не содержат подребер. $\square$

Оказывается, что если не найдется такой пары ребер e_1, $e_2 \in E$ что $e_1 \subset e_2$ и любое ребро имеет размер хотя бы 3, тогда накрест-пересекающееся семейства может иметь хроматическое число только 2 или 3. Более того, верна следующая теорема.

Теорема 5.2.3. *Пусть $H = (V, A, B)$ — накрест-пересекающееся семейство без пары ребер $e_1, e_2 \in A \cup B$ такой, что $e_1 \subset e_2$ (то есть (V, E) — система Шпернера). Тогда $\chi(H) \leq 3$ или $V := \{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots u_l\}$; $B := \{\{v_1, \ldots, v_m\}, \{u_1, \ldots u_l\}\}$; $A := \{\{v_i, u_j\}$ для всех $i, j\}$ (по модулю A-B симметрии), где m, $l \geq 2$.*

Следствие 5.2.4. *Пусть $H = (V, A, B)$ — n-однородное накрест-пересекающееся семейство. Тогда $\chi(H) \leq 3$ или $n = 2$ и H — полный граф на четырех вершинах.*

Следствие 5.2.5. *Пусть $H = (V, A, B)$ — накрест-пересекающееся семейство и* $\min(|A|, |B|) \geq 3$. *Тогда $\chi(H) \leq 3$.*

5.3. Максимальное число ребер

Оказывается, что максимальное число ребер в "нетривиальном" пересекающемся n-однородном семействе ограничено. Есть два классических способа формализовать понятие "нетривиальный". Первый из них — сказать, что $\chi(H) \geq 3$ (обозначим соответствующий максимум за $M(n)$). Второй способ говорит, что H нетривиальный, если и только если $\tau(H) = n$ (обозначим соответствующий максимум за $r(n)$), где $\tau(H)$ определено ниже.

Определение 5.3.1. *Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф. Назовем покрывающим числом $\tau(H)$ (также используются понятия трансверсальное число или блокирующим числом) гиперграфа H наименьший размер множества $A \subset V$, такого что любое $e \in E$ пересекает A.*

5.3.1. Верхние оценки.

Заметим, что $M(n) \leq r(n)$, поскольку при $\tau(H) < n$ можно покрасить произвольное минимальное покрывающее множество в первый цвет, а оставшиеся вершины во второй, получив правильную 2-раскраску. Эрдёш и Ловас доказали [27], что $r(n) \leq n^n$ (можно найти несколько лучшие оценки в [21, 17, 13]). Наилучшая на данный момент верхняя оценка — $r(n) \leq n^n e^{-n^{1/4}/6}$ (см. [44]). Несколько удивительно, что мы можем доказать невероятно похожее утверждение и для накрест-пересекающихся семейств. Введем понятие "нетривиальности" для накрест-пересекающихся множеств.

Определение 5.3.2. *Назовем накрест-пересекающееся семейство $H = (V, A, B)$ критическим если*

- *для любого ребра $a \in A$ и любой вершины $v \in a$ найдется $b \in B$, такое что $a \cap b = \{v\}$;*

- *для любого ребра $b \in B$ и любой вершины $v \in b$ найдется $a \in A$, такое что $a \cap b = \{v\}$.*

Заметим, что если n-однородное пересекающееся семейство $H = (V, E)$ имеет $\tau(H) = n$ то (V, E, E) является критическим накрест-пересекающимся семейством.

Теорема 5.3.3. *Пусть $H = (V, A, B)$ — критическое накрест-пересекающееся семейство. Обозначим*

$$n := \max_{e \in A \cup B} |e|.$$

Тогда

$$\max(|A|, |B|) \leq n^n.$$

5.3.2. Нижние оценки.

Ловас предположил, что $M(n) = [(e-1)n!]$ (пример построен в [27]). Это было опровергнуто Франклом, Отой и Токушиге [29]. Они привели явный пример n-однородного гиперграфа H с $\tau(H) = n$ и с количеством ребер не менее

$$c\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}. \tag{5.1}$$

Для накрест-пересекающихся семейств Пример 5.5.4 показывает точность Теоремы 5.3.3.

5.4. Множество мощностей попарных пересечений ребер

Определение 5.4.1. *Для гиперграфа $H = (V, E)$ рассмотрим множество попарных пересечений ребер:*

$$Q(H) := \{|e_1 \cap e_2|, e_1, e_2 \in E\}.$$

Эрдёш и Ловас показали, что для n-однородного пересекающегося семейства H с $\chi(H) = 3$ имеем $3 \le |Q(H)|$ для достаточно большого n, но неизвестен ни один пример с $|Q(H)| < \frac{n-1}{2}$. Для накрест-пересекающихся семейств существует простой пример с $|Q(H)| = 4$.

Теорема 5.4.2. *Существует n-однородное накрест-пересекающееся семейство H с $Q(H) = \{0, 1, 2, n-1\}$ и $\chi(H) = 3$.*

Пример 5.5.5 доказывает Теорему 5.4.2.

5.5. Примеры

Существует способ построения большого семейства (критических) накрест-пересекающихся семейств с хроматическим числом 3, основанный на перколяции. Этот метод позволяет строить гиперграф по планарной триангуляции, которая может быть сгенерирована хорошо известными случайными процессами.

Пример 5.5.1. *Рассмотрим планарную триангуляцию с внешней гранью F, размером хотя бы 4. Поделим F на 4 непересекающихся связных части F_1, F_2, F_3, F_4. Обозначим за A_0 множество наборов вершин, образующих простой путь из F_1 в F_3; за B_0 — множество наборов вершин, образующих простой путь из F_2 в F_4. Наконец, пусть $A \subset A_0$, $B \subset B_0$ — множества минимальных (по включению) подмножеств; $H := (V, A, B)$.*

Очевидно, $\chi(H) = 3$ (можно видеть, что примеры гиперграфов с хроматическим числом 4 не могут быть получены из планарных триангуляций).

Замечание 5.5.2. *Эта конструкция может быть обобщена на пересекающиеся семейства следующим образом. Рассмотрим планарную триангуляцию с внешней гранью F и отмеченной точкой во внутренности. Затем рассмотрим все связные подмножества вершин, содержащие циклы вокруг отмеченной точки, а также вершину из F. Переходя к минимальным (по включению) множествам, мы получаем пересекающийся гиперграф с хроматическим числом 3.*

Для данного $n > 2$ существует n-однородное накрест-пересекающееся семейство (не критическое) с хроматическим числом 3 и произвольно большим числом ребер.

Пример 5.5.3. *Пусть m — произвольно большое натуральное число. Положим $V(H) := \{v_1, \dots, v_{2n-1}\} \cup \{u_1, \dots, u_m\}$; $E(H) := A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$, где $A_1 \cup B_1$ — множество всех n-подмножеств $\{v_1, \dots, v_{2n-1}\}$, A_1 содержит ребра, пересекающие $\{v_1, \dots v_{n-1}\}$, B_1 содержит ребра, пересекающие $\{v_1, v_n, \dots, v_{2n-3}\}$ (то есть $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$),*

$$B_2 := \{\{v_1, \dots v_{n-1}, u_i\} \text{ для всех } i\},$$

$$A_2 := \{\{v_1, v_n, \dots, v_{2n-3}, u_i\} \text{ для всех } i\}.$$

Заметим, что $H_1 := (V_1, A_1 \cup B_1)$ имеет хроматическое число 3, то есть $\chi(H) \geq 3$, и по Следствию 5.2.4 имеем $\chi(H) = 3$.

Давайте покажем, что H — накрест-пересекающееся семейство. Поскольку A_1, $B_1 \subset V_1$, любое ребро из A_1 пересекает любое ребро из B_1. Любое ребро из A_2 содержит $\{v_1, \dots v_{n-1}\}$, то есть оно пересекается с любым ребром из B_1; по симметрии то же верно для B_2 и A_1. Также любое ребро из A_2 пересекается с любым ребром из B_2 по вершине v_1.

Пример 5.5.4. *Рассмотрим произвольное $n > 2$. Пусть $V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, $A := \{\{v_{i1}, \dots v_{in}\} \mid 1 \leq i \leq n\}$, $B := \{\{v_{1i_1}, v_{2i_2}, \dots, \ v_{ni_n}\} \mid 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n\}$. Заметим, что $|A| = n$, $|B| = n^n$. Очевидно, $H := (V, A, B)$ — накрест-пересекающееся семейство и $\chi(H) = 3$.*

Пример 5.5.5 (Доказательство Теоремы 5.4.2)**.** *Наша конструкция основана на следующем объекте.*

Определение 5.5.6. *Гиперграф называется простым, если любые два ребра пересекаются не более чем по одной вершине.*

Рассмотрим $(n-1)$-однородный простой гиперграф $H_0 = (V_0, E_0)$ с $\chi(H) = 3$ (такие конструкции есть в [27, 37]). Обозначим $V := V_0 \sqcup \{u_1, \dots, u_n\}$, $B := \{\{u_1, \dots, u_n\}\}$, $A := \{e \cup \{u_i\} | e \in E_0, 1 \leq i \leq n\}$. По определению, H — n-однородное накрест-пересекающееся семейство.

Давайте покажем, что $\chi(H) = 3$. Предположим противное, то есть что 2-раскраска V без одноцветных ребер из $A \cup B$. По определению H_0, любая раскраска V_0 дает одноцветное (скажем, синее) ребро $e \in E_0$. Тогда любая вершина

u_i является красной, иначе $e \cup \{u_i\}$ одноцветно. Значит, ребро $\{u_1, \ldots, u_n\}$ — красное, противоречие.

Заметим, что $Q(H_0) = \{0, 1\}$, то есть $Q(H) = \{0, 1, 2, n-1\}$.

5.6. Доказательства

Доказательство Теоремы 5.2.3. Сперва предположим, что у нас нет ребер размера 2. Мы покажем, что в этом случае $\chi(H) \le 3$. Рассмотрим пару $a \in A$, $b \in B$, которая реализует минимум $|a \cup b|$. Выберем произвольные вершины $v_a \in a \setminus b$ и $v_b \in b \setminus a$. Покрасим v_a и v_bв цвет 1, $a \cup b \setminus \{v_a, v_b\}$ в цвет 2, а оставшиеся вершины в цвет 3.

Покажем, что эта раскраска правильная. Поскольку любое ребро имеет размер хотя бы 3, у нас нет ребер цвета 1. Любое ребро пересекает a или b, то есть нет и ребер цвета 3. Предположим, что у нас есть ребро e цвета 2. Не умаляя общности, $e \in A$. Тогда $e \subset |a \cup b \setminus \{v_a\}|$, значит $|e \cup b| < |a \cup b|$, противоречие.

Перейдем к случаю $\{u, v\} \in E(H)$. Предположим, что $\chi(H) > 3$ и покажем, что H имеет предписанную структуру.

Лемма 5.6.1. *Пусть в предположениях теоремы 5.2.3 $a = \{u, v\} \in A$, $u \in b \in B$. Тогда для любого $w \in B$ существует ребро $\{v, w\} \in E(H)$ или $\chi(H) \le 3$.*

Доказательство. Предположим, что $\chi(H) > 3$. Тогда для каждого $w \in b$ существует ребро $\{w, v\} \in E(H)$, иначе можно покрасить v, w в цвет 1, $b \setminus w$ в цвет 2, в все оставшиеся вершины в цвет 3, получив правильную 3-раскраску. □

Не умаляя общности, $\{u, v\} \in A$. Рассмотрим произвольное ребро $b \in B$ (не умаляя общности, $u \in b$). По Лемме 5.6.1 для любой вершины $w \in b$ ребро $\{v, w\}$ содержится в $E(H)$. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. Предположим, что для некого $w \in b$ существует ребро $\{v, w\} \in B$. Тогда, по Лемме 5.6.1 (для $a = \{u, v\}$ и $b = \{v, w\}$) у нас есть $\{u, w\} \in E(H)$, то есть $b = \{u, w\}$. Следовательно, H содержит треугольник $\{u, v, w\}$ с ребрами и в A и в B ($\star$). Если H совпадает с треугольником на $\{u, v, w\}$, то $\chi(H) = 3$. Иначе, H содержит ребро e, не пересекающее одно из ребер $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$. Сменим обозначения следующим образом: $\{u, v, w\} = \{q, r, s\}$, где e, $\{q, r\} \in B$

и $e \cap \{q, r\} = \emptyset$. Заметим, что одно из ребер $\{q, s\}$, $\{r, s\}$ лежит в A (не умаляя общности, это $\{q, s\}$).

По Лемме 5.6.1 (для $a = \{q, s\}$ и $b = e$) для любого $t \in e$ существует ребро $\{q, t\}$. Если $\{r, s\} \in B$, то для каждого $t \in e \setminus s$ имеем $\{q, t\} \in B$. Тогда по Лемме 5.6.1 (для $a = \{q, s\}$ и $b = \{q, t\}$) существует ребро $\{s, t\}$; значит $e = \{s, t\}$, следовательно H является полным графом на четырех вершинах и $\chi(H) = 4$. Если $\{r, s\} \in A$, то снова по Лемме 5.6.1 (для $a = \{r, s\}$ и $b = e$) существует ребро $\{r, t\}$ для любого $t \in e$. Итого, существуют ребра $\{q, r\}$, $e \in B$, $\{q, s\} \in A$ и $\{x, t\} \in E(H)$ для любого выбора $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$.

Ясно, что можно полагать $|e| > 2$. Это значит, что найдутся различные $s, t_1, t_2 \in e$. Заметим, что $\{r, t_1\} \in A$ поскольку $\{q, s\} \in A$, то есть $\{q, t_2\} \in A$. Поэтому для любого выбора $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$, A содержит ребро $\{x, t\}$. Очевидно, любое ребро гиперграфа или пересекает оба ребра $\{q, r\}$ и e (тогда оно совпадает с каким-то из ребер $\{x, t\}$, где $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$) или содержит одно из них (тогда оно совпадает с $\{q, r\}$ или e). Следовательно, мы перечислили все ребра гиперграфа, и в этом случае утверждение доказано. Заметим также, что множества цветов в $\{q, r\}$ не пересекает множество цветов в e, так что $\chi(H) = 4$.

Случай 2. Все ребра $\{v, w\}$ лежат в A. Если $|B| = 1$, то $\chi(H) \leq 3$, значит существует ребро $b' \in B$, не содержащее u. Предположим, что $b \cap b' = \emptyset$. Тогда для любого $w \in b$ и $t' \in b'$ по Лемме 5.6.1 (для $a = \{v, w\}$ и b') существуют ребра $\{w, t'\}$. Очевидно, все эти ребра лежат в A, иначе мы можем обратиться к первому случаю. (если $\{w, t'\} \in B$, то $\{w, v\} \in A$, $\{w, t'\}$, $b' \in B$). Следовательно, H устроен так как было заявлено.

Наконец, если $b \cap b' \neq \emptyset$, то по Лемме 5.6.1 для $a = \{u, v\}$ и b имеем, что для какого-то $t \in b \cap b'$ существует ребро $\{v, t\}$. Тогда $b' = \{v, t\}$. Аналогично, $b = \{u, t\}$. Условие $(\star)$ выполняется, и доказательство завершено.

$\square$

Доказательство Теоремы 5.3.3. Мы нуждаемся в следующем определении.

Определение 5.6.2. *Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф, а W — подмножество V. Положим*

$$H_W := (V \setminus W, \{e \setminus W \mid e \in E\}).$$

Тогда H является цветком с k лепестками и ядром W если $\tau(H_W) \geq k$.

Следующая лемма была доказана Харстадом, Юхной и Пудлаком [32]. Мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

Лемма 5.6.3. *Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф; $n := \max_{e \in E} |e|$. Если $|E| > (k-1)^n$, то H содержит цветок с k лепестками.*

Доказательство. Индукция по n. База $n = 1$ очевидна.

Предположим, что утверждение верно для $n-1$, и докажем его для n. Если $\tau(H) \geq k$, то H сам является цветком с k лепестками (и пустым ядром). Иначе, некое множество размера $k-1$ пересекает все ребра H, и следовательно не менее $|E|/(k-1)$ ребер проходит через некую вершину x. Гиперграф $H_{\{x\}} = (V_{\{x\}}, E_{\{x\}})$ имеет

$$|E_{\{x\}}| \geq \frac{|E|}{k-1} > (k-1)^{n-1}$$

ребер, каждое размером не более $n-1$. По предположению индукции $H_{\{x\}}$ содержит цветок с k лепестками и ядром Y. Возвращая x в множества цветка, получаем цветок в H с тем же количеством лепестков и ядром $Y \cup \{x\}$. □

Теперь докажем Теорему 5.3.3. Предположим противное, то есть, не умаляя общности, $|A| \geq n^n + 1$. Тогда по Лемме 5.6.3 гиперграф содержит цветок с $(n+1)$-им лепестком. Это значит, что для каждое множество $b \in B$ пересекает ядро цветка, то есть H не критический. Противоречие. □

Глава 6. Заключение

Несмотря на внимание выдающихся ученых и огромное количество недавних достижений, многие вопросы все еще настойчиво требуют ответа. Перечислим некоторые из них.

Прежде всего, интересна асимптотика величин $m(n,r)$ и $p(n,r)$. Вероятно, не существует единого метода, описывающего поведение вышеупомянутых величин при произвольных n и r, что представляет дополнительную трудность. По моему мнению наиболее принципиальное препятствие представляет собой отсутствие сильной верхней оценки на величину $m(n,2)$.

Далее, интересно поведение величины $f(n)$; в частности, зависит ли она только от $\mathrm{snd}(n)$.

Наконец, интерес представляют вопросы о раскрасках конкретных классов гиперграфов. Эрдёш и Ловас [27] поставили ряд вопросов о раскрасках пересекающихся семейств и о раскрасках простых гиперграфов. С простыми гиперграфами дело обстоит достаточно неплохо, см. [39, 37]. В то же время, несмотря на то, что условия на пересечения очень сильны, они не приводят к лучшей нижней оценке. С другой стороны, верхняя оценка (5.1) доказывается вероятностными методами, неприменимыми для пересекающихся семейств. Текущая асимптотически лучшая оценка [27] это $7^{\frac{n-1}{2}}$ для $n = 3^k$, которая получается итерированием плоскости Фано.

Другой вопрос состоит в определении минимального размера $a(n)$ максимального пересечения ребер в n-однородном пересекающемся семействе. Вот наилучшие на текущий момент оценки:

$$\frac{n}{\log_2 n} \leq a(n) \leq n - 2.$$

Изучение вышеупомянутых свойств для накрест-пересекающихся семейств также представляет интерес.

Как уже было сказано, пример 5.5.4 показывает точность теоремы 5.3.3. С другой стороны, $\max\min(|A|,|B|)$ по всем накрест-пересекающимся семействам с хроматическим числом 3 неизвестен. Заметим, что можно взять пример Франкла, Оты и Токушиге, положить $A = B = E$, получив в итоге нижнюю оценку (5.1).

Литература

[1] Анастасия П. Розовская and Дмитрий А. Шабанов. О правильных раскрасках гиперграфов в предписанные цвета. *Дискретная математика*, 22(3):94–109, 2010.

[2] С. М. Тепляков. Верхняя оценка в задаче Эрдеша – Хайнала о раскраске гиперграфа. *Математические заметки*, 93(1):148–151, 2013.

[3] Д. Д. Черкашин and А. Б. Куликов. О двухцветных раскрасках гиперграфов. *Доклады Академии наук*, 436(3):316–319, 2011.

[4] Дмитрий А. Шабанов. О хроматическом числе конечных систем подмножеств. *Математические заметки*, 85(6):951–954, 2009.

[5] Дмитрий А. Шабанов. Об улучшении нижней оценки в комбинаторной задаче Эрдёша – Хайнала. *Доклады Академии Наук*, 426(2):177–178, 2009.

[6] Дмитрий А. Шабанов. О нижних оценках числа ребер гиперграфов из некоторых классов. *Доклады Академии Наук*, 434(1):33–37, 2010.

[7] Дмитрий А. Шабанов. О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов. *Математический сборник*, 201(4):137–160, 2010.

[8] N. Alon, D. J. Kleitman, K. Pomerance, M. Saks, and P. Seymour. The smallest n-uniform hypergraph with positive discrepancy. *Combinatorica*, 7(2):151–160, 1987.

[9] Noga Alon. Hypergraphs with high chromatic number. *Graphs and Combinatorics*, 1(1):387–389, 1985.

[10] Noga Alon. Choice numbers of graphs: a probabilistic approach. *Combinatorics, Probability and Computing*, 1(02):107–114, 1992.

[11] Noga Alon, Joel H. Spencer, and Paul Erdős. *The probabilistic method*. John Wiley & Sons, 2016.

[12] Noga Alon and Văn H. Vũ. Anti-Hadamard matrices, coin weighing, threshold gates, and indecomposable hypergraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 79(1):133–160, 1997.

[13] Andrii Arman and Troy Retter. An upper bound for the size of a k-uniform intersecting family with covering number k. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 147:18–26, 2017.

[14] J. Beck. On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász. *Discrete Mathematics*, 17(2):127–131, 1977.

[15] J. Beck. On 3-chromatic hypergraphs. *Discrete mathematics*, 24(2):127–137, 1978.

[16] Marthe Bonamy and Ross J. Kang. List coloring with a bounded palette. *Journal of Graph Theory*, 84(1):93–103, 2017.

[17] D. D. Cherkashin, A. B. Kulikov, and A. M. Raigorodskii. On hypergraph cliques with chromatic number 3 and a given number of vertices. *Труды Московского физико-технического института*, 4(1):151–156, 2012.

[18] Danila Cherkashin. Coloring cross-intersecting families. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 25(1):#P1.47, 2018.

[19] Danila Cherkashin. A note on panchromatic colorings. *Discrete Mathematics*, 341(3):652–657, 2018.

[20] Danila Cherkashin and Fedor Petrov. On small n-uniform hypergraphs with positive discrepancy. *arXiv preprint arXiv:1706.05539*, 2017.

[21] Danila D. Cherkashin. About maximal number of edges in hypergraph-clique with chromatic number 3. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 1(3):3–11, 2011.

[22] Danila D. Cherkashin and Jakub Kozik. A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs. *Random Structures & Algorithms*, 47(3):407–413, 2015.

[23] Paul Erdős. On a combinatorial problem. *Nordisk Matematisk Tidskrift*, 11:5–10, 1963.

[24] P. Erdős, C. Ko, and R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser.(2)*, 12:313–320, 1961.

[25] Paul Erdős. On a combinatorial problem, II. *Acta Mathematica Hungarica*, 15(3-4):445–447, 1964.

[26] Paul Erdős and András Hajnal. On a property of families of sets. *Acta Mathematica Hungarica*, 12(1-2):87–123, 1961.

[27] Paul Erdős and László Lovász. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Infinite and finite sets*, 10(2):609–627, 1975.

[28] Peter Frankl. Erdős–Ko–Rado theorem with conditions on the maximal degree. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 46(2):252–263, 1987.

[29] Peter Frankl, Katsuhiro Ota, and Norihide Tokushige. Covers in uniform intersecting families and a counterexample to a conjecture of Lovász. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 74(1):33–42, 1996.

[30] Heidi Gebauer. On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120(7):1483–1490, 2013.

[31] David G. Harris and Aravind Srinivasan. Algorithmic and enumerative aspects of the Moser–Tardos distribution. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 13(3):33, 2017.

[32] Johan Håstad, Stasys Jukna, and Pavel Pudlák. Top-down lower bounds for depth-three circuits. *Computational Complexity*, 5(2):99–112, 1995.

[33] M. Herzog and J. Schönheim. The B_r property and chromatic numbers of generalized graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 12(1):41–49, 1972.

[34] Anthony J. W. Hilton and Eric C. Milner. Some intersection theorems for systems of finite sets. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 18(1):369–384, 1967.

[35] Alexandr Kostochka. On a theorem of Erdős, Rubin, and Taylor on choosability of complete bipartite graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 9(9):1, 2002.

[36] Alexandr Kostochka. Coloring uniform hypergraphs with few colors. *Random Structures & Algorithms*, 24(1):1–10, 2004.

[37] Alexandr V. Kostochka and Vojtech Rödl. Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number. *Random Structures & Algorithms*, 36(1):46–56, 2010.

[38] Alexandr V. Kostochka and Douglas R. Woodall. Density conditions for panchromatic colourings of hypergraphs. *Combinatorica*, 21(4):515–541, 2001.

[39] Jakub Kozik and Dmitry Shabanov. Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 116:312–332, 2016.

[40] Andrey Kupavskii and Dmitriy Zakharov. Regular bipartite graphs and intersecting families. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 155:180–189, 2018.

[41] László Lovász. On the ratio of optimal integral and fractional covers. *Discrete mathematics*, 13(4):383–390, 1975.

[42] Makoto Matsumoto and Norihide Tokushige. The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem for cross-intersecting families. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 52(1):90–97, 1989.

[43] Patric R. J. Östergård. On the minimum size of 4-uniform hypergraphs without property *B*. *Discrete Applied Mathematics*, 163:199–204, 2014.

[44] Peter Frankl. A near exponential improvement on a bound of Erdős and Lovász. *Preprint, https://users.renyi.hu/∼pfrankl/2017-4.pdf*, 2017.

[45] András Pluhár. Greedy colorings of uniform hypergraphs. *Random Structures & Algorithms*, 35(2):216–221, 2009.

[46] Jaikumar Radhakrishnan and Aravind Srinivasan. Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring. In *Foundations of Computer Science, 1998. Proceedings. 39th Annual Symposium on*, pages 684–693. IEEE, 1998.

[47] W. M. Schmidt. Ein kombinatorisches Problem von P. Erdős und A. Hajnal. *Acta Mathematica Hungarica*, 15(3):373–374, 1964.

[48] Dmitry A. Shabanov. On a generalization of Rubin's theorem. *Journal of Graph Theory*, 67(3):226–234, 2011.

[49] Dmitry A. Shabanov. On r-chromatic hypergraphs. *Discrete Mathematics*, 312(2):441–458, 2012.

[50] Dmitry A. Shabanov. Random coloring method in the combinatorial problem of Erdős and Lovász. *Random Structures & Algorithms*, 40(2):227–253, 2012.

[51] Alexander Sidorenko. What we know and what we do not know about Turán numbers. *Graphs and Combinatorics*, 11(2):179–199, 1995.

[52] Joel Spencer. Coloring n-sets red and blue. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 30(1):112–113, 1981.