Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Елисеева Юлия Сергеевна

Условия быстрого убывания функций концентрации сверток вероятностных распределений

01.01.05 – теория вероятностей
и математическая статистика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук А. Ю. Зайцев

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

§ 1. Введение

История вопроса

Пусть $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общим распределением $F = \mathcal{L}(X)$. Функция концентрации Леви случайной величины X определяется равенством

$$Q(F, \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}} F\{[x, x + \lambda]\}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Функция концентрации является одним из основных объектов изучения в современной теории вероятностей. В частности, интересны оценки функций концентрации сумм независимых случайных величин. Классическими среди них являются неравенства Колмогорова–Рогозина [10] и Эссеена [16], полученные в 60-е годы прошлого века. Наряду с этой задачей интенсивно изучался ее частный случай. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$. Нас интересует поведение функции концентрации случайной величины $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$ в зависимости от арифметической структуры коэффициентов a_k. В последнее время интерес к этому вопросу значительно возрос в связи с изучением распределений собственных чисел случайных матриц (см., например, [26]–[28], [32]–[34]). Авторы упомянутых выше статей (см. также [13], [20], [25]) называют этот вопрос проблемой Литтлвуда–Оффорда, так как впервые рассмотрением этой проблемы занимались Литтлвуд и Оффорд в 1943 году при изучении случайных полиномов [25]. В настоящей диссертации получены новые оценки в проблеме Литтлвуда–Оффорда. Также мы обсудим их связь с общими результатами.

Первый результат для функций концентраций взвешенных сумм был получен Литтлвудом и Оффордом [25]. При этом первые работы относились к случаю $\lambda = 0$, то есть оценивалась максимальная вероятность того, что исследуемая сумма примет некоторое конкретное значение.

Предложение 1.1. *Пусть $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятно-*

стями 1/2. *Пусть* $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ *– вектор коэффициентов, причем* $a_k \neq 0$, $|a_k| \geqslant 1$. F_a *– распределение суммы* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$. *Тогда*

$$Q(F_a, 0) = O\Big(\frac{\log n}{n^{1/2}}\Big). \tag{1.1}$$

Здесь и далее мы будем использовать асимптотические обозначения O и o в предположении, что $n \to \infty$.

Немного позднее Эрдёш [13] доказал, что выполняется следующее

Предложение 1.2. *В условиях предложения* 1.1 *справедливо*

$$Q(F_a, 0) = O\Big(\frac{1}{n^{1/2}}\Big). \tag{1.2}$$

Данная оценка является точной по порядку. Это легко увидеть, взяв $a_1 = \ldots = a_n = 1$. Однако Эрдёш и Мозер [14] показали, что данная оценка может быть значительно улучшена в случае, когда все a_k различны.

Предложение 1.3. *Если все коэффициенты* $a_1, \dots, a_n$ *различны, то*

$$Q(F_a, 0) = O\Big(\frac{\log n}{n^{3/2}}\Big). \tag{1.3}$$

Спустя некоторое время, Саркози и Семереди [31] показали, что логарифмический множитель можно убрать.

Предложение 1.4.

$$Q(F_a, 0) = O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big). \tag{1.4}$$

Увидеть, что результат точный, можно, взяв в качестве коэффициентов $a_1, \dots, a_n$ отрезок арифметической прогрессии $1, \dots, n$.

Введем некоторые обозначения. В дальнейшем F_a – распределение суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$, E_y – вероятностная мера, сосредоточенная в точке y, а G – распределение случайной величины $\widetilde{X}$, где $\widetilde{X} = X_1 - X_2$ – симметризованная случайная величина. Обозначим

$$M(\tau) = \tau^{-2} \int\limits_{|x| \leqslant \tau} x^2\, G\{dx\} + \int\limits_{|x| > \tau} G\{dx\} = \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{X}^2/\tau^2, 1\big\}, \quad \tau > 0. \tag{1.5}$$

Одной и той же буквой c мы будем обозначать положительные абсолютные постоянные, которые могут быть различными даже в пределах одной формулы. Запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leqslant cB$ и $B > 0$. Будем также писать $A \asymp B$, если $A \ll B$ и $B \ll A$. Заметим, что в условиях предложений 1.1–1.4, $Q(F_a, 0) \asymp Q(F_a, 1)$. Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ мы будем обозначать $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ и $|x| = \max_j |x_j|$.

Простейшие свойства функций концентрации хорошо изучены (см., например, монографии [3], [9], [11]). Очевидно, в частности, что $Q(F, \mu) \leqslant (1 + \lfloor \mu/\lambda \rfloor)\, Q(F, \lambda)$ для любых $\mu, \lambda > 0$, где $\lfloor x \rfloor$ – максимальное целое число, строго меньшее x. Следовательно,

$$Q(F, c\lambda) \asymp Q(F, \lambda) \tag{1.6}$$

и

$$\text{если } Q(F, \lambda) \ll K, \text{ то } Q(F, \mu) \ll K(1 + \mu/\lambda). \tag{1.7}$$

Кроме того, для любого распределения F справедливы ставшие уже классическими неравенства Эссеена [15], см. также [9] и [11]:

$$\lambda \int_0^{\lambda^{-1}} |\widehat{F}(t)|^2 \, dt \ll Q(F, \lambda) \ll \lambda \int_0^{\lambda^{-1}} |\widehat{F}(t)| \, dt, \quad \lambda > 0, \tag{1.8}$$

где $\widehat{F}(t)$ – характеристическая функция соответствующей случайной величины. Заметим, что оценки сверху и снизу в неравенствах (1.8) могут иметь разный порядок. Это связано с наличием второй степени $|\widehat{F}(t)|$ в левой части формулы (1.8). В общем случае оба неравенства (1.8) оптимальны по порядку. Однако, если дополнительно предположить, что распределение F симметрично и его характеристическая функция неотрицательна при всех $t \in \mathbf{R}$, то справедлива оценка снизу

$$Q(F, \lambda) \gg \lambda \int_0^{\lambda^{-1}} \widehat{F}(t) \, dt \tag{1.9}$$

и, тем самым,

$$Q(F, \lambda) \asymp \lambda \int_0^{\lambda^{-1}} \widehat{F}(t) \, dt \tag{1.10}$$

(см. [3], лемма 1.5 гл. II). Применение соотношения (1.10) позволит нам существенно упростить рассуждения, использованные при рассмотрении одномерной проблемы Литтлвуда–Оффорда в работах Фридланда и Содина [18], Рудельсона и Вершинина [28] и Вершинина [34].

Заметим, что проблема Литтлвуда–Оффорда является частным случаем задачи об изучении поведения функции концентрации сумм независимых случайных величин. Напомним некоторые результаты, полученные при решении этой общей задачи. Один из них – неравенство Колмогорова–Рогозина [10] (см. [3], [9], [11]).

Предложение 1.5. *Пусть* $Y_1, \ldots, Y_n$ *– независимые случайные величины с распределениями* $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *– положительные числа,* $\lambda_k \leqslant \lambda$ $(k = 1, \ldots, n)$. *Тогда*

$$Q\Big(\mathcal{L}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big), \lambda\Big) \ll \lambda \,\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \left(1 - Q(W_k, \lambda_k)\right)\Big)^{-1/2}. \tag{1.11}$$

Эссеен [16] (см. теорему 3, гл. III из [9]) уточнил этот результат, показав, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.6. *В условиях предложения* 1.5 *выполняется*

$$Q\Big(\mathcal{L}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big), \lambda\Big) \ll \lambda \,\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \, M_k(\lambda_k)\Big)^{-1/2}, \tag{1.12}$$

где $M_k(\tau) = \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{Y_k}^{\,2}/\tau^2, 1\big\}$.

В работах [2], [3], [7], [8], [12], [22] можно также найти уточнения неравенств (1.11) и (1.12).

Заметим, что из соотношений (1.11) и (1.12) для одинаково распределенных слагаемых нельзя получить оценки лучше по порядку, чем $O(n^{-1/2})$. В частности, отсюда не следуют оценки, полученные в предложении 1.4.

В диссертации рассматриваются результаты, по существу обобщающие предложения 1.3 и 1.4 на случай взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Эти результаты могут давать оценки более точные по порядку, чем оценки, полученные в работах Фридланда и Содина [18], Рудельсона и Вершинина [28] и Вершинина [34].

Рассмотрим теперь более общую, многомерную постановку задачи и сформулируем аналогичные свойства функций концентрации для этого случая. Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ по-прежнему являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Под функцией концентрации случайного $\mathbf{R}^d$-значного вектора Y с распределением $F = \mathcal{L}(Y)$ будем понимать

$$Q(F, \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \mathbf{P}(Y \in x + \lambda B), \quad \lambda \geqslant 0,$$

где $B = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leqslant 1/2\}$. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \ldots, n$. Будем называть величину a мультивектором. Нас будет интересовать поведение функции концентрации суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$ в зависимости от арифметической структуры векторов a_k.

Получить оценки функции концентрации в этом случае, когда размерность $d \geqslant 2$, гораздо сложнее. Первые оценки получили Катона [21] и Клейтман [23]. Они изучили частный случай оценивания функции концентрации, когда $d = 2$, а независимые одинаково распределенные случайные величины X_k принимают значения ± 1 с вероятностями $1/2$. Эти результаты были аналогичны результатам Эрдёша [13] для одномерного случая. А именно, было показано, что функция концентрации имеет порядок $O(n^{-1/2})$. Позднее Клейтман [24] показал, что эта оценка функции концентрации справедлива и в случае произвольной размерности $d \geqslant 2$. Обобщить эти оценки на случай случай произвольного радиуса шара и произвольной размерности $d \geqslant 2$ оказалось нелегко. Первые результаты таких обобщений получили Григгс [19], Сали [29], [30] и другие. Лучший результат без предположения о том, что все коэффициенты a_k различны, получили Франкл и Фуреди [17].

Предложение 1.7. *Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностями $1/2$. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда для любого фиксированного d и $\lambda > 0$ имеем*

$$Q(F_a, \lambda) = (1 + o(1))\, 2^{-n} S(n, s), \tag{1.13}$$

где $S(n, s)$ – сумма наибольших s биномиальных коэффициентов C_n^i, $0 \leqslant i \leqslant n$, $s = \lfloor \lambda \rfloor + 1$.

Многомерное обобщение одномерных результатов Саркози и Семереди [31] получил Халас [20] с помощью метода, основанного на анализе Фурье. Сформулированные ниже два предложения являются результатам Халаса [20].

Предложение 1.8. *Пусть выполнены условия предложения* 1.7. *Пусть существует константа $\delta > 0$, такая что для любого единичного вектора $e \in \mathbf{R}^d$ можно выбрать хотя бы δn векторов a_k с $|\langle a_k, e\rangle| \geqslant 1$. Тогда*

$$Q(F_a, 1) \leqslant c(\delta, d)\, n^{-d/2}, \tag{1.14}$$

где константа $c(\delta, d)$ зависит только от δ и d.

Предложение 1.9. *Пусть выполняются условия предложения* 1.8. *Пусть среди n^d векторов $b = \pm a_{k_1} \pm \ldots \pm a_{k_d}$ $(1 \leqslant k_i \leqslant n)$ можно выбрать по меньшей мере δn^d таких векторов, что расстояние между любыми двумя из них будет не меньше* 1. *Тогда*

$$Q(F_a, 1) \leqslant c(\delta, d)\, n^{-3d/2}, \tag{1.15}$$

где константа $c(\delta, d)$ зависит только от δ и d.

Введем обозначение, которое потребуется нам для работы над многомерной постановкой задачи. Будем писать $A \ll_d B$, если $|A| \leqslant c^d B$ и $B > 0$. Заметим, что $\ll_d$ допускает экспоненциальную зависимость констант от размерности d. Будем также писать $A \asymp_d B$, если $A \ll_d B$ и $B \ll_d A$. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$ обозначим $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Произведение вектора $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbf{R}^d$ и мультивектора a будем обозначать $t \cdot a = (\langle\, t, a_1\rangle\,, \ldots, \langle\, t, a_n\rangle) \in \mathbf{R}^n$.

Приведем теперь здесь те аналоги свойств одномерных функций концентрации, которые справедливы и для многомерных функций концентрации. Известно, что $Q(F, \mu) \ll_d (1 + \lfloor \mu/\lambda \rfloor)^d\, Q(F, \lambda)$ для любых $\mu, \lambda > 0$. Следовательно,

$$Q(F, c\lambda) \asymp_d Q(F, \lambda), \tag{1.16}$$

и

$$\text{если } Q(F, \lambda) \ll K, \text{ то } Q(F, \mu) \ll_d K(1 + (\mu/\lambda))^d. \tag{1.17}$$

Сформулируем обобщение классического неравенства Эссеена на многомерный случай (см. [15]). Для любого распределения $F = \mathcal{L}(Y)$ в $\mathbf{R}^d$ случайного вектора Y справедливо (см. лемму 3.4, [28]):

$$Q(F,\sqrt{d}) \ll_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} |\widehat{F}(t)|\, dt, \tag{1.18}$$

где $\widehat{F}(t) = \mathbf{E} \exp(i \langle t, Y \rangle)$ – характеристическая функция случайного вектора Y, а $B(\lambda)$ – шар радиуса λ. Пусть $\int\limits_{\mathbf{R}^d} |\widehat{F}(u)|\, du < \infty$ (в противном случае этого можно добиться сглаживанием) и предположим дополнительно, что распределение F симметрично и $\widehat{F}(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbf{R}$, тогда из соотношения (1.18), примененного к мере $\dfrac{\widehat{F}(t)\, dt}{\int\limits_{\mathbf{R}^d} \widehat{F}(u)\, du}$, следует, что

$$Q(F,\sqrt{d}) \gg_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{F}(t)\, dt. \tag{1.19}$$

Оценки такого вида, но с другой зависимостью от размерности d присутствуют в работе Зайцева [4]. Тем самым,

$$Q(F,\sqrt{d}) \asymp_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{F}(t)\, dt. \tag{1.20}$$

Применение соотношения (1.20) делает доказательства основных результатов данной работы проще по сравнению с рассуждениями, использованными при рассмотрении многомерной проблемы Литтлвуда–Оффорда в работах Фридланда и Содина [18], Рудельсона и Вершинина [28], Вершинина [34].

Сформулируем теперь многомерное обобщение неравенства Колмогорова–Рогозина.

Предложение 1.10. *Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые случайные векторы с распределениями $F_k = \mathcal{L}(Y_k)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – положительные числа, $\lambda_k \leqslant \lambda$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда*

$$Q\Big(\mathcal{L}\big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\big), \lambda\Big) \ll \lambda \,\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \,\big(1 - Q(\widetilde{F}_k, \lambda_k)\big)\Big)^{-1/2}, \tag{1.21}$$

где $\widetilde{F}_k$ – функция распределения соответствующего симметризованного случайного вектора.

Зигель [6] уточнил результат предложения 1.10, показав, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.11. *В условиях предложения* 1.10 *выполняется*

$$Q\Big(\mathcal{L}\big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\big), \lambda\Big) \ll \lambda\,\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 M_k(\lambda_k)\Big)^{-1/2}. \tag{1.22}$$

Заметим, что константы, фигурирующие в приведенных выше предложениях 1.10 и 1.11, не зависят от размерности пространства и являются абсолютными постоянными. Однако существуют полученные ранее оценки типа Колмогорова–Рогозина, в которых константы зависят от размерности (см., например, [10], [16]). Заметим также, что как и соответствующие одномерные аналоги, соотношения (1.21) и (1.22), примененные к суммам независимых одинаково распределенных случайных векторов, не могут дать оценки лучше по порядку, чем $O(n^{-1/2})$.

Целью настоящей диссертации является изучение проблемы Литтлвуда–Оффорда, получение уточнений результатов Фридланда и Содина [18], Рудельсона и Вершинина [28], Вершинина [34]. Данные работы близки между собой, а условия связаны со спецификой применения результатов для изучения собственных чисел случайных матриц. Мы сформулруем результаты как для одномерного случая, когда коэффициенты $a_k \in \mathbf{R}$, так и для многомерного случая, при котором коэффициенты a_k из $\mathbf{R}^d$. Мы также получим многомерное обобщение результатов работы Арака [1] (см. также [2], [3]), которая появилась задолго до работ [18], [26]–[28], [32]–[34] и посвящена изучению связи между скоростью убывания функции концентрации суммы и арифметической структурой носителей распределений независимых случайных величин.

Результаты диссертации

Диссертация состоит из шести параграфов, первый из которых составляет введение, и списка литературы.

В параграфе 2 обсуждаются результаты, полученные Фридландом и Содиным [18] при изучении проблемы Литтлвуда–Оффорда, формулируются и доказываются уточнения этих результатов. Приведем здесь формулировку основного результата второго параграфа.

Теорема 1.12. *Пусть* $X, X_1, \dots, X_n$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что* $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_k \in \mathbf{R}^d$, *и для некоторого* $\alpha > 0$ *выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} (\langle t, a_k\rangle - m_k)^2 \geqslant \alpha^2 \text{ для всех } m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z},\ t \in \mathbf{R}^d, \text{ таких что}$$
$$\max_k |\,\langle t, a_k\rangle\,| \geqslant 1/2,\ \|t\| \leqslant \sqrt{d}. \quad (1.23)$$

Тогда

$$Q(F_a, \sqrt{d}) \ll_d \Big(\frac{1}{\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp\big(-c\,\alpha^2 M(1)\big),$$

где величина $M(1)$ *определена в формуле* (1.5), *а матрица* $\mathbb{N}$ *определяется следующим образом:*

$$\mathbb{N} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{N}_k, \quad \mathbb{N}_k = \begin{pmatrix} a_{k1}^2 & a_{k1}a_{k2} & \dots & a_{k1}a_{kd} \\ a_{k2}a_{k1} & a_{k2}^2 & \dots & a_{k2}a_{kd} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{kd}a_{k1} & \dots & \dots & a_{kd}^2 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Во втором параграфе присутствуют также результат для одномерного случая и некоторые следствия, которые легче сравнивать с результатами работы Фридланда и Содина [18].

В параграфе 3 рассматриваются результаты работы Рудельсона и Вершинина [28], касающиеся проблемы Литтлвуда–Оффорда, приводится уточнение этих результатов. Сформулируем основной результат третьего параграфа.

Теорема 1.13. *Предположим, что* $X, X_1, \dots, X_n$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть* $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_k \in \mathbf{R}^d$.

Предположим, что для некоторых $\alpha > 0$ *и* $\gamma \in (0,1)$ *выполнено*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}(\langle t, a_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma\|t\cdot a\|, \alpha\} \text{ для всех } m_1,\dots,m_n \in \mathbf{Z} \text{ и } t \in \mathbf{R}^d, \|t\| \leqslant \sqrt{d}. \quad (1.25)$$

Тогда

$$Q\left(F_a, \sqrt{d}\right) \ll_d \Big(\frac{1}{\gamma\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp\left(-c\,\alpha^2 M(1)\right),$$

где величина $M(1)$ *определена в формуле* (1.5)*, а матрица* $\mathbb{N}$ *– с помощью соотношений* (1.24)*.*

В §4 приводится уточнение результата Вершинина [34], полученного при рассмотрении проблемы Литтлвуда–Оффорда. Основной результат данного параграфа формулируется следующим образом.

Теорема 1.14. *Пусть* $X, X_1, \dots, X_n$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть* $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$*,* $\|a\| = 1$*. Предположим, что выполнено следующее условие*

$$\|\, ta - m\| \geqslant f_L(t) \quad \text{при всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ и } t \in \Big[\frac{1}{2\,|a|}, D\Big], \qquad (1.26)$$

где $|a| = \max\limits_j |a_j|$*, а функция* $f_L(t)$ *определяется следующим равенством*

$$f_L(t) = \begin{cases} t/6 & \text{при } 0 < t < eL, \\ L\sqrt{\log(t/L)} & \text{при } t \geqslant eL. \end{cases} \qquad (1.27)$$

Если $L^2 \geqslant 1/M(1)$*, то*

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \ll \frac{1}{D\sqrt{M(1)}}, \qquad (1.28)$$

где величина $M(1)$ *определена в формуле* (1.5)*.*

В §5 обсуждаются оценки функций концентрации распределений сумм независимых одномерных случайных величин, полученные Араком [1] (см.

также [2], [3]), приводится многомерное обобщение этих результатов. Для его формулировки нам потребуется некоторые обозначения.

Для любых $r \in \mathbf{Z}_+$ и $u = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$, $u_j \in \mathbf{R}^d$, $j = 1, \dots, r$, определим множество

$$K_1(u) = \Big\{ \sum_{j=1}^{r} n_j u_j : n_j \in \{-1, 0, 1\} \text{ при } j = 1, \dots, r \Big\}. \tag{1.29}$$

Далее обозначим через $[B]_\tau$ замкнутую τ-окрестность множества B в смысле нормы $|\cdot|$.

Теорема 1.15. *Пусть $\tau \geqslant 0$, F_j – d-мерные вероятностные распределения, $j = 1, \dots, n$. Обозначим $\rho = Q\Big(\prod\limits_{j=1}^{n} F_j, \tau\Big)$. Тогда существует $r \in \mathbf{Z}_+$ и векторы $u_1, \dots, u_r; x_1, \dots, x_r \in \mathbf{R}^d$, такие что*

$$r \ll_d |\log \rho| + 1 \tag{1.30}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} F_j\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau + x_j\} \ll_d \big(|\log \rho| + 1\big)^3, \tag{1.31}$$

где $u = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$, а множество $K_1(u)$ определено в формуле (1.29).

В шестом параграфе формулируется и доказывается некоторая общая теорема, утверждение которой показывает, что задача оценивания функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда может быть сведена к оцениванию функций концентрации некоторых симметричных безгранично делимых распределений со спектральными мерами, определяемыми по мультивектору a. Приведем формулировку этого результата.

Для $z \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$ введем распределение $H_{z,\gamma}$ с характеристической функцией

$$\widehat{H}_{z,\gamma}(t) = \exp\Big(-\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^{n} \big(1 - \cos(2\,\langle\, t, a_k \rangle\, z)\big)\Big), \quad t \in \mathbf{R}^d. \tag{1.32}$$

Ясно, что $H_{z,\gamma}$ – симметричное безгранично делимое рапределение. Поэтому соответствующая ему характеристическая функция положительна при всех $t \in \mathbf{R}^d$. Обозначим $U_{z,\gamma} = H_{z/2,\gamma}$.

Теорема 1.16. *Пусть V – произвольная борелевская мера, такая что $\lambda = V\{\mathbf{R}\} > 0$ и $V \leqslant G$, то есть $V\{B\} \leqslant G\{B\}$ для любого борелевского множества B. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$ справедливо неравенство*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d Q(U_{1,\lambda}, \varepsilon) \exp\left(d \int\limits_{z\in\mathbf{R}} \log\left(1 + \lfloor \tau(\varepsilon|z|)^{-1} \rfloor\right) F\{dz\}\right), \tag{1.33}$$

где $F = \lambda^{-1}V$.

Результаты диссертации докладывались автором на международной конференции "Асимптотические задачи теории вероятностей и математической статистики" (Санкт-Петербург, 7–9 сентября, 2012 г.), на Российско–китайском семинаре по асимптотическим методам в теории вероятностей и математической статистике (Санкт–Петербург, 10–14 июня, 2013 г.), на международной конференции "Стохастические процессы и вероятностные распределения высокой размерности" (Санкт–Петербург, 16–20 июня, 2014 г.) и на санкт-петербургском городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (октябрь 2014 г.). Они содержатся в трех работах [35]–[37], опубликованных в журналах из списка ВАК.

Структура диссертации

Диссертация состоит из шести параграфов.

Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Менее важные или менее сложные результаты именуются леммами. Результаты других авторов сформулированы в виде предложений. Нумерация формул, теорем, лемм и предложений двойная: сначала идет номер параграфа, а затем – номер формулы, теоремы, леммы, предложения.

Общий объем диссертации составляет 64 страницы. Список литературы содержит 37 наименований.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Андрею Юрьевичу Зайцеву за постановку интересных задач, постоянное внимание и поддержку, полезные обсуждения и ценные советы. Также автор благодарен всему коллективу Санкт–Петербургской вероятностной школы за создание благоприятной научной атмосферы.

§ 2. Уточнение результатов Фридланда и Содина

В данном параграфе мы обсудим уточнения результатов работы Фридланда и Содина [18]. Для наглядности приводимых доказательств предлагается рассмотреть сначала одномерный случай, а затем привести соответствующие многомерные обобщения.

Одномерный случай

Мотивацией к появлению работы Фридланда и Содина [18] стала статья Рудельсона и Вершинина [27], в которой авторы получили верхние оценки для функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в терминах диофантовой аппроксимации вектора коэффициентов. Этот подход опирался на сложную лемму из теории меры (см. работу Халаса [20]). Фридланд и Содин показали более простой аналитический метод решения данной проблемы и получили следующий результат.

Предложение 2.1. *Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $Q(\mathcal{L}(X), 2) \leqslant 1-p$, где $p > 0$, и пусть $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$. Если для некоторых $D \geqslant \dfrac{1}{2\,|a|}$ и $\alpha > 0$ выполняется условие*

$$\|\, ta - m\| \geqslant \alpha \text{ для всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ при } t \in \Big[\frac{1}{2\,|a|}, D\Big], \tag{2.1}$$

то

$$Q(F_a, 1/D) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{p}} + \exp\big(-c\,p\,\alpha^2\big). \tag{2.2}$$

Заметим, что в работе Фридланда и Содина [18] предполагалось, что $0 < D < 1$, а в левой части неравенства (2.2) вместо $Q(F_a, 1/D)$ фигурировала величина $Q(F_a, 1)$, которая, вообще говоря, существенно меньше, чем $Q(F_a, 1/D)$ при $0 < D < 1$, поскольку тогда $1/D > 1$. Но если бы авторы [18] воспользовались своим же результатом при $D = 1$, они бы вывели из него неравенство для любого $D>0$ и с $Q(F_a,1/D)$ вместо $Q(F_a,1)$ столь же просто, как мы выведем ниже следствие 2.3 из теоремы 2.2.

Заметим также, что при $|\,t|\leqslant\dfrac{1}{2\,|a|}$ мы имеем

$$\big(\operatorname{dist}(ta,\mathbf{Z}^n)\big)^2=\sum_{k=1}^{n}\min_{m_k\in\mathbf{Z}}|\,ta_k-m_k|^2=\sum_{k=1}^{n}|\,ta_k|^2=t^2\,\|a\|^2, \tag{2.3}$$

где

$$\operatorname{dist}(ta,\mathbf{Z}^n)=\min_{m\in\mathbf{Z}^n}\|\,ta-m\|.$$

Так что предположение о том, что $|\,t|\geqslant\dfrac{1}{2\,|a|}$ в условии (2.1), естественно. Из (2.3) вытекает, что если $D=\dfrac{1}{2\,|a|}$, то условие (2.1) формально выполняется при $\alpha=\dfrac{\|a\|}{2\,|a|}$. Отсюда также следует, что при $D\geqslant\dfrac{1}{2\,|a|}$ величина α в условии (2.1) не может быть больше, чем $\dfrac{\|a\|}{2\,|a|}\leqslant\dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

Основной результат данного раздела содержится в следующей теореме.

Теорема 2.2. *Пусть $X,X_1,\dots,X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что $a\in\mathbf{R}^n$, $a\neq 0$, и для некоторого $\alpha>0$ выполнено условие* (2.1) *при $D=1$, то есть*

$$\|\,ta-m\|\geqslant\alpha \text{ для всех } m\in\mathbf{Z}^n \text{ при } t\in\Big[\frac{1}{2\,|a|},1\Big]. \tag{2.4}$$

Тогда

$$Q(F_a,1)\ll\frac{1}{\|a\|\sqrt{M(1)}}+\exp\big(-c\,\alpha^2M(1)\big),$$

где величина $M(1)$ определена в формуле (1.5).

Доказательство теоремы 2.2. Представим распределение $G=\mathcal{L}(\widetilde{X})$ в виде смеси

$$G=qE+\sum_{j=0}^{\infty}p_jG_j, \tag{2.5}$$

где $q = \mathbf{P}(\widetilde{X} = 0)$, $p_j = \mathbf{P}(\widetilde{X} \in A_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $A_0 = \{x : |x| > 1\}$, $A_j = \{x : 2^{-j} < |x| \leqslant 2^{-j+1}\}$, E – вероятностная мера, сосредоточенная в нуле, G_j – вероятностные меры, определяемые при $p_j > 0$ по формуле

$$G_j\{X\} = \frac{1}{p_j} G\{X \cap A_j\}$$

для любого борелевского множества X. Если $p_j = 0$, то в качестве G_j можно брать произвольные меры.

При $z \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$ введем безгранично делимое распределение $H_{z,\gamma}$ с характеристической функцией, определенной в формуле (1.32) при $d = 1$.

Так как для любой характеристической функции $\widehat{F}(t)$ случайной величины X справедливо равенство

$$|\widehat{F}(t)|^2 = \mathbf{E} \exp(it\widetilde{X}) = \mathbf{E} \cos(t\widetilde{X}),$$

где $\widetilde{X}$ – соответствующая симметризованная случайная величина, то

$$|\widehat{F}(t)| \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(1 - |\widehat{F}(t)|^2\big)\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{E}\left(1 - \cos(t\widetilde{X})\right)\Big). \qquad (2.6)$$

В силу неравенств (1.8) и (2.6), имеем

$$\begin{aligned} Q(F_a, 1) &= Q(F_{2a}, 2) \leqslant 2Q(F_{2a}, 1) \\ &\ll \int_0^1 |\widehat{F}_{2a}(t)|\, dt \\ &\ll \int_0^1 \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(1 - \cos(2a_k t\widetilde{X})\right)\Big)\, dt = I. \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\big(1 - \cos(2a_k t\widetilde{X})\big) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \big(1 - \cos(2a_k tx)\big)\, G\{dx\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \big(1 - \cos(2a_k tx)\big)\, p_j\, G_j\{dx\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \big(1 - \cos(2a_k tx)\big)\, p_j\, G_j\{dx\}. \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta_j = 2^{-2j} p_j, \quad \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j, \quad \mu_j = \beta_j / \beta, \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.9}$$

Очевидно, что тогда $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \mu_j = 1$ и $p_j/\mu_j = 2^{2j}\beta$ (при $p_j > 0$).

Теперь поступим так же, как при доказательстве леммы 4 гл. II в [9], принадлежащей Эссеену [16]. С помощью неравенства Гёльдера нетрудно показать, что

$$I \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j}, \tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned} I_j &= \int\limits_0^1 \exp\Big(-\frac{p_j}{2\,\mu_j} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(1 - \cos(2a_k t x)\big)\, G_j\{dx\}\Big)\, dt \\ &= \int\limits_0^1 \exp\Big(- 2^{2j-1}\beta \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{A_j} \big(1 - \cos(2a_k t x)\big)\, G_j\{dx\}\Big)\, dt, \end{aligned} \tag{2.11}$$

если $p_j > 0$, и $I_j = 1$ при $p_j = 0$.

Применяя к экспоненте под знаком интеграла неравенство Йенсена (см. [9], с. 49), получаем

$$\begin{aligned} I_j &\leqslant \int\limits_0^1 \int\limits_{A_j} \exp\Big(- 2^{2j-1}\beta \sum_{k=1}^{n} \big(1 - \cos(2a_k t x)\big)\Big)\, G_j\{dx\}\, dt \\ &= \int\limits_{A_j} \int\limits_0^1 \exp\Big(- 2^{2j-1}\beta \sum_{k=1}^{n} \big(1 - \cos(2a_k t x)\big)\Big)\, dt\, G_j\{dx\} \\ &\leqslant \sup_{z \in A_j} \int\limits_0^1 \widehat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t)\, dt \end{aligned} \tag{2.12}$$

Оценим теперь характеристическую функцию $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ при $|\,t| \leqslant 1$. Очевидно, что существует c такое, что $1 - \cos x \geqslant cx^2$ при $|x| \leqslant \pi$. Поэтому при $|\,t| \leqslant \dfrac{1}{2\,|a|}$

$$\widehat{H}_{\pi,1}(t) \leqslant \exp(-c\|a\|^2 t^2). \tag{2.13}$$

При $\dfrac{1}{2\,|a|} \leqslant |\,t| \leqslant 1$ можно действовать так же, как авторы [18], а именно: учитывая, что

$$1 - \cos t \geqslant c \min_{m \in \mathbf{Z}} |\,t - 2\pi m|^2, \tag{2.14}$$

получаем

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\pi,1}(t) &\leqslant \exp\Big(-c \sum_{k=1}^{n} \min_{m_k \in \mathbf{Z}} \big|2\pi t a_k - 2\pi m_k\big|^2\Big) \\ &= \exp(-c \sum_{k=1}^{n} \min_{m_k \in \mathbf{Z}} |\,t a_k - m_k|^2) \leqslant \exp(-c\,\alpha^2) \end{aligned} \tag{2.15}$$

при $|\,t| \in \Big[\dfrac{1}{2\,|a|}, 1\Big]$.

Воспользуемся теперь оценками (2.13) и (2.15) для оценивания интегралов I_j. Рассмотрим сначала случай $j = 1, 2, \ldots$. Заметим, что характеристическая функция $\widehat{H}_{z,\gamma}(t)$ обладает свойствами

$$\widehat{H}_{z,\gamma}(t) = \widehat{H}_{y,\gamma}\big(zt/y\big) \quad \text{и} \quad \widehat{H}_{z,\gamma}(t) = \widehat{H}^{\gamma}_{z,1}(t). \tag{2.16}$$

При $z \in A_j$ мы имеем $2^{-j} < |z| \leqslant 2^{-j+1} < \pi$. Следовательно, при $|\,t| \leqslant 1$ мы имеем $|zt/\pi| < 1$. Так что из свойств (2.16) при $y = \pi$ и полученных выше оценок (2.13) и (2.15) вытекает, что при $z \in A_j$

$$\widehat{H}_{z,1}(t) \leqslant \max\big\{\exp\big(-c\,\big(zt\|a\|/\pi\big)^2\big),\ \exp(-c\,\alpha^2)\big\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{z \in A_j} \int_0^1 \widehat{H}^{2^{2j}\beta}_{z,1}(t)\,dt &\leqslant \int_0^1 \exp(-c\,t^2\beta\|a\|^2)\,dt + \int_0^1 \exp(-2^{2j}c\,\alpha^2\beta)\,dt \\ &\ll \frac{1}{\sqrt{\beta}\,\|a\|} + \exp(-c\,\alpha^2\beta). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $j = 0$. Из свойств (2.16) следует, что при $z > 0$, $\gamma > 0$

$$Q(H_{z,\gamma}, 1) = Q\big(H_{1,\gamma}, 1/z\big). \tag{2.17}$$

Таким образом, учитывая соотношения (1.6), (1.10), (2.16) и (2.17), получаем, что

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in A_0}\int_0^1 \widehat{H}^{\beta}_{z,1}(t)\,dt &= \sup_{z\geqslant 1}\int_0^1 \widehat{H}_{z,\beta}(t)\,dt \asymp \sup_{z\geqslant 1}\, Q(H_{z,\beta},1)\\
&= \sup_{z\geqslant 1}\, Q\bigl(H_{1,\beta},1/z\bigr) \leqslant Q(H_{1,\beta},1) \ll Q\bigl(H_{1,\beta},1/\pi\bigr)\\
&= Q(H_{\pi,\beta},1) \asymp \int_0^1 \widehat{H}_{\pi,\beta}(t)\,dt = \int_0^1 \widehat{H}^{\beta}_{\pi,1}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Пользуясь снова оценками (2.13) и (2.15) для характеристической функции $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$, получим:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \widehat{H}^{\beta}_{\pi,1}(t)\,dt &\leqslant \int_0^1 \exp(-c\|a\|^2\beta t^2)\,dt + \int_0^1 \exp(-c\,\alpha^2\beta)\,dt\\
&\ll \frac{1}{\|a\|\sqrt{\beta}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta).
\end{aligned}$$

Мы оценили одинаково все интегралы I_j при $p_j \neq 0$. Учитывая, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu_j = 1$, получаем, что

$$I \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j} \ll \frac{1}{\|a\|\sqrt{\beta}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta).$$

Оценим теперь величину β

$$\begin{aligned}
\beta = \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2j}p_j &= \mathbf{P}\bigl(|\widetilde{X}| > 1\bigr) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j}\,\mathbf{P}\bigl(2^{-j} < |\widetilde{X}| \leqslant 2^{-j+1}\bigr)\\
&\geqslant \int_{|x|>1} G\{dx\} + \sum_{j=1}^{\infty}\ \int_{2^{-j}<|x|\leqslant 2^{-j+1}} \frac{x^2}{4}\,G\{dx\}\\
&\geqslant \frac{1}{4}\int_{|x|>1} G\{dx\} + \frac{1}{4}\int_{|x|\leqslant 1} x^2\,G\{dx\} = \frac{1}{4}\,M(1).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\beta \geqslant \frac{1}{4}\,M(1). \tag{2.18}$$

Значит,

$$\frac{1}{\|a\|\sqrt{\beta}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta) \ll \frac{1}{\|a\|\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)),$$

что и требовалось доказать. □

Отсюда несложно вывести то, что получается в условиях предложения 2.1, а именно, имеет место

Следствие 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2 *с заменой условия* (2.4) *на условие* (2.1) *с произвольным* $D \geqslant \dfrac{1}{2\,|a|}$. *Тогда*

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)).$$

Доказательство следствия 2.3. Обозначим $b = Da \in \mathbf{R}^n$. Тогда справедливо равенство $Q(F_a, 1/D) = Q(F_b, 1)$. Для вектора b выполнены те же условия, которые предполагались для вектора a в теореме 2.2. Действительно,

$$\|ub - m\| \geqslant \alpha \text{ при } u \in \Big[\frac{1}{2\,|b|}, 1\Big].$$

Это следует из условия (2.1) следствия 2.3, если обозначить $u = t/D$. Остается применить теорему 2.2 к вектору b. □

Отметим, что формулировки следствия 2.3 при каждом фиксированном D и при $D = 1$ эквивалентны. Следовательно, эквивалентны формулировки следствия 2.3 и при всех других D.

Если $D > 1$, то $1/D < 1$, и, пользуясь свойствами функции концентрации, из следствия 2.3 легко вывести оценку

$$Q(F_a, 1) \ll D\exp(-c\,\alpha^2 M(1)) + \frac{1}{\|a\|\sqrt{M(1)}}.$$

Переформулируем теперь следствие 2.3, применив его к величинам X_k/τ, $\tau > 0$.

Следствие 2.4. *Пусть* $V_{a,\tau} = \mathcal{L}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k/\tau\big)$. *Тогда в условиях следствия* 2.3 *справедливо соотношение*

$$Q\Big(V_{a,\tau}, \frac{1}{D}\Big) = Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(\tau)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(\tau)). \tag{2.19}$$

Выбирая, например, $\tau = D$, *получим, что*

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(D)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(D)).$$

Для доказательства следствия 2.4 достаточно воспользоваться вторым равенством в соотношении (1.5). Заметим, что сформулированные далее следствия 2.7, 3.4, 3.7 и 4.4 доказываются аналогично.

Если рассмотреть частный случай, когда $D = \dfrac{1}{2\,|a|}$, то ограничения на арифметические свойства вектора a фактически отсутствуют, и получается оценка

$$Q(F_a, \tau\,|a|) \ll \frac{|a|}{\|a\|\sqrt{M(\tau)}}. \tag{2.20}$$

Это в точности то, что дает неравенство Эссеена (1.12), примененное к сумме неодинаково распределенных случайных величин $Y_k = a_k X_k$ при $\lambda_k = a_k \tau$, $\lambda = |a|\tau$. При $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = n^{-1/2}$ неравенство (2.20) превращается в хорошо известный частный случай предложения 1.6:

$$Q(F^{*n}, \tau) \ll \frac{1}{\sqrt{n\,M(\tau)}}. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует и неравенство Колмогорова–Рогозина для одинаково распределенных случайных величин:

$$Q(F^{*n}, \tau) \ll \frac{1}{\sqrt{n\,(1 - Q(F,\tau))}}. \tag{2.22}$$

Неравенство (2.20) не может дать оценку лучше по порядку, чем $O(n^{-1/2})$, поскольку правая часть (2.20) не меньше, чем $n^{-1/2}$. Наибольший интерес сформулированные выше результаты имеют, когда D существенно больше, чем $\dfrac{1}{2\,|a|}$. Тогда можно рассчитывать на получение оценок, которые значительно лучше по порядку, чем $O(n^{-1/2})$. Именно такие оценки величины $Q(F_a,\lambda)$ требуются при изучении распределений собственных чисел случайных матриц.

В качестве примера рассмотрим случай, когда вектор a имеет вид $a = \big(1+n^{-1}, 1+2\,n^{-1},\dots,2\big)$ (аналогичный пример приведен в работе Рудельсона и Вершинина [27]). Выбирая $D = n/2$, нетрудно показать, что условие (2.1) выполнено при $\alpha \gg n^{1/2}$. В этом случае следствие 2.3 дает оценку порядка $O(n^{-3/2})$, которую невозможно получить с помощью оценки (2.20). Заметим также, что оценка такого порядка присутствует в предложении 1.4.

При $0 < D < \dfrac{1}{2\,|a|}$ неравенство

$$Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(\tau)}} \tag{2.23}$$

также справедливо. В этом случае оно вытекает из (1.7) и (2.20).

Заметим также, что в следствии 2.4 величина τ может быть сколь угодно малой. Устремляя τ к нулю, получаем оценку

$$Q(F_a,0) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{\mathbf{P}(\widetilde{X}\neq 0)}} + \exp(-c\,\alpha^2\,\mathbf{P}(\widetilde{X}\neq 0)). \tag{2.24}$$

Многомерный случай

Рассмотрим теперь многомерное обобщение теоремы 2.2 на случай, когда a_k – векторы в $\mathbf{R}^d$. Сформулируем сначала многомерный результат Фридланда и Содина [18].

Предложение 2.5. *Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $Q(\mathcal{L}(X), 2) \leqslant 1 - p$, где $p > 0$, и пусть $a_1,\dots,a_n \in \mathbf{R}^d$. Если для некоторых $0 < D < d$ и $\alpha > 0$ выполняется* *условие*

$$\sum_{k=1}^{n}(\langle t,a_k\rangle - m_k)^2 \geqslant \alpha^2 \ \textit{для всех}\ m_1,\dots,m_n\in\mathbf{Z},\ t\in\mathbf{R}^d,\ \textit{таких что}$$

$$\max_k |\,\langle t,a_k\rangle\,| \geqslant 1/2,\ \|t\|\leqslant D, \qquad (2.25)$$

то

$$Q(F_a,d/D) \ll_d \exp(-cp\alpha^2) + \Big(\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{p}D}\Big)^d \big(\det\mathbb{N}\big)^{-1/2}, \qquad (2.26)$$

где матрица $\mathbb{N}$ *определена в формуле* (1.24).

Заметим, что в работе Фридланда и Содина [18] были сформулированы и доказаны более слабые варианты утверждений предложений 2.1 и 2.5. А именно, в правой части неравенств (2.2) и (2.26) фигурировало p^2 вместо p. Возможность заменить p^2 на p была замечена, например, авторами работы [28] (см. предложения 3.1 и 3.5). Она следует из простейших свойств функции концентрации.

Кроме того, в работе [18] предполагалось, что $0<D<d$, а в левой части неравенства (2.26) вместо $Q(F_a,d/D)$ фигурировала величина $Q(F_a,1)$. Однако при $0<D<d$ получаем, что $d/D>1$ и величина $Q(F_a,1)$ может быть существенно меньше, чем $Q(F_a,d/D)$. Но если бы авторы [18] применили свой результат к $D=d$, они бы вывели из него неравенство для любого $D>0$ и с $Q(F_a,d/D)$ вместо $Q(F_a,1)$ таким же образом, как мы выведем ниже следствие 2.6 из теоремы 1.12. Мы уже говорили об этом в предыдущем разделе данного параграфа при $d=1$.

Заметим еще, что при $\max_k|\,\langle t,a_k\rangle\,|\leqslant 1/2$ мы имеем

$$\big(\operatorname{dist}(t\cdot a,\mathbf{Z}^n)\big)^2 = \sum_{k=1}^{n}\min_{m_k\in\mathbf{Z}}(\langle t,a_k\rangle - m_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\langle t,a_k\rangle^2, \qquad (2.27)$$

где

$$\operatorname{dist}(t\cdot a,\mathbf{Z}^n) = \min_{m\in\mathbf{Z}^n}\|\,t\cdot a - m\|.$$

Так что предположение о том, что $\max_k|\,\langle t,a_k\rangle\,|\geqslant 1/2$ в условии (2.25), естественно.

Основной результат данного раздела содержится в теореме 1.12, формулировка которой приведена во введении.

Доказательство теоремы 1.12. Доказательство теоремы 1.12 близко к доказательству теоремы 2.2. Мы остановимся в первую очередь на отличиях, связанных со спецификой многомерного случая. Как и при доказательстве теоремы 2.2, представим распределение $G = \mathcal{L}(\widetilde{X})$ в виде (2.5).

Рассмотрим d-мерное безгранично делимое распределение, характеристическая функция которого определена в формуле (1.32).

Так как для любой характеристической функции $\widehat{W}(t)$ случайного вектора Y справедливо равенство

$$|\widehat{W}(t)|^2 = \mathbf{E}\exp\big(i\langle\, t, \widetilde{Y}\rangle\big) = \mathbf{E}\cos\big(\langle\, t, \widetilde{Y}\rangle\big),$$

где $\widetilde{Y}$ – соответствующий симметризованный случайный вектор, то

$$|\widehat{W}(t)| \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(1-|\widehat{W}(t)|^2\big)\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{E}\,\big(1-\cos\big(\langle\, t, \widetilde{Y}\rangle\big)\big)\Big). \quad (2.28)$$

Из неравенств (1.18) и (2.28), получаем

$$\begin{aligned} Q(F_a, \sqrt{d}) \;&\ll_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} |\widehat{F}_{2a}(t)|\,dt \\ &\ll_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\big(1-\cos(2\,\langle\, t, a_k\rangle\,\widetilde{X})\big)\Big)\,dt = I. \quad (2.29)\end{aligned}$$

Ясно, что, как и в одномерном случае, справедливы равенства (2.8).

Воспользуемся обозначениями (2.9) предыдущего раздела. С помощью неравенства Гёльдера нетрудно показать, что выполняется соотношение (2.10), где

$$\begin{aligned} I_j \;&=\; \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp\Big(-\frac{p_j}{2\,\mu_j}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(1-\cos(2\,\langle\, t, a_k\rangle\,x)\big)\,G_j\{dx\}\Big)\,dt \\ &=\; \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp\Big(-\,2^{2j-1}\beta\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{A_j}\big(1-\cos(2\,\langle\, t, a_k\rangle\,x)\big)\,G_j\{dx\}\Big)\,dt, \quad (2.30)\end{aligned}$$

если $p_j > 0$, и $I_j = 1$ при $p_j = 0$.

Применяя неравенство Йенсена, получаем

$$\begin{aligned} I_j \; &\leqslant \int\limits_{B(\sqrt{d})} \int\limits_{A_j} \exp\Big(-2^{2j-1}\beta \sum_{k=1}^{n} \big(1-\cos(2\,\langle\, t, a_k\rangle\, x)\big)\Big)\, G_j\{dx\}\, dt \\ &= \int\limits_{A_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp\Big(-2^{2j-1}\beta \sum_{k=1}^{n} \big(1-\cos(2\,\langle t, a_k\rangle\, x)\big)\Big)\, dt\, G_j\{dx\} \\ &\leqslant \sup_{z\in A_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Оценим характеристическую функцию $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ при $\max\limits_k |\,\langle\, t, a_k\rangle\,| \leqslant 1/2$. Ясно, что существует такое c, что $1-\cos x \geqslant cx^2$ при $|x| \leqslant \pi$. Поэтому при $\max\limits_k |\,\langle\, t, a_k\rangle\,| \leqslant 1/2$

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\pi,1}(t) \; &\leqslant \; \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \big(1-\cos(2\pi\,\langle\, t, a_k\rangle)\big)\Big) \\ &\leqslant \; \exp\Big(-c\sum_{k=1}^{n} |\,\langle\, t, a_k\rangle\,|^2\Big) \leqslant \exp\big(-c\,\langle \mathbb{N}t, t\rangle\,\big), \end{aligned}$$

где матрица $\mathbb{N}$ определена в формуле (1.24).

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^d} \exp\big(-c\,\langle \mathbb{N}t, t\rangle\,\big) dt \ll_d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}}. \tag{2.32}$$

При t, таких что $\max\limits_k |\,\langle\, t, a_k\rangle\,| \geqslant 1/2$, $\|t\| \leqslant \sqrt{d}$, учитывая, что справедливо неравенство (2.14), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\pi,1}(t) \; &\leqslant \; \exp\Big(-c\sum_{k=1}^{n} \min_{m_k\in\mathbf{Z}} \big|2\pi\,\langle\, t, a_k\rangle - 2\pi m_k\big|^2\Big) \\ &= \; \exp\Big(-c\sum_{k=1}^{n} \min_{m_k\in\mathbf{Z}} |\,\langle\, t, a_k\rangle - m_k|^2\Big) \leqslant \exp(-c\,\alpha^2) \end{aligned} \tag{2.33}$$

при $\|t\| \leqslant \sqrt{d}$, для которых $\max\limits_k |\,\langle\, t, a_k\rangle\,| \geqslant 1/2$.

Теперь оценим интегралы I_j с помощью полученных соотношений (2.32) и (2.33). Рассмотрим сначала случай $j = 1, 2, \ldots$. Характеристическая функция $\widehat{H}_{z,\gamma}(t)$ обладает свойствами (2.16).

При $z \in A_j$ мы имеем $2^{-j} < |z| \leqslant 2^{-j+1} < \pi$. Поэтому при $\| t\| \leqslant \sqrt{d}$ мы имеем $\|zt/\pi\| < \sqrt{d}$. Таким образом из свойств (2.16) при $y = \pi$ и оценок (2.32) и (2.33) следует, что при $z \in A_j$

$$\begin{aligned}\sup_{z\in A_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t)\,dt &\leqslant \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\,\beta\,\langle \mathbb{N}t, t\rangle)\,dt \\ &+ \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-2^{2j}c\,\alpha^2\beta)\,dt \\ &\ll_d \Big(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta).\end{aligned}$$

Рассмотрим случай $j = 0$. Из свойств (2.16) следует, что при $z > 0$, $\gamma > 0$

$$Q(H_{z,\gamma}, \sqrt{d}) = Q\big(H_{1,\gamma}, \sqrt{d}/z\big). \tag{2.34}$$

В силу соотношений (1.16), (1.20), (2.16) и (2.34), получаем, что

$$\begin{aligned}\sup_{z\in A_0} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{z,1}^{\beta}(t)\,dt &= \sup_{z\geqslant 1} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{z,\beta}(t)\,dt \asymp_d \sup_{z\geqslant 1}\, Q(H_{z,\beta}, \sqrt{d}) \\ &= \sup_{z\geqslant 1}\, Q\big(H_{1,\beta}, \sqrt{d}/z\big) \leqslant Q(H_{1,\beta}, \sqrt{d}) \\ &\ll_d Q\big(H_{1,\beta}, \sqrt{d}/\pi\big) = Q(H_{\pi,\beta}, \sqrt{d}) \\ &\asymp_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{\pi,\beta}(t)\,dt = \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{\pi,1}^{\beta}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Пользуясь оценками (2.32) и (2.33) для характеристической функции $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ и учитывая, что $|\mathrm{Vol}(B(\sqrt{d}))| \ll_d 1$, получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{\pi,1}^{\beta}(t)\,dt &\leqslant \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\beta\,\langle \mathbb{N}t, t\rangle\;dt + \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\,\alpha^2\beta)\,dt \\ &\ll_d \Big(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta).\end{aligned}$$

Таким образом, мы оценили одинаково все интегралы I_j при $p_j \neq 0$. Так как $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \mu_j = 1$, то

$$I \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j} \ll_d \Big(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta).$$

Учитывая полученную при доказательстве теоремы 2.2 оценку (2.18) величины β, имеем

$$Q(F_a, \sqrt{d}) \ \ll_d \ \Big(\frac{1}{\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Сформулируем результат, вытекающий из теоремы 1.12 в условиях предложения 2.5.

Следствие 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.12 *с заменой условия* (1.23) *на условие* (2.25) *с произвольным* $D > 0$. *Тогда*

$$Q\Big(F_a, \frac{d}{D}\Big) \ \ll_d \ \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)).$$

Доказательство следствия 2.6. Будем действовать аналогично доказательству следствия 2.3. Обозначим

$$b = (b_1, \dots, b_n) = \frac{D}{\sqrt{d}} a = \frac{D}{\sqrt{d}} (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}^d)^n.$$

Тогда справедливо равенство $Q(F_a, d/D) = Q(F_b, \sqrt{d})$. Для мультивектора b выполнены условия теоремы 1.12. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} (\langle u, b_k\rangle - m_k)^2 \geqslant \alpha^2 \text{ для всех } m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z},\ u \in \mathbf{R}^d, \text{ таких что}$$
$$\|u\| \leqslant \sqrt{d},\ \max_k |\,\langle\, u, b_k\rangle\,| \geqslant 1/2.$$

Это следует из условия (2.1) следствия 2.6, если обозначить $u = \dfrac{\sqrt{d}\,t}{D}$. Применение теоремы 1.12 к вектору b завершает доказательство. $\square$

Заметим, что как в одномерном, так и в многомерном случаях, существенную роль в уточнении результатов [18] играет введенная в рассмотрение величина $M(1)$. Очевидно, что $M(1)$ может быть существенно больше, чем p (когда первое слагаемое в формуле (1.5) существенно больше второго). Например, p может быть равно 0, а $M(1) > 0$ для любого невырожденного распределения $F = \mathcal{L}(X)$. Поэтому следствие 2.3 – существенное усиление предложения 2.1. Аналогично, следствие 2.6 – существенное усиление предложения 2.5. Ясно также, что следствие 2.3 так же соотносится с предложением 2.1, как неравенство Эссеена (1.12) с неравенством Колмогорова–Рогозина (1.11). А следствие 2.6 так же соотносится с предложением 2.5, как многомерный аналог неравенства Эссеена (1.22) с многомерным вариантом неравенства Колмогорова–Рогозина (1.21).

Приведенные в этом параграфе доказательства теорем 1.12 и 2.2 и следствий 2.3 и 2.6 в некотором смысле проще, чем доказательства в работе Фридланда и Содина [18], так как не включают сложного разбиения множеств интегрирования. Это достигается за счет использования соотношений (1.10) и (1.20). Новым по сравнению с рассуждениями авторов [18] является также использование методов из работы Эссеена [16], (см. доказательство леммы 4 гл. II в [9]).

Применив следствие 2.6 к величинам X_k/τ, $\tau > 0$, получим

Следствие 2.7. *Пусть* $V_{a,\tau} = \mathcal{L}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k/\tau\big)$. *Тогда в условиях следствия* 2.6 *справедливо соотношение*

$$Q\Big(V_{a,\tau}, \frac{d}{D}\Big) \;=\; Q\Big(F_a, \frac{d\,\tau}{D}\Big) \ll_d \exp(-c\,\alpha^2 M(\tau)) + \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\sqrt{M(\tau)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}}.$$

Выбирая, например, $\tau = D/d$, *получим, что*

$$Q\big(F_a, 1\big) \;\ll_d\; \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\sqrt{M(D/d)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(D/d)).$$

Заметим, что в следствии 2.7 величина τ может быть сколь угодно малой. Устремляя τ к нулю, получаем

$$Q(F_a, 0) \;\ll_d\; \left(\frac{\sqrt{d}}{D\,\sqrt{\mathbf{P}(\widetilde{X} \neq 0)}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp\big(-c\,\alpha^2\,\mathbf{P}(\widetilde{X} \neq 0)\big). \tag{2.35}$$

Оценки (2.24) и (2.35), впрочем, можно вывести из результатов Фридланда и Содина [18].

§ 3. Уточнение результатов Рудельсона и Вершинина

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим для простоты и наглядности рассуждений одномерный случай проблемы Литтлвуда–Оффорда. Затем обсудим соответствующие результаты для многомерного случая данной проблемы.

Одномерный случай

Сформулируем одномерный вариант многомерной теоремы 3.3 из работы Рудельсона и Вершинина [28].

Предложение 3.1. *Предположим, что $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, причем $Q(\mathcal{L}(X), 2) \leqslant 1 - p$, где $p > 0$. Пусть $\alpha, D > 0$, $\gamma \in (0,1)$ и $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$, причем*

$$\| \, ta - m\| \geqslant \min\{\gamma t \, \|a\|, \alpha\} \quad \text{при всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ и } t \in [0, D]. \tag{3.1}$$

Тогда

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \ll \frac{1}{\gamma D \, \|a\| \, \sqrt{p}} + \exp(-2\, p\, \alpha^2). \tag{3.2}$$

Утверждение предложения 3.1 было сформулировано авторами [28] в ослабленной форме. В теореме 3.3 [28] предполагалось, что $\|a\| \geqslant 1$, причем в знаменателе дроби в правой части неравенства (3.2) отсутствовал множитель $\|a\|$. Однако результат предложения 3.1 легко выводится из утверждения предложения 3.1 при $\|a\| = 1$. Надо просто применить это утверждение к вектору $b = a/\|a\|$. Кроме того, в формулировке теоремы 3.3 [28] присутствует излишнее предположение о том, что $\mathbf{E}\, X = 0$.

Ясно, что если

$$0 < D \leqslant D(a) = D_{\alpha,\gamma}(a) = \inf\big\{t > 0 : \operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) \leqslant \min\{\gamma \| \, ta\|, \alpha\}\big\}, \tag{3.3}$$

то условие (3.1) выполнено. Рудельсон и Вершинин [28] называют величину $D(a)$ существенным наименьшим общим знаменателем вектора $a \in \mathbf{R}^n$.

В теореме 3.3 [28] вместо неравенства (3.2) фигурирует его следствие, получаемое из (3.2) с помощью соотношений (1.7) и (3.3).

Основной результат данного раздела формулируется следующим образом.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия предложения* 3.1 *при* $D = 1$. *То есть* $\|\, ta - m\| \geqslant \min\{\gamma t \,\|a\|, \alpha\}$ *при всех* $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$, $t \in [0,1]$. *Тогда*

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\|\gamma\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)).$$

Доказательство теоремы 3.2. Мы будем действовать аналогично доказательству теоремы 2.2. Используя обозначения из доказательства теоремы 2.2, в силу соотношений (2.7)–(2.12) и (2.16), имеем

$$Q(F_a, 1) \ll \prod_{j=0}^{\infty} \sup_{z\in A_j} \int\limits_0^1 \widehat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t)\,dt \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} \sup_{z\in A_j} \int\limits_0^1 \widehat{H}_{\pi,1}^{2^{2j}\beta}\big(zt/\pi\big)\,dt.$$

Но из условий теоремы 3.2 вытекает, что

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\pi,1}(t) \ &\leqslant\ \exp\Big(-c\,\sum_{k=1}^{n} \min_{m_k\in\mathbf{Z}} \big|2\pi t a_k - 2\pi m_k\big|^2\Big) \\ &\leqslant\ \exp(-c\,\alpha^2) + \exp(-c\,t^2\gamma^2\,\|a\|^2) \end{aligned}$$

при всех $t \in [0,1]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(F_a, 1) \ &\ll\ \int\limits_0^1 \exp(-c\,t^2\gamma^2\beta\,\|a\|^2)\,dt + \int\limits_0^1 \exp(-c\,\alpha^2\beta)\,dt \\ &\ll\ \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\,\|a\|} + \exp(-c\,\alpha^2\beta). \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь оценкой (2.18) для величины β из доказательства теоремы 2.2, согласно которой $\beta \geqslant M(1)/4$. Тогда

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\|\gamma\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть выполнены условия предложения* 3.1 *при произвольном* $D > 0$. *Тогда*

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\gamma\sqrt{M(1)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)).$$

Доказательство следствия 3.3. Доказательство аналогично доказательству следствия 2.3. Обозначим $b = Da \in \mathbf{R}^n$ и $u = t/D$. Тогда

$$\|ub - m\| = \|\, ta - m\| \geqslant \min\{\gamma t\|a\|, \alpha\} \text{ при всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ и } t \in [0, 1].$$

То есть для b выполнены те же условия, которые предполагались для a в теореме 3.2. Остается заметить, что $Q(F_a, 1/D) = Q(F_b, 1)$, и применить теорему 3.2 к вектору b. $\square$

Теперь переформулируем следствие 3.3 для величин X_k/τ, $\tau > 0$.

Следствие 3.4. *Пусть* $V_{a,\tau} = \mathcal{L}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k/\tau\big)$. *Тогда в условиях следствия* 3.3 *справедливо соотношение*

$$Q\Big(V_{a,\tau}, \frac{1}{D}\Big) = Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\gamma\sqrt{M(\tau)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(\tau)).$$

Выбирая, например, $\tau = D$, *получим*

$$Q(F_a, 1) \ll \frac{1}{\|a\| D\gamma\sqrt{M(D)}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(D)).$$

Многомерный случай

Рассмотрим теперь случай, когда a_k – векторы в $\mathbf{R}^d$. Сформулируем многомерную теорему 3.3 из работы Рудельсона и Вершинина [28] в наших обозначениях.

Предложение 3.5. *Предположим, что* $X, X_1, \ldots, X_n$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, причем* $Q(\mathcal{L}(X), 2) \leqslant 1 - p$, *где* $p > 0$. *Рассмотрим набор* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *векторов*

a_k из $\mathbf{R}^d$, таких что $\sum\limits_{k=1}^{n} \langle t, a_k \rangle^2 \geqslant \|t\|^2$ для любого $t \in \mathbf{R}^d$. Пусть $\alpha, D > 0$ и $\gamma \in (0,1)$, причем

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} (\langle t, a_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma \|t \cdot a\|, \alpha\} \text{ для всех } m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z} \text{ и } t \in \mathbf{R}^d, \|t\| \leqslant D. \quad (3.4)$$

Тогда

$$Q\Big(F_a, \frac{d}{D}\Big) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{\gamma D\sqrt{p}}\Big)^d + \exp(-2\,p\,\alpha^2). \quad (3.5)$$

Заметим, что в формулировке теоремы 3.3 [28] присутствует излишнее предположение о том, что $\mathbf{E}\,X = 0$.

Как и в одномерном случае, ясно, что если

$$0 < D \leqslant D(a) = \inf\big\{\|t\| > 0 : t \in \mathbf{R}^d, \operatorname{dist}(t\cdot a, \mathbf{Z}^n) \leqslant \min\{\gamma \|\, t\cdot a\|, \alpha\}\big\}, \quad (3.6)$$

то условие (3.4) выполнено.

Основной результат данного раздела содержится в теореме 1.13, формулировка которой приведена во введении.

Заметим, что теорема 1.13 дает более общий результат по сравнению с результатом предложения 3.5, так как в формулировке теоремы 1.13 отсутствует условие $\sum\limits_{k=1}^{n} \langle t, a_k \rangle^2 \geqslant \|t\|^2$, которое предполагается в предложении 3.5.

Доказательство теоремы 1.13. Мы будем действовать аналогично доказательству теоремы 1.12. Используя обозначения из доказательств теорем 1.12 и 2.2, в силу соотношений (2.5), (2.10), (2.29)–(2.31), имеем

$$\begin{aligned} Q\left(F_a, \sqrt{d}\right) &\ll_d \prod_{j=0}^{\infty} \sup_{z \in A_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t)\,dt \\ &\leqslant \prod_{j=0}^{\infty} \sup_{z \in A_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{\pi,1}^{2^{2j}\beta}\big(zt/\pi\big)\,dt. \end{aligned}$$

Но из условий теоремы 1.13 вытекает, что

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\pi,1}(t) &\leqslant \exp\Big(-c\sum_{k=1}^{n} \min_{m_k \in \mathbf{Z}} \big|2\pi\,\langle\, t, a_k\rangle - 2\pi m_k\big|^2\Big) \\ &\leqslant \exp(-c\,\alpha^2) + \exp\big(-C\,\gamma^2\,\langle \mathbb{N}t, t\rangle\big) \end{aligned}$$

при всех $\|t\| \leqslant \sqrt{d}$, где $\mathbb{N}$ задается формулой (1.24). Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(F_a, \sqrt{d}) \ &\ll_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\,\gamma^2\beta\ \langle \mathbb{N}t, t\rangle)\, dt \\ &\quad + \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\,\alpha^2\beta)\, dt \\ &\ll_d \Big(\frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta). \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь оценкой (2.18) для величины β из доказательства теоремы 1.12, согласно которой $\beta \geqslant M(1)/4$. Тогда

$$Q(F_a, \sqrt{d}) \ll_d \Big(\frac{1}{\gamma\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)),$$

что и требовалось доказать. □

Теперь сформулируем уточнения предложения 3.5, аналогичные следствиям 2.6 и 2.7.

Следствие 3.6. *Предположим, что $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_k \in \mathbf{R}^d$, и для некоторых $\alpha, D > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$ выполнено*

$$\Big(\sum_{k=1}^n (\langle t, a_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma\|t\cdot a\|, \alpha\} \ \textit{для всех}\ m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}\ \textit{и}\ t \in \mathbf{R}^d, \|t\| \leqslant D. \quad (3.7)$$

Тогда

$$Q\Big(F_a, \frac{d}{D}\Big) \ \ll_d \ \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\gamma\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp\big(-c\,\alpha^2 M(1)\big)\,.$$

Заметим, что, если $\sum\limits_{k=1}^n \langle t, a_k\rangle^2 \geqslant \|t\|^2$, как предполагалось в условии предложения 3.5, то множитель $\dfrac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} < 1$ и, значит, следствие 3.6 дает более сильный результат по сравнению с предложением 3.5.

Доказательство следствия 3.6. Доказательство аналогично доказательству следствия 2.6. Обозначим $b = \dfrac{D}{\sqrt{d}}\,a \in (\mathbf{R}^d)^n$ и $u = \dfrac{\sqrt{d}\,t}{D}$. Тогда

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}(\langle u, b_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma\|t\cdot a\|, \alpha\} \text{ при всех } m_1,\ldots,m_n \in \mathbf{Z} \text{ и } \|u\| \leqslant \sqrt{d}.$$

То есть для b выполнены те же условия, которые предполагались для a в теореме 1.13. Остается заметить, что $Q\big(F_a, d/D\big) = Q(F_b, \sqrt{d})$, и применить теорему 1.13 к вектору b. □

Теперь переформулируем следствие 3.6 для величин X_k/τ, $\tau > 0$.

Следствие 3.7. *Пусть* $V_{a,\tau} = \mathcal{L}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k/\tau\big)$. *Тогда в условиях следствия* 3.6 *справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} Q\Big(V_{a,\tau}, \frac{d}{D}\Big) \;&=\; Q\Big(F_a, \frac{d\,\tau}{D}\Big) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\gamma\,\sqrt{M(\tau)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} \\ &+\; \exp\big(-c\,\alpha^2 M(\tau)\big)\,. \end{aligned}$$

Выбирая, например, $\tau = D/d$, *получим*

$$Q\big(F_a, 1\big) \;\ll_d\; \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\gamma\,\sqrt{M(D/d)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp\big(-c\,\alpha^2 M(D/d)\big)\,.$$

Следует отметить, что в результатах данного параграфа, как и в результатах предыдущего, существенную роль играет введенная в рассмотрение величина $M(1)$. Участие этой величины в формулировках отличает наши результаты от результатов Рудельсона и Вершинина [28].

§ 4. Уточнение результатов Вершинина

Обозначим $\log_+(x) = \max\{0, \log x\}$. Приведем формулировку результата Вершинина [34].

Предложение 4.1. *Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины и $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\|a\| = 1$. Предположим, что существуют положительные числа τ, p, K, L, D, такие что $Q(\mathcal{L}(X), \tau) \leqslant 1 - p$, $\mathbf{E}\,|X| \leqslant K$ и*

$$\|\, ta - m\| \geqslant L\sqrt{\log_+(t/L)} \quad \text{для всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ при } \ t \in (0, D]. \tag{4.1}$$

Если $L^2 \geqslant 1/p$, то

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \leqslant \frac{C\,L}{D}, \tag{4.2}$$

где величина C зависит только от τ, p, K.

Следствие 4.2. *Пусть выполнены условия предложения 4.1. Тогда для любого $\varepsilon \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$Q(F_a, \varepsilon) \ll C\,L\,\Big(\varepsilon + \frac{1}{D}\Big). \tag{4.3}$$

Ясно, что, если

$$0 < D \leqslant D(a) = D_L(a) = \inf\Big\{t > 0 : \operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) < L\sqrt{\log_+(t/L)}\Big\}, \tag{4.4}$$

где

$$\operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) = \min_{m \in \mathbf{Z}^n} \|\, ta - m\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} \min_{m_k \in \mathbf{Z}} |\, ta_k - m_k|^2\Big)^{1/2},$$

то условие (4.1) выполняется.

Заметим снова, что при $|\, t| \leqslant 1/2\,|a|$ мы имеем

$$\big(\operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n)\big)^2 = \sum_{k=1}^{n} |\, ta_k|^2 = \|a\|^2 t^2 = t^2, \tag{4.5}$$

так что $D(a) > L$ по определению. Кроме того, из равенства (4.5) следует, что $D(a) \geqslant 1/2\,|a|$ (см. [34], лемма 6.2).

Заметим также, что именно утверждение следствия 4.2 при $D = D(a)$ фигурирует в качестве соответствующего результата в работе Вершинина [34]. Формулировка предложения 4.1 представляется более естественной, так как она проще утверждения следствия 4.2, причем последнее легко выводится из нее при помощи соотношений (1.7) и (4.4). Минимальное L, для которого выполняются условия предложения 4.1, зависит от a и D, и, вообще говоря, может оказаться существенно больше, чем $p^{-1/2}$.

Покажем, что в формулировке предложения 4.1 условие (4.1) можно без ущерба для результата заменить следующим:

$$\|\, ta - m\| \geqslant f_L(t) \quad \text{при всех } m \in \mathbf{Z}^n \text{ и } \ t \in \Big[\frac{1}{2\,|a|}, D\Big], \tag{4.6}$$

где

$$f_L(t) = \begin{cases} t/6 & \text{при } 0 < t < eL, \\ L\sqrt{\log(t/L)} & \text{при } t \geqslant eL. \end{cases} \tag{4.7}$$

Отметим, что равенство (4.5) подтверждает естественность предположения $|\,t| \geqslant 1/2\,|a|$ в условии (4.6). При $0 < t < 1/2\,|a|$ неравенство (4.6) выполняется автоматически.

Формально условие (4.6) может быть более ограничительным по сравнению с условием (4.1). Однако, если условие (4.1) выполнено, а условие (4.6) – нет, то неравенство (4.2) все равно справедливо по тривиальным причинам.

Действительно, если $t \geqslant eL$, то выполнение условия (4.6) для такого t следует из условия (4.1). Если $0 < t < eL$ и существует $m \in \mathbf{Z}^n$, такое что $\|\, ta - m\| < t/6$, то, обозначая $k = \lfloor eL/t \rfloor + 1$, мы имеем $tk \geqslant eL$ и

$$\|\, tka - km\| < tk/6 \leqslant 2eL/6 < L \leqslant L\sqrt{\log_+(tk/L)}.$$

Так как $km \in \mathbf{Z}^n$, то $D \leqslant D(a) \leqslant tk < 6L$ и требуемое неравенство (4.2) тривиально следует из $Q(F_a, 1/D) \leqslant 1$.

Заметим, что возможна ситуация, при которой условие (4.6) выполняется, а условие (4.1) – нет, при некоторых t из интервала $L < t < eL$. Тогда оценки функций концентрации из предложения 4.1 и следствия 4.2 все равно справедливы. Это следует из теоремы 1.14, доказательство которой будет приведено в данном параграфе.

Сказанное выше может служить обоснованием того, что альтернативный наименьший общий знаменатель $D^*(a)$ разумно определять по формуле

$$D^*(a) = D^*_L(a) = \inf\Big\{t > 0 : \operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) < f_L(t\|a\|)\Big\}. \tag{4.8}$$

Это определение будет ниже использоваться и для случая $\|a\| \neq 1$. Очевидно, что

$$D^*(\lambda a) = D^*(a)/\lambda \quad \text{для любого } \lambda > 0, \tag{4.9}$$

причем из равенства (4.5) также следует, что $D^*(a) \geqslant 1/2\,|a|$.

Основной результат данного параграфа содержится в формулировке теоремы 1.14, которая приведена во введении. Перейдем к доказательству этого результата.

Доказательство теоремы 1.14. Пусть r – фиксированное число, удовлетворяющее условию $1 < r \leqslant \sqrt{2}$. Представим распределение $G = \mathcal{L}(\widetilde{X})$ в виде смеси

$$G = qE + \sum_{j=0}^{\infty} p_j G_j,$$

где $q = \mathbf{P}(\widetilde{X} = 0)$,

$$p_j = \mathbf{P}(\widetilde{X} \in A_j),\ j = 0, 1, 2, \dots,$$

$A_0 = \{x : |x| > 1\}$, $A_j = \{x : r^{-j} < |x| \leqslant r^{-j+1}\}$, E – вероятностная мера, сосредоточенная в нуле, G_j – вероятностные меры, определяемые для $p_j > 0$ по формуле

$$G_j\{X\} = \frac{1}{p_j} G\{X \cap A_j\}$$

для любого борелевского множества X. Распределения G_j представляют собой условные распределения $\widetilde{X}$ при условии, что $\widetilde{X} \in A_j$. Если $p_j = 0$, то в качестве G_j можно брать произвольные меры. Заметим, что при доказательстве теорем 1.12 и 2.2 рассматривался частный случай описанного здесь представления распределения G при $r = 2$.

Как и при доказательстве теоремы 2.2, для $z \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$ введем распределение $H_{z,\gamma}$ с характеристической функцией, определенной в формуле (1.32) при $d = 1$.

В силу (1.8) и (2.6), имеем

$$\begin{aligned}
Q(F_a, 1/D) &\ll \frac{1}{D}\int\limits_0^D |\widehat{F}_{2a}(t)|\,dt \\
&\ll \frac{1}{D}\int\limits_0^D \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left(1-\cos(2a_k t\widetilde{X})\right)\Big)\,dt = I. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Заметим снова, что справедливы соотношения (2.8), доказанные в теореме 1.12. Обозначим $\beta_j = r^{-2j}p_j$, $\beta = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\beta_j$, $\mu_j = \beta_j/\beta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu_j = 1$ и $p_j/\mu_j = r^{2j}\beta$ (при $p_j > 0$).

Оценим величину β:

$$\begin{aligned}
\beta = \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j &= \sum_{j=0}^{\infty} r^{-2j}p_j = \mathbf{P}\big\{|\widetilde{X}| > 1\big\} + \sum_{j=1}^{\infty} r^{-2j}\,\mathbf{P}\big\{r^{-j} < |\widetilde{X}| \leqslant r^{-j+1}\big\} \\
&\geqslant \int\limits_{|x|>1} G\{dx\} + \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{r^{-j}<|x|\leqslant r^{-j+1}} \frac{x^2}{r^2}\,G\{dx\} \\
&\geqslant \frac{1}{r^2}\int\limits_{|x|>1} G\{dx\} + \frac{1}{r^2}\int\limits_{|x|\leqslant 1} x^2\,G\{dx\} = \frac{1}{r^2}M(1).
\end{aligned}$$

Так как $1 < r \leqslant \sqrt{2}$, то

$$\beta \geqslant \frac{1}{2}M(1). \qquad (4.11)$$

Из (4.11) и условия $L^2 \geqslant 1/M(1)$ получаем оценку

$$L^2\beta \geqslant \frac{1}{2}. \qquad (4.12)$$

Используя неравенство Гёльдера, легко видеть, что выполняется неравенство (2.10), где

$$\begin{aligned}
I_j &= \frac{1}{D}\int\limits_0^D \exp\Big(-\frac{p_j}{2\,\mu_j}\sum_{k=1}^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\cos(2a_k tx)\right)G_j\{dx\}\Big)\,dt \\
&= \frac{1}{D}\int\limits_0^D \exp\Big(-\frac{1}{2}\,r^{2j}\beta\sum_{k=1}^n\int\limits_{A_j}\left(1-\cos(2a_k tx)\right)G_j\{dx\}\Big)\,dt
\end{aligned}$$

при $p_j > 0$, и $I_j = 1$ при $p_j = 0$.

Применяя неравенство Йенсена к экспонентам под знаком интеграла, получаем

$$
\begin{aligned}
I_j \; &\leqslant \; \frac{1}{D}\int\limits_0^D \int\limits_{A_j} \exp\Big(-\frac{1}{2}\, r^{2j}\beta \, \sum_{k=1}^n \big(1-\cos(2a_k tx)\big)\Big)\, G_j\{dx\}\, dt \\
&= \; \frac{1}{D}\int\limits_{A_j} \int\limits_0^D \exp\Big(-\frac{1}{2}\, r^{2j}\beta \, \sum_{k=1}^n \big(1-\cos(2a_k tx)\big)\Big)\, dt\, G_j\{dx\} \\
&\leqslant \; \sup_{z\in A_j} \frac{1}{D}\int\limits_0^D \widehat{H}_{z,1}^{r^{2j}\beta}(t)\, dt.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Оценим характеристическую функцию $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ при $|\,t| \leqslant D$. Ясно, что

$$1-\cos x \geqslant 2x^2/\pi^2 \text{ при } |x| \leqslant \pi.$$

Отсюда следует, что для произвольного x

$$1-\cos x \geqslant 2\,\pi^{-2} \min_{m\in\mathbf{Z}} |\,x-2\pi m|^2.$$

Подставляя это неравенство в формулу (1.32) при $d=1$, получаем

$$
\begin{aligned}
\widehat{H}_{\pi,1}(t) \; &\leqslant \; \exp\Big(-\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \min_{m_k\in\mathbf{Z}} \big|2\pi t a_k - 2\pi m_k\big|^2\Big) \\
&= \; \exp\Big(-4 \sum_{k=1}^n \min_{m_k\in\mathbf{Z}} |\,t a_k - m_k|^2\Big) \\
&= \; \exp\big(-4\,\big(\operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n)\big)^2\big).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Используя (4.5), мы видим, что при $|\,t| \leqslant 1/2\,|a|$ неравенство (4.14) превращается в

$$\widehat{H}_{\pi,1}(t) \leqslant \exp(-4\,t^2). \tag{4.15}$$

Оценим интегралы I_j с помощью полученных выше соотношений (4.6), (4.14) и (4.15). Сначала рассмотрим случай $j = 1, 2, \ldots$. Заметим, что характеристическая функция $\widehat{H}_{z,\gamma}(t)$ удовлетворяет равенствам (2.16). Из первого равенства (2.16) следует, что

$$\text{если} \quad H_{z,\gamma} = \mathcal{L}(\xi), \quad \text{то} \quad H_{y,\gamma} = \mathcal{L}(y\,\xi/z). \tag{4.16}$$

При $z \in A_j$ справедливы неравенства $r^{-j} < |z| \leqslant r^{-j+1} < \pi$. Следовательно, при $|\,t| \leqslant D$ имеем $|zt/\pi| < D$. Поэтому пользуясь свойствами (2.16) при $y = \pi$ и вышеупомянутыми оценками (4.6), (4.14) и (4.15), получаем при $z \in A_j$ и $z = \pi$

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{z,1}(t) &\leqslant \exp\big(-4\,f_L^2(zt/\pi)\big)\\ &= \begin{cases}\exp\big(-(zt/\pi)^2/9\big) & \text{при } 0 < t \leqslant eL\pi/z,\\ \exp\big(-4\,L^2\,\log(zt/L\pi)\big) & \text{при } t > eL\pi/z.\end{cases}\end{aligned}$$

Значит,

$$\sup_{z\in A_j}\int_0^D \widehat{H}_{z,1}^{r^{2j}\beta}(t)\,dt \leqslant \int_0^D \exp\big(-t^2\beta/9\pi^2\big)\,dt + \int_{r^{j-1}L\pi e}^{\infty}\Big(\frac{r^jL\pi}{t}\Big)^{4\,r^{2j}\beta L^2}dt \ll \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

В последнем переходе мы воспользовались неравенством (4.12).

Рассмотрим теперь случай $j = 0$. Из отношения (4.16) следует, что при $z > 0$, $\gamma > 0$

$$Q(H_{z,\gamma}, 1/D) = Q\big(H_{1,\gamma}, 1/Dz\big). \tag{4.17}$$

Таким образом, в силу (1.6), (1.10), (2.16) и (4.17), получаем

$$\begin{aligned}\sup_{z\in A_0}\frac{1}{D}\int_0^D \widehat{H}_{z,1}^{\beta}(t)\,dt &= \sup_{z>1}\frac{1}{D}\int_0^D \widehat{H}_{z,\beta}(t)\,dt \asymp \sup_{z>1}\,Q(H_{z,\beta}, 1/D)\\ &= \sup_{z>1}\,Q\big(H_{1,\beta}, 1/Dz\big) \leqslant Q(H_{1,\beta}, 1/D)\\ &\asymp Q\big(H_{1,\beta}, 1/D\pi\big) = Q(H_{\pi,\beta}, 1/D)\\ &\asymp \frac{1}{D}\int_0^D \widehat{H}_{\pi,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{D}\int_0^D \widehat{H}_{\pi,1}^{\beta}(t)\,dt.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Пользуясь оценками (4.6), (4.14) и (4.15) для характеристической функции $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ и принимая во внимание неравенство (4.12), имеем:

$$\int_0^D \widehat{H}_{\pi,1}^{\beta}(t)\,dt \leqslant \int_0^D \exp(-t^2\beta/9)\,dt + \int_{Le}^{\infty}\Big(\frac{L}{t}\Big)^{4\beta L^2}dt \ll \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{4.19}$$

В силу (4.13) и (4.17)–(4.19), получаем оценку

$$I_j \ll \frac{1}{D\sqrt{\beta}} \tag{4.20}$$

для всех интегралов I_j при $p_j \neq 0$. Ввиду того, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \mu_j = 1$, а также из соотношений (2.10) и (4.20) следует, что

$$I \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j} \ll \frac{1}{D\sqrt{\beta}}. \tag{4.21}$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться оценками (4.10), (4.11) и (4.21). □

Сформулируем теперь теорему 1.14 для произвольного a, не предполагая, что $\|a\| = 1$.

Следствие 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.14 *без предположения* $\|a\| = 1$ *и с заменой условия* (4.6) *на условие*

$$\| ta - m\| \geqslant f_L(t\|a\|) \quad \textit{при всех } m \in \mathbf{Z}^n \textit{ и } \; t \in \Big[\frac{1}{2\,|a|}, D\Big]. \tag{4.22}$$

Если $L^2 \geqslant 1/M(1)$, *то*

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(1)}}. \tag{4.23}$$

Доказательство следствия 4.3. Схема доказательства аналогична схеме доказательств следствий 2.3, 2.6, 3.3 и 3.6. Обозначим $b = a/\|a\| \in \mathbf{R}^n$. Тогда для всех $\lambda \geqslant 0$ выполняется равенство $Q(F_a, \lambda) = Q(F_b, \lambda/\|a\|)$. Вектор b удовлетворяет условиям теоремы 1.14 (которая справедлива для вектора a), если заменить D на $D\|a\|$. Действительно,

$$\|ub - m\| \geqslant f_L(u) \text{ при } u \in \Big[\frac{1}{2\,|b|}, D\|a\|\Big] \text{ при всех } m \in \mathbf{Z}^n.$$

Это следует из условия (4.6) теоремы 1.14, если обозначить $u = t\|a\|$. Применение теоремы 1.14 к вектору b завершает доказательство. □

Применяя следствие 4.3 к случайным величинам X_k/τ, $\tau > 0$, мы получим следующее утверждение.

Следствие 4.4. *Пусть* $V_{a,\tau} = \mathcal{L}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k/\tau\big)$, $\tau > 0$. *Тогда в условиях следствия* 4.3 *с заменой условия* $L^2 \geqslant 1/M(1)$ *на условие* $L^2 \geqslant 1/M(\tau)$, *справедливо неравенство*

$$Q\Big(V_{a,\tau}, \frac{1}{D}\Big) = Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(\tau)}}. \tag{4.24}$$

В частности, если $\|a\| = 1$, *то*

$$Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{D\sqrt{M(\tau)}}. \tag{4.25}$$

Очевидно, что $M(\tau) \gg 1 - Q(G,\tau) \geqslant 1 - Q(F,\tau) \geqslant p$ в условиях предложения 4.1. Заметим, что величина $M(\tau)$ может быть существенно больше, чем p. Сравнивая оценки (4.2) и (4.25), мы видим, что множитель L заменен на множитель $1/\sqrt{M(\tau)} \leqslant L$, который может быть существенно меньше, чем L в условиях следствия 4.4. Кроме того, в формулировке предложения 4.1 присутствует излишнее предположение $\mathbf{E}\,|X| \leqslant K$. Наконец, зависимость констант от распределения $\mathcal{L}(X)$ выписана явно, в неравенствах (1.28), (4.23)–(4.25) соответствующие константы являются абсолютными, в отличие от неравенств (4.2) и (4.3), в которых величина C неявным образом зависит от τ, p и K. Уточнение следствия 4.2 приведено ниже в теореме 4.5.

Ясно, что теорема 1.14 соотносится с предложением 4.1 так же, как неравенство Эссеена (1.12) с неравенством Колмогорова–Рогозина (1.11).

Заметим, что комментарии, сделанные во втором параграфе после формулировки следствия 2.4, и соотношения (2.20)–(2.23) остаются в силе и в данном случае.

Заметим также, что в формулировках основных результатов параграфов 2–4 рассматриваются сравнительно большие значения величины D. Таким образом, оцениваются функции концентрации в малых точках порядка $1/D$. Причем в правых частях соответствующих неравенств для функций концентрации так же присутствует множитель $1/D$. То есть скорость убывания функции концентрации в некотором смысле пропорциональна малости аргумента этой функции.

В условиях следствия 4.4 существует много возможностей выбрать фиксированное ε в виде $\varepsilon = \tau/D$ для применения неравенства (4.24). Поэтому для фиксированного $\varepsilon = \tau/D$ мы можем минимизировать правую часть неравенства (4.24), выбирая оптимальные τ и D. Это возможно, и оптимальная оценка содержится в следующей теореме 4.5.

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия следствия* 4.3 *при* $D \leqslant D^*(a)$ *за исключением условия* $L^2 \geqslant 1/M(1)$. *Пусть* $L^2 > 1/P$, *где*

$$P = \mathbf{P}(\widetilde{X} \neq 0) = \lim_{\tau \to 0} M(\tau).$$

Тогда существует τ_0, *такое что* $L^2 = 1/M(\tau_0)$. *При этом оценка*

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{1}{\|a\| D^*(a) \sqrt{M(\varepsilon\, D^*(a))}} \tag{4.26}$$

справедлива для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \tau_0/D^*(a)$. *Кроме того, при* $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ *выполняется неравенство*

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon L}{\varepsilon_0\, \|a\| D^*(a)}. \tag{4.27}$$

В утверждении теоремы 4.5 величина ε может быть произвольно мала. Устремляя ε к нулю, при $L^2 > 1/P$ получаем

$$Q(F_a, 0) \ll \frac{1}{\|a\| D^*(a) \sqrt{P}}. \tag{4.28}$$

При применении неравенств (4.26)–(4.28) следует иметь в виду, что, согласно (4.9), $\|a\| D^*(a) = D^*(a/\|a\|)$.

Теорема 4.5 легко выводится из следствия 4.4. В самом деле, обозначая $\varepsilon = \tau/D$, можно переписать неравенство (4.24) следующим образом:

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{1}{\|a\| D \sqrt{M(\varepsilon\, D)}}. \tag{4.29}$$

Неравенство (4.29) выполняется, если $L^2 \geqslant 1/M(\varepsilon\, D)$ и $0 < D \leqslant D^*(a)$. Если $L^2 \geqslant 1/M(\varepsilon\, D^*(a))$, то выбор $D = D^*(a)$ в неравенстве (4.29) оптимален, так как

$$D^2 M(\varepsilon\, D) = \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{X}^2/\varepsilon^2, D^2\big\}$$

растет с ростом D. По той же причине, если $L^2 < 1/M(\varepsilon\, D^*(a))$, то оптимальным выбором D в неравенстве (4.29) является решение $D_0(\varepsilon)$ уравнения $L^2 = 1/M(\varepsilon\, D)$. Это решение существует и единственно, если $L^2 > 1/P$, так как функция $M(\tau)$ непрерывна и строго убывает, если $M(\tau) < P$. Кроме того, $M(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. В этом случае неравенство (4.29) превращается в

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{L}{\|a\| D_0(\varepsilon)}. \tag{4.30}$$

Далее, выбирая τ_0 как решение уравнения $L^2 = 1/M(\tau)$, мы видим, что неравенство (4.26) справедливо при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \tau_0/D^*(a)$. Ясно, что $D_0(\varepsilon_0) = D^*(a)$. Вдобавок при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ мы имеем

$$M(\varepsilon\, D_0(\varepsilon)) = M(\varepsilon_0\, D_0(\varepsilon_0)) = L^{-2}$$

и, следовательно, $\varepsilon\, D_0(\varepsilon) = \varepsilon_0\, D_0(\varepsilon_0)$. Поэтому при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ неравенство (4.27) выполняется. Очевидно, неравенство (4.27) может быть получено из (4.29) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ с помощью неравенства (1.7). С другой стороны, при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, применяя неравенство (1.7) к неравенству (4.26), мы получим оценку

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\, Q\big(F_a, \varepsilon_1\big) \ll \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1\, \|a\| D^*(a) \sqrt{M(\varepsilon_1\, D^*(a))}}. \tag{4.31}$$

Однако неравенство (4.31) слабее, чем неравенство (4.26), так как, очевидно,

$$\varepsilon^2 M(\varepsilon\, \mu) = \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{X}^2/\mu^2, \varepsilon^2\big\} \geqslant \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{X}^2/\mu^2, \varepsilon_1^2\big\} = \varepsilon_1^2\, M(\varepsilon_1\, \mu) \tag{4.32}$$

для любого $\mu > 0$.

Теорема 4.5 существенно уточняет следствие 4.2. В частности, в отличие от неравенства (4.3) в следствии 4.2 при малом ε, правая часть неравенства (4.26) в теореме 4.5 может убывать при убывании ε. Кроме того, мы только что показали, что применение неравенства (1.7) может приводить к потере точности оценки. Напомним, что именно при помощи неравенства (1.7) следствие 4.2 может быть выведено из предложения 4.1.

Рассмотрим простой пример. Пусть X – случайная величина, принимающая значения 0 и 1 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X = 0\} = p > 0. \tag{4.33}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\widetilde{X} = \pm 1\} = p(1-p), \quad \mathbf{P}\{\widetilde{X} = 0\} = 1 - 2\,p(1-p), \tag{4.34}$$

и функция $M(\tau)$ имеет вид

$$M(\tau) = \begin{cases} 2\,p(1-p) & \text{при } 0 < \tau < 1, \\ 2\,p(1-p)/\tau^2 & \text{при } \tau \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.35}$$

Предположим для простоты, что $\|a\| = 1$. Если $L^2 > 1/2\,p(1-p)$, то $\tau_0 = L\sqrt{2\,p(1-p)}$ и при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0 = L\sqrt{2\,p(1-p)}/D^*(a)$ мы имеем

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}. \tag{4.36}$$

Аналогичная оценка следует из неравенства (4.26) теоремы 4.5 при $1/D^*(a) \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. При $0 < \varepsilon \leqslant 1/D^*(a)$ из неравенства (4.26) получаем оценку

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{1}{D^*(a)\sqrt{p(1-p)}}. \tag{4.37}$$

Таким образом,

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \min\left\{\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\Big(\varepsilon + \frac{1}{D^*(a)}\Big),\ 1\right\} \quad \text{для всех } \varepsilon \geqslant 0. \tag{4.38}$$

Неравенство (4.38) не может быть существенно усилено. Рассмотрим, например,

$$a = (s^{-1/2}, \dots, s^{-1/2}, 0, \dots, 0) \tag{4.39}$$

с первыми $s \leqslant n$ кординатами, равными $s^{-1/2}$, и последними $n - s$ координатами, равными нулю. В этом случае $D^*(a) \asymp s^{1/2}$, случайная величина $s^{1/2} S_a$ имеет биномиальное распределение с параметрами s и p и хорошо известно, что

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \gg \min\left\{\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\Big(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{s}}\Big),\ 1\right\} \quad \text{при всех } \varepsilon \geqslant 0. \tag{4.40}$$

Сравнивая оценки (4.38) и (4.40), мы видим, что теорема 4.5 обеспечивает оптимальный порядок $Q\big(F_a, \varepsilon\big)$ при всех возможных значениях ε. Более того, соответствующая константа оптимальным образом зависит от p.

Может показаться, что последний пример сводится к тривиальному случаю $n = s$. Это не совсем так. Ясно, что величина $Q(F_a, 1)$ не может намного измениться при малом изменении вектора a, определенного в (4.39), когда последние $n - s$ координат вектора малы по абсолютной величине, но не равны нулю. При этом степень малости последних $n-s$ координат можно подобрать таким образом, чтобы неравенства (4.38) и (4.40) при $\varepsilon \gg s^{-1}$ и $D^*(a) \asymp s^{1/2}$ оставались верны.

Для полноты приведем краткое доказательство неравенства (4.40). Легко видеть, что $\mathbf{D}S_a = p(1-p)$. Следовательно, по неравенству Чебышева,

$$\mathbf{P}\big\{|S_a - \mathbf{E}\,S_a| < 2\sqrt{p(1-p)}\big\} \geqslant 3/4. \tag{4.41}$$

Случайная величина S_a принимает значения, кратные $s^{-1/2}$. Поэтому если $s\,p(1-p) \leqslant 1$, то из неравенства (4.41) следует, что $Q\big(F_a, 0\big) \asymp 1$ и неравенство (4.40) справедливо.

Пусть теперь $s\,p(1-p) > 1$. Если $0 < \varepsilon \leqslant 4\sqrt{p(1-p)}$, то, используя (1.7) и (4.41), мы получаем

$$3/4 \leqslant Q\big(F_a, 4\sqrt{p(1-p)}\big) \ll \varepsilon^{-1}\sqrt{p(1-p)}\,Q\big(F_a, \varepsilon\big) \tag{4.42}$$

и, следовательно,

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \gg \frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}. \tag{4.43}$$

Ясно, что из (1.6), (1.7) и (4.43) следует, что $Q\big(F_a, \varepsilon\big) \asymp 1$ при $\varepsilon \geqslant 4\sqrt{p(1-p)}$. Применяя неравенство (4.43) при $\varepsilon = s^{-1/2}$ и используя решетчатую структуру носителя распределения F_a, мы получаем

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \geqslant Q\big(F_a, 0\big) \gg \frac{1}{\sqrt{s\,p(1-p)}} \tag{4.44}$$

при $0 \leqslant \varepsilon < s^{-1/2}$. Таким образом из неравенств (1.6), (1.7), (4.43) и (4.44) следует, что выполняется неравенство (4.40).

Результаты данного параграфа сформулированы при фиксированном L. Ясно, что при их применении следует стремиться выбрать оптимальное L, удовлетворяющее условиям и минимизирующее правые части неравенств, в которых оцениваются функции концентрации. Напомним, что наименьший общий знаменатель $D^*(a)$ зависит от L.

Величину $\tau_0 = \varepsilon_0\, D^*(a)$, дающую решение уравнения $L^2 = 1/M(\tau)$, можно интерпретировать как величину, зависящую от L и от распределения $\mathcal{L}(X)$. Кроме того, сравнивая оценки (4.3) и (4.27) при достаточно больших значениях ε, мы видим, что $\tau_0 \to \infty$ при $L \to \infty$. Следовательно, множитель L/τ_0 намного меньше, чем L при больших значениях L. В частности, в приведенном выше примере мы имеем $\tau_0 = L\sqrt{2\,p(1-p)}$.

Другим примером может служить симметричное устойчивое распределение с параметром α, $0 < \alpha < 2$. В этом случае характеристическая функция $\widehat{F}(t) = \mathbf{E}\exp(itX)$ имеет вид $\widehat{F}(t) = \exp(-|t|^\alpha)$. Можно показать, что тогда τ_0 ведет себя как $L^{2/\alpha}$ при $L \to \infty$.

Неравенство (4.36) может быть переписано в виде

$$Q\bigl(F_a, \varepsilon\bigr) \ll \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \text{при } \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \tag{4.45}$$

где $\sigma^2 = \mathbf{D}X$. Ясно, что аналогичная ситуация имеет место для любой случайной величины X с конечной дисперсией.

В частности, очевидно, что неравенство (4.45) выполняется при всех $\varepsilon \geqslant 0$, если $\|a\| = 1$ и X имеет нормальное распределение с $\mathbf{D}X = \sigma^2$. При этом порядок неравенства оптимален при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \sigma$. В этом конкретном случае для любого $\tau > 0$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{M(\tau)}} \asymp 1 + \frac{\tau}{\sigma},$$

с помощью которого из теоремы 4.5 при $\|a\| = 1$ легко выводится неравенство

$$Q(F_a, \varepsilon) \ll \frac{\varepsilon}{\sigma} \text{ при } \varepsilon \geqslant \frac{\sigma}{D^*(a)}, \tag{4.46}$$

что дает правильную зависимость функции концентрации от σ при $\sigma/D^*(a) \leqslant \varepsilon \leqslant \sigma$. Такого порядка оценки невозможно добиться с помощью неравенства (4.3). То, что из теоремы 4.5 нельзя вывести оценку (4.46) при малых ε, связано с тем, что в теореме 4.5 распределение $F = \mathcal{L}(X)$ произвольно и функция концентрации $Q(F_a, \varepsilon)$ может не стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$ (см. (4.40)).

§ 5. Многомерное обобщение результатов Арака

Заметим, что связь между скоростью убывания функции концентрации суммы и арифметической структурой носителей распределений независимых случайных величин была выявлена для произвольных распределений слагаемых в работе Арака [1] (см. также [2], [3], [5]), задолго до появления работ [26]–[28], [32]–[34], в которых аналогичная связь была обнаружена в частном случае слагаемых с распределениями, возникающими в проблеме Литтлвуда–Оффорда.

Ниже мы докажем многомерные обобщения некоторых результатов Арака (см. теоремы 1.15, 5.3 и 5.4). Основной результат данного параграфа содержится в теореме 1.15, формулировка которой приводится во введении. Условимся на протяжении пятого и шестого параграфа считать, что символ $\ll_d$ допускает произвольную зависимость константы от размерности d. Для доказательства теоремы 1.15 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть $\alpha > 0$, $\tau > 0$ и пусть F – симметричное d-мерное вероятностное распределение. Положим*

$$\varepsilon = \frac{\tau^d}{2^d} \int\limits_{|t|\leqslant 1/\tau} \exp\big\{\alpha(\widehat{F}(t) - 1)\big\}\, dt. \tag{5.1}$$

Тогда существуют такие $r \in \mathbf{Z}_+$ и $u = (u_1, \ldots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$, что

$$r \ll_d |\log \varepsilon| + 1, \tag{5.2}$$

и

$$\alpha\, F\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\} \ll_d \big(|\log \varepsilon| + 1\big)^3. \tag{5.3}$$

Для доказательства леммы 5.1 мы будем использовать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.2. *Пусть F – d-мерное вероятностное распределение. Тогда для любых $x, h \in \mathbf{R}^d$,*

$$\big|\widehat{F}(x) - \widehat{F}(x+h)\big|^2 \leqslant 2\,(1 - \operatorname{Re}\widehat{F}(h)). \tag{5.4}$$

Доказательство этой леммы элементарно и повторяет доказательство в одномерном случае (см [3], гл. I, теорема 1.6),

Доказательство леммы 5.1. Пусть μ – вероятностное распределение с плотностью

$$p_\mu(t) = \begin{cases} \tau^d \exp\left\{\alpha(\widehat{F}(t)-1)\right\}/(2^d\varepsilon), & \text{если } |t| \leqslant 1/\tau, \\ 0, & \text{если } |t| > 1/\tau. \end{cases}$$

Поскольку распределение μ симметрично, оно имеет нулевое среднее, и его характеристическая функция $\widehat{\mu}(x)$ четна и принимает только вещественные значения.

Отметим еще некоторые свойства функции $\widehat{\mu}$. По теореме Римана–Лебега,

$$\lim_{|x|\to\infty} \widehat{\mu}(x) = 0. \tag{5.5}$$

Так как мера μ сосредоточена на кубе $\{t \in \mathbf{R}^d : |t| \leqslant 1/\tau\}$,

$$1 - \widehat{\mu}(x) \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant 1/\tau} \big|1 + i\langle t, x\rangle - \exp\{i\langle t, x\rangle\}\big|\, \mu\{dt\} \leqslant \frac{\|x\|^2}{2\tau^2} \leqslant \frac{d\,|x|^2}{2\tau^2}. \tag{5.6}$$

Применяя равенство Парсеваля, получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbf{R}^d} \big|\widehat{\mu}(x)\big|^2 dx = (2\pi)^d \int\limits_{\mathbf{R}^d} (p_\mu(t))^2\, dt \leqslant (2\pi)^d \sup_t p_\mu(t) = \frac{\pi^d\tau^d}{\varepsilon}. \tag{5.7}$$

Докажем, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^d} \big(1 - \widehat{\mu}(x)\big)\, F\{dx\} \leqslant |\log\varepsilon|\,/\alpha. \tag{5.8}$$

Действительно, согласно равенству Парсеваля,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbf{R}^d} \big(1 - \widehat{\mu}(x)\big)\, F\{dx\} &= \int\limits_{\mathbf{R}^d} \big(1 - \widehat{F}(t)\big)\, \mu\{dt\} \\ &= \frac{\tau^d}{2^d\varepsilon} \int\limits_{|t|\leqslant 1/\tau} \exp\left\{\alpha(\widehat{F}(t)-1)\right\} \big(1 - \widehat{F}(t)\big)\, dt. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Последнее выражение можно представить в виде $\mathbf{E}\, f\big(\exp\left\{\alpha(\widehat{F}(\xi)-1)\right\}\big)/(\alpha\varepsilon)$, где $f(x) = -x\log x$, и ξ – случайный вектор, равномерно распределенный на кубе $\{t \in \mathbf{R}^d : |t| \leqslant 1/\tau\}$. Так как $f''(x) \leqslant 0$ при $x > 0$, мы можем применить неравенство Йенсена и получить оценку

$$\mathbf{E}\, f\big(\exp\big\{\alpha(\widehat{F}(\xi) - 1)\big\}\big) \leqslant f\big(\mathbf{E}\exp\big\{\alpha(\widehat{F}(\xi) - 1)\big\}\big) = \varepsilon\, |\log \varepsilon|\,,$$

доказывающую (5.8).

Построим вектор u. Возьмем

$$\varkappa = \frac{1}{32\,(\log_2(\pi^d/\varepsilon) + 6 + \log_2(d^{d/2}))^2}. \tag{5.10}$$

Положим $u^{(0)} = (\ )$. Теперь начнем рекуррентную процедуру, определяющую для $k = 0, 1, 2, \ldots$ множества B_k и векторы $u_{k+1} \in \mathbf{R}^d$ и $u^{(k+1)} \in \big(\mathbf{R}^d\big)^{k+1}$ равенствами

$$B_k = \big\{x : x \in \mathbf{R}^d \setminus [K_1(u^{(k)})]_\tau,\ 1 - \widehat{\mu}(x) \leqslant \varkappa\big\}, \quad u_{k+1} \in B_k, \tag{5.11}$$

и

$$u^{(k+1)} = (u_1, \ldots, u_{k+1}) \in \big(\mathbf{R}^d\big)^{k+1}. \tag{5.12}$$

Заметим, что в качестве u_{k+1} мы берем произвольную точку из B_k. Мы повторяем эту процедуру до тех пор, пока $B_k \neq \varnothing$. Наконец, определим r как первый индекс, такой что $B_r = \varnothing$, и положим $u = (u_1, \ldots, u_r)$.

Докажем, что такое r существует и

$$r \leqslant (32\,\varkappa)^{-1/2} = \log_2(\pi^d/\varepsilon) + 6 + \log_2(d^{d/2}). \tag{5.13}$$

Предположим противное: пусть $B_k \neq \varnothing$ при всех $k \leqslant s$, где

$$s = \lfloor (32\,\varkappa)^{-1/2} \rfloor. \tag{5.14}$$

Введем множество

$$K^+ = \Big\{ \sum_{j=1}^{s} n_j u_j : n_j \in \{0, 1\} \text{ при } j = 1, \ldots, s \Big\}. \tag{5.15}$$

Легко видеть, что две точки $x = \sum\limits_{j=1}^{s} n_j u_j$ и $y = \sum\limits_{j=1}^{s} m_j u_j$, которые принадлежат множеству K^+ и соответствуют двум различным векторам $n = (n_1, \ldots, n_s)$ и $m = (m_1, \ldots, m_s)$, составленным из нулей и единиц, отделены друг от друга по меньшей мере на расстояние τ в норме $|\cdot|$. Действительно, пусть $\nu = \max\{j : n_j \neq m_j\}$. Тогда $|n_\nu - m_\nu| = 1$, и в силу (1.29) и определения $u_1, u_2, \ldots$, мы заключаем, что

$$|x-y| = \left|u_\nu - \sum_{j=1}^{\nu-1} \frac{n_j - m_j}{n_\nu - m_\nu} u_j\right| \geqslant \tau. \tag{5.16}$$

Таким образом, $|K^+| = 2^s$ и

$$\lambda\{[K^+]_{\tau/2\sqrt{d}}\} = 2^s \tau^d d^{-d/2}. \tag{5.17}$$

Определим множество $Y = \big\{x \in \mathbf{R}^d : \widehat{\mu}(x) \geqslant 1/4\big\}$. Согласно (5.7),

$$\lambda\{Y\} \leqslant 16 \int\limits_{\mathbf{R}^d} \big|\widehat{\mu}(x)\big|^2 dx \leqslant \frac{16\,\pi^d \tau^d}{\varepsilon}. \tag{5.18}$$

Докажем, что

$$[K^+]_{\tau/2\sqrt{d}} \subset Y. \tag{5.19}$$

В самом деле, пусть x – произвольная точка множества K^+, то есть $x = \sum\limits_{j=1}^{s} n_j u_j$, где $n_j \in \{0,1\}$ при $j = 1, \ldots, s$. Положим $x_0 = 0$ и $x_k = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j u_j$ при $k = 1, \ldots, s-1$. Применяя лемму 5.2, получаем

$$\begin{aligned} 1 - \widehat{\mu}(x) &= \sum_{k=1}^{s} \big(\widehat{\mu}(x_{k-1}) - \widehat{\mu}(x_{k-1} + n_k u_k)\big) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{s} \big|\widehat{\mu}(x_{k-1}) - \widehat{\mu}(x_{k-1} + u_k)\big| \leqslant \sum_{k=1}^{s} \sqrt{2(1 - \widehat{\mu}(u_k))}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

В силу определения u_k, имеем $1 - \widehat{\mu}(u_k) \leqslant \varkappa$, $k = 1, \ldots, s$. Поэтому, учитывая (5.14) и (5.20), получаем

$$1 - \widehat{\mu}(x) \leqslant s\sqrt{2\varkappa} \leqslant 1/4. \tag{5.21}$$

Если точка $y \in \mathbf{R}^d$ такова, что $|y - x| \leqslant \tau/2\sqrt{d}$, тогда по лемме 5.2, (5.6) и (5.21), имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(y) &\geqslant \widehat{\mu}(x) - |\widehat{\mu}(x) - \widehat{\mu}(y)| \\ &\geqslant 3/4 - \sqrt{2(1 - \widehat{\mu}(x-y))} \geqslant 3/4 - \sqrt{1/4} = 1/4. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Следовательно, $y \in Y$ и (5.19) доказано.

Из (5.10), (5.14), (5.17) и (5.19) следует, что

$$\lambda\{Y\} \geqslant \lambda\{[K^+]_{\tau/2\sqrt{d}}\} = 2^s \tau^d d^{-d/2} \geqslant 2^{-1+(32\,\varkappa)^{-1/2}} \tau^d d^{-d/2} = \frac{32\,\pi^d \tau^d}{\varepsilon}. \qquad (5.23)$$

Неравенство (5.23) противоречит неравенству (5.18). Это доказывает неравенство (5.13) и, следовательно, неравенство (5.2).

Докажем неравенство (5.3). Учитывая, что $B_r = \varnothing$, и в силу определения (5.11), имеем

$$\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau \subset \big\{x \in \mathbf{R}^d : 1 - \widehat{\mu}(x) > \varkappa\big\}. \qquad (5.24)$$

Отсюда и из (5.8) получаем

$$\begin{aligned} F\big\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\big\} &\leqslant F\big\{\big\{x \in \mathbf{R}^d : 1 - \widehat{\mu}(x) > \varkappa\big\}\big\} \\ &\leqslant \frac{1}{\varkappa} \int\limits_{\mathbf{R}^d} \big(1 - \widehat{\mu}(x)\big)\, F\{dx\} \leqslant \frac{|\log \varepsilon|}{\alpha \varkappa}. \end{aligned} \qquad (5.25)$$

Из соотношений (5.10) и (5.25) следует (5.3). $\square$

Теоремы 1.15, 5.3 и 5.4 являются следствиями леммы 5.1. Они обобщают на многомерный случай теоремы 3.1–3.3, гл. II из работы [3]. Докажем теперь основной результат данного параграфа.

Доказательство теоремы 1.15. Предположим, что $\tau > 0$. Применим лемму 5.1 с $\alpha = n/2$ к распределению

$$F = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F_j^*,$$

где F_j^* – симметризованные распределения с характеристическими функциями $\widehat{F}_j^*(t) = \big|\widehat{F}_j(t)\big|^2$. Пусть r и $u = (u_1, \ldots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$ таковы, что неравенства (5.2) и (5.3) леммы 5.1 выполнены. Пользуясь неравенством Эссеена и соотношением $x \leqslant e^{x-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \rho \;&\ll_d\; \tau^d \int\limits_{|t| \leqslant 1/\tau} \Big| \prod_{j=1}^{n} \widehat{F}_j(t) \Big|\, dt \leqslant \tau^d \int\limits_{|t| \leqslant 1/\tau} \Big| \prod_{j=1}^{n} \widehat{F}_j^*(t) \Big|^{1/2} dt \\ &\leqslant\; \tau^d \int\limits_{|t| \leqslant 1/\tau} \exp\big\{\alpha(\widehat{F}(t) - 1)\big\}\, dt \asymp_d \varepsilon, \end{aligned} \qquad (5.26)$$

где ε определяется соотношением (5.1). Следовательно,

$$|\log \varepsilon| + 1 \ll_d |\log \rho| + 1.$$

Таким образом, (1.30) следует из (5.2). Остается заметить, что для любого борелевского множества $B \subset \mathbf{R}^d$ (в частности, при $B = \mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau$) имеем

$$F\{B\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j^*\{B\} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \inf_{x\in\mathbf{R}^d} F_j\{B+x\}.$$

Отсюда следует (1.31). В случае $\tau = 0$ доказательство получается предельным переходом. □

Теорема 5.3. *Пусть n – положительное целое, $\tau \geqslant 0$ и пусть F – d-мерное вероятностное распределение. Обозначим $\rho = Q\big(F^n, \tau\big)$. Тогда существуют такие $r \in \mathbf{Z}_+$ и векторы $u_1, \dots, u_r \in \mathbf{R}^d$, что*

$$r \ll_d |\log \rho| + 1 \tag{5.27}$$

и

$$n\, F\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\} \ll_d \big(|\log \rho| + 1\big)^3, \tag{5.28}$$

где $u = (u_1, \dots, u_r) \in \big(\mathbf{R}^d\big)^r$.

Теорема 5.4. *Пусть D – d-мерное безгранично делимое распределение с характеристической функцией вида $\exp\{\alpha(\widehat{M}(t) - 1)\}$, $t \in \mathbf{R}^d$, где $\alpha > 0$ и M – вероятностное распределение. Пусть $\tau \geqslant 0$ и $\rho = Q(D, \tau)$. Тогда существуют такие $r \in \mathbf{Z}_+$ и векторы $u_1, \dots, u_r \in \mathbf{R}^d$, что*

$$r \ll_d |\log \rho| + 1 \tag{5.29}$$

и

$$\alpha\, M\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\} \ll_d \big(|\log \rho| + 1\big)^3, \tag{5.30}$$

где $u = (u_1, \dots, u_r) \in \big(\mathbf{R}^d\big)^r$.

Доказательство теоремы 5.4. Пусть Y – случайный вектор с распределением $\mathcal{L}(Y) = M$. Обозначим $M^- = \mathcal{L}(-Y)$. Применим лемму 5.1 к распределению $F = (M + M^-)/2$. Множество $[K_1(u)]_\tau$ симметрично. Поэтому

$$M\big\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\big\} = M^-\big\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\big\} = F\big\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau\big\}.$$

Остается заметить, что в силу неравенства Эссеена, $\rho \ll_d \varepsilon$, где ε определяется в лемме 5.1. В случае $\tau = 0$ доказательство также получается предельным переходом. $\square$

§ 6. Об одном общем результате

Основной результат данного параграфа был сформулирован во введении в теореме 1.16. Теорему 1.16 можно применять при $V = G$. Тогда $\lambda = 1$. Однако интеграл в правой части неравенства (1.33) может в этом случае разойтись. В частности, он разойдется, если распределение G имеет ненулевой атом в нуле.

Заметим, что $\log\big(1 + \lfloor\tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\big) = 0$ при $z \geqslant \tau/\varepsilon$. Поэтому интегрирование в (1.33) можно вести только по множеству $\{z : |z| < \tau/\varepsilon\}$.

Следствие 6.1. *Пусть $\delta > 0$ и*

$$p(\delta) = G\big\{\{z : |z| \geqslant \delta\}\big\} > 0. \tag{6.1}$$

Тогда для любых $\varepsilon, \tau > 0$ имеем

$$Q(F_a, \tau) \ll_d e^{\Delta}\, Q(U_{1,p(\delta)}, \varepsilon), \tag{6.2}$$

где

$$\Delta = \Delta(\tau, \varepsilon, \delta) = \frac{d}{p(\delta)} \int\limits_{|z|\geqslant\delta} \log\big(1 + \lfloor\tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\big)\, G\{dz\}. \tag{6.3}$$

В частности, выбирая $\delta = \tau/\varepsilon$, получим

Следствие 6.2. *Для любых $\varepsilon, \tau > 0$ имеем*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d Q(U_{1,p(\tau/\varepsilon)}, \varepsilon). \tag{6.4}$$

Выбирая V так, что

$$V\{dz\} = \Big(\max\big\{1, \log\big(1 + \lfloor\tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\big)\big\}\Big)^{-1} G\{dz\}, \tag{6.5}$$

получим

Следствие 6.3. *Для любых $\varepsilon, \tau > 0$ имеем*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d Q(U_{1,\lambda}, \varepsilon)\, \exp\big(d\lambda^{-1} G\big\{\{z : |z| < \tau/\varepsilon\}\big\}\big), \tag{6.6}$$

где

$$\lambda=\lambda(G,\tau/\varepsilon)=V\{\mathbf{R}\}=\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\Bigl(\max\bigl\{1,\,\log\bigl(1+\lfloor\tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\bigr)\bigr\}\Bigr)^{-1}G\{dz\}.\quad(6.7)$$

В следствиях 6.1–6.3 мы берем меру V в виде $V\{dz\}=f(z)\,G\{dz\}$ с $0\leqslant f(z)\leqslant 1$. Выбор оптимальной функции f, минимизирующей правые части неравенств (6.2), (6.4) и (6.6), представляет собой сложную задачу. Ясно, что ее решение зависит от a и G.

Доказательство теоремы 1.16 основано на элементарных свойствах функций концентрации, оно будет приведено ниже. Заметим, что $U_{1,\lambda}$ – безгранично делимое распределение со спектральной мерой Леви $M_\lambda=\frac{\lambda}{4}\,M^*$, где $M^*=\sum\limits_{k=1}^{n}\bigl(E_{a_k}+E_{-a_k}\bigr)$.

Ясно, что утверждения теоремы 1.16 и следствий 6.1 и 6.2, можно рассматривать как утверждения о мере M^*.

Теорема 1.16 сводит проблему Литтлвуда–Оффорда к изучению меры M^*. На самом деле почти все результаты, полученные при решении этой проблемы, формулируются в терминах коэффициентов a_j или, что эквивалентно, в терминах свойств меры M^*. Это приводит к потере информации о распределении случайной величины X, которая может помочь при получении более точных оценок. В частности, если $\mathcal{L}(X)$ – стандартное нормальное, то F_a – гауссовское распределение с нулевым средним и легко вычисляемым ковариационным оператором. Таким образом, в некоторых ситуациях можно получить оценки для $Q(F_a,\tau)$, которые не следуют из результатов, сформулированных в терминах меры M^*. Заметим, что результаты параграфов 2–5 нельзя вывести с использованием теоремы 1.16. Однако из теоремы 1.16 с использованием теоремы 5.4 и результатов Арака [2] можно выводить содержательные оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда.

Доказательство теоремы 1.16. Покажем, что для произвольного вероятностного распределения F и $\lambda, T > 0$,

$$\log \int\limits_{|t|\leqslant T} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{z\in\mathbf{R}} \big(1-\cos(\langle\, t, a_k\rangle\, z)\big)\,\lambda\, F\{dz\}\Big)\,dt$$
$$\leqslant \int\limits_{z\in\mathbf{R}} \Bigg(\log \int\limits_{|t|\leqslant T} \exp\Big(-\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1-\cos(\langle\, t, a_k\rangle\, z)\big)\Big)\,dt\Bigg)\,F\{dz\}$$
$$= \int\limits_{z\in\mathbf{R}} \Bigg(\log \int\limits_{|t|\leqslant T} \widehat{U}_{z,\lambda}(t)\,dt\Bigg)\,F\{dz\}. \quad (6.8)$$

Достаточно доказать (6.8) для дискретных распределений $F = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_j E_{z_j}$, где $0 \leqslant p_j \leqslant 1$, $z_j \in \mathbf{R}$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Применяя в этом случае неравенство Гёльдера, имеем

$$\int\limits_{|t|\leqslant T} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{z\in\mathbf{R}} \big(1-\cos(\langle\, t, a_k\rangle\, z)\big)\,\lambda\, F\{dz\}\Big)\,dt$$
$$= \int\limits_{|t|\leqslant T} \exp\Big(-\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{k=1}^{n}\big(1-\cos(\langle\, t, a_k\rangle\, z_j)\big)\Big)\,dt$$
$$\leqslant \prod_{j=1}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{|t|\leqslant T} \exp\Big(-\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1-\cos(\langle\, t, a_k\rangle\, z_j)\big)\Big)\,dt\Bigg)^{p_j}. \quad (6.9)$$

Беря логарифм от обеих частей соотношения (6.9), получим (6.8). В общем случае мы можем аппроксимировать распределение F дискретными распределениями в смысле слабой сходимости и перейти к пределу. Мы пользуемся тем, что слабая сходимость вероятностных распределений эквивалентна сходимости характеристических функций, которая равномерна на ограниченных множествах. Кроме того, слабая сходимость симметричных безгранично делимых распределений эквивалентна слабой сходимости соответствующих спектральных мер. Заметим также,что интегралы $\int\limits_{|t|\leqslant T}$ в (6.8) можно заменить на интегралы $\int\limits_{t\in B}$ по произвольному борелевскому множеству B.

В силу неравенства Эссеена, соотношений (2.6) и (6.8) имеем

$$
\begin{aligned}
Q(F_a,\tau) &\ll_d \tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} |\widehat{F}_a(t)|\,dt \\
&\ll_d \tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left(1-\cos(\langle\, t,a_k\rangle\,\widetilde{X})\right)\Big)\,dt \\
&= \tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\big(1-\cos(\langle\, t,a_k\rangle\, z)\big)\,G\{dz\}\Big)\,dt \\
&\leqslant \tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\big(1-\cos(\langle\, t,a_k\rangle\, z)\big)\,\lambda\, F\{dz\}\Big)\,dt \\
&\leqslant \exp\Bigg(\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\log\Bigg(\tau^d\int\limits_{\tau|t|\leqslant 1}\widehat{U}_{z,\lambda}(t)\,dt\Bigg)\,F\{dz\}\Bigg). \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

Учитывая (1.20), имеем

$$
\begin{aligned}
\tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} \widehat{U}_{z,\lambda}(t)\,dt &\asymp_d Q(U_{z,\lambda},\tau) = Q\big(U_{1,\lambda},\tau|z|^{-1}\big) \\
&\leqslant \big(1+\lfloor \tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\big)^d\, Q(U_{1,\lambda},\varepsilon). \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

Подставляя эту оценку в формулу (6.10), получим (1.33). $\square$

Литература

[1] Арак Т. В. О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами. // Теория вероятн. и ее примен. — 1980. — Т. 25, В. 2. — С. 225–246.

[2] Арак Т. В. О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I. // Теория вероятн. и ее примен. — 1981. — Т. 26, В. 2. — С. 225–245.

[3] Арак Т. В., Зайцев А. Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. // Тр. МИАН СССР. — 1986. — Т. 174. — 214 С.

[4] Зайцев А. Ю. К многомерному обобщению метода треугольных функций. // Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1987. — Т. 158. — С. 81–104.

[5] Зайцев А. Ю. Об использовании функции концентрации для оценивания равномерного расстояния. // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1982. — Т. 119. — С. 93–107.

[6] Зигель Г. Верхние оценки для функций концентрации в Гильбертовом пространстве. // Теория вероятн. и ее примен. — 1981. — Т. 26. — С. 335–349.

[7] Мирошников А. Л., Рогозин Б. А. Неравенства для функций концентраций. // Теория вероятн. и ее примен. — 1980. — Т. 25. — С. 178–183.

[8] Нагаев С. В., Ходжабагян С. С. Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин. // Теория вероятн. и ее примен. — 1996. — Т. 41. — С. 655–665.

[9] Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. // М.: Наука. — 1972.

[10] Рогозин Б. А. Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин. // Теория вероятн. и ее примен. — 1961. — Т. 6. — С. 106—108.

[11] Хенгартнер В., Теодореску Р. Функции концентрации. // Пер. с англ. В.М. Круглова, В.М. Золотарева. М.: Наука. — 1980. — С. 176.

[12] Bretagnolle J. Sur l'inégalité de concentration de Doeblin–Lévy, Rogozin–Kesten. In: Parametric and semiparametric models with applications to reliability, survival analysis, and quality of life. // Stat. Ind. Technol., Boston: Birkhäuser. — 2004. — P. 533–551.

[13] Erdös P. On a lemma of Littlewood and Offord. // Bull. Amer. Math. Soc. — 1945. — V. 51. — P. 898–902.

[14] Erdös P., Moser L. Elementary problems and solutions. // Amer. Math. Monthly. — 1947. — V. 54, No. 4. — P. 229–230.

[15] Esséen C.-G. On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function. // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. — 1966. — V. 5. — P. 210–216.

[16] Esséen C.-G. On the concentration function of a sum of independent random variables. // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. — 1968. — V. 9. — P. 290–308.

[17] Frankl P., Fúredi Z. Solution of the LIttlewood–Offord problem in high dimensions. // Ann. Math. (2). — 1988. — V. 128, No. 2. — P. 259–270.

[18] Friedland O., Sodin S. Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation. // C. R. Math. Acad. Sci. Paris.— 2007. — V. 345, No. 9. — P. 513–518.

[19] Griggs J. The Littlewood–Offord problem: tightest packing and on an M-part Sperner theorem. // Europ. J. Combin. — 1980. — V. 1. — P. 225–234.

[20] Halász G. Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability. // Periodica Mathematica Hungarica. — 1977. — V. 8. — P. 197–211.

[21] Katona G. On a conjecture of Erdös and a stronger form of Spenser's theorem. // Studia Sci. Math. Hungar. — 1966. V. 1. — P. 59–63.

[22] Kesten H. A sharper form of the Doeblin–Levy–Kolmogorov–Rogozin inequality for concentration functions. // Math. Scand. — 1969. — V.25. — P. 133–144.

[23] Kleitman D. On a lemma of Littlewood and Offord on the distributions of linear combinations of vectors. // Adv. Math. — 1970. — V. 5. — P. 155–157.

[24] Kleitman D. Some new results on the Littlewood–Offord problem. // J. Combinatorial Theory Ser. A 20. — 1976. — No. 1. — P. 89–113.

[25] Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. — 1943. — V. 12. — P. 277–286.

[26] Nguyen Hoi, Vu Van. Optimal inverse Littlewood–Offord theorems. // Adv. Math. — 2011. — V. 226, No. 6. — P. 5298–5319.

[27] Rudelson M., Vershynin R. The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices. // Adv. Math. — 2008. — V. 218, No. 2. — P. 600–633.

[28] Rudelson M., Vershynin R. Smallest singular value of a random rectangular matrix. // Comm. Pure Appl. Math. — 2009. — V. 62, No. 12. — P. 1707–1739.

[29] Sali A. Strong from of an M-part Sperner theorem. // European J. Combinatorics. — 1983. — V. 4. — P. 179–183.

[30] Sali A. A Sperner type theorem. // Order 2. — 1985. — P. 13–127.

[31] Sárközy A., Szemerédi E. Über ein Problem von Erdös und Moser. // Acta Arithmetica. — 1965. — V. 11. — P. 205–208.

[32] Tao T., Vu Van. Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices. // Ann. Math. — 2009. — V. 169, No. 2. — P. 595–632.

[33] Tao T., Vu Van. From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices. // Bull. Amer. Math. Soc. — 2009. — V. 46, No. 3. — P. 377–396.

[34] Vershynin R. Invertibility of symmetric random matrices. // Random Structures and Algorithms. — 2014. — V. 44, P. 135–182.

Работы автора по теме диссертации

[35] Елисеева Ю. С. Многомерные оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2013. — 412. — с. 127–137.

[36] Елисеева Ю. С., Гётце Ф., Зайцев А. Ю. Оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда. // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2013. — 420. — с. 50–69.

[37] Елисеева Ю. С., Зайцев А. Ю. Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. // Теория вероятн. и ее примен. — 2012. — 57. — с. 768–777.