Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Мешкова Юлия Михайловна

Операторные оценки погрешности в задачах усреднения дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами

01.01.03 —
«Математическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Суслина Татьяна Александровна

Санкт-Петербург — 2018

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Такие операторы возникают при описании физических процессов в сильнонеоднородных средах, например, процесса распространения тепла в композите. Теории усреднения посвящена обширная литература. Укажем в первую очередь книги [5, 6, 20, 47, 54]. Пример задачи усреднения — скалярное эллиптическое уравнение

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \varepsilon > 0,$$

где $F \in L_2(\mathbb{R}^d)$; типичный вопрос — как ведет себя решение u_ε при $\varepsilon \to 0$. Классический качественный результат — существование предела решений: $L_2\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = u_0$. Эффект усреднения состоит в том, что функция u_0 является решением задачи того же вида, но с постоянной *эффективной* матрицей:

$$-\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Иными словами, с макроскопической точки зрения физические процессы в средах с быстро меняющимися характеристиками протекают как в однородной эффективной среде. Нас будут интересовать количественные результаты. „Классика" в гомогенизации — оценка вида

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(F)\varepsilon.$$

Здесь $C(F)$ — постоянная, зависящая от решетки периодов, матрицы коэффициентов и правой части F.

В серии работ [7–10] М. Ш. Бирман и Т. А. Суслина развили теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднения. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используем обозначения $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\overline{\psi} := |\Omega|^{-1}\int_\Omega \psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Изучались матричные сильно эллиптические операторы вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{1}$$

действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и положительно определенная. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение системы

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,$$

$\mathbf{F}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [8] было показано, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{u}_0$ — решение соответствующей эффективной задачи

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,$$

с постоянной положительной эффективной матрицей g^0. В силу произвольности $\mathbf{F}$ оценка (2) означает, что при $\varepsilon\to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте эффективного оператора $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon. \tag{3}$$

В [10] была получена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon. \tag{4}$$

В этой аппроксимации учтен корректор $K(\varepsilon)$. Оператор $K(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, а потому зависит от ε. При этом $\|\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(1)$.

Оценки (3), (4) точны по порядку. Постоянные в оценках контролируются явно в терминах данных задачи. Подобные результаты получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Метод работ [7–10] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Разумеется, спектральный метод применялся к задачам усреднения и ранее, см., например, [6, глава 4, §3], [20, глава II, §6], а также [16, 17, 21, 55]. Однако важной особенностью работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной является то, что авторы имеют дело с системой уравнений, поэтому теорию возмущений приходится строить по многомерному параметру.

Обзор результатов по операторным оценкам погрешности. Впоследствии спектральный метод был распространен Т. А. Суслиной [61, 65] на случай оператора

$$\mathcal{B}_\varepsilon = A_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{5}$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $a_j(\mathbf{x})$, $j=1,\dots,d$, и $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодические матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные. В [61] установлены аналоги оценок (3), (4):

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon+\lambda Q_0^\varepsilon)^{-1}-(\mathcal{B}^0+\lambda\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C\varepsilon, \tag{6}$$
$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon+\lambda Q_0^\varepsilon)^{-1}-(\mathcal{B}^0+\lambda\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C\varepsilon. \tag{7}$$

Здесь $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция, положительно определенная, ограниченная и ограниченно обратимая. Вещественная постоянная λ выбрана так, чтобы оператор $\mathcal{B}_\varepsilon+\lambda Q_0^\varepsilon$ был положительно определен; $\mathcal{B}^0$ — соответствующий эффективный оператор с постоянными коэффициентами.

К параболическим системам спектральный метод применялся в работах Т. А. Суслиной [58, 59], где был найден старший член аппроксимации, и [60], где установлена оценка при учете корректора:

$$\|e^{-A_\varepsilon t}-e^{-A^0t}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2},\quad t\geqslant 0, \tag{8}$$
$$\|e^{-A_\varepsilon t}-e^{-A^0t}-\varepsilon\mathcal{K}(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C\varepsilon(t^{-1/2}+t^{-1}),\quad t\geqslant\varepsilon^2. \tag{9}$$

В этих оценках нет экспоненциального убывания по времени, поскольку операторы A_ε и A^0 имеют краем спектра точку нуль. Экспонента от оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$, включающего члены первого и нулевого порядков, изучалась в работе Ю. М. Мешковой [35], где установлены аналоги неравенств (8) и (9). Отметим также работы [12, 13, 48].

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в теории усреднения был предложен В. В. Жиковым и развит им совместно с С. Е. Пастуховой. В работах [22–24] были получены оценки вида (3), (4) для операторов акустики и теории упругости. Метод, названный авторами „модифицированным методом первого приближения“ или „методом сдвига“, основан на анализе первого приближения к решению и введении в задачу дополнительного параметра. Помимо задач в $\mathbb{R}^d$ в работах [22–24] изучались задачи усреднения в ограниченной области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. К параболическим уравнениям метод сдвига применялся в работе [25], где установлены аналоги оценок (8) и (9). Дальнейшие результаты В. В. Жикова, С. Е. Пастуховой и их учеников отражены в обзоре [26].

Операторные оценки погрешности при усреднении задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения второго порядка (без младших членов) в ограниченной области изучались многими авторами. Первыми, по-видимому, были Ш. Москоу и М. Вогелиус, установившие оценку (см. [45, следствие 2.2]), допускающую запись в операторных терминах:

$$\|A_{D,\varepsilon}^{-1}-(A_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C\varepsilon. \tag{10}$$

Здесь оператор $A_{D,\varepsilon}$ в $L_2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2$, задан выражением $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$, а матрица-функция $g(\mathbf{x})$ предполагается C^∞-гладкой. В случае условия Неймана аналогичная оценка, а также аппроксимация при учете корректора по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O})$ в класс Соболева $H^1(\mathcal{O})$, с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ получена в [46, следствие 1]. Ухудшение порядка по сравнению с аналогичным результатом в $\mathbb{R}^d$ объясняется влиянием границы области. В случае произвольной размерности задачи в ограниченной области изучались в работах [22, 23] и [24]. Гладкость коэффициентов не предполагалась. Для операторов акустики и упругости при условии Дирихле либо Неймана на границе была получена $(L_2 \to H^1)$-аппроксимация при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. В качестве грубого следствия было установлено неравенство вида (10) с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. (В случае задачи Дирихле для оператора акустики $(L_2 \to L_2)$-оценка была улучшена в [24], но ее порядок все равно не был точным.) Близкие результаты для оператора, заданного выражением $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на $\partial\mathcal{O}$, были установлены в работах Ж. Гризо [18, 19] с помощью „unfolding“-метода. В [19] для того же оператора впервые была получена точная по порядку оценка (10). Для эллиптических систем сходные результаты независимо получены в [28] и [52, 62]. Дальнейшие продвижения и подробный обзор можно найти в работах [63, 66].

В присутствии членов первого и нулевого порядков задача усреднения для оператора (5) в $\mathbb{R}^d$ изучалась в статье Д. И. Борисова [11]. Было найдено выражение для эффективного оператора $\mathcal{B}^0$ и получены оценки погрешности вида (6), (7). При этом предполагалось, что коэффициенты оператора зависят не только от быстрой, но и от медленной переменной. Однако в [11] коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ предполагались достаточно гладкими. Отметим также недавнюю работу [51], в которой рассматривалось дивергентное эллиптическое уравнение второго порядка общего вида в несамосопряженной постановке.

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Для матричного оператора $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ вида (5), действующего в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при условии Дирихле и включающего младшие члены, задача усреднения изучалась К. Ху [68, 70]. Случаю краевого условия Неймана посвящена работа [69]. Однако в работах К. Ху на оператор наложено весьма жесткое условие равномерной эллиптичности.

До сих пор речь шла об аппроксимации резольвенты в фиксированной регулярной точке. Аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ оператора (1) в зависимости от ε и спектрального параметра $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ найдена Т. А. Суслиной [66]. В этой работе также получены двухпараметрические (относительно ε и ζ) оценки погрешности при усреднении резольвент операторов $A_{D,\varepsilon}$ и $A_{N,\varepsilon}$ вида (1), действующих в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана на границе.

Стимулом к получению двухпараметрических оценок послужило представление операторной экспоненты в виде

$$e^{-A_{D,\varepsilon}t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\,d\zeta, \tag{11}$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $A_{D,\varepsilon}$ в положительном направлении. Это представление позволяет выводить параболические результаты усреднения из эллиптических результатов с двухпараметрическими оценками погрешности.

До работ Ю. М. Мешковой и Т. А. Суслиной [39,41,43] были известны только некоторые оценки операторного типа для параболических уравнений в двумерном случае, см. [14]. Однако в [14] матрица g предполагалась C^∞-гладкой, а начальные данные в параболическом уравнении принадлежали $H^2(\mathcal{O})$.

В настоящий момент операторные оценки погрешности (и близкие результаты) — активно развивающаяся область теории усреднения, причем не только для операторов с периодическими коэффициентами. Продвижения для высококонтрастных сред получены К. Д. Чередниченко и Ш. Купером [15], для локально-периодических операторов — С. Е. Пастуховой и Р. Н. Тихомировым [49,50], Д. И. Борисовым [11], Н. Н. Сеником [56]. Почти периодический случай изучался С. Н. Армстронгом и Ж. Шеном [4]. Для стохастических задач некоторые результаты получены в [2, 3, 67].

Целью диссертационной работы является усреднение задач в ограниченной области, эллиптических и параболических, для дифференциального оператора $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ при условии Дирихле на границе области. Для этого предполагалось перенести метод работы [66] на более широкий класс операторов и использовать аналог тождества (11).

В соответствии с этой целью были поставлены следующие **задачи:**

1. Изучить поведение обобщенной резольвенты оператора (5), действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с двухпараметрическими оценками погрешности.

2. Получить аппроксимации оператора $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ с двухпараметрическими оценками погрешности.

3. Аппроксимировать полугруппу $e^{-t\mathcal{B}_{D,\varepsilon}}$, $t > 0$.

Постановка задачи. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Мы изучаем самосопряженный матричный сильно эллиптический ДО второго порядка $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, действующий в пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при условии Дирихле на границе. Старшая часть оператора $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ задается в факторизованной форме $A_{D,\varepsilon} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Задача усреднения для оператора $A_{D,\varepsilon}$ изучалась в работах [52, 62, 66]. Сейчас мы рассматриваем более общий класс самосопряженных ДО $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$, включающих младшие члены. Формально оператор $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ задан дифференциальным выражением (5). Строгое определение дается через соответствующую квадратичную форму на классе Соболева $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Коэффициенты оператора $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ быстро осциллируют при малом ε. Типичная задача теории усреднения применительно к оператору $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ состоит в нахождении аппроксимации при $\varepsilon \to 0$ для резольвенты $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ либо обобщенной резольвенты $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$. Кроме обобщенной резольвенты $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ нас также интересует поведение полугруппы $e^{-\mathcal{B}_{D,\varepsilon} t}$, $t > 0$.

Формулировка основных результатов

В **первой главе** рассматривается задача усреднения для обобщенной резольвенты оператора (5).

Прежде чем формулировать результаты, удобно перейти к неотрицательному оператору $B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + cQ_0^\varepsilon$, выбирая подходящую постоянную c. Тогда $B^0 = \mathcal{B}^0 + c\overline{Q_0}$ — соответствующий эффективный оператор.

Основные результаты главы 1 — оценки

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{12}$$

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C(\phi)\varepsilon, \tag{13}$$

справедливые при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Прослежена зависимость констант в оценках от угла $\phi = \arg\zeta$. Двухпараметрические оценки (12) и (13) равномерны по ϕ в любой области вида

$$\{\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C} : |\zeta| \geqslant 1, \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\} \tag{14}$$

при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$.

Корректор в (13) в общем случае содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем случаи, когда можно использовать более простой корректор.

Помимо оценок для обобщенной резольвенты мы находим аппроксимацию по $(L_2 \to L_2)$-норме операторов вида $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, отвечающих потокам.

Оценки (12), (13) обобщают результаты из [64, 66] на оператор B_ε, включающий младшие члены. Однако есть и отличие: оценки для $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ справедливы во всей области $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, в то время как в (12), (13) дополнительно предполагается, что $|\zeta| \geqslant 1$. Это связано с присутствием членов первого и нулевого порядков.

Также мы находим аппроксимацию оператора $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, справедливую в более широкой области изменения параметра ζ с оценками погрешности, имеющими другое поведение относительно ζ. (Подробнее см. п. 1.8 ниже.)

Во **второй главе** изучаются эллиптические системы в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ класса $C^{1,1}$ при условии Дирихле на границе.

Основные результаты главы 2 — оценки

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{15}$$

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C(\phi)\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon\big), \tag{16}$$

справедливые при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и достаточно малом ε. Величины $C(\phi)$ контролируются явно в терминах данных задачи и угла ϕ. Оценки (15), (16) равномерны по ϕ в любой области вида (14) при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$.

При фиксированном ζ оценка (15) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (16) хуже, чем в $\mathbb{R}^d$ (см. (7)), из-за влияния границы области. Порядок ($L_2 \to H^1$)-оценки можно улучшить до точного $O(\varepsilon)$, вводя поправку типа пограничного слоя. (См. теорему 2.1.8 ниже.)

Корректор в (16) в общем случае содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем случаи, когда можно использовать более простой корректор.

Помимо оценок для обобщенной резольвенты мы находим аппроксимацию для „потока" $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$.

Также мы находим аппроксимации оператора $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра ζ, с оценками погрешности, имеющими другое поведение относительно ζ. (Подробнее см. п. 2.7 ниже.)

В **третьей главе** изучается поведение в пределе малого периода решения первой начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O},\, t > 0; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O},\, t > 0; \quad Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Оказывается, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ сходится в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0(\cdot,t)$ эффективной задачи с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\partial_t \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) = -B^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O},\, t > 0; \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O},\, t > 0; \quad \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Здесь B^0 — дифференциальное выражение для эффективного оператора B_D^0. Первый основной результат главы 3 — оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-ct} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad t \geqslant 0, \tag{17}$$

справедливая при достаточно малом ε. При фиксированном значении времени $t > 0$ эта оценка имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Второй результат — аппроксимация по энергетической норме для решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-ct} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad t > 0. \tag{18}$$

Здесь $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t) = \mathbf{u}_0(\cdot,t) + \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ — первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$, оператор $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)$ — корректор. При фиксированном t оценка (18) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ из-за влияния пограничного слоя.

В общем случае корректор содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем условия, при которых можно использовать более простой корректор без сглаживающего оператора. Помимо оценки (18) мы получаем аппроксимацию потока $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ по L_2-норме.

Постоянные в оценках (17) и (18) контролируются через исходные данные и не зависят от $\boldsymbol{\varphi}$. Поэтому оценки (17) и (18) можно переписать в равномерной операторной топологии. В более простом случае, когда $Q_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_n$, имеем

$$\begin{aligned}
&\|e^{-B_{D,\varepsilon}t} - e^{-B_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-ct}, \quad t \geqslant 0,\\
&\|e^{-B_{D,\varepsilon}t} - e^{-B_D^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-ct}, \; t > 0.
\end{aligned}$$

Научная новизна. Все выносимые на защиту результаты являются новыми. Ранее аналоги результатов глав 1 и 2 были известны для резольвенты оператора A_ε, не включающего младшие члены. Результаты главы 3 совершенно новые. Ранее операторных оценок погрешности при усреднении параболических задач в ограниченной области известно не было.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты представляют интерес для специалистов по теории усреднения. Оценки в операторных терминах допускают применение к задачам акустики и упругости. Продвижения в усреднении эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра нашли дальнейшие применения к изучению гиперболических задач усреднения в работе соискателя [37], выходящей за рамки диссертационного исследования. Установленные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при изучении физических задач в сильно неоднородных средах. В качестве примеров рассмотрены скалярный эллиптический оператор и периодический магнитный оператор Шрёдингера с сильно сингулярным электрическим потенциалом.

Методология и методы исследования. В первой главе применяется теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам усреднения, развитый в работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной. Этот метод состоит в применении масштабного преобразования, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

Во второй главе результаты для оператора, действующего в ограниченной области, получены на основании результатов главы 1 с помощью рассмотрения ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^d$, введения и тщательного анализа поправки типа пограничного слоя. Основные трудности связаны с оцениванием интегралов по узкой окрестности границы области.

В третьей главе аппроксимации для операторной экспоненты выводятся из эллиптических результатов главы 2 с помощью обратного преобразования Лапласа.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для обобщенной резольвенты самосопряженного матричного сильно эллиптического оператора второго порядка B_ε, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, получены аппроксимации по $(L_2 \to L_2)$- и $(L_2 \to H^1)$-операторным нормам с двухпараметрическими (относительно малого периода и спектрального параметра) оценками погрешности. Оценки имеют точный порядок (при фиксированном значении спектрального параметра).

2. Для оператора $B_{D,\varepsilon}$, действующего в ограниченной области при условии Дирихле на границе, получены аппроксимации обобщенной резольвенты с двухпараметрическими оценками погрешности. При этом оценка погрешности по $(L_2 \to L_2)$-норме имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, а оценка погрешности по $(L_2 \to H^1)$-норме имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$. Ухудшение порядка по сравнению с аналогичным результатом в $\mathbb{R}^d$ объясняется влиянием границы области.

3. Для полугруппы $e^{-B_{D,\varepsilon}t}$, $t > 0$, получены аппроксимации по $(L_2 \to L_2)$- и $(L_2 \to H^1)$-операторным нормам.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на 14 международных конференциях в России, Литве, Германии, Китае, Италии и Канаде, а также на 7 научных семинарах в России, Великобритании, США и Франции:

1. Международная конференция „Дни дифракции 2015“ (Санкт-Петербург, Россия, 25–29 мая 2015) (устный доклад).

2. Международная конференция „Asymptotic Problems: Elliptic and Parabolic Issues“ (Вильнюс, Литва, 1–5 июня 2015) (устный доклад).

3. Пятая международная конференция „Multiscale Modeling and Methods: Upscaling in Engineering and Medicine“ (Москва, Россия, 25–27 июня 2015) (устный доклад).

4. Международная конференция „КРОМШ-2015“ (Батилиман, Россия, 17–29 сентября 2015) (устный доклад).

5. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, Россия, 8–12 июля 2016) (устный доклад).

6. Трехсторонняя германо-российско-украинская летняя школа „Spectral Theory, Differential Equations and Probability“ (Майнц, Германия, 4–15 сентября 2016) (устный доклад).

7. Международная конференция „КРОМШ-2016“ (Батилиман, Россия, 17–29 сентября 2016).
8. Рождественские встречи с Пьером Делинем (Москва, Россия, 4–6 января 2017) (устный доклад).
9. Международная конференция по дифференциальным уравнениям — Silkroad Mathematics Center series international conferences (Пекин, Китай, 10–21 апреля 2017) (постерный доклад).
10. Международная конференция „Современные методы и проблемы гармонического анализа и теории операторов и их приложения VII“ (Ростов-на-Дону, Россия, 23–28 апреля 2017) (устный доклад).
11. Международная конференция „Дни дифракции 2017“ (Санкт-Петербург, Россия, 19–23 июня 2017) (устный доклад).
12. Инсубрийская летняя школа по математической физике „Spectral and scattering theory: from selfadjoint operators to boundary value problems“ (Комо, Италия, 18–22 сентября 2017) (постерный доклад).
13. Симпозиум молодых ученых (Университет МакГилл, Монреаль, Канада, 20–21 июля 2018).
14. Летняя школа „Inverse and Spectral Problems for (Non)-Local Operators“ (Институт Макса Планка, Лейпциг, Германия, 10–14 сентября 2018) (постерный доклад).
15. Семинар по математической физике им. В. И. Смирнова (ПОМИ, Санкт-Петербург, Россия, 24 ноября 2014).
16. Санкт-Петербургский семинар по динамике (Лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербургский университет, Россия, 10 октября 2016).
17. Семинар кафедры Высшей математики и математической физики (ПОМИ, Санкт-Петербург, Россия, 19 октября 2016).
18. Исследовательский семинар „Асимптотики, операторы и функционалы” (Университет Бата, Бат, Великобритания, 31 октября 2016).
19. Семинар по математической физике и гармоническому анализу (Техасский A&M университет, Колледж Стейшн, Техас, США, 17 ноября 2016).
20. Семинар по численному анализу и научным вычислениям (математическая лаборатория Безансона, Безансон, Франция, 4 мая 2017).
21. Бэйлорский аналитический семинар (Бэйлорский университет, Бэйлор, Техас, США, 25 апреля 2018).

Личный вклад. Основные результаты диссертации изложены в совместных с Т. А. Суслиной работах. Определяющий вклад в эти работы принадлежит диссертанту. Автору принадлежат важные для дальнейших приложений технические продвижения в задаче об усреднении резольвенты оператора в ограниченной области. Идея вывода параболических результатов из эллиптических также принадлежит диссертанту. Кроме того, автором лично получены результаты об усреднении параболических и гиперболических систем, выходящие за рамки диссертационного исследования.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в пяти совместных с Суслиной Т. А. работах:

[39] *Мешкова Ю.М., Суслина Т.А.* Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем // Функц. анализ и его прил. **49** (2015), №1, 88–93.

[40] *Meshkova Y.M., Suslina T.A.* Two-parametric error estimates in homogenization of second-order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$ // Applicable Analysis **95** (2016), №7, 1413-1448.

[41] *Meshkova Y.M., Suslina T.A.* Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients // Applicable Analysis **95** (2016), №8, 1736-1775.

[42] *Мешкова Ю.М., Суслина Т.А.* Усреднение задачи Дирихле для эллиптических и параболических систем с периодическими коэффициентами // Функц. анализ и его прил. **51** (2017), №3, 87–93.

[43] *Мешкова Ю.М., Суслина Т.А.* Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности // Алгебра и анализ **29** (2017), №6, 99–158.

Также по теме диссертации автором опубликованы статья [35] и препринты [36–38], [44]. Однако материал работ [35–38] выходит за рамки диссертационного исследования.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации 148 страниц текста. Список литературы содержит 70 наименований.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую признательность Мудрому научному руководителю Татьяне Александровне Суслиной, работа с которой задает определенный уровень и способствует становлению высоко мотивированным исследователем и чутким, внимательным человеком. Автор благодарен коллективу кафедры Высшей математики и математической физики за высокие образовательные стандарты, интересные лекции и воодушевляющее живое общение. Автор благодарен лаборатории им. П. Л. Чебышева вообще и, в частности, ее Научному Руководителю Станиславу Константиновичу Смирнову и многолетнему заведующему Петру Георгиевичу Зографу за уникальную возможность спокойно заниматься наукой, прекрасную атмосферу и непрекращающуюся стимулирующую математическую активность. Организаторам новой программы бака-

лавриата, собравшей на Васильевском острове критическую массу талантливых нетривиальных людей, отдельный поклон. И вообще всему математическому Петербургу спасибо просто за то, что он пока есть (порой, в географически удаленных частях света). „Господь Бог коварен, но не злонамерен.“(А. Эйнштейн.) [Автор затрудняется озвучить гипотезу, кому из „взрослых” поклониться за устройство мироздания должным образом.]

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-01-00760 и 16-01-00087, стипендии им. В. А. Рохлина, стипендий Правительства и Президента РФ по приоритетным направлениям, гранта фонда Дмитрия Зимина „Династия“для молодых математиков и ОАО „Газпром-нефть“.

Обозначения

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Используем обозначение $\mathbb{N}$ для множества натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+$ для множества неотрицательных целых чисел и $\mathbb{R}_+$ для положительной полуоси $[0,\infty)$. Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{1}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(m\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Если $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d$ — мультииндекс, то $|\alpha|$ — его длина: $|\alpha|=\sum_{j=1}^d\alpha_j$. Для $z\in\mathbb{C}$ через z^* обозначается комплексно сопряженное число. (Мы используем такое нестандартное обозначение, так как верхняя черта означает среднее значение периодической функции по ячейке периодов.) Используем обозначения $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j=\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D}=-i\nabla=(D_1,\dots,D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n=1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но, если это не ведет к недоразумениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций. Символ $L_p((0,T);\mathfrak{H})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, означает L_p-пространство $\mathfrak{H}$-значных функций на интервале $(0,T)$.

Различные оценочные постоянные обозначаются символами c, $\mathfrak{c}$, C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$, β, γ (возможно, с индексами и значками).

Глава 1

Двухпараметрические оценки погрешности при усреднении эллиптических систем второго порядка в $\mathbb{R}^d$

В этой главе рассматривается задача усреднения для эллиптических систем во всем пространстве $\mathbb{R}^d$. В операторных терминах, речь пойдет об аппроксимации обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ с двухпараметрическими (относительно малого периода ε и спектрального параметра ζ) оценками погрешности. Здесь B_ε — самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с периодическими быстро осциллирующими (зависящими от $\mathbf{x}/\varepsilon$) коэффициентами. Результаты применяются к периодическому оператору Шрёдингера с быстро осциллирующей метрикой и сильно сингулярным потенциалом.

1.1 Класс операторов. Аппроксимация обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$

В этом разделе вводится рассматриваемый класс операторов, описывается эффективный оператор и формулируются результаты из [61].

1.1.1 Решетки в $\mathbb{R}^d$

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$:

$$\Gamma = \Big\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \, : \, \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{d} \nu_j \mathbf{a}_j, \, \nu_j \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,:\, \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} \tau_j \mathbf{a}_j, \ -\frac{1}{2} < \tau_j < \frac{1}{2} \Big\}.$$

Обозначим $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d \in \mathbb{R}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_i \rangle = 2\pi\delta_{ji}$, где δ_{ji} — символ Кронекера. Двойственной к решетке Γ называется решетка, порожденная двойственным базисом: $\widetilde{\Gamma} = \Big\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d \,:\, \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{d} \mu_j \mathbf{b}_j, \ \mu_j \in \mathbb{Z} \Big\}$. В качестве фундаментальной области двойственной решетки $\widetilde{\Gamma}$ удобно взять первую зону Бриллюэна: $\widetilde{\Omega} = \Big\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \,:\, |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma} \Big\}$. Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$, т. е. $2r_0 = \min_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}|$.

Для Γ-периодических измеримых матриц-функций систематически используются следующие обозначения:

$$f^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0; \quad \overline{f} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{f} = \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Здесь при определении $\overline{f}$ предполагается, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, а при определении $\underline{f}$ считается, что матрица f квадратная и неособая, причем $f^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Через $[f^{\varepsilon}]$ обозначается оператор умножения на матрицу-функцию $f^{\varepsilon}(\mathbf{x})$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

1.1.2 Сглаживающий оператор Π_{ε}

Через $\Pi_{\varepsilon}^{(k)}$, $\varepsilon > 0$, обозначим ПДО, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ (где $k \in \mathbb{N}$), символ которого — характеристическая функция $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ множества $\widetilde{\Omega}/\varepsilon$:

$$(\Pi_{\varepsilon}^{(k)} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k). \tag{1.1}$$

Здесь $\widehat{\mathbf{u}}$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}$. Отметим, что при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ выполнено $\Pi_{\varepsilon}^{(k)} \mathbf{D}^{\alpha} \mathbf{u} = \mathbf{D}^{\alpha} \Pi_{\varepsilon}^{(k)} \mathbf{u}$ для любого мультииндекса α длины $|\alpha| \leqslant s$. В дальнейшем мы будем опускать в обозначениях зависимость оператора $\Pi_{\varepsilon}^{(k)}$ от k и писать просто Π_{ε}.

Ниже нам потребуются следующие свойства оператора Π_{ε}, установленные в [52, предложение 1.4] и [10, п. 10.2].

Предложение 1.1.1. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\| \Pi_{\varepsilon} \mathbf{u} - \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1} \| \mathbf{D}\mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Предложение 1.1.2. *Пусть f — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, такая что $f \in L_2(\Omega)$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]\Pi_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k)$ и при $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\|[f^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

1.1.3 Оператор $\mathcal{A}$

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь g — Γ-периодическая матрица-функция размера $m \times m$, вообще говоря, с комплексными элементами. Считаем, что

$$g(\mathbf{x}) > 0, \quad g, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{1.2}$$

Далее, $b(\mathbf{D})$ — дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l. \tag{1.3}$$

Здесь b_l, $l = 1,\dots,d$, — постоянные $(m \times n)$-матрицы, вообще говоря, с комплексными элементами. Считаем, что $m \geqslant n$, и что символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Это условие равносильно существованию таких положительных постоянных α_0 и α_1, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.4}$$

Отметим неравенство, вытекающее из (1.4):

$$|b_l| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad l = 1,\dots,d. \tag{1.5}$$

Точное определение: $\mathcal{A}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой

$$\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Замкнутость и неотрицательность формы $\mathfrak{a}$ подтверждают оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.6}$$

вытекающие из (1.2) и (1.4).

1.1.4 Операторы $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2$

Рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{Y}$, действующий из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn})$ по правилу

$$\mathcal{Y}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \operatorname{col}\{D_1\mathbf{u},\dots,D_d\mathbf{u}\}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Согласно нижней оценке (1.6) выполнено

$$\|\mathcal{Y}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_1^2\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}], \quad c_1 = \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.7}$$

Пусть в $\mathbb{R}^d$ заданы Γ-периодические $(n\times n)$-матрицы-функции $a_j(\mathbf{x})$, $j=1,\dots,d$, вообще говоря, с комплексными элементами, причем

$$a_j\in L_\rho(\Omega), \quad \rho=2 \ \text{ при } \ d=1, \quad \rho>d \ \text{ при } \ d\geqslant 2; \quad j=1,\dots,d. \tag{1.8}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{Y}_2 : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn})$, действующий как умножение на $(dn\times n)$-матрицу-функцию, составленную из матриц $a_j(\mathbf{x})^*$, $j=1,\dots,d$:

$$\mathcal{Y}_2\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{a_1(\mathbf{x})^*\mathbf{u}(\mathbf{x}),\dots,a_d(\mathbf{x})^*\mathbf{u}(\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Применяя неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, можно показать (см. [61, (5.11)–(5.14)]), что для любого $\nu>0$ найдутся такие постоянные $C_j(\nu)>0$, что

$$\|a_j^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad j=1,\dots,d.$$

Суммируя по j и учитывая нижнюю оценку (1.6), заключаем, что для любого $\nu>0$ найдется такая постоянная $C(\nu)>0$, что

$$\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.9}$$

При фиксированном ν постоянная $C(\nu)$ зависит лишь от d, ρ, α_0, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от норм $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j=1,\dots,d$, и от параметров решетки Γ.

1.1.5 Форма q

Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана Γ-периодическая σ-конечная борелевская мера $d\mu(\mathbf{x}) = \{d\mu_{jl}(\mathbf{x})\}$, $j,l=1,\dots,n$, со значениями в классе эрмитовых $(n\times n)$-матриц. Иначе говоря, $d\mu_{jl}(\mathbf{x})$ — комплексная Γ-периодическая мера в $\mathbb{R}^d$, причем $d\mu_{jl} = d\mu^*_{lj}$. Предположим, что мера $d\mu$ такова, что при любом $u\in H^1(\mathbb{R}^d)$ функция $|u(\mathbf{x})|^2$ суммируема по каждой из мер $d\mu_{jl}$.

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$q[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \sum_{j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} u_l(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x})^* \, d\mu_{jl}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.10}$$

На меру $d\mu$ наложим следующее условие.

Условие 1.1.3. *Найдутся такие постоянные $c_0 \geqslant 0$, $\widetilde{c}_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $0 \leqslant \widetilde{c} < \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$, что выполнена оценка*

$$-\widetilde{c}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \leqslant \widetilde{c}_2\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{1.11}$$

Записав неравенства вида (1.11) по сдвинутым ячейкам и просуммировав, получаем похожие неравенства для функций из $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В силу (1.6) отсюда вытекают оценки

$$-(1-\kappa)\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant q[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_2\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.12}$$

где

$$c_2 = \widetilde{c}_2\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \kappa = 1 - \widetilde{c}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad 0 < \kappa \leqslant 1. \tag{1.13}$$

Примеры форм вида (1.10) приведены в [61, п. 5.5]. Здесь мы ограничимся только основным примером (см. [61, пример 5.3]).

Пример 1.1.4. Предположим, что мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега: $d\mu(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, где $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(n \times n)$-матрица-функция, такая что

$$Q \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2. \tag{1.14}$$

Тогда $q[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (Q\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ при $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и для любого $\nu > 0$ найдется постоянная $C_Q(\nu) > 0$, такая что

$$\int_{\Omega} |\langle Q(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle|\,d\mathbf{x} \leqslant \nu \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x} + C_Q(\nu)\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n).$$

При фиксированном ν постоянная $C_Q(\nu)$ контролируется через d, s, $\|Q\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ. Выбрав $\nu = 2^{-1}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$, находим, что условие 1.1.3 выполнено при $\widetilde{c} = \nu$, $c_0 = C_Q(\nu)$, $\widetilde{c}_2 = 1$ и $c_3 = C_Q(1)$. В (1.13) сейчас $c_2 = \alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\kappa = 1/2$.

1.1.6 Оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим операторное семейство $\mathcal{B}(\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, формально заданное дифференциальным выражением

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\varepsilon)&=\mathcal{A}+\varepsilon(\mathcal{Y}_2^*\mathcal{Y}+\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}_2)+\varepsilon^2 Q\\&=b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})+\varepsilon\sum_{j=1}^{d}\left(a_j(\mathbf{x})D_j+D_j a_j(\mathbf{x})^*\right)+\varepsilon^2 Q(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

где $Q(\mathbf{x})$ следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный мерой $d\mu(\mathbf{x})$. Точное определение оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}]+2\varepsilon\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon^2 q[\mathbf{u},\mathbf{u}],\quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.15}$$

Проверим замкнутость и полуограниченность снизу формы (1.15). В силу (1.7) и (1.9) выполнено

$$\begin{aligned}&2\varepsilon|\mathrm{Re}\,(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}|\leqslant\frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}]+c_4\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\\&\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\quad c_4=4\kappa^{-1}c_1^2C(\nu_0)\ \text{при}\ \nu_0=\kappa^2(16c_1^2)^{-1}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Теперь из нижней оценки (1.12) и (1.16) с учетом $0<\varepsilon\leqslant 1$ получаем оценку снизу для формы (1.15):

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}]\geqslant\frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}]-(c_0+c_4)\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

С учетом нижней оценки (1.6) это влечет

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}]\geqslant c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}-(c_0+c_4)\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\quad 0<\varepsilon\leqslant 1; \tag{1.17}$$

$$c_*=\frac{\kappa}{2}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.18}$$

Объединяя (1.7), (1.9) при $\nu=1$ и верхнюю оценку (1.12), приходим к неравенству

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}]\leqslant(2+c_1^2+c_2)\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}]+(C(1)+c_3)\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Вместе с верхней оценкой (1.6) это дает

$$\begin{aligned}&\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}]\leqslant C_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+(C(1)+c_3)\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\\&\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\quad 0<\varepsilon\leqslant 1;\quad C_*=(2+c_1^2+c_2)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

1.1.7 Оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$

Пусть T_ε, $\varepsilon > 0$, — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования, действующий по правилу

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x}), \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.20}$$

Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, отвечающий квадратичной форме

$$\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \varepsilon^{-2}\mathfrak{a}[T_\varepsilon\mathbf{u},T_\varepsilon\mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u},b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Формально, $\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$.

Пусть $\mathcal{Y}_{2,\varepsilon}$ — оператор, действующий по правилу

$$(\mathcal{Y}_{2,\varepsilon}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{a_1^\varepsilon(\mathbf{x})^*\mathbf{u}(\mathbf{x}),\dots,a_d^\varepsilon(\mathbf{x})^*\mathbf{u}(\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Пусть $d\mu$ — мера из п. 1.1.5. Определим меру $d\mu^\varepsilon$ следующим образом. Для любого борелевского множества $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ рассмотрим множество $\varepsilon^{-1}\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \varepsilon\mathbf{x} \in \Delta\}$ и положим $\mu^\varepsilon(\Delta) = \varepsilon^d \mu(\varepsilon^{-1}\Delta)$. Форма q_ε определяется равенством

$$q_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Положим $\mathcal{B}_\varepsilon = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^*\mathcal{B}(\varepsilon)T_\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Иными словами, $\mathcal{B}_\varepsilon$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, отвечающий квадратичной форме

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \varepsilon^{-2}\mathfrak{b}(\varepsilon)[T_\varepsilon\mathbf{u},T_\varepsilon\mathbf{u}] = \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_{2,\varepsilon}\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + q_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.21}$$

С учетом (1.21) из (1.17), (1.19) вытекают оценки

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - (c_0 + c_4)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.22}$$

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant C_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + (C(1) + c_3)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.23}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Таким образом, форма $\mathfrak{b}_\varepsilon$ замкнута и полуограничена снизу. Формально можно написать

$$\mathcal{B}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{1.24}$$

Здесь Q^ε следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный мерой $d\mu^\varepsilon$. Мы видим, что коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ быстро осциллируют при малом ε.

1.1.8 Эффективная матрица

Эффективный оператор для $\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ задается дифференциальным выражением $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная эффективная матрица размера $m \times m$. Определение g^0 дается в терминах решения вспомогательной задачи на ячейке. Пусть Г-периодическая $(n \times m)$-матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.25}$$

(Уравнение понимается в слабом смысле.) Тогда эффективная матрица определена равенством

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.26}$$

где

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{1.27}$$

Можно показать, что матрица g^0 положительно определена.

На основании (1.25) несложно установить, что

$$\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{1.28}$$

Ниже нам потребуются следующие оценки для Λ, полученные в [9, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_1, \quad M_1 = m^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{1.29}$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_2, \quad M_2 = m^{1/2}\alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{1.30}$$

Отметим оценки для эффективной матрицы, известные в теории усреднения как вилка Фойгта–Рейсса (см. [8, гл. 3, теорема 1.5]).

Предложение 1.1.5. *Пусть g^0 — эффективная матрица* (1.26). *Тогда*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.31}$$

В случае $m = n$ всегда выполнено $g^0 = \underline{g}$.

Из (1.31) вытекают неравенства

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.32}$$

Опишем случаи, когда в (1.31) реализуется верхняя или нижняя грань (см. [8, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7]).

Предложение 1.1.6. *Равенство* $g^0 = \overline{g}$ *равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \ \ k = 1, \ldots, m, \tag{1.33}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \ldots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})$.

Предложение 1.1.7. *Равенство* $g^0 = \underline{g}$ *равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \ \ \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \ \ \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \ \ k = 1, \ldots, m, \tag{1.34}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \ldots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$.

1.1.9 Эффективный оператор $\mathcal{B}^0$

Эффективный оператор для $\mathcal{B}_\varepsilon$ вводился в [61].

Пусть Γ-периодическая $(n \times n)$-матрица-функция $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ является (слабым) решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.35}$$

Определим постоянные матрицы V и W равенствами

$$V = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}, \tag{1.36}$$

$$W = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{1.37}$$

Тогда эффективный оператор для оператора (1.24) задан выражением

$$\mathcal{B}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j - W + \overline{Q}. \tag{1.38}$$

Оператор $\mathcal{B}^0$ — эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами.

Согласно [65, (5.7)] при условии $\lambda > c_0 + c_4$ символ

$$L_\lambda(\boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi})^* V - V^* b(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) \xi_j + \overline{Q} - W + \lambda I$$

оператора $\mathcal{B}^0 + \lambda I$ удовлетворяет оценке $L_\lambda(\boldsymbol{\xi}) \geqslant c_\lambda (|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)\mathbf{1}_n$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, где

$$c_\lambda = \min\{c_*; \lambda - c_0 - c_4\}.$$

Полагая $\lambda_* = c_0 + c_4 + c_*$, получаем оценку для символа $L_*(\boldsymbol{\xi})$ оператора $\mathcal{B}^0 + \lambda_* I$:

$$L_*(\boldsymbol{\xi}) \geqslant c_* (|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)\mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, для квадратичной формы $\mathfrak{b}^0$ оператора $\mathcal{B}^0$ выполнено неравенство

$$\mathfrak{b}^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \lambda_* \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant c_* \left(\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right), \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

С учетом выражения для λ_* отсюда получаем

$$\mathfrak{b}^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - (c_0 + c_4)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.39}$$

Ниже нам потребуются следующие неравенства для $\widetilde{\Lambda}$, установленные в [61, (7.49)–(7.52)]:

$$\|b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.40}$$

$$\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1} C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.41}$$

$$\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.42}$$

где $C_a^2 = \sum_{j=1}^d \int_\Omega |a_j(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}$.

1.1.10 Обобщенная резольвента

Пусть $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция размера $n \times n$, такая что

$$Q_0(\mathbf{x}) > 0, \quad Q_0, Q_0^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{1.43}$$

Мы изучаем обобщенную резольвенту оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$, т. е. оператор вида $(\mathcal{B}_\varepsilon - zQ_0^\varepsilon)^{-1}$, опираясь на результаты статьи [61], где получены аппроксимации этой резольвенты в фиксированной вещественной точке z. Прежде чем формулировать эти результаты, нам удобно перейти от оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ к неотрицательному оператору

$$B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + c_5 Q_0^\varepsilon, \tag{1.44}$$

полагая

$$c_5 = (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.45}$$

Отметим оценки для квадратичной формы b_ε оператора B_ε, вытекающие из (1.22), (1.23):

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant b_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_6 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}; \quad c_6 = \max\{C_*; C(1) + c_3 + c_5\|Q_0\|_{L_\infty}\}. \tag{1.46}$$

Таким образом, $B_\varepsilon \geqslant 0$. Отметим, что оператор B_ε можно рассматривать как оператор вида (1.24) с прежними коэффициентами g^ε, a_j^ε и „новым” матричным потенциалом $\check{Q}^\varepsilon = Q^\varepsilon + c_5 Q_0^\varepsilon$. Соответствующая форма $\int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + c_5 \int_\Omega \langle Q_0(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x}$ удовлетворяет условию 1.1.3 с $\check{c}_0 = 0$ в роли c_0, постоянной $\check{c}_3 = c_3 + c_5\|Q_0\|_{L_\infty}$ в роли c_3 и прежними $\widetilde{c}$ и $\widetilde{c}_2$.

Фиксируем число λ_0 следующим образом (ср. [61, (5.27)])

$$\lambda_0 = 2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} c_4. \tag{1.47}$$

Оператор $B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon$ положительно определен, а потому обобщенная резольвента $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ — ограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Замечание 1.1.8. *В работе* [61] *изучалась обобщенная резольвента* $(B_\varepsilon + \lambda Q_0^\varepsilon)^{-1}$ *при* $\lambda \geqslant \lambda_0$, *в* [65] *— при более свободном условии* $\lambda > 0$. *Для наших целей достаточно привести результаты в фиксированной точке* λ; *для удобства ссылок на* [61] *используем условие* (1.47).

Для удобства дальнейших ссылок назовем „исходными данными" следующие величины

$$\begin{aligned} &d, m, n, \rho;\ \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}, j = 1,\dots,d, \\ &\widetilde{c}, c_0, \widetilde{c}_2, c_3 \text{ из условия 1.1.3; } \|Q_0\|_{L_\infty}, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty};\ \text{параметры решетки } \Gamma. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Отметим, что постоянные c_1, $C(1)$, κ, c_2, c_4 полностью определяются исходными данными.

Для оператора (1.44) эффективный оператор имеет вид

$$B^0 = \mathcal{B}^0 + c_5\overline{Q_0}. \tag{1.49}$$

Отметим, что из (1.39) вытекает оценка снизу для квадратичной формы b^0 оператора B^0:

$$b^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.50}$$

Лемма 1.1.9. *Символ*

$$L(\boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi})^* V - V^* b(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*})\xi_j + \overline{Q} - W + c_5\overline{Q_0} \tag{1.51}$$

оператора B^0 *подчинен оценкам*

$$c_*|\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}_n \leqslant L(\boldsymbol{\xi}) \leqslant C_L(|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)\mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.52}$$

Постоянная C_L *определена ниже в* (1.57) *и зависит только от исходных данных* (1.48).

Доказательство. Согласно (1.50)

$$L(\boldsymbol{\xi}) \geqslant c_*|\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.53}$$

Мы установили нижнюю оценку (1.52). Проверим верхнюю оценку.

В силу (1.4), (1.32) и (1.51)

$$L(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} |\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}_n + 2|V|\alpha_1^{1/2}|\boldsymbol{\xi}|\mathbf{1}_n + 2\Big(\sum_{j=1}^d |\overline{a_j}|^2\Big)^{1/2} |\boldsymbol{\xi}|\mathbf{1}_n + \big(|\overline{Q}| + c_5|\overline{Q_0}|\big)\, \mathbf{1}_n. \tag{1.54}$$

Мы учли, что матрица (1.37) очевидно неотрицательна. Согласно (1.28), (1.36) и (1.40) выполнено

$$\begin{aligned} &|V| \leqslant |\Omega|^{-1} \|g\|_{L_\infty} \|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_V, \\ &C_V = |\Omega|^{-1/2} \alpha_0^{-1/2} C_a n^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Ясно, что

$$\sum_{j=1}^d |\overline{a_j}|^2 \leqslant |\Omega|^{-1} C_a^2, \quad |\overline{Q}| \leqslant |\Omega|^{-1/s} \|Q\|_{L_s(\Omega)}, \quad |\overline{Q_0}| \leqslant \|Q_0\|_{L_\infty}. \tag{1.56}$$

Теперь из (1.54)–(1.56) вытекает оценка (1.52) с постоянной

$$C_L = \max\{\alpha_1 \|g\|_{L_\infty}; |\Omega|^{-1/s} \|Q\|_{L_s(\Omega)} + c_5 \|Q_0\|_{L_\infty}\} + \alpha_1^{1/2} C_V + |\Omega|^{-1/2} C_a. \tag{1.57}$$

□

Следствие 1.1.10. *Квадратичная форма b^0 оператора* (1.49) *удовлетворяет оценкам*

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant b^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant C_L \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \tag{1.58}$$

Оператор $B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0}$ представляет собой ДО второго порядка с постоянными коэффициентами с символом

$$\begin{aligned} L_0(\boldsymbol{\xi}) &= L(\boldsymbol{\xi}) + \lambda_0 \overline{Q_0} \\ &= b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi})^* V - V^* b(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) \xi_j + \overline{Q} - W + (c_5 + \lambda_0)\overline{Q_0}. \end{aligned}$$

Из (1.53) с учетом (1.47) вытекает оценка

$$L_0(\boldsymbol{\xi}) \geqslant \check{c}_* (|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)\mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d; \quad \check{c}_* = \min\{c_*; 2c_4\}. \tag{1.59}$$

1.1.11 Аппроксимация оператора $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$

Применение теоремы 9.2 из [61] к оператору (1.44) дает следующий результат.

Теорема 1.1.11 ([61])**.** *Пусть выполнены условия п.* 1.1.3–1.1.10*. Пусть число λ_0 определено в* (1.47)*. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 \varepsilon.$$

Постоянная C_1 *контролируется через исходные данные* (1.48).

Чтобы аппроксимировать оператор $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ по $(L_2 \to H^1)$-операторной норме, введем корректор

$$K(\varepsilon) = \left([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\right)\Pi_\varepsilon(B^0 + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.60}$$

Здесь Π_ε — оператор (1.1). Корректор (1.60) ограничен как оператор, действующий из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Это нетрудно установить с помощью предложения 1.1.2 и включений $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. При этом $\|\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} = O(1)$.

В теореме 9.7 из [61] установлен следующий результат.

Теорема 1.1.12 ([61]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1.11. *Пусть* $K(\varepsilon)$ — *оператор* (1.60). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2\varepsilon.$$

Постоянная C_2 *контролируется через исходные данные* (1.48).

Замечание 1.1.13. *Ниже в разделах* 1.5 *и* 1.6 *нам предстоит с помощью теорем* 1.1.11 *и* 1.1.12 (*точнее, вместо теоремы* 1.1.12 *там будет применен ее аналог — теорема* 1.3.3) *аппроксимировать обобщенную резольвенту* $(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ *семейства операторов* $B_\varepsilon(\vartheta)$, *зависящих от параметра* $\vartheta \in (0,1]$, *с масштабированными коэффициентами* $\vartheta a_j^\varepsilon$, $\vartheta^2\check{Q}^\varepsilon$ (*см. п.* 1.5.2). *Заметим, что форма* $\vartheta^2\left(\int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + c_5\int_\Omega \langle Q_0(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\,d\mathbf{x}\right)$ *при всех* $\vartheta \in (0,1]$ *удовлетворяет условию* 1.1.3 *с одними и теми же постоянными* $\check{c}_0 = 0$ *в роли* c_0, $\check{c}_3 = c_3 + c_5\|Q_0\|_{L_\infty}$ *в роли* c_3 *и прежними* $\widetilde{c}$ *и* $\widetilde{c}_2$. *Далее, постоянная* $\nu_0 = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}$ *от* ϑ *не зависит. Домножая* (1.9) *с* $\nu = \nu_0$ *на* ϑ^2, *убеждаемся в справедливости неравенства вида* (1.9) (*в случае коэффициентов* ϑa_j) *с одной и той же постоянной* $C(\nu_0)$ *при всех* $\vartheta \in (0,1]$. *Следовательно, постоянную* c_4 (*см.* (1.16)), *а тогда и число* λ_0 (*см.* (1.47)) *можно считать не зависящими от* ϑ. *Учтем также, что нормы коэффициентов* ϑa_j *в* $L_\rho(\Omega)$ *мажорируются нормами* $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$ *при всех* $\vartheta \in (0,1]$. *В* [61] *прослежена зависимость постоянных* C_1 *и* C_2 *от данных задачи* (*в частности, эти постоянные растут с ростом норм* $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$). *Вместе со сказанным выше это позволяет выбрать постоянные* C_1 *и* C_2 *при аппроксимации оператора* $(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ *не зависящими от параметра* ϑ.

1.2 Вспомогательные утверждения

1.2.1 Свойства матрицы-функции Λ

Нам потребуется результат [52, лемма 2.3]:

Лемма 1.2.1. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.25)*. Тогда для любой функции* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Постоянные β_1 *и* β_2 *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ *и* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Из леммы 1.2.1 в силу плотности множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.2.2. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.25)*. Пусть дополнительно известно, что* $\Lambda \in L_\infty$*. Тогда для любой функции* $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \varepsilon^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

1.2.2 Свойства матрицы-функции $\widetilde{\Lambda}$

Доказательство следующего утверждения похоже на доказательство леммы 2.1 из [52].

Лемма 1.2.3. *Пусть* $\widetilde{\Lambda}$ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.35)*. Тогда для любой функции* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \widetilde{\beta}_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\beta}_2 \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{1.61}$$

Постоянные $\widetilde{\beta}_1$ *и* $\widetilde{\beta}_2$ *определены ниже в* (1.72) *и зависят только от* n, d, α_0, α_1, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от норм* $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, *а также от параметров решетки* Γ.

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, n$, — столбцы матрицы $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$. В силу (1.35) для любой функции $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ такой, что при каком-либо $R > 0$ выполнено $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = 0$ при $|\mathbf{x}| > R$, справедливо тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \rangle + \sum_{j=1}^d \langle a_j(\mathbf{x})^* \mathbf{e}_k, D_j \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \rangle \right) d\mathbf{x} = 0. \tag{1.62}$$

Здесь $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \dots, n$, — стандартные орты в $\mathbb{C}^n$.

Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Положим $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) := \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2$. Тогда с учетом (1.3) имеем

$$b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = (b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k(\mathbf{x})) \, |u(\mathbf{x})|^2 + \sum_{l=1}^d b_l \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) D_l |u(\mathbf{x})|^2, \tag{1.63}$$

$$D_j \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = (D_j \mathbf{w}_k(\mathbf{x})) \, |u(\mathbf{x})|^2 + \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) D_j |u(\mathbf{x})|^2. \tag{1.64}$$

Подставляя (1.63) и (1.64) в (1.62), находим

$$\begin{aligned} J := &\int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x})\rangle |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \\ &= -\sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \langle a_j(\mathbf{x})^*\mathbf{e}_k, D_j\mathbf{w}_k(\mathbf{x})\rangle |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{l=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), b_l\mathbf{w}_k(\mathbf{x})\rangle (u^* D_l u + u D_l u^*)\,d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \langle a_j(\mathbf{x})^*\mathbf{e}_k, \mathbf{w}_k(\mathbf{x})\rangle (u^* D_j u + u D_j u^*)\,d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Обозначим слагаемые в правой части (1.65) через J_1, J_2 и J_3. Имеем

$$\begin{aligned} |J_1| \leqslant\ & 4\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty} \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})^*\mathbf{e}_k|^2 |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{4}\left(4\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

С учетом условия (1.8) на коэффициенты a_j выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})^*\mathbf{e}_k|^2 |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant C_{\Omega,\rho}^2 \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.66}$$

где $C_{\Omega,\rho}$ — константа вложения $H^1(\Omega) \subset L_{2\rho/(\rho-2)}(\Omega)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |J_1| \leqslant\ & 4\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty} C_{\Omega,\rho}^2 \sum_{j=1}^d \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \frac{1}{4}\left(4\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Далее, с учетом (1.5) и (1.65) выполнено

$$\begin{aligned} |J_2| &\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^d} |g(\mathbf{x})^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x})||u(\mathbf{x})| \left(\sum_{l=1}^d |g(\mathbf{x})^{1/2} b_l \mathbf{w}_k(\mathbf{x})||D_l u(\mathbf{x})|\right) d\mathbf{x} \\ &\leqslant \frac{1}{2} J + 2d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Оценим, наконец, J_3:

$$\begin{aligned} |J_3| &\leqslant 2\sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})||\mathbf{w}_k(\mathbf{x})||u(\mathbf{x})||D_j u(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

С учетом (1.66) получаем

$$|J_3| \leqslant C^2_{\Omega,\rho} \sum_{j=1}^{d} \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{1.69}$$

Объединяя (1.65), (1.67)–(1.69), находим

$$\begin{aligned} J \leqslant\ & 2 \left(4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} + 1\right) C^2_{\Omega,\rho} \sum_{j=1}^{d} \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ & + \frac{1}{2} \left(4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \\ & + 2 \left(2d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} + 1\right) \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Покажем теперь, как из (1.70) выводится требуемая оценка. В силу (1.4) выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{w}_k u)(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \alpha_0^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_k u)(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Согласно (1.3), $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l$, поэтому

$$b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_k u) = (b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k) u + \sum_{l=1}^{d} b_l \mathbf{w}_k D_l u.$$

С учетом (1.5) и выражения для J (см. (1.65)), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{w}_k u)(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} & \leqslant 2\alpha_0^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + 2\alpha_0^{-1}\alpha_1 d \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \\ & \leqslant 2\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} J + 2\alpha_0^{-1}\alpha_1 d \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Очевидно,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{w}_k u)(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Отсюда и из (1.70), (1.71) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant\ & 16\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} \left(4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} + 1\right) C^2_{\Omega,\rho} \sum_{j=1}^{d} \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ & + \left(16\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} (2d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} + 1) + 8\alpha_0^{-1}\alpha_1 d + 4\right) \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Суммируя по k, приходим к неравенству (1.61) при

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_1 &= 16n\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\left(4\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}+1\right)C^2_{\Omega,\rho}\sum_{j=1}^{d}\|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)},\\ \widetilde{\beta}_2 &= 16\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}(2d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}+1)+8\alpha_0^{-1}\alpha_1 d+4.\end{aligned} \tag{1.72}$$

$\square$

Применяя масштабное преобразование, на основании леммы 1.2.3 получаем следующий результат.

Лемма 1.2.4. *В условиях леммы* 1.2.3 *при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d}|(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\leqslant \widetilde{\beta}_1\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}+\widetilde{\beta}_2\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^d}|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}.$$

Ниже в разделе 1.7 нам понадобится следующее простое утверждение.

Лемма 1.2.5. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$*, причем*

$$f\in L_p(\Omega),\quad p=2 \text{ при } d=1,\quad p>2 \text{ при } d=2,\quad p=d \text{ при } d\geqslant 3. \tag{1.73}$$

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ *оператор* $[f^\varepsilon]$ *непрерывно переводит* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d)$*, причем*

$$\|[f^\varepsilon]\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)}C(\widehat{q},\Omega),$$

где $C(\widehat{q},\Omega)$ — *норма оператора вложения* $H^1(\Omega)\hookrightarrow L_{\widehat{q}}(\Omega)$*. Здесь* $\widehat{q}=2(p/2)'$*,* $\widehat{q}=\infty$ *при* $d=1$*,* $\widehat{q}=2p(p-2)^{-1}$ *при* $d\geqslant 2$*.*

Доказательство. Пусть $d\geqslant 2$ и $u\in H^1(\mathbb{R}^d)$. Используя замены $\mathbf{x}=\varepsilon\mathbf{y}$, $u(\mathbf{x})=v(\mathbf{y})$, неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, при $0<\varepsilon\leqslant 1$ получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} &= \varepsilon^d\int_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{y})|^2|v(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}=\varepsilon^d\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma}\int_{\Omega+\mathbf{a}}|f(\mathbf{y})|^2|v(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}\\ &\leqslant \varepsilon^d\|f\|^2_{L_p(\Omega)}\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma}\left(\int_{\Omega+\mathbf{a}}|v(\mathbf{y})|^{2(p/2)'}\,d\mathbf{y}\right)^{1/(p/2)'}\\ &\leqslant \varepsilon^d\|f\|^2_{L_p(\Omega)}C(\widehat{q},\Omega)^2\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant \|f\|^2_{L_p(\Omega)}C(\widehat{q},\Omega)^2\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Здесь $(p/2)^{-1}+((p/2)')^{-1}=1$. При $d=1$ доказательство аналогично (нужные изменения в выкладке очевидны). $\square$

Из лемм 1.2.4 и 1.2.5 вытекает следующее следствие.

Следствие 1.2.6. *Пусть* $\widetilde{\Lambda}$ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.35)*. Пусть дополнительно известно, что* $\widetilde{\Lambda}$ *удовлетворяет условию вида* (1.73)*. Тогда при любом* $u\in H^2(\mathbb{R}^d)$

и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \widetilde{\beta}_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q},\Omega)^2 \|\mathbf{D}u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

1.2.3 Лемма о $Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}$

В этом пункте мы докажем лемму, необходимую при проверке основных результатов главы 1.

Лемма 1.2.7. *Пусть* $Q_0(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическая* $(n \times n)$*-матрица-функция, такая что* $Q_0 \in L_\infty$*. Тогда при* $\varepsilon > 0$ *оператор* $[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]$ *умножения на* $Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}$ *непрерывно переводит* $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *в* $H^{-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$*, причем*

$$\|[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{Q_0} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.74}$$

Постоянная C_{Q_0} *контролируется через* d*,* $\|Q_0\|_{L_\infty}$ *и параметры решетки* Γ*.*

Доказательство. Поскольку $Q_0 - \overline{Q_0} \in L_\infty$ и

$$\int_\Omega (Q_0(\mathbf{x}) - \overline{Q_0})\, d\mathbf{x} = 0, \tag{1.75}$$

справедливо представление

$$Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) - \overline{Q}_0 = -\varepsilon \sum_{j=1}^d D_j h_j^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{1.76}$$

где h_j — Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции такие, что $h_j \in L_\infty$.

Поясним выбор h_j. Пусть $\Phi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи $\triangle\Phi(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x}) - \overline{Q_0}$, $\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$. В силу (1.75) условие разрешимости выполнено. Так как правая часть $Q_0 - \overline{Q_0} \in L_\infty$, решение $\Phi \in W_p^2(\Omega)$ при любом $1 \leqslant p < \infty$. При этом

$$\|\Phi\|_{W_p^2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{c}_1(p) \|Q_0 - \overline{Q_0}\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \widetilde{\mathfrak{c}}_1(p) \|Q_0\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{1.77}$$

Постоянные $\mathfrak{c}_1(p)$, $\widetilde{\mathfrak{c}}_1(p)$ зависят лишь от p и параметров решетки Γ. Это вытекает из теоремы Марцинкевича о мультипликаторах для рядов Фурье [33].

Положим $h_j(\mathbf{x}) = D_j \Phi(\mathbf{x})$. Тогда выполнено $Q_0(\mathbf{x}) - \overline{Q_0} = -\sum_{j=1}^d D_j h_j(\mathbf{x})$, и $h_j \in W_p^1(\Omega)$ при всех $1 \leqslant p < \infty$. Возьмем $p = d+1$. Тогда по теореме вложения $h_j \in L_\infty$, и в силу (1.77) справедлива оценка

$$\|h_j\|_{L_\infty} \leqslant \mathfrak{c}_2 \|h_j\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\Phi\|_{W_p^2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{c}_2 \widetilde{\mathfrak{c}}_1(d+1) \|Q_0\|_{L_\infty}.$$

(Здесь $\mathfrak{c}_2$ — норма соответствующего оператора вложения.)

Пусть $\mathbf{F} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. С учетом (1.76) выполнено

$$\begin{aligned} \|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{F}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{0\neq \mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \frac{\left|\left((Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{F},\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}} \\ &\leqslant \varepsilon \sup_{0\neq \mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left|\left((D_j h_j^\varepsilon)\mathbf{F},\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}}. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Используя равенство $(D_j h_j^\varepsilon)\mathbf{F} = D_j(h_j^\varepsilon \mathbf{F}) - h_j^\varepsilon D_j \mathbf{F}$ и интегрируя по частям, находим

$$\left((D_j h_j^\varepsilon)\mathbf{F},\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \left(h_j^\varepsilon \mathbf{F}, D_j\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)} - \left(h_j^\varepsilon D_j\mathbf{F},\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad j = 1,\dots,d.$$

Отсюда и из (1.78) следует, что

$$\begin{aligned} \|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{F}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \varepsilon \sup_{0\neq \mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left|\left(h_j^\varepsilon \mathbf{F}, D_j\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}} \\ &+ \varepsilon \sup_{0\neq \mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left|\left(h_j^\varepsilon D_j\mathbf{F},\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}}. \end{aligned} \tag{1.79}$$

Справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^d \left|\left(h_j^\varepsilon \mathbf{F}, D_j\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant C_h \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.80}$$

$$\sum_{j=1}^d \left|\left(h_j^\varepsilon D_j\mathbf{F},\mathbf{v}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant C_h \|\mathbf{D}\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.81}$$

где $C_h^2 := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d |h_j(\mathbf{x})|^2$. Отметим, что $C_h \leqslant \mathfrak{c}_3 \|Q_0\|_{L_\infty}$, где постоянная $\mathfrak{c}_3$ зависит только от d и от параметров решетки Γ.

Теперь из (1.79)–(1.81) вытекает оценка (1.74) с постоянной $C_{Q_0} = 2C_h$. $\square$

1.3 Сглаживание по Стеклову. Другая аппроксимация обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$

1.3.1 Оператор сглаживания по Стеклову

Рассмотрим оператор сглаживания по Стеклову $S_\varepsilon^{(k)}$, $\varepsilon > 0$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ (где $k \in \mathbb{N}$) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(k)} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k). \tag{1.82}$$

Зависимость $S_\varepsilon^{(k)}$ от k мы будем опускать в обозначениях, и писать просто S_ε. Очевидно, $S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant s$. Отметим неравенство

$$\| S_\varepsilon \|_{H^l(\mathbb{R}^d) \to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \quad l \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.83}$$

Нам понадобятся следующие свойства оператора S_ε (см. [24, леммы 1.1 и 1.2] или [52, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 1.3.1. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\| S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \| \mathbf{D} \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $2r_1 = \operatorname{diam} \Omega$.

Предложение 1.3.2. *Пусть* f *—* Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$*, такая что* $f \in L_2(\Omega)$*. Тогда оператор* $[f^\varepsilon] S_\varepsilon$ *непрерывен в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *и при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\| [f^\varepsilon] S_\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \| f \|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3.2 Другая аппроксимация оператора $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$

Положим

$$\widetilde{K}(\varepsilon) = \Big([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \Big) S_\varepsilon (B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.84}$$

Оператор $\widetilde{K}(\varepsilon)$ непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Это нетрудно проверить с помощью предложения 1.3.2 и включений $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Наряду с теоремой 1.1.12 справедлив следующий результат.

Теорема 1.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1.11*. Пусть* $\widetilde{K}(\varepsilon)$ *— оператор* (1.84)*. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\| (B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon \widetilde{K}(\varepsilon) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3 \varepsilon.$$

Постоянная C_3 *зависит лишь от исходных данных* (1.48)*.*

Замечание 1.3.4. *Теоремы* 1.1.12 *и* 1.3.3 *демонстрируют, что для задач усреднения в* $\mathbb{R}^d$ *можно использовать различные сглаживающие операторы в корректоре (как* Π_ε*, так и* S_ε*). Однако для задач усреднения в ограниченной области (см., например,* [24], [52], [62, 63, 66]*) удобнее использовать сглаживание по Стеклову. Поскольку мы нацелены на применение результатов настоящей главы к исследованию задач усреднения в ограниченной области (см. главу* 2*), мы перешли к сглаживанию по Стеклову.*

Замечание 1.3.5. *В условиях замечания* 1.1.13 *постоянную* C_3 *можно выбрать не зависящей от параметра* $\vartheta \in (0,1]$.

1.3.3 Доказательство теоремы 1.3.3

Мы выводим теорему 1.3.3 из теоремы 1.1.12.

Лемма 1.3.6. *При любом* $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \widetilde{\beta}_1 \|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{D}u|^2\, d\mathbf{x}. \tag{1.85}$$

Доказательство. В силу предложений 1.1.2, 1.3.2 и включения $\widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\mathbb{R}^d)$ все члены неравенства (1.85) — непрерывные функционалы относительно u в $H^1(\mathbb{R}^d)$-норме. Поэтому оценку (1.85) достаточно доказать на плотном множестве — при $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Фиксируем функцию $F \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ такую, что $0 \leqslant F(t) \leqslant 1$, $F(t) = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $F(t) = 0$ при $t \geqslant 2$. Определим функцию $F_R(\mathbf{x}) := F(|\mathbf{x}|/R)$ в $\mathbb{R}^d$. Здесь $R > 0$ — параметр. Если $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то $F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и в силу леммы 1.2.4 выполнена оценка

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon|^2 |F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u|^2\, d\mathbf{x} &\leqslant \widetilde{\beta}_1 \|F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widetilde{\beta}_1 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |(\partial_j F_R)(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u + F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\partial_j u|^2\, d\mathbf{x} \\ &+ \widetilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\Lambda}^\varepsilon|^2 |(\partial_j F_R)(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u + F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\partial_j u|^2\, d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

С учетом оценки $\max|\partial_j F_R| \leqslant c/R$ неравенство (1.85) получается отсюда предельным переходом при $R \to \infty$ на основании теоремы Лебега. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему 1.3.3. Очевидно,

$$\begin{aligned}\varepsilon\|K(\varepsilon) - \widetilde{K}(\varepsilon)\|_{L_2 \to H^1} &\leqslant \varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})(B^0 + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to H^1} \\ &+ \varepsilon\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)(B^0 + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to H^1}\end{aligned} \tag{1.86}$$

Начнем с оценки первого слагаемого в правой части (1.86):

$$\begin{aligned} \varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})(B^0+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to H^1} \\ \leqslant \varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\|_{H^2\to H^1}\|(B^0+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to H^2}. \end{aligned} \tag{1.87}$$

В силу (1.59)

$$\|(B^0+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^2(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(|\boldsymbol{\xi}|^2+1)|L_0(\boldsymbol{\xi})^{-1}| \leqslant \check{c}_*^{-1}. \tag{1.88}$$

Записав результат [52, лемма 3.5] в операторных терминах, получаем

$$\varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_\Lambda\varepsilon, \tag{1.89}$$

где постоянная C_Λ зависит только от m, d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и от параметров решетки Г. Объединяя (1.87)–(1.89), приходим к оценке

$$\varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})(B^0+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \check{c}_*^{-1}C_\Lambda\varepsilon. \tag{1.90}$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (1.86). С учетом (1.88) выполнено

$$\varepsilon\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)(B^0+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to H^1} \leqslant \varepsilon\check{c}_*^{-1}\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\|_{H^2\to H^1}. \tag{1.91}$$

Пусть $\mathbf{\Phi}\in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ + \|[(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{D\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{1.92}$$

Применяя предложения 1.1.2, 1.3.2 и учитывая оценку (1.41), находим

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\|_{L_2\to L_2} \leqslant |\Omega|^{-1/2}(2r_0)^{-1}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty} =: \widetilde{M}_1,\ \varepsilon>0, \tag{1.93}$$

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2\to L_2} \leqslant \widetilde{M}_1, \quad \varepsilon>0. \tag{1.94}$$

В силу (1.93) и (1.94) выполнено

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\widetilde{M}_1\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.95}$$

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{D\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\widetilde{M}_1\|\mathbf{D\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.96}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (1.92) при $0<\varepsilon\leqslant 1$ используем лемму 1.3.6:

$$\|(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\beta}_1\|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\beta}_2\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^d}|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon|^2|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{D\Phi}|^2\,d\mathbf{x}. \tag{1.97}$$

Применяя предложения 1.1.1 и 1.3.1, получаем

$$\|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon(r_0^{-1} + r_1)\|\mathbf{\Phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из (1.96), (1.97) вытекает оценка

$$\|(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\left(\widetilde{\beta}_1(r_0^{-1}+r_1)^2 + 4\widetilde{\beta}_2\widetilde{M}_1^2\right)^{1/2}\|\mathbf{\Phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.98}$$

Объединяя (1.92), (1.95), (1.96) и (1.98), заключаем, что

$$\|\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\widetilde{\Lambda}}\varepsilon, \tag{1.99}$$

где $C_{\widetilde{\Lambda}} = 4\widetilde{M}_1 + \left(\widetilde{\beta}_1(r_0^{-1}+r_1)^2 + 4\widetilde{\beta}_2\widetilde{M}_1^2\right)^{1/2}$. Комбинируя (1.91) и (1.99), приходим к оценке

$$\varepsilon\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)(B^0 + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \check{c}_*^{-1}C_{\widetilde{\Lambda}}\varepsilon. \tag{1.100}$$

Теперь из теоремы 1.1.12 и оценок (1.86), (1.90), (1.100) вытекает искомое.

□

1.4 Основные результаты для эллиптических систем во всем пространстве

1.4.1 Формулировка результатов

В настоящем пункте формулируются основные результаты главы 1.

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены условия п.* 1.1.3–1.1.10. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $\phi \in (0,2\pi)$, *причем* $|\zeta| \geqslant 1$. *Положим*

$$c(\phi) = \begin{cases} |\sin\phi|^{-1}, & \phi \in (0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi), \\ 1, & \phi \in [\pi/2,3\pi/2]. \end{cases} \tag{1.101}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4\varepsilon c(\phi)^2|\zeta|^{-1/2}. \tag{1.102}$$

Постоянная C_4 *зависит только от исходных данных* (1.48).

Чтобы сформулировать результаты об аппроксимации по $(L_2 \to H^1)$-операторной норме, введем корректор

$$K(\varepsilon;\zeta) = \left([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\right)S_\varepsilon(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.103}$$

Здесь S_ε — оператор сглаживания по Стеклову (1.82). Оператор (1.103) непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Это несложно проверить на основании предложения 1.3.2, так как $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.1. *Пусть* $K(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (1.103). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *выполнены оценки*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_5 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \tag{1.104}$$

$$\|\mathbf{D}\left((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_6 c(\phi)^2 \varepsilon. \tag{1.105}$$

Постоянные C_5 *и* C_6 *контролируются через исходные данные* (1.48).

Из теоремы 1.4.2 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 1.4.3. *В условиях теоремы* 1.4.2 *справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C_5 + C_6) c(\phi)^2 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

На основании теоремы 1.4.2 можно получить результат об аппроксимации операторов $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, отвечающих „потокам".

Теорема 1.4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.1. *Пусть* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (1.27). *Положим*

$$G(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.106}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *выполнено*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_7 c(\phi)^2 \varepsilon. \tag{1.107}$$

Постоянная C_7 *зависит только от исходных данных* (1.48).

1.4.2 Обсуждение результатов

Для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ усреднение резольвенты в зависимости от спектрального параметра изучалось в [66]. Полученные в теоремах 1.4.1, 1.4.2 и 1.4.4 двухпараметрические оценки погрешности имеют то же поведение, что и оценки из [66, теоремы 2.2, 2.4 и 2.6].

Однако есть и отличие от упомянутых результатов [66]. Для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ удалось получить аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ с оценками вида (1.102), (1.104), (1.105), (1.107) во всей области $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. А для оператора B_ε в теоремах 1.4.1, 1.4.2, 1.4.4 дополнительно предполагается, что $|\zeta| \geqslant 1$. Это связано с присутствием членов первого и нулевого порядков. Ниже в разделе 1.8 мы расширим область изменения параметра ζ, однако характер оценок будет менее точным относительно ζ.

1.5 Доказательство теоремы 1.4.1

1.5.1 Оператор $B(\varepsilon;\vartheta)$

Доказательство теорем 1.4.1 и 1.4.2 основано на результатах теорем 1.1.11 и 1.3.3 и рассмотрении вспомогательного операторного семейства, зависящего от дополнительного параметра $0<\vartheta\leqslant 1$. В этом и трех следующих пунктах вводятся необходимые определения.

Условия п. 1.1.3–1.1.5 считаем выполненными. Пусть Q_0 — матрица-функция из п. 1.1.10, и пусть $c_5=(c_0+c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$b(\varepsilon;\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}]+2\vartheta\varepsilon\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\vartheta^2\varepsilon^2 q[\mathbf{u},\mathbf{u}]+\vartheta^2\varepsilon^2 c_5(Q_0\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)},\qquad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.108}$$

Здесь $\varepsilon>0$ и $0<\vartheta\leqslant 1$. *Считаем, что* $0<\varepsilon\vartheta\leqslant 1$.

Заметим, что согласно (1.15) и (1.108) при всех $\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ выполнено $b(\varepsilon;\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\mathfrak{b}(\varepsilon\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}]+c_5\varepsilon^2\vartheta^2(Q_0\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2}$. С учетом выбора c_5 отсюда и из (1.17), (1.19) вытекает, что форма $b(\varepsilon;\vartheta)$ замкнута и неотрицательна, причем

$$c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant b(\varepsilon;\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}]\leqslant C_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+(C(1)+c_3+c_5\|Q_0\|_{L_\infty})\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\qquad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}. \tag{1.109}$$

Отвечающий ей самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ обозначим через $B(\varepsilon;\vartheta)$. Формально,

$$B(\varepsilon;\vartheta)=b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})+\vartheta\varepsilon\sum_{j=1}^d(a_j(\mathbf{x})D_j+D_ja_j(\mathbf{x})^*)+\vartheta^2\varepsilon^2Q(\mathbf{x})+\vartheta^2\varepsilon^2c_5Q_0(\mathbf{x}). \tag{1.110}$$

1.5.2 Оператор $B_\varepsilon(\vartheta)$

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$b_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}]+2\vartheta\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_{2,\varepsilon}\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\vartheta^2q_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}]+\vartheta^2c_5(Q_0^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)},\qquad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.111}$$

где $0<\vartheta\leqslant 1$ и $0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}$. Справедливо тождество

$$b_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\varepsilon^{-2}b(\varepsilon;\vartheta)[T_\varepsilon\mathbf{u},T_\varepsilon\mathbf{u}],\quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.112}$$

где T_ε — оператор масштабного преобразования (1.20). С учетом (1.109) из (1.112) вытекает, что форма (1.111) замкнута и неотрицательна, причем

$$c_*\|\mathbf{Du}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant b_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_6\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}, \tag{1.113}$$

где $c_6 = \max\{C_*; C(1) + c_3 + c_5\|Q_0\|_{L_\infty}\}$. Отвечающий форме (1.112) самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ обозначим через $B_\varepsilon(\vartheta)$.

Мы рассмотрим обобщенную резольвенту $(B_\varepsilon(\vartheta)+\lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$, где число λ_0 определено в (1.47), и применим теорему 1.1.11 (см. замечание 1.1.13).

1.5.3 Операторы $B^0(\vartheta)$ и $B^0(\varepsilon;\vartheta)$

Легко видеть (см. (1.25)–(1.27), (1.35)–(1.38), (1.49)), что эффективный оператор для $B_\varepsilon(\vartheta)$ принимает вид

$$B^0(\vartheta) = \mathcal{A}^0 + \vartheta\left(-b(\mathbf{D})^*V - V^*b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j+a_j^*})D_j\right) + \vartheta^2(\overline{Q} + c_5\overline{Q_0} - W).$$

В соответствии с (1.50) для квадратичной формы $b^0(\vartheta)$ оператора $B^0(\vartheta)$ верна оценка

$$b^0(\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*\|\mathbf{Du}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.114}$$

Это равносильно следующей оценке для символа $L(\boldsymbol{\xi};\vartheta)$ оператора $B^0(\vartheta)$:

$$L(\boldsymbol{\xi};\vartheta) \geqslant c_*|\boldsymbol{\xi}|^2\mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d, \quad 0<\vartheta\leqslant 1. \tag{1.115}$$

Тогда с учетом (1.47) для символа

$$\begin{aligned} L_0(\boldsymbol{\xi};\vartheta) &= b(\boldsymbol{\xi})^*g^0b(\boldsymbol{\xi}) - \vartheta b(\boldsymbol{\xi})^*V - \vartheta V^*b(\boldsymbol{\xi}) \\ &\quad + \vartheta\sum_{j=1}^d(\overline{a_j+a_j^*})\xi_j + \vartheta^2(\overline{Q}+c_5\overline{Q_0}) - \vartheta^2W + \lambda_0\overline{Q_0} \end{aligned}$$

оператора $B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0}$ справедлива оценка

$$L_0(\boldsymbol{\xi};\vartheta) \geqslant \check{c}_*(|\boldsymbol{\xi}|^2+1)\mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d, \quad 0<\vartheta\leqslant 1, \quad \check{c}_* = \min\{c_*; 2c_4\}. \tag{1.116}$$

Отметим тождество $B^0(\vartheta) = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^*B^0(\varepsilon;\vartheta)T_\varepsilon$, где $B^0(\varepsilon;\vartheta)$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, определенный равенством

$$B^0(\varepsilon;\vartheta) = \mathcal{A}^0 + \varepsilon\vartheta\left(-b(\mathbf{D})^*V - V^*b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d(\overline{a_j+a_j^*})D_j\right) + \varepsilon^2\vartheta^2(\overline{Q} - W + c_5\overline{Q_0}). \tag{1.117}$$

1.5.4 Операторы $\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)$ и $\widetilde{B}^0(\vartheta)$

Факторизуем

$$Q_0(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})^*)^{-1} f(\mathbf{x})^{-1}, \tag{1.118}$$

где $f(\mathbf{x})$ — периодическая матрица-функция. Пусть $\overline{Q_0} = f_0^{-2}$. Заметим, что

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty} = \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty} = \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{1.119}$$

Пусть $\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)$ — самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор, порожденный квадратичной формой

$$\widetilde{b}_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{u},\mathbf{u}] := b_\varepsilon(\vartheta)[f^\varepsilon\mathbf{u}, f^\varepsilon\mathbf{u}], \tag{1.120}$$

заданной на области определения $\operatorname{Dom}\widetilde{b}_\varepsilon(\vartheta) = \{\mathbf{u}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) : f^\varepsilon\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\}$. Здесь $0<\vartheta\leqslant 1$ и $0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}$. Так как оператор $B_\varepsilon(\vartheta)$ неотрицателен, оператор $\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)$ также неотрицателен.

Пусть $\widetilde{B}^0(\vartheta) = f_0 B^0(\vartheta) f_0$. Отметим равенства

$$(B_\varepsilon(\vartheta) - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} = f^\varepsilon(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \zeta I)^{-1}(f^\varepsilon)^*, \quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+, \tag{1.121}$$

$$(B^0(\vartheta) - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = f_0(\widetilde{B}^0(\vartheta) - \zeta I)^{-1} f_0, \quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+. \tag{1.122}$$

1.5.5 Доказательство теоремы 1.4.1

Применяя теорему 1.1.11 к оператору $B_\varepsilon(\vartheta)$ и учитывая замечание 1.1.13, находим

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1\varepsilon, \quad 0<\vartheta\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{1.123}$$

Распространим эту оценку на $0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}$. С учетом (1.121) имеем

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L_\infty}^2 \|(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \lambda_0^{-1}\|f\|_{L_\infty}^2. \tag{1.124}$$

Аналогично из (1.122) и (1.119) вытекает, что

$$\|(B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \lambda_0^{-1}\|f\|_{L_\infty}^2. \tag{1.125}$$

Из (1.124), (1.125) следует, что левая часть (1.123) не превосходит $2\lambda_0^{-1}\|f\|_{L_\infty}^2\varepsilon$ при $1<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}$. Отсюда и из (1.123) вытекает оценка

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_1\varepsilon, \quad 0<\vartheta\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}, \tag{1.126}$$

с постоянной $\widehat{C}_1 = \max\{C_1; 2\lambda_0^{-1}\|f\|_{L_\infty}^2\}$.

Теперь получим аналог оценки (1.126) для $(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}$, где $\widehat{\zeta} = e^{i\phi}$ при $\phi \in (0,2\pi)$. Воспользуемся тождеством

$$
\begin{aligned}
&(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} = (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon) \\
&\times \left((B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\right)(B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} \\
&+ (\lambda_0 + \widehat{\zeta})(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned}
\tag{1.127}
$$

С учетом (1.121) имеем

$$
\begin{aligned}
&\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \|f^\varepsilon(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} I)^{-1}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)(f^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\|(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} I)^{-1}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}
\tag{1.128}
$$

Поскольку $\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) \geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
&\|(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} I)^{-1}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{\nu\geqslant 0}\frac{\nu + \lambda_0}{|\nu - \widehat{\zeta}|} \\
&\leqslant \sup_{\nu\geqslant 0}\frac{\nu + \lambda_0}{\nu + 1}\sup_{\nu\geqslant 0}\frac{\nu + 1}{|\nu - \widehat{\zeta}|} \leqslant 2(1 + \lambda_0)c(\phi).
\end{aligned}
\tag{1.129}
$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.101). Теперь из (1.128) и (1.129) вытекает, что

$$
\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2(1 + \lambda_0)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}c(\phi). \tag{1.130}
$$

Аналогично,

$$
\|(B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2(1 + \lambda_0)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}c(\phi). \tag{1.131}
$$

Оценим норму второго слагаемого в правой части (1.127):

$$
\begin{aligned}
&\|(\widehat{\zeta} + \lambda_0)(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant (1 + \lambda_0)\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\times \|[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to H^{-1}(\mathbb{R}^d)}\|(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}
\tag{1.132}
$$

По двойственности получаем

$$
\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.133}
$$

С учетом (1.121) выполнено

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} \|(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} c(\phi). \tag{1.134}$$

Оценим $\|\mathbf{D}(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$. Применяя нижнюю оценку (1.113), (1.120) и (1.121), находим

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant c_*^{-1/2} \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= c_*^{-1/2} \|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^* I)^{-1} (f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geqslant 0} \frac{\nu^{1/2}}{|\nu - \widehat{\zeta}^*|} \leqslant c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} c(\phi).\end{aligned} \tag{1.135}$$

Отсюда и из (1.133), (1.134) видно, что

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1 c(\phi), \quad \mathfrak{C}_1 = \|f\|^2_{L_\infty} + c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}. \tag{1.136}$$

Оценим теперь $(L_2 \to H^1)$-норму оператора $(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}$, действуя по аналогии с (1.134), (1.135) и учитывая (1.114), (1.119) и (1.122):

$$\|(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1 c(\phi). \tag{1.137}$$

Объединяя (1.74), (1.132), (1.136), (1.137), находим

$$\|(\widehat{\zeta} + \lambda_0)(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} (Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2 \varepsilon c(\phi)^2,$$

где $\mathfrak{C}_2 = (1 + \lambda_0) C_{Q_0} \mathfrak{C}_1^2$. Отсюда и из (1.126), тождества (1.127), (1.130) и (1.131) вытекает неравенство

$$\begin{gathered}\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4 \varepsilon c(\phi)^2, \\ 0 < \vartheta \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \vartheta^{-1}, \quad \widehat{\zeta} = e^{i\phi}, \quad \phi \in (0{,}2\pi),\end{gathered} \tag{1.138}$$

с постоянной $C_4 = 4(1 + \lambda_0)^2 \|f\|^2_{L_\infty} \|f^{-1}\|^2_{L_\infty} \widehat{C}_1 + \mathfrak{C}_2$.

Масштабным преобразованием из (1.138) получаем

$$\|(B(\varepsilon;\vartheta) - \widehat{\zeta}\varepsilon^2 Q_0)^{-1} - (B^0(\varepsilon;\vartheta) - \widehat{\zeta}\varepsilon^2 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4 c(\phi)^2 \varepsilon^{-1}. \tag{1.139}$$

Здесь в качестве ε возьмем величину $\widetilde{\varepsilon}|\zeta|^{1/2}$, считая, что $0 < \widetilde{\varepsilon} \leqslant 1$, $\zeta = |\zeta| e^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\phi \in (0{,}2\pi)$, $|\zeta| \geqslant 1$. В качестве ϑ возьмем $|\zeta|^{-1/2}$. Тогда автоматически $0 < \vartheta \leqslant 1$ и $0 < \varepsilon\vartheta \leqslant 1$. Имеем (см. (1.110), (1.117)) $B(\widetilde{\varepsilon}|\zeta|^{1/2}; |\zeta|^{-1/2}) = B(\widetilde{\varepsilon}; 1)$, $B^0(\widetilde{\varepsilon}|\zeta|^{1/2}; |\zeta|^{-1/2}) =$

$B^0(\widetilde{\varepsilon};1)$. Поэтому из (1.139) следует оценка

$$\begin{aligned}&\|(B(\widetilde{\varepsilon};1)-\zeta\widetilde{\varepsilon}^2 Q_0)^{-1}-(B^0(\widetilde{\varepsilon};1)-\zeta\widetilde{\varepsilon}^2\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant C_4 c(\phi)^2\widetilde{\varepsilon}^{-1}|\zeta|^{-1/2},\quad 0<\widetilde{\varepsilon}\leqslant 1,\quad \zeta=|\zeta|e^{i\phi},\quad |\zeta|\geqslant 1,\quad 0<\phi<2\pi.\end{aligned}$$

Отсюда переобозначением $\varepsilon := \widetilde{\varepsilon}$ и обратным масштабным преобразованием получаем (1.102). Это завершает доказательство теоремы 1.4.1.

□

1.6 Доказательство теорем 1.4.2 и 1.4.4

1.6.1 Оператор $\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)$

Пусть по-прежнему $0<\vartheta\leqslant 1$ и $0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}$. Рассмотрим обобщенную резольвенту $(B_\varepsilon(\vartheta)+\lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$. С учетом вида задач для Λ и $\widetilde{\Lambda}$ (см. (1.25) и (1.35)) аналог корректора (1.84) для обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon(\vartheta)+\lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ имеет вид

$$\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)=\Big([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})+\vartheta[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Big)S_\varepsilon(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.140}$$

Оператор $\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)$ непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Это видно из следующей леммы.

Лемма 1.6.1. *Пусть $\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)$ — оператор* (1.140). *Тогда при $0<\vartheta\leqslant 1$ и $\varepsilon>0$ оператор $\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и выполнены оценки*

$$\|\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_K^{(1)}, \tag{1.141}$$

$$\|\varepsilon\mathbf{D}\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_K^{(2)}\varepsilon+C_K^{(3)}. \tag{1.142}$$

Постоянные $C_K^{(1)}$, $C_K^{(2)}$, $C_K^{(3)}$ зависят лишь от исходных данных (1.48).

Доказательство. Оценим $(L_2\to L_2)$-норму корректора:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}&\leqslant\|[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&+\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.143}$$

Применяя предложение 1.3.2 и учитывая (1.29), находим

$$\|[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant M_1. \tag{1.144}$$

Согласно (1.4)

$$\|b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{D}(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.145}$$

Так как символ оператора $B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0}$ подчинен оценке (1.116), имеем

$$\|\mathbf{D}(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \check{c}_*^{-1}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|^2+1}\leqslant (2\check{c}_*)^{-1}. \tag{1.146}$$

Используя (1.94), (1.125) и (1.143)–(1.146), получаем оценку (1.141) с постоянной $C_K^{(1)}=\alpha_1^{1/2}(2\check{c}_*)^{-1}M_1+\lambda_0^{-1}\widetilde{M}_1\|f\|^2_{L_\infty}$.

Проверим теперь неравенство (1.142). Очевидно,

$$\begin{aligned}\varepsilon D_j\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)&=[(D_j\Lambda)^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_j(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\\&+\vartheta[(D_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon]S_\varepsilon(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}+\varepsilon\vartheta[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon D_j(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\varepsilon\mathbf{D}\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}&\leqslant 4\|[(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&+4\|\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{D}(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&+4\|[(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon]S_\varepsilon(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&+4\|\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\mathbf{D}(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{1.147}$$

Применяя предложение 1.3.2 и (1.30), (1.42), находим

$$\|[(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant M_2, \tag{1.148}$$

$$\|[(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant |\Omega|^{-1/2}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}=:\widetilde{M}_2. \tag{1.149}$$

В силу (1.4) и (1.115) выполнено

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{D}(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \alpha_1^{1/2}c_*^{-1}. \tag{1.150}$$

Объединяя (1.94), (1.125), (1.144)–(1.150), приходим к оценке (1.142) с постоянными $C_K^{(2)}=(4\alpha_1M_1^2c_*^{-2}+\widetilde{M}_1^2\check{c}_*^{-2})^{1/2}$ и $C_K^{(3)}=(\alpha_1M_2^2\check{c}_*^{-2}+4\lambda_0^{-2}\|f\|^4_{L_\infty}\widetilde{M}_2^2)^{1/2}$. □

1.6.2 Доказательство теоремы 1.4.2

С учетом замечания 1.3.5 для $B_\varepsilon(\vartheta)$ справедлив результат теоремы 1.3.3:

$$\begin{aligned}\|(B_\varepsilon(\vartheta)+\lambda_0Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B^0(\vartheta)+\lambda_0\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}&\leqslant C_3\varepsilon,\\0<\vartheta\leqslant 1,\quad 0<\varepsilon&\leqslant 1.\end{aligned}\tag{1.151}$$

Распространим эту оценку на $0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}$. При $1<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}$ воспользуемся грубыми оценками. Действуя по аналогии с (1.134), (1.135), находим

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta)+\lambda_0Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant\mathfrak{C}_3, \tag{1.152}$$

где $\mathfrak{C}_3 = \lambda_0^{-1}\|f\|^2_{L_\infty} + \frac{1}{2}\lambda_0^{-1/2}c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}$.

Аналогично с учетом (1.114) и (1.119) имеем

$$\|(B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_3. \tag{1.153}$$

При $1 < \varepsilon \leqslant \vartheta^{-1}$ воспользуемся леммой 1.6.1 и неравенствами (1.152), (1.153), при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ — оценкой (1.151). В итоге получаем

$$\begin{gathered}\|(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_3\varepsilon,\\ 0<\vartheta\leqslant 1, \quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1},\end{gathered} \tag{1.154}$$

где $\widehat{C}_3 = \max\{C_3; 2\mathfrak{C}_3 + C_K^{(1)} + C_K^{(2)} + C_K^{(3)}\}$.

Положим

$$K(\varepsilon;\vartheta;\zeta) = \Big([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \vartheta[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Big) S_\varepsilon (B^0(\vartheta) - \zeta\overline{Q_0})^{-1}, \quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+. \tag{1.155}$$

Отметим, что $K(\varepsilon;\vartheta;-\lambda_0) = \mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)$.

Установим аналог оценки (1.154) для оператора $(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}$, где $\widehat{\zeta} = e^{i\phi}$ при $\phi\in(0,2\pi)$, с помощью тождества

$$\begin{aligned}&(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\\ &\quad = (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)\\ &\quad \times \big((B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;-\lambda_0)\big)\\ &\quad \times (B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\\ &\quad + \varepsilon(\lambda_0 + \widehat{\zeta})(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}Q_0^\varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\\ &\quad + (\lambda_0 + \widehat{\zeta})(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned} \tag{1.156}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части через $\mathcal{J}_l(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})$, $l=1,2,3$. Сначала оценим $(L_2\to L_2)$-норму каждого слагаемого. В силу (1.118), (1.140) и (1.155) имеем

$$\begin{aligned}\|Q_0^\varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|f^{-1}\|^2_{L_\infty}\|\mathcal{K}(\varepsilon;\vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\times \|(B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1.131) и (1.141) следует, что

$$\|Q_0^\varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2(1+\lambda_0)C_K^{(1)}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|^3_{L_\infty}c(\phi). \tag{1.157}$$

Из (1.134) и (1.157) следует оценка оператора $\mathcal{J}_2(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})$:

$$\|\mathcal{J}_2(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\varepsilon(\lambda_0+1)^2\|f\|^3_{L_\infty}\|f^{-1}\|^3_{L_\infty}C_K^{(1)}c(\phi)^2.$$

Для оценки $(L_2 \to L_2)$-нормы оператора $\mathcal{J}_1(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})$ используем (1.130), (1.131) и (1.154), для оценки $\mathcal{J}_3(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})$ — (1.74), (1.132), (1.136) и (1.137). В результате получаем

$$\begin{aligned}&\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_5\varepsilon c(\phi)^2, \quad 0<\vartheta\leqslant 1, \quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}, \quad \widehat{\zeta}=e^{i\phi}, \quad 0<\phi<2\pi.\end{aligned} \tag{1.158}$$

Здесь

$$C_5 = 4(1+\lambda_0)^2\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}\widehat{C}_3 + 2(1+\lambda_0)^2\|f\|^3_{L_\infty}\|f^{-1}\|^3_{L_\infty}C_K^{(1)} + (1+\lambda_0)C_{Q_0}\mathfrak{C}_1^2.$$

Применим теперь к левой и правой частям (1.156) оператор $B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}$:

$$\begin{aligned}&B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\Big((B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\Big)\\ &= B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_1(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta}) + B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_2(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta}) + B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_3(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta}).\end{aligned} \tag{1.159}$$

Оценим $(L_2 \to L_2)$-норму каждого слагаемого в правой части.

С учетом (1.120) при всех $\mathbf{w} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathbf{w}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = b_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{w},\mathbf{w}] = \widetilde{b}_\varepsilon(\vartheta)[(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w},(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}] = \|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.160}$$

Далее, из (1.121) следует, что

$$(f^\varepsilon)^*(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon) = (\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)(f^\varepsilon)^{-1}. \tag{1.161}$$

Используя (1.121), (1.129), (1.160) и (1.161), получаем

$$\begin{aligned}&\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \|(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}I)^{-1}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant 2(\lambda_0+1)c(\phi)\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.162}$$

Теперь из верхней оценки (1.113), (1.131), (1.154) и (1.162) вытекает оценка первого слагаемого в правой части (1.159):

$$\begin{aligned}&\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_1(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_4\varepsilon c(\phi)^2,\\ &0<\vartheta\leqslant 1, \quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1}, \quad \widehat{\zeta}=e^{i\phi}, \quad 0<\phi<2\pi,\end{aligned} \tag{1.163}$$

где $\mathfrak{C}_4 = 4(1+\lambda_0)^2 c_6^{1/2}\widehat{C}_3\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

Далее,

$$\begin{aligned}&\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_2(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant \varepsilon(\lambda_0+1)\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\|Q_0^\varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2\to L_2}.\end{aligned}\tag{1.164}$$

Учитывая (1.121) и (1.160), находим

$$\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}=\|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}I)^{-1}(f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\tag{1.165}$$

Очевидно,

$$\|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\sup_{\nu\geqslant0}\frac{\nu^{1/2}}{|\nu-\widehat{\zeta}|}\leqslant c(\phi).\tag{1.166}$$

В силу (1.165) и (1.166)

$$\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\|f\|_{L_\infty}c(\phi).\tag{1.167}$$

Из (1.157), (1.164) и (1.167) вытекает оценка второго слагаемого в правой части (1.159):

$$\begin{aligned}&\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_2(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\mathfrak{C}_5\varepsilon c(\phi)^2,\\&0<\vartheta\leqslant1,\quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1},\quad \widehat{\zeta}=e^{i\phi},\quad 0<\phi<2\pi,\end{aligned}\tag{1.168}$$

где $\mathfrak{C}_5=2(1+\lambda_0)^2C_K^{(1)}\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^3_{L_\infty}$.

Перейдем к рассмотрению третьего слагаемого в правой части (1.159). Очевидно,

$$\begin{aligned}\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_3(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}&\leqslant(\lambda_0+1)\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\times\|[Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0}]\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to H^{-1}(\mathbb{R}^d)}\|(B^0(\vartheta)-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{1.169}$$

Используя (1.121), (1.160) и соображения двойственности, имеем

$$\begin{aligned}&\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\quad=\|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}I)^{-1}(f^\varepsilon)^*\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\quad=\|f^\varepsilon(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}^*I)^{-1}\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\&\quad=\|f^\varepsilon\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}^*I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{1.170}$$

В силу нижней оценки (1.113) и тождества (1.120)

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{D}[f^\varepsilon]\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}^*I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant c_*^{-1/2}\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}f^\varepsilon\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}^*I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&=c_*^{-1/2}\|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}^*I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{1.171}$$

Очевидно,

$$\|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)(\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}^*I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{\nu\geqslant 0}\frac{\nu}{|\nu-\widehat{\zeta}^*|}\leqslant c(\phi). \tag{1.172}$$

Теперь из (1.166) в точке $\widehat{\zeta}^*$, (1.170)–(1.172) следует, что

$$\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\|f\|_{L_\infty}+c_*^{-1/2})c(\phi). \tag{1.173}$$

Неравенства (1.74), (1.137), (1.169) и (1.173) влекут

$$\begin{gathered}\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_3(\vartheta;\varepsilon;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_6\varepsilon c(\phi)^2,\\ 0<\vartheta\leqslant 1,\quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1},\quad \widehat{\zeta}=e^{i\phi},\quad 0<\phi<2\pi,\end{gathered} \tag{1.174}$$

где $\mathfrak{C}_6=(1+\lambda_0)(\|f\|_{L_\infty}+c_*^{-1/2})C_{Q_0}\mathfrak{C}_1$.

В итоге из (1.159), (1.163), (1.168) и (1.174) вытекает оценка

$$\begin{gathered}\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\big((B_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B^0(\vartheta)-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\big)\|_{L_2\to L_2}\\ \leqslant \widehat{C}_6\varepsilon c(\phi)^2,\quad 0<\vartheta\leqslant 1,\quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1},\quad \widehat{\zeta}=e^{i\phi},\quad 0<\phi<2\pi,\end{gathered} \tag{1.175}$$

с постоянной $\widehat{C}_6=\mathfrak{C}_4+\mathfrak{C}_5+\mathfrak{C}_6$. С учетом нижней оценки (1.113) из (1.175) следует, что

$$\begin{gathered}\|\mathbf{D}\big((B_\varepsilon(\vartheta)-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B^0(\vartheta)-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\big)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ \leqslant C_6\varepsilon c(\phi)^2,\quad 0<\vartheta\leqslant 1,\quad 0<\varepsilon\leqslant\vartheta^{-1},\quad \widehat{\zeta}=e^{i\phi},\quad 0<\phi<2\pi,\end{gathered} \tag{1.176}$$

где $C_6=c_*^{-1/2}\widehat{C}_6$.

Масштабным преобразованием из (1.158) и (1.176) получаем

$$\|(B(\varepsilon;\vartheta)-\widehat{\zeta}\varepsilon^2Q_0)^{-1}-(B^0(\varepsilon;\vartheta)-\widehat{\zeta}\varepsilon^2\overline{Q_0})^{-1}-\check{K}(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\|_{L_2\to L_2}\leqslant C_5\varepsilon^{-1}c(\phi)^2, \tag{1.177}$$

$$\|\mathbf{D}\big((B(\varepsilon;\vartheta)-\widehat{\zeta}\varepsilon^2Q_0)^{-1}-(B^0(\varepsilon;\vartheta)-\widehat{\zeta}\varepsilon^2\overline{Q_0})^{-1}-\check{K}(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})\big)\|_{L_2\to L_2}\leqslant C_6c(\phi)^2, \tag{1.178}$$

где

$$\check{K}(\varepsilon;\vartheta;\widehat{\zeta})=\Big([\Lambda]b(\mathbf{D})+\varepsilon\vartheta[\widetilde{\Lambda}]\Big)S_1(B^0(\varepsilon;\vartheta)-\widehat{\zeta}\varepsilon^2\overline{Q_0})^{-1}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1.4.1, возьмем в (1.177) и (1.178) в качестве ε величину $\widetilde{\varepsilon}|\zeta|^{1/2}$, считая, что $0<\widetilde{\varepsilon}\leqslant 1$, $\zeta=|\zeta|e^{i\phi}$ и $|\zeta|\geqslant 1$. В качестве ϑ возьмем $|\zeta|^{-1/2}$. Далее, переобозначим $\widetilde{\varepsilon}=:\varepsilon$ и выполним обратное масштабное преобразование, учитывая, что

$$\varepsilon K(\varepsilon;\zeta)=\varepsilon^2T_\varepsilon^*\check{K}(\varepsilon|\zeta|^{1/2};|\zeta|^{-1/2};\widehat{\zeta})T_\varepsilon,\quad \zeta=|\zeta|e^{i\phi}.$$

Здесь T_ε — оператор (1.20), $K(\varepsilon;\zeta)$ — корректор (1.103). Это приводит к искомым оценкам (1.104), (1.105) и завершает доказательство теоремы 1.4.2.

$\square$

1.6.3 Доказательство теоремы 1.4.4

Теперь мы выведем утверждение теоремы 1.4.4 из теоремы 1.4.2. С учетом (1.4) из (1.105) следует, что

$$\begin{aligned}&\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left(I + \varepsilon \left([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) S_\varepsilon \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2 \to L_2} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_6 c(\phi)^2 \varepsilon.\end{aligned} \tag{1.179}$$

В силу (1.3) справедливо тождество

$$\begin{aligned}&\varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\ &= g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\ &+ \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left([\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon D_l \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned} \tag{1.180}$$

Из (1.4), (1.5), (1.94) и (1.144) вытекает оценка для третьего слагаемого в правой части (1.180):

$$\begin{aligned}&\left\| \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left([\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon D_l \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2 \to L_2} \\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} M_1 \sum_{l=1}^d \|b(\mathbf{D}) D_l (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \\ &+ \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \widetilde{M}_1 \sum_{l=1}^d \|D_l (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 d^{1/2} M_1 \|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \\ &+ \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} \widetilde{M}_1 \|\mathbf{D} (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to L_2}.\end{aligned} \tag{1.181}$$

Воспользуемся оценкой (1.53):

$$\|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant c_*^{-1} \|B^0 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to L_2}. \tag{1.182}$$

Учитывая неравенства (1.119) и связь операторов $B^0 = B^0(1)$ и $\widetilde{B}^0 = \widetilde{B}^0(1)$ (см. п. 1.5.4), находим

$$\begin{aligned}&\|B^0 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to L_2} = \|f_0^{-1} \widetilde{B}^0 (\widetilde{B}^0 - \zeta I)^{-1} f_0\|_{L_2 \to L_2} \\ &\leqslant \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geqslant 0} \frac{\nu}{|\nu - \zeta|} \leqslant \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi).\end{aligned} \tag{1.183}$$

Отсюда и из (1.182) получаем

$$\|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi). \tag{1.184}$$

Аналогично, в силу (1.50) имеем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2} &\leqslant c_*^{-1/2}\|(B^0)^{1/2}(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}\\ &= c_*^{-1/2}\|(\widetilde{B}^0)^{1/2}(\widetilde{B}^0-\zeta I)^{-1}f_0\|_{L_2\to L_2}\\ &\leqslant c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}\sup_{\nu\geqslant 0}\frac{\nu^{1/2}}{|\nu-\zeta|}\leqslant c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}.\end{aligned} \tag{1.185}$$

Теперь из (1.181), (1.184) и (1.185) следует, что при $|\zeta|\geqslant 1$ имеет место неравенство

$$\left\|\varepsilon\sum_{l=1}^{d}g^\varepsilon b_l\left([\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l+[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon D_l\right)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\right\|_{L_2\to L_2}\leqslant \mathfrak{C}_7\varepsilon c(\phi), \tag{1.186}$$

где $\mathfrak{C}_7=\|g\|_{L_\infty}d^{1/2}\|f\|_{L_\infty}\left(\alpha_1M_1c_*^{-1}\|f^{-1}\|_{L_\infty}+\alpha_1^{1/2}\widetilde{M}_1c_*^{-1/2}\right)$.

Заметим, что в силу предложения 1.3.1, (1.4) и (1.184) выполнено

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I-S_\varepsilon)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}\varepsilon r_1\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \varepsilon r_1\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}^2(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathfrak{C}_8\varepsilon c(\phi),\end{aligned} \tag{1.187}$$

где $\mathfrak{C}_8=r_1\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}c_*^{-1}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

Теперь из (1.27), (1.179), (1.180), (1.186) и (1.187) следует оценка (1.107) с постоянной $C_7=\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}C_6+\mathfrak{C}_7+\mathfrak{C}_8$. Это завершает доказательство теоремы 1.4.4.

$\square$

1.7 Устранение сглаживающего оператора. Специальные случаи

1.7.1 Устранение S_ε в корректоре

Оказывается, сглаживающий оператор S_ε в корректоре может быть устранен, если наложить на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ дополнительные условия.

Условие 1.7.1. *Пусть* Γ*-периодическая матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$*, являющаяся решением задачи* (1.25)*, ограничена*: $\Lambda\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Случаи, когда условие 1.7.1 выполнено автоматически, выделены в [10, лемма 8.7].

Предложение 1.7.2. *Условие* 1.7.1 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений*:

1°) *размерность не превосходит двух, т. е.* $d\leqslant 2$;

2°) *оператор* $\mathcal{A}_\varepsilon$ *имеет вид* $\mathcal{A}_\varepsilon=\mathbf{D}^*g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$ *при вещественной матрице* $g(\mathbf{x})$, $d\geqslant 1$;

3°) *размерность d произвольна, и для эффективной матрицы справедливо равенство* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнено* (1.34).

Для устранения S_ε в члене корректора, содержащем $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$, достаточно наложить на матрицу-функцию $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ следующее условие.

Условие 1.7.3. *Пусть Γ-периодическая матрица-функция $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, являющаяся решением задачи* (1.35), *удовлетворяет условию*

$$\widetilde{\Lambda} \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p = d \text{ при } d \geqslant 3.$$

В [61, предложение 8.11] получен следующий результат.

Предложение 1.7.4. *Условие* 1.7.3 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений:*
1°) $d \leqslant 4$;
2°) *размерность d произвольна, а оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет вид $\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$ при вещественной матрице $g(\mathbf{x})$.*

Замечание 1.7.5. *В случае, когда $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$ с вещественной матрицей-функцией $g(\mathbf{x})$, из теоремы* 13.1 *главы* III *книги* [31] *следует, что норма $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ оценивается величиной, зависящей от d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и Ω, а норма $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$ оценивается величиной, зависящей от d, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, и Ω. При этом одновременно выполнены условия* 1.7.1 *и* 1.7.3.

Наша цель в этом пункте — доказать следующую теорему.

Теорема 1.7.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.1.
1°. *Пусть выполнено условие* 1.7.1. *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, справедливы оценки*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8' c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2},$$
$$\|\mathbf{D}\big((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\big)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9' c(\phi)^2 \varepsilon.$$

Постоянные C_8' и C_9' зависят лишь от исходных данных (1.48) *и от нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.*
2°. *Пусть справедливо условие* 1.7.3. *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, выполнено*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) S_\varepsilon + \varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8'' c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2},$$
$$\|\mathbf{D}\big((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) S_\varepsilon + \varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\big)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9'' c(\phi)^2 \varepsilon.$$

Постоянные C_8'' и C_9'' контролируются через исходные данные (1.48), p *и норму $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.*

3°. *Пусть выполнены условия* 1.7.1 *и* 1.7.3. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \\ &\|\mathbf{D}\big((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9 c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.188}$$

Постоянные C_8 *и* C_9 *зависят от исходных данных* (1.48), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Ограниченность операторов под знаком нормы в оценках теоремы 1.7.6 (при соответствующих условиях) вытекает из следствия 1.2.2, леммы 1.2.5 и следствия 1.2.6. Утверждения теоремы 1.7.6 получаются на основании (1.104), (1.105) и лемм 1.7.7, 1.7.8, установленных ниже.

Лемма 1.7.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.1 *и условие* 1.7.1. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda^{(1)} \varepsilon c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \tag{1.189}$$

$$\varepsilon\|\mathbf{D}[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda^{(2)} \varepsilon c(\phi). \tag{1.190}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_\Lambda^{(1)}$ *и* $\mathfrak{C}_\Lambda^{(2)}$ *зависят только от исходных данных* (1.48) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Для проверки (1.189) воспользуемся неравенствами (1.4) и (1.185):

$$\begin{aligned} &\|[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant 2\alpha_1^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda^{(1)} c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{C}_\Lambda^{(1)} = 2\alpha_1^{1/2} c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Теперь проверим (1.190). Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_j[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} &= [(\partial_j\Lambda)^\varepsilon](S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\ &\quad + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon](S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\partial_j(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \tag{1.191}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\|\mathbf{D}[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant 2\|[(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon](S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad+ 2\varepsilon^2\|\Lambda\|^2_{L_\infty}\sum_{j=1}^d \|(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\partial_j(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

С учетом следствия 1.2.2 это влечет

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \|\mathbf{D}[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \leqslant 2\beta_1 \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty}(\beta_2 + 1)\sum_{j=1}^d \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})\partial_j (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Применяя предложение 1.3.1 для оценки первого слагаемого справа и учитывая (1.4), находим

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \|\mathbf{D}[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \leqslant \varepsilon^2 \alpha_1 \left(2 r_1^2 \beta_1 + 8(\beta_2 + 1)\|\Lambda\|^2_{L_\infty}\right) \|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

С учетом (1.184) отсюда вытекает искомое неравенство (1.190) с постоянной

$$\mathfrak{C}^{(2)}_\Lambda = \alpha_1^{1/2} c_*^{-1} \left(2 r_1^2 \beta_1 + 8(\beta_2 + 1)\|\Lambda\|^2_{L_\infty}\right)^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}.$$

$\square$

Лемма 1.7.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.1 *и условие* 1.7.3. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\varepsilon \|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(1)}_{\widetilde{\Lambda}} \varepsilon c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \tag{1.192}$$

$$\varepsilon \|\mathbf{D}[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(2)}_{\widetilde{\Lambda}} \varepsilon c(\phi). \tag{1.193}$$

Постоянные $\mathfrak{C}^{(1)}_{\widetilde{\Lambda}}$ *и* $\mathfrak{C}^{(2)}_{\widetilde{\Lambda}}$ *зависят от исходных данных* (1.48), *от* p *и от* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Из леммы 1.2.5 и условия 1.7.3 вытекает оценка

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2C(\widehat{q},\Omega)\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} \|(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.194}$$

Учитывая связь операторов $B^0 = B^0(1)$ и $\widetilde{B}^0 = \widetilde{B}^0(1)$ (см. п. 1.5.4), а также (1.119), получаем

$$\|(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |f_0|^2 \|(\widetilde{B}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} c(\phi)|\zeta|^{-1}. \tag{1.195}$$

Объединяя (1.185), (1.194) и (1.195), приходим к (1.192) при

$$\mathfrak{C}^{(1)}_{\widetilde{\Lambda}} = 2C(\widehat{q},\Omega)\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}(\|f\|^2_{L_\infty} + c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}).$$

Теперь докажем (1.193). Аналогично (1.191)

$$\varepsilon\partial_j[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = [(\partial_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + \varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)\partial_j(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.$$

Отсюда с учетом следствия 1.2.6 и леммы 1.2.5 вытекает оценка

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\|\mathbf{D}[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\widetilde{\beta}_1\|(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &+ 2(\widetilde{\beta}_2 + 1)\varepsilon^2\|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)}C(\widehat{q},\Omega)^2\|(S_\varepsilon - I)\mathbf{D}(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Применяя предложение 1.3.1 для оценки первого члена справа, получаем

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|\mathbf{D}[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon\left(2\widetilde{\beta}_1 r_1^2 + 8(\widetilde{\beta}_2 + 1)C(\widehat{q},\Omega)^2\|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)}\right)^{1/2}\|\mathbf{D}(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

С учетом (1.184), (1.185) это приводит к (1.193) с постоянной

$$\mathfrak{C}^{(2)}_{\widetilde{\Lambda}} = \left(2\widetilde{\beta}_1 r_1^2 + 8(\widetilde{\beta}_2 + 1)C(\widehat{q},\Omega)^2\|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)}\right)^{1/2}\left(c_*^{-1}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty} + c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}\right).$$

$\square$

1.7.2 Устранение S_ε в аппроксимации потоков

Теорема 1.7.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.1. *Пусть* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (1.27).

1°. *Пусть выполнено условие* 1.7.1. *Положим*

$$G_1(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.196}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C'_{10}c(\phi)^2\varepsilon.$$

Постоянная C'_{10} *контролируется через исходные данные* (1.48) *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

2°. *Пусть справедливо условие* 1.7.3. *Положим*

$$G_2(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.197}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *выполнено*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C''_{10}c(\phi)^2\varepsilon.$$

Постоянная C''_{10} *зависит лишь от исходных данных* (1.48), *от* p *и от* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

3°. *Пусть справедливы условия* 1.7.1 *и* 1.7.3. *Обозначим*

$$G_3(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.198}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{10}c(\phi)^2\varepsilon. \tag{1.199}$$

Здесь постоянная C_{10} *зависит от исходных данных* (1.48), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Результат теоремы 1.7.9 выводится из теоремы 1.7.6. Доказательство во многом похоже на доказательство теоремы 1.4.4 (см. п. 1.6.3). Для примера докажем утверждение 3°. Аналогично (1.179) из (1.188) вытекает оценка

$$\begin{aligned}&\Big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\left(I + \varepsilon\left([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\right)\right)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\Big\|_{L_2\to L_2}\\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}C_9c(\phi)^2\varepsilon.\end{aligned} \tag{1.200}$$

Далее, аналогично (1.180),

$$\begin{aligned}&\varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})\left([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\right)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\ &\quad= g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\ &\quad+ \varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\left([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})D_l + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]D_l\right)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned} \tag{1.201}$$

Отличие от доказательства теоремы 1.4.4 возникает при оценке третьего слагаемого в правой части (1.201). Используя условие 1.7.1, а также (1.4) и (1.5), приходим к оценке

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sum_{j=1}^d \|g^\varepsilon b_l[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})D_l(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad\leqslant \varepsilon\alpha_1 d^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}^2(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.202}$$

Используя условие 1.7.3, (1.5) и лемму 1.2.5, получаем

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sum_{j=1}^d \|g^\varepsilon b_l[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]D_l(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \varepsilon\alpha_1^{1/2}d^{1/2}C(\widehat{q},\Omega)\|g\|_{L_\infty}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}\|\mathbf{D}(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.203}$$

Из (1.202), (1.203) и (1.184), (1.185) вытекает оценка ($L_2 \to L_2$)-нормы третьего слагаемого в правой части (1.201) через $\widehat{C}_{10} c(\phi)\varepsilon$, где

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{10} = {} & \alpha_1 d^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \\ & + \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C(\widehat{q},\Omega) \|g\|_{L_\infty} \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} \left(c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} + c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \right).\end{aligned}$$

Вместе с (1.200) и (1.201) это влечет (1.199) с постоянной $C_{10} = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_9 + \widehat{C}_{10}$.

Утверждения 1° и 2° получаются аналогично; при проверке 2° нужно дополнительно учесть (1.187). $\square$

1.7.3 Случай, когда корректор обращается в нуль

Предположим, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. справедливы соотношения (1.33). Тогда Γ-периодическое решение задачи (1.25) обращается в нуль: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$. Пусть выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0. \tag{1.204}$$

Тогда Γ-периодическое решение задачи (1.35) равно нулю: $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$. В этом случае оператор (1.103) обращается в нуль, формула (1.105) упрощается и теорема 1.4.2 влечет следующий результат.

Предложение 1.7.10. *Пусть справедливы соотношения* (1.33) *и* (1.204). *Тогда в условиях теоремы* 1.4.1 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *верна оценка*

$$\|\mathbf{D} \left((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_6 c(\phi)^2 \varepsilon.$$

1.7.4 Специальный случай

Предположим, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы представления (1.34). Тогда в силу предложения 1.7.2(3°) выполнено условие 1.7.1. При этом согласно [9, замечание 3.5] матрица-функция (1.27) постоянна и совпадает с g^0, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Таким образом, $\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} = g^0 b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}$.

Предположим дополнительно, что имеет место равенство (1.204). Тогда $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ и из теоремы 1.7.9(3°) вытекает следующий результат.

Предложение 1.7.11. *Пусть справедливы соотношения* (1.34) *и* (1.204). *Тогда в условиях теоремы* 1.4.1 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *выполнена оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{10} c(\phi)^2 \varepsilon.$$

1.8 Другая аппроксимация обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$

1.8.1 Результат в общем случае

В теоремах из п. 1.4 и п. 1.7 предполагалось, что $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, причем $|\zeta| \geqslant 1$. В настоящем параграфе мы устанавливаем результаты, справедливые в более широкой области изменения параметра ζ.

Теорема 1.8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.2. *Пусть матрица-функция* $f(\mathbf{x})$ *и матрица* f_0 *определены в п.* 1.5.4. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$, *где* $c_\flat \geqslant 0$ *— общая нижняя грань операторов* $\widetilde{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* B_\varepsilon f^\varepsilon$ *и* $\widetilde{B}^0 = f_0 B^0 f_0$. *Положим* $\zeta - c_\flat = |\zeta - c_\flat| e^{i\psi}$, $\psi \in (0,2\pi)$, *и введем обозначение*

$$\varrho(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.205}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *верны оценки*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{11} \varrho(\zeta) \varepsilon, \tag{1.206}$$

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{12} \varrho(\zeta) \varepsilon, \tag{1.207}$$

$$\|\mathbf{D}\big((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\big)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \big(C_{13} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{14}\big) \varrho(\zeta) \varepsilon. \tag{1.208}$$

Пусть $G(\varepsilon;\zeta)$ *— оператор* (1.106). *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C_{15} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{16}) \varrho(\zeta) \varepsilon. \tag{1.209}$$

Постоянные C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15} *и* C_{16} *контролируются через исходные данные* (1.48) *и* $c_\flat$.

Следствие 1.8.2. *В условиях теоремы* 1.8.1 *выполнена оценка*

$$\begin{aligned} &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \big(C_{12} + C_{13} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{14}\big) \varrho(\zeta) \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \end{aligned} \tag{1.210}$$

Замечание 1.8.3. 1) *Мы не контролируем явно края спектров операторов* $\widetilde{B}_\varepsilon \geqslant 0$ *и* $\widetilde{B}^0 \geqslant 0$, *и может оказаться, что* $c_\flat = 0$. *Тогда* $\psi = \phi$ *и при* $|\zeta| = |\zeta - c_\flat| \geqslant 1$ *оценки теоремы* 1.8.1 *— просто загрубление результатов теорем* 1.4.1, 1.4.2 *и* 1.4.4. 2) *При большом* $|\zeta|$ *удобнее применять теоремы* 1.4.1, 1.4.2 *и* 1.4.4, *а при ограниченных значениях* $|\zeta|$ *теорема* 1.8.1 *может оказаться предпочтительнее.*

Доказательство. Для проверки (1.206) воспользуемся теоремой 1.4.1 при $\zeta=-1$. Согласно (1.102)

$$\|(B_\varepsilon+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B^0+\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_4\varepsilon,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

Опираясь на аналог тождества (1.127) при $\vartheta=1$ (с заменой $\widehat{\zeta}$ и λ_0 на ζ и 1 соответственно), и действуя по аналогии с (1.128)–(1.131), находим

$$\begin{gathered}\|(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant C_4\varepsilon\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}\sup_{\nu\geqslant c_\flat}\frac{(\nu+1)^2}{|\nu-\zeta|^2}\\ +|1+\zeta|\|(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}\to L_2}\|[Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0}]\|_{H^1\to H^{-1}}\|(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to H^1}.\end{gathered}\tag{1.211}$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{\nu\geqslant c_\flat}\frac{(\nu+1)^2}{|\nu-\zeta|^2}\leqslant(c_\flat+2)^2\varrho(\zeta),\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty).\tag{1.212}$$

Далее, по двойственности,

$$\|(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}\to L_2}=\|(B_\varepsilon-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to H^1}.\tag{1.213}$$

В силу (1.121) имеем

$$\|(B_\varepsilon-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant\|f\|^2_{L_\infty}\sup_{\nu\geqslant c_\flat}\frac{1}{|\nu-\zeta^*|}=\|f\|^2_{L_\infty}c(\psi)|\zeta-c_\flat|^{-1}.\tag{1.214}$$

Заметим, что

$$|\zeta+1|^{1/2}\leqslant(2+c_\flat)^{1/2}\ \text{при}\ |\zeta-c_\flat|<1,\tag{1.215}$$

$$|\zeta+1|^{1/2}|\zeta-c_\flat|^{-1}\leqslant(2+c_\flat)^{1/2}\ \text{при}\ |\zeta-c_\flat|\geqslant 1.\tag{1.216}$$

Поэтому

$$|\zeta+1|^{1/2}\|(B_\varepsilon-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant\|f\|^2_{L_\infty}(2+c_\flat)^{1/2}\varrho(\zeta)^{1/2}.\tag{1.217}$$

Действуя по аналогии с (1.135), получаем

$$\|\mathbf{D}(B_\varepsilon-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}\sup_{\nu\geqslant c_\flat}\frac{\nu^{1/2}}{|\nu-\zeta^*|}.\tag{1.218}$$

Справедлива оценка

$$\sup_{\nu\geqslant c_\flat}\frac{\nu}{|\nu-\zeta^*|^2}\leqslant\begin{cases}(c_\flat+1)c(\psi)^2|\zeta-c_\flat|^{-2}, & |\zeta-c_\flat|<1,\\ (c_\flat+1)c(\psi)^2|\zeta-c_\flat|^{-1}, & |\zeta-c_\flat|\geqslant 1.\end{cases}\tag{1.219}$$

С учетом (1.215) и оценки $|\zeta+1||\zeta-c_\flat|^{-1}\leqslant 2+c_\flat$ при $|\zeta-c_\flat|\geqslant 1$ отсюда следует неравенство

$$|\zeta+1|\sup_{\nu\geqslant c_\flat}\frac{\nu}{|\nu-\zeta^*|^2}\leqslant (c_\flat+2)(c_\flat+1)\varrho(\zeta). \tag{1.220}$$

В силу (1.218) и (1.220)

$$|\zeta+1|^{1/2}\|\mathbf{D}(B_\varepsilon-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+2)^{1/2}(c_\flat+1)^{1/2}\varrho(\zeta)^{1/2}. \tag{1.221}$$

Теперь из (1.213), (1.217), (1.221) вытекает, что

$$|\zeta+1|^{1/2}\|(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}\to L_2}\leqslant \mathfrak{C}_9\varrho(\zeta)^{1/2}, \tag{1.222}$$

где $\mathfrak{C}_9=\|f\|^2_{L_\infty}(2+c_\flat)^{1/2}+c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+2)^{1/2}(c_\flat+1)^{1/2}$.

Аналогично (1.214) и (1.218) с учетом (1.50), (1.119) получаем

$$\|(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant \|f\|^2_{L_\infty}c(\psi)|\zeta-c_\flat|^{-1}, \tag{1.223}$$

$$\|\mathbf{D}(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}\sup_{\nu\geqslant c_\flat}\frac{\nu^{1/2}}{|\nu-\zeta^*|}. \tag{1.224}$$

Вместе с (1.215), (1.216) и (1.220) это влечет

$$|\zeta+1|^{1/2}\|(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to H^1}\leqslant \mathfrak{C}_9\varrho(\zeta)^{1/2}. \tag{1.225}$$

Объединяя (1.74), (1.211), (1.212), (1.222) и (1.225), приходим к оценке (1.206) с постоянной $C_{11}=C_4(c_\flat+2)^2\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}+C_{Q_0}\mathfrak{C}_9^2$.

Установим теперь неравенство (1.207), используя уже доказанную оценку (1.206):

$$\|(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\leqslant C_{11}\varrho(\zeta)\varepsilon+\varepsilon\|K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}. \tag{1.226}$$

В силу (1.4), (1.94) и (1.144) оператор (1.103) подчинен неравенству

$$\|K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\leqslant M_1\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{D}(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}+\widetilde{M}_1\|(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}. \tag{1.227}$$

Учитывая (1.219) и (1.224), имеем

$$\|\mathbf{D}(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant c_*^{-1/2}(c_\flat+1)^{1/2}\|f\|_{L_\infty}\rho(\zeta)^{1/2}. \tag{1.228}$$

В силу (1.223), (1.227) и (1.228)

$$\|K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\leqslant \mathfrak{C}_{10}\varrho(\zeta)^{1/2}, \tag{1.229}$$

где $\mathfrak{C}_{10} = M_1 \alpha_1^{1/2} c_*^{-1/2} (c_\flat + 1)^{1/2} \|f\|_{L_\infty} + \widetilde{M}_1 \|f\|^2_{L_\infty}$. Объединяя (1.226) и (1.229), и учитывая, что $\varrho(\zeta)^{1/2} \leqslant \varrho(\zeta)$, приходим к оценке (1.207) с постоянной $C_{12} = C_{11} + \mathfrak{C}_{10}$.

Чтобы установить неравенство (1.208), запишем аналог тождества (1.156) при $\vartheta = 1$ (в точках ζ и 1) и подействуем на левую и правую части тождества оператором $B_\varepsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned} &B_\varepsilon^{1/2}\big((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\big) \\ &\quad = B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon + Q_0^\varepsilon)\left((B_\varepsilon + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;-1)\right) \\ &\quad \times (B^0 + \overline{Q_0})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + \varepsilon(1+\zeta) B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} Q_0^\varepsilon K(\varepsilon;\zeta) \\ &\quad + (1+\zeta) B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \tag{1.230}$$

Обозначим слагаемые в правой части через $\mathcal{I}_j(\varepsilon;\zeta)$, $j = 1,2,3$.

Пользуясь аналогами соотношений (1.121), (1.160) и (1.161) при $\vartheta = 1$, находим, что при всех $\mathbf{w} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\begin{aligned} \|B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon + Q_0^\varepsilon)\mathbf{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|\widetilde{B}_\varepsilon^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_\varepsilon + I)(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \|(\widetilde{B}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_\varepsilon + I)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \|B_\varepsilon^{1/2}\mathbf{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{1.231}$$

Первое слагаемое в правой части (1.230) оценим с помощью (1.231) и верхней оценки (1.113) при $\vartheta = 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2} &\leqslant c_6^{1/2} \|(\widetilde{B}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_\varepsilon + I)\|_{L_2\to L_2} \\ &\times \|(B_\varepsilon + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;-1)\|_{L_2\to H^1} \\ &\times \|(B^0 + \overline{Q_0})(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant \mathfrak{C}_{11}\varrho(\zeta)\varepsilon, \end{aligned} \tag{1.232}$$

где $\mathfrak{C}_{11} = c_6^{1/2}(C_5 + C_6)(c_\flat + 2)^2 \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}$. В последнем переходе мы использовали следствие 1.4.3 при $\zeta = -1$, аналог (1.183) и (1.212).

Оценим второе слагаемое в правой части (1.230):

$$\|\mathcal{I}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2} \leqslant \varepsilon|\zeta+1| \|B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \|f^{-1}\|^2_{L_\infty} \|K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}. \tag{1.233}$$

Согласно (1.120) и (1.121) (при $\vartheta = 1$) справедлива оценка

$$\|B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant \|f\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geqslant c_\flat} \frac{\nu^{1/2}}{|\nu - \zeta|}.$$

На основании (1.220) отсюда вытекает, что

$$|\zeta+1|^{1/2} \|B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant (c_\flat + 2)^{1/2}(c_\flat + 1)^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \varrho(\zeta)^{1/2}. \tag{1.234}$$

В силу (1.225) и (1.227) выполнено

$$|\zeta+1|^{1/2}\|K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\leqslant(\alpha_1^{1/2}M_1+\widetilde{M_1})\mathfrak{C}_9\varrho(\zeta)^{1/2}. \tag{1.235}$$

Из (1.233)–(1.235) вытекает неравенство

$$\|\mathcal{I}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\leqslant\mathfrak{C}_{12}\varrho(\zeta)\varepsilon, \tag{1.236}$$

где $\mathfrak{C}_{12}=(c_\flat+2)^{1/2}(c_\flat+1)^{1/2}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}(\alpha_1^{1/2}M_1+\widetilde{M_1})\mathfrak{C}_9$.

Перейдем к оценке третьего слагаемого в правой части (1.230):

$$\|\mathcal{I}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\leqslant|\zeta+1|\|B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}\to L_2}\|[Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0}]\|_{H^1\to H^{-1}}\|(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to H^1}. \tag{1.237}$$

По двойственности (ср. (1.170)),

$$\|B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}\to L_2}=\|f^\varepsilon\widetilde{B}_\varepsilon^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon-\zeta^*I)^{-1}\|_{L_2\to H^1}. \tag{1.238}$$

Аналогично (1.171) с учетом (1.212) получаем

$$\|\mathbf{D}[f^\varepsilon]\widetilde{B}_\varepsilon^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon-\zeta^*I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant c_*^{-1/2}\|\widetilde{B}_\varepsilon(\widetilde{B}_\varepsilon-\zeta^*I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant c_*^{-1/2}(c_\flat+2)\varrho(\zeta)^{1/2}. \tag{1.239}$$

Далее, учитывая (1.219), имеем

$$\|[f^\varepsilon]\widetilde{B}_\varepsilon^{1/2}(\widetilde{B}_\varepsilon-\zeta^*I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}\varrho(\zeta)^{1/2}. \tag{1.240}$$

Теперь из (1.238)–(1.240) вытекает неравенство

$$\|B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}\to L_2}\leqslant\mathfrak{C}_{13}\varrho(\zeta)^{1/2}, \tag{1.241}$$

где $\mathfrak{C}_{13}=\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}+c_*^{-1/2}(c_\flat+2)$. Соотношения (1.74), (1.225), (1.237) и (1.241) влекут

$$\|\mathcal{I}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\leqslant C_{Q_0}\mathfrak{C}_9\mathfrak{C}_{13}|\zeta+1|^{1/2}\varrho(\zeta)\varepsilon. \tag{1.242}$$

Объединяя (1.230), (1.232), (1.236) и (1.242) и используя нижнюю оценку (1.113) (при $\vartheta=1$), приходим к (1.208) с постоянными $C_{13}=c_*^{-1/2}(\mathfrak{C}_{11}+\mathfrak{C}_{12})$, $C_{14}=c_*^{-1/2}C_{Q_0}\mathfrak{C}_9\mathfrak{C}_{13}$.

Остается проверить (1.209). Из (1.208) с учетом (1.4) следует, что

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\big)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}\\&\leqslant\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}(C_{13}+|\zeta+1|^{1/2}C_{14})\varrho(\zeta)\varepsilon.\end{aligned} \tag{1.243}$$

Действуя по аналогии с (1.180), (1.181) и (1.187), находим

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\bigl(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\bigr)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-G(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\\ &\leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}((\alpha_1 d)^{1/2}M_1+r_1)\|\mathbf{D}^2(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}\\ &+\varepsilon\|g\|_{L_\infty}(\alpha_1 d)^{1/2}\widetilde{M}_1\|\mathbf{D}(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}.\end{aligned}\tag{1.244}$$

Аналогично (1.182) и (1.183) с учетом (1.212) получаем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}^2(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}&\leqslant c_*^{-1}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{\nu\geqslant c_\flat}\frac{\nu}{|\nu-\zeta|}\\ &\leqslant c_*^{-1}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(c_\flat+2)\varrho(\zeta)^{1/2}.\end{aligned}\tag{1.245}$$

Вместе с (1.228) и (1.244) это влечет

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\bigl(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\bigr)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-G(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to L_2}\leqslant \mathfrak{C}_{14}\varepsilon\varrho(\zeta)^{1/2},\tag{1.246}$$

где $\mathfrak{C}_{14}=\|g\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\bigl(((\alpha_1 d)^{1/2}M_1+r_1)c_*^{-1}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(c_\flat+2)+d^{1/2}\widetilde{M}_1 c_*^{-1/2}(c_\flat+1)^{1/2}\bigr)$. Теперь из (1.243) и (1.246) вытекает оценка (1.209) с постоянными $C_{15}=\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{13}+\mathfrak{C}_{14}$, $C_{16}=\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{14}$. □

Отметим, что если Q_0 — постоянная матрица, то $Q_0^\varepsilon=\overline{Q_0}$ и третье слагаемое в правой части (1.230) обращается в нуль: $\mathcal{I}_3(\varepsilon;\zeta)=0$. Поэтому, проследив за доказательством теоремы 1.8.1, можно сделать следующее замечание.

Замечание 1.8.4. *Если в условиях теоремы* 1.8.1 Q_0 *— постоянная матрица, то справедливы оценки* (1.208)–(1.210) *при* $C_{14}=C_{16}=0$. *То есть члены, содержащие* $|\zeta+1|^{1/2}$, *в оценках* (1.208)–(1.210) *отсутствуют.*

1.8.2 Устранение S_ε

Выделим случаи, когда сглаживатель S_ε удается устранить.

Теорема 1.8.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.8.1.
1°. *Пусть выполнено условие* 1.7.1. *Пусть* $G_1(\varepsilon;\zeta)$ *— оператор* (1.196). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-\bigl(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\bigr)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{17}'\varrho(\zeta)\varepsilon,\\ &\|\mathbf{D}\Bigl((B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-\bigl(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\bigr)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\Bigr)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad\leqslant (C_{18}'+|\zeta+1|^{1/2}C_{19}')\varrho(\zeta)\varepsilon,\\ &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant (C_{20}'+|\zeta+1|^{1/2}C_{21}')\varrho(\zeta)\varepsilon.\end{aligned}$$

Постоянные C'_{17}, C'_{18}, C'_{19}, C'_{20}, C'_{21} *контролируются через данные задачи* (1.48), $c_\flat$ *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

2°. *Пусть выполнено условие* 1.7.3. *Пусть* $G_2(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (1.197). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\|(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-\big(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})S_\varepsilon+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C''_{17}\varrho(\zeta)\varepsilon,\\
&\|\mathbf{D}\left((B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-\big(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})S_\varepsilon+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\quad\leqslant (C''_{18}+|\zeta+1|^{1/2}C''_{19})\varrho(\zeta)\varepsilon,\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant (C''_{20}+|\zeta+1|^{1/2}C''_{21})\varrho(\zeta)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные C''_{17}, C''_{18}, C''_{19}, C''_{20} *и* C''_{21} *зависят от данных задачи* (1.48), $c_\flat$, p *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

3°. *Пусть выполнены условия* 1.7.1 *и* 1.7.3. *Пусть* $G_3(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (1.198). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *имеют место оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-\big(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{17}\varrho(\zeta)\varepsilon,\\
&\|\mathbf{D}\left((B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-\big(I+\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})+\varepsilon[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\quad\leqslant (C_{18}+|\zeta+1|^{1/2}C_{19})\varrho(\zeta)\varepsilon,\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant (C_{20}+|\zeta+1|^{1/2}C_{21})\varrho(\zeta)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21} *контролируются через данные задачи* (1.48), $c_\flat$, p, *а также* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Замечание 1.8.6. *Если в условиях теоремы* 1.8.5 Q_0 — *постоянная матрица, то выполнены оценки из теоремы* 1.8.5 *при* $C'_{19}=C'_{21}=C''_{19}=C''_{21}=C_{19}=C_{21}=0$.

Доказательство. Аппроксимации при учете корректора выводятся из теоремы 1.8.1 аналогично доказательству теоремы 1.7.6. Отличие состоит в том, что вместо (1.184), (1.185) и (1.195) нужно использовать (1.245), (1.228) и (1.223) соответственно.

Утверждения относительно потоков выводятся из аппроксимаций при учете корректора по аналогии с доказательством теоремы 1.7.9. Отличие состоит лишь в том, что вместо (1.184), (1.185) надо использовать (1.245) и (1.228) соответственно. □

1.8.3 Специальные случаи

Аналогично предложению 1.7.10 с помощью теоремы 1.8.1 выделяем случай, когда корректор обращается в нуль.

Предложение 1.8.7. *Пусть справедливы равенства* (1.33) *и* (1.204). *Тогда в условиях теоремы* 1.8.1 *при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *выполнено*

$$\|\mathbf{D}\left((B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant (C_{13}+|\zeta+1|^{1/2}C_{14})\varrho(\zeta)\varepsilon.$$

Аналогично предложению 1.7.11 из теоремы 1.8.5(3°) выводится следующее утверждение.

Предложение 1.8.8. *Пусть справедливы соотношения* (1.34) *и* (1.204). *Тогда в условиях теоремы* 1.8.1 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *верна оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C_{20} + |\zeta+1|^{1/2} C_{21})\varrho(\zeta)\varepsilon.$$

1.9 Примеры применения общих результатов

Рассматриваемые в этом параграфе примеры ранее изучались в [61] и [65].

1.9.1 Скалярный эллиптический оператор

Рассмотрим случай, когда $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, а $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция с *вещественными элементами*, $g(\mathbf{x}) > 0$, $g, g^{-1} \in L_\infty$. Тогда очевидно $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ (см. (1.4)), а оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет вид $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$.

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}),\dots,A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, — Γ-периодические вещественные функции, причем

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad j = 1,\dots,d. \tag{1.247}$$

Пусть $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — вещественные Γ-периодические функции такие, что

$$v,\mathcal{V} \in L_s(\Omega), \quad \int_\Omega v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2. \tag{1.248}$$

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{1.249}$$

Точное определение оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\langle g^\varepsilon(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u\rangle + (\varepsilon^{-1} v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon)|u|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Оператор (1.249) можно трактовать как периодический оператор Шрёдингера с метрикой g^ε, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$, содержащим сингулярное слагаемое $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon$.

Нетрудно понять (см. [61, п. 13.1]), что оператор (1.249) можно переписать в требуемом виде (1.24):

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Здесь вещественная функция $Q(\mathbf{x})$ определена равенством

$$Q(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle. \tag{1.250}$$

Комплексные функции $a_j(\mathbf{x})$ заданы выражениями

$$a_j(\mathbf{x}) = -\eta_j(\mathbf{x}) + i\gamma_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, d, \tag{1.251}$$

где $\eta_j(\mathbf{x})$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$, а функции $\gamma_j(\mathbf{x})$ определены через Γ-периодическое решение $\Phi(\mathbf{x})$ задачи $\triangle \Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$, $\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$, соотношением $\gamma_j(\mathbf{x}) = -\partial_j \Phi(\mathbf{x})$. При этом выполнено

$$v(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{d} \partial_j \gamma_j(\mathbf{x}). \tag{1.252}$$

Можно проверить, что функции (1.251) удовлетворяют условию (1.8) с подходящим показателем ρ', зависящим от ρ и s; при этом нормы $\|a_j\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируются через $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|v\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ. (Подробнее см. [61, п. 13.1]). Функция (1.250) удовлетворяет условию (1.14) с подходящим показателем $s' = \min\{s; \rho/2\}$. Таким образом, сейчас реализуется пример 1.1.4.

Пусть $Q_0(\mathbf{x})$ — положительно определенная и ограниченная Γ-периодическая функция. Согласно (1.44) введем неотрицательный оператор $B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + c_5 Q_0^\varepsilon$. Здесь $c_5 = (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$, а постоянные c_0 и c_4 отвечают оператору (1.249). Нас интересует поведение обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Исходные данные (см. (1.48)) в рассматриваемом случае сводятся к следующему набору:

$$d, \rho, s; \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|v\|_{L_s(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_s(\Omega)}, \|Q_0\|_{L_\infty}, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}; \text{ параметры решетки } \Gamma. \tag{1.253}$$

Вычислим эффективный оператор. В рассматриваемом случае Γ-периодическое решение задачи (1.25) является матрицей-строкой

$$\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x}), \quad \Psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x})),$$

где $\psi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})\,(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_j$, $j = 1,\dots,d$, — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Ясно, что функции $\psi_j(\mathbf{x})$ вещественнозначные, а элементы матрицы-строки $\Lambda(\mathbf{x})$ чисто мнимые. Согласно (1.27) $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — это $(d \times d)$-матрица-функция со столбцами $g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1,\dots,d$. В соответствии с (1.26) эффективная матрица определена равенством $g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Ясно, что $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и g^0 имеют вещественные элементы.

С учетом (1.251) и (1.252) периодическое решение задачи (1.35) представляется в виде $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$, где вещественные Γ-периодические функции $\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} &-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,\\ &-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.\end{aligned}$$

Матрица-столбец V (см. (1.36)) запишется в виде $V = V_1 + iV_2$, где V_1, V_2 — столбцы с вещественными элементами, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} V_1 &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\\ V_2 &= -|\Omega|^{-1}\int_\Omega (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{1.254}$$

Согласно (1.37) постоянная W принимает вид

$$W = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Big(\langle g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}),\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\rangle + \langle g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}),\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\rangle\Big)\,d\mathbf{x}. \tag{1.255}$$

Эффективный оператор для B_ε действует по правилу

$$B^0 u = -\operatorname{div} g^0\nabla u + 2i\langle\nabla u, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}}\rangle + (-W + \overline{Q} + c_5\overline{Q_0})u, \quad u \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

Иначе говоря,

$$B^0 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0(\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) + \mathcal{V}^0 + c_5\overline{Q_0}, \tag{1.256}$$

где

$$\mathbf{A}^0 = (g^0)^{-1}(V_1 + \overline{g\mathbf{A}}), \quad \mathcal{V}^0 = \overline{\mathcal{V}} + \overline{\langle g\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle} - \langle g^0\mathbf{A}^0,\mathbf{A}^0\rangle - W. \tag{1.257}$$

В соответствии с замечанием 1.7.5 в рассматриваемом случае выполнены условия 1.7.1 и 1.7.3, причем нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$ контролируются через данные задачи (1.253). Поэтому можно использовать корректор, не содержащий сглаживателя:

$$K^0(\varepsilon;\zeta) = ([\Lambda^\varepsilon]\mathbf{D} + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = ([\Psi^\varepsilon]\nabla + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.258}$$

Оператор (1.198) принимает вид

$$G_3(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon\mathbf{D}(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.$$

Применяя теоремы 1.4.1, 1.7.6(3°) и 1.7.9(3°), приходим к следующему результату.

Предложение 1.9.1. *Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon$ — оператор* (1.249)*, коэффициенты которого удовлетворяют условиям, сформулированным выше в п.* 1.9.1*. Пусть $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определенная и ограниченная функция, и пусть $c_5 = (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$, где постоянные c_0 и c_4 отвечают оператору* (1.249)*. Пусть $B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + c_5 Q_0^\varepsilon$, и пусть B^0 — эффективный оператор* (1.256)*, коэффициенты которого определены в соответствии с* (1.254), (1.255), (1.257)*. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, $|\zeta| \geqslant 1$. Пусть $K^0(\varepsilon;\zeta)$ — корректор* (1.258)*. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4\varepsilon c(\phi)^2|\zeta|^{-1/2}, \tag{1.259}$$

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C_8 + C_9)c(\phi)^2\varepsilon, \tag{1.260}$$

$$\|g^\varepsilon\nabla(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - \left(\widetilde{g}^\varepsilon\nabla + g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\right)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{10}c(\phi)^2\varepsilon. \tag{1.261}$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.101)*. Постоянные C_4, C_8, C_9 и C_{10} зависят только от исходных данных* (1.253).

Чтобы получить „другую” аппроксимацию оператора $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, воспользуемся теоремой 1.8.1 (старший член аппроксимации) и теоремой 1.8.5(3°).

Предложение 1.9.2. *Пусть выполнены условия предложения* 1.9.1*. Обозначим $f(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$, $f_0 = (\overline{Q_0})^{-1/2}$. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, где $c_\flat \geqslant 0$ — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_\varepsilon := f^\varepsilon B_\varepsilon f^\varepsilon$ и $\widetilde{B}^0 := f_0 B^0 f_0$. Пусть величина $\varrho(\zeta)$ определена в* (1.205)*. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{11}\varrho(\zeta)\varepsilon, \\ &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant (C_{17} + C_{18} + |\zeta+1|^{1/2}C_{19})\varrho(\zeta)\varepsilon, \end{aligned} \tag{1.262}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon\nabla(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - \left(\widetilde{g}^\varepsilon\nabla + g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\right)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant (C_{20} + |\zeta+1|^{1/2}C_{21})\varrho(\zeta)\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.263}$$

Постоянные C_{11}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20} и C_{21} зависят лишь от исходных данных (1.253) *и $c_\flat$. В случае, когда функция Q_0 постоянна, оценки* (1.262), (1.263) *выполнены при $C_{19} = C_{21} = 0$.*

1.9.2 Периодический оператор Шрёдингера

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор $\check{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^*\check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$, где $\check{g}(\mathbf{x})$ — Г-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция с вещественными элементами: $\check{g}(\mathbf{x}) > 0$, $\check{g}$, $\check{g}^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$; а $\check{v}(\mathbf{x})$ — вещественная Г-периодическая функция, такая что

$$\check{v} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2.$$

Как обычно, строгое определение оператора $\check{\mathcal{A}}$ дается через квадратичную форму

$$\check{\mathfrak{a}}[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}u, \mathbf{D}u \rangle + \check{v}(\mathbf{x})|u|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.264}$$

За счет добавления к $\check{v}(\mathbf{x})$ постоянной *будем считать, что краем спектра оператора* $\check{\mathcal{A}}$ *является точка нуль.* При этом условии оператор $\check{\mathcal{A}}$ допускает удобную факторизацию (см., например, [8, гл. 6, п. 1.1]) с помощью собственной функции оператора

$$\mathbf{D}^*\check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$$

на ячейке Ω:

$$\mathbf{D}^*\check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + \check{v}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0. \tag{1.265}$$

Это уравнение имеет Г-периодическое решение $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, определенное с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы $\omega(\mathbf{x}) > 0$ и

$$\int_\Omega \omega^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = |\Omega|. \tag{1.266}$$

Более того, решение положительно определено и ограничено: $0 < \omega_0 \leqslant \omega(\mathbf{x}) \leqslant \omega_1 < \infty$, а нормы $\|\omega\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ контролируются через $\|\check{g}\|_{L_\infty}$, $\|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}$. Функция ω является мультипликатором в $H^1(\mathbb{R}^d)$, а также в $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Подстановка $u = \omega z$ преобразует форму (1.264) к виду

$$\check{\mathfrak{a}}[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\mathbf{x}) \langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}z, \mathbf{D}z \rangle\, d\mathbf{x}, \quad u = \omega z, \quad z \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Таким образом, оператор $\check{\mathcal{A}}$ допускает факторизацию

$$\check{\mathcal{A}} = \omega^{-1}\mathbf{D}^* g \mathbf{D}\omega^{-1}, \quad g = \omega^2 \check{g}. \tag{1.267}$$

По-видимому, впервые подобный прием факторизации в задачах усреднения был использован в [21, 29].

Рассмотрим теперь оператор

$$\check{\mathcal{A}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1}. \tag{1.268}$$

В исходных терминах выражение (1.268) запишется в виде

$$\check{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* \check{g}^\varepsilon \mathbf{D} + \varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon. \tag{1.269}$$

Подчеркнем, что в (1.269) стоит большой множитель ε^{-2} при быстро осциллирующем потенциале $\check{v}^\varepsilon$. Оператор $\check{\mathcal{A}}_\varepsilon$ можно трактовать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующей метрикой $\check{g}^\varepsilon$ и сильно сингулярным потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$.

Далее, пусть, как и выше, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, удовлетворяющие условию (1.247). Пусть $\widehat{v}(\mathbf{x})$ и $\check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, причем

$$\widehat{v}, \check{\mathcal{V}} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2, \qquad \int_\Omega \widehat{v}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.270}$$

Рассмотрим оператор $\check{\mathcal{B}}_\varepsilon$, формально заданный выражением

$$\check{\mathcal{B}}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)^* \check{g}^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon. \tag{1.271}$$

(Строгое определение дается через квадратичную форму.) Оператор $\check{\mathcal{B}}_\varepsilon$ можно трактовать как оператор Шрёдингера с метрикой $\check{g}^\varepsilon$, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon$, содержащим сингулярные слагаемые $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon$.

Положим

$$v(\mathbf{x}) = \widehat{v}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}). \tag{1.272}$$

Учитывая (1.268), (1.269), убеждаемся, что справедливо тождество $\check{\mathcal{B}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathcal{B}_\varepsilon(\omega^\varepsilon)^{-1}$, где оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ задан выражением (1.249), в котором g определено в (1.267), а v и $\mathcal{V}$ — в (1.272). В силу (1.270) и свойств функции ω коэффициенты v и $\mathcal{V}$ удовлетворяют условиям (1.248).

Пусть $\check{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая вещественная функция, положительно определенная и ограниченная. Положим $Q_0(\mathbf{x}) := \check{Q}_0(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$. Обозначим $c_5 = (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$, где постоянные c_0 и c_4 отвечают оператору $\mathcal{B}_\varepsilon$, описанному выше. Тогда оператор $\check{B}_\varepsilon = \check{\mathcal{B}}_\varepsilon + c_5\check{Q}_0^\varepsilon$ связан с оператором $B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + c_5 Q_0^\varepsilon$ соотношением $\check{B}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}B_\varepsilon(\omega^\varepsilon)^{-1}$. Очевидно,

$$(\check{B}_\varepsilon - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} = \omega^\varepsilon(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\omega^\varepsilon. \tag{1.273}$$

Под исходными данными сейчас понимаем следующий набор величин

$$\begin{aligned}&d,\rho,s;\|\check{g}\|_{L_\infty},\|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty},\|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)},\|\check{v}\|_{L_s(\Omega)},\|\widehat{v}\|_{L_s(\Omega)},\|\check{\mathcal{V}}\|_{L_s(\Omega)},\\&\|\check{Q}_0\|_{L_\infty},\|\check{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty};\ \text{параметры решетки }\Gamma.\end{aligned} \tag{1.274}$$

На основании (1.273) и предложения 1.9.1 получим следующий результат.

Предложение 1.9.3. *Пусть $\check{\mathcal{B}}_\varepsilon$ — оператор* (1.271), *коэффициенты $\check{g}^\varepsilon$, $\mathbf{A}^\varepsilon$, $\widehat{v}^\varepsilon$, $\check{\mathcal{V}}^\varepsilon$ которого удовлетворяют условиям, сформулированным выше в п.* 1.9.2. *Пусть $\omega(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое положительное решение уравнения* (1.265), *удовлетворяющее условию* (1.266). *Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon$ — оператор* (1.249) *с коэффициентами $g^\varepsilon=\check{g}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$, $\mathbf{A}^\varepsilon$, $v^\varepsilon=\widehat{v}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$ и $\mathcal{V}^\varepsilon=\check{\mathcal{V}}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$. Пусть $\check{Q}_0$ — Γ-периодическая вещественная функция, положительно определенная и ограниченная, а $Q_0=\check{Q}_0\omega^2$. Положим $c_5=(c_0+c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$, где постоянные c_0 и c_4 отвечают оператору $\mathcal{B}_\varepsilon$. Пусть $B_\varepsilon=\mathcal{B}_\varepsilon+c_5Q_0^\varepsilon$, $\check{B}_\varepsilon=\check{\mathcal{B}}_\varepsilon+c_5\check{Q}_0^\varepsilon$. Пусть B^0 — эффективный оператор для B_ε, определенный в* (1.256). *Пусть $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta=|\zeta|e^{i\phi}$, $\phi\in(0,2\pi)$, $|\zeta|\geqslant 1$. Пусть $K^0(\varepsilon;\zeta)$ — корректор* (1.258) *для оператора B_ε. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|(\check{B}_\varepsilon-\zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}-\omega^\varepsilon(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_4\|\omega\|^2_{L_\infty}c(\phi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{1.275}$$

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{B}_\varepsilon-\zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}-(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon-\varepsilon K^0(\varepsilon;\zeta)\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant (C_8+C_9)\|\omega\|_{L_\infty}c(\phi)^2\varepsilon, \tag{1.276}$$

$$\|g^\varepsilon\nabla(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{B}_\varepsilon-\zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}-\left(\widetilde{g}^\varepsilon\nabla+g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\right)(B^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{10}\|\omega\|_{L_\infty}c(\phi)^2\varepsilon. \tag{1.277}$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.101). *Постоянные $C_4\|\omega\|^2_{L_\infty}$, $(C_8+C_9)\|\omega\|_{L_\infty}$ и $C_{10}\|\omega\|_{L_\infty}$ зависят только от исходных данных* (1.274).

Доказательство. Домножая операторы под знаком нормы в (1.259) с двух сторон на ω^ε и используя (1.273), приходим к оценке (1.275).

В силу (1.273) имеем $(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{B}_\varepsilon-\zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}=(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\omega^\varepsilon$. Домножая операторы под знаком нормы в (1.260) справа на ω^ε, получаем (1.276). Аналогичным образом из (1.261) выводится (1.277). □

Чтобы получить аппроксимацию оператора $(\check{B}_\varepsilon-\zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}$ в более широкой области изменения параметра ζ, используем предложение 1.9.2. По аналогии с доказательством предложения 1.9.3 нетрудно проверить следующий результат.

Предложение 1.9.4. *Пусть выполнены условия предложения* 1.9.3. *Обозначим $f(\mathbf{x})=Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$, $f_0=(\overline{Q_0})^{-1/2}$. Пусть $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, где $c_\flat\geqslant 0$ — общая нижняя грань опера-*

торов $\widetilde{B}_\varepsilon = f^\varepsilon B_\varepsilon f^\varepsilon$ *и* $\widetilde{B}^0 = f_0 B^0 f_0$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|(\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \omega^\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \omega^\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{11} \|\omega\|^2_{L_\infty} \varrho(\zeta) \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} &\|(\omega^\varepsilon)^{-1} (\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \omega^\varepsilon - \varepsilon K^0(\varepsilon;\zeta) \omega^\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant (C_{17} + C_{18} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{19}) \|\omega\|_{L_\infty} \varrho(\zeta) \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.278}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon \nabla (\omega^\varepsilon)^{-1} (\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \left(\widetilde{g}^\varepsilon \nabla + g^\varepsilon (\nabla \widetilde{\Lambda})^\varepsilon \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \omega^\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant (C_{20} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{21}) \|\omega\|_{L_\infty} \varrho(\zeta) \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.279}$$

Здесь $\varrho(\zeta)$ *— величина* (1.205). *Постоянные* $C_{11}\|\omega\|^2_{L_\infty}$, $(C_{17} + C_{18})\|\omega\|_{L_\infty}$, $C_{19}\|\omega\|_{L_\infty}$, $C_{20}\|\omega\|_{L_\infty}$ *и* $C_{21}\|\omega\|_{L_\infty}$ *контролируются через исходные данные* (1.274) *и* $c_\flat$. *В случае, если функция* Q_0 *постоянна, оценки* (1.278), (1.279) *выполнены при* $C_{19} = C_{21} = 0$.

Замечание 1.9.5. *Предложения* 1.9.3 *и* 1.9.4 *демонстрируют, что для оператора* (1.271) *характер усреднения меняется (по сравнению с результатами для оператора* (1.249)). *Наличие сильно сингулярного потенциала* $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$ *приводит к тому, что обобщенная резольвента* $(\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}$ *не имеет предела по операторной норме в* $L_2(\mathbb{R}^d)$; *она аппроксимируется через обобщенную резольвенту* $(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}$, *окаймленную быстро осциллирующими множителями* ω^ε.

Глава 2

Усреднение решений задачи Дирихле для эллиптических систем: двухпараметрические оценки погрешности

В этой главе рассматривается задача усреднения для эллиптических систем второго порядка в ограниченной области при условии Дирихле на границе. В операторных терминах, нас интересуют аппроксимации обобщенной резольвенты по $(L_2 \to L_2)$- и $(L_2 \to H^1)$-операторным нормам с двухпараметрическими (относительно малого периода и спектрального параметра) оценками погрешности. Результаты применяются к усреднению периодического оператора Шрёдингера.

2.1 Постановка задачи. Основные результаты

2.1.1 Постановка задачи

Пусть выполнены условия п. 1.1.1 –1.1.4. Пусть Q — Γ-периодическая эрмитова $(n \times n)$-матрица-функция (с комплексными элементами), удовлетворяющая условию (1.14), и пусть Γ-периодическая функция Q_0 подчинена условию (1.43). Пусть c_5 — постоянная (1.45).

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $B_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, формально заданный дифференциальным выражением

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + c_5 Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

при условии Дирихле на границе. Точное определение оператора $B_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{d}(D_j\mathbf{u}, (a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ + (Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + c_5(Q_0^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Продолжим функцию $\mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем на $\mathbb{R}^d\backslash\mathcal{O}$. Тогда $\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и на основании (1.46) выполнена оценка

$$c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_6\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.3}$$

С помощью неравенства Фридрихса отсюда получаем

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*(\operatorname{diam}\mathcal{O})^{-2}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.4}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}$ замкнута и положительно определена. Отвечающий ей самосопряженный в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оператор мы обозначаем через $B_{D,\varepsilon}$. Отметим оценку, вытекающую из (2.3) и (2.4):

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_7\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n); \quad c_7 = c_*^{-1/2}\left(1+(\operatorname{diam}\mathcal{O})^2\right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Напомним обозначение (1.118). Нам потребуется действующий в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ вспомогательный оператор $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$, порожденный квадратичной формой

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[f^\varepsilon\mathbf{u}, f^\varepsilon\mathbf{u}] \tag{2.6}$$

на области определения $\operatorname{Dom}\widetilde{\mathfrak{b}}_{D,\varepsilon} = \{\mathbf{u}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) : f^\varepsilon\mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\}$. Формально, $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^*B_{D,\varepsilon}f^\varepsilon$. Отметим равенство

$$(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} = f^\varepsilon(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(f^\varepsilon)^*. \tag{2.7}$$

Наша цель в настоящей главе — найти аппроксимацию обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ с двухпараметрическими (по ε и ζ) оценками погрешности. Считаем, что $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Иначе говоря, нас интересует поведение при малом ε обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ задачи

$$\begin{aligned}b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d}\left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + D_j(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}))\right) \\ + Q^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + c_5Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) - \zeta Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Имеем $\mathbf{u}_\varepsilon = (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}$.

Лемма 2.1.1. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— обобщенное решение задачи* (2.8). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.9}$$

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.10}$$

В операторных терминах,

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty},$$
$$\|\mathbf{D}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}.$$

Здесь $c(\phi)$ *— величина* (1.101). *Постоянная* $\mathcal{C}_1$ *определена равенством*

$$\mathcal{C}_1 = 2\alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\left(1 + \|Q_0\|_{L_\infty}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{1/2}. \tag{2.11}$$

Доказательство. В силу (1.118), (2.7) и неравенства $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} > 0$ выполнено

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|f\|_{L_\infty}^2\|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \operatorname{dist}\{\zeta;\mathbb{R}_+\}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} = c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned}$$

что доказывает (2.9).

Чтобы проверить (2.10), выпишем интегральное тождество для $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$ и воспользуемся нижней оценкой (2.3) и уже доказанным результатом (2.9). Получим

$$c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leqslant \left(c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} + c(\phi)^2|\zeta|^{-1}\|Q_0\|_{L_\infty}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^2\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2.$$

С учетом (1.18) отсюда вытекает неравенство (2.10) с постоянной (2.11). □

2.1.2 Форма $\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}$

Кроме формы (2.2) нам потребуется квадратичная форма $\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}$, заданная тем же дифференциальным выражением, но на классе $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u},b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^d(D_j\mathbf{u},(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ + (Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + c_5(Q_0^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Эта форма отвечает задаче Неймана.

Оценим форму $\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}$ сверху, учитывая (1.5):

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathcal{O}} |a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ + \int_{\mathcal{O}} |Q^\varepsilon(\mathbf{x})| |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + c_5 \|Q_0\|_{L_\infty} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\int_{\mathcal{O}} |a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \left(\int_{\mathcal{O}} |a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho \, d\mathbf{x} \right)^{2/\rho} \|\mathbf{u}\|^2_{L_q(\mathcal{O})}. \tag{2.14}$$

Здесь ρ — показатель из условия (1.8), $q = \infty$ при $d = 1$, $q = 2\rho/(\rho - 2)$ при $d \geqslant 2$. Покроем область $\mathcal{O}$ объединением ячеек решетки $\varepsilon\Gamma$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, имеющих непустое пересечение с $\mathcal{O}$. Через N_ε обозначим количество ячеек в этом покрытии. Ясно, что это объединение ячеек содержится в области $\widetilde{\mathcal{O}}$, представляющей собой $2r_1$-окрестность области $\mathcal{O}$, где $2r_1 = \operatorname{diam} \Omega$. Поэтому количество ячеек N_ε можно оценить сверху: $N_\varepsilon \leqslant \mathfrak{c}_1 \varepsilon^{-d}$, где величина $\mathfrak{c}_1$ зависит только от области $\mathcal{O}$ и от параметров решетки Γ. Имеем

$$\int_{\mathcal{O}} |a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho \, d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1 \varepsilon^{-d} \int_{\varepsilon\Omega} |a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho \, d\mathbf{x} = \mathfrak{c}_1 \|a_j\|^\rho_{L_\rho(\Omega)}. \tag{2.15}$$

Теперь из (2.14) и (2.15) получаем

$$\int_{\mathcal{O}} |a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1^{2/\rho} \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)} \|\mathbf{u}\|^2_{L_q(\mathcal{O})}. \tag{2.16}$$

В силу непрерывности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \hookrightarrow L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\|\mathbf{u}\|_{L_q(\mathcal{O})} \leqslant C(q,\mathcal{O}) \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \tag{2.17}$$

где $C(q,\mathcal{O})$ — норма соответствующего оператора вложения. Из (2.16) и (2.17) следует, что

$$\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathcal{O}} |a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1^{2/\rho} C(q,\mathcal{O})^2 \widehat{C}_a^2 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.18}$$

Здесь

$$\widehat{C}_a^2 = \sum_{j=1}^{d} \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)}.$$

Аналогично (2.14)–(2.18) с учетом (1.14) получаем

$$\int_{\mathcal{O}} |Q^\varepsilon(\mathbf{x})| |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1^{1/s} \|Q\|_{L_s(\Omega)} C(\check{q},\mathcal{O})^2 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \tag{2.19}$$

где $\check{q} = \infty$ при $d = 1$, $\check{q} = 2s/(s-1)$ при $d \geqslant 2$.

Из (2.13), (2.18) и (2.19) вытекает оценка

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.20}$$

где $\mathfrak{c}_2 = 1 + d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} + \mathfrak{c}_1^{2/\rho} C(q,\mathcal{O})^2 \widehat{C}_a^2 + \mathfrak{c}_1^{1/s} \|Q\|_{L_s(\Omega)} C(\check{q},\mathcal{O})^2 + c_5 \|Q_0\|_{L_\infty}$.

2.1.3 Усредненная задача

В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^d (\overline{a_j} D_j \mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} - 2\mathrm{Re}\,(V\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ - (W\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + (\overline{Q}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + c_5(\overline{Q_0}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{2.21}$$

С помощью (1.58), продолжения функции $\mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$ и неравенства Фридрихса несложно убедиться, что форма (2.21) удовлетворяет оценкам

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant C_L \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.22}$$

$$\mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_* (\mathrm{diam}\,\mathcal{O})^{-2} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.23}$$

Отвечающий форме $\mathfrak{b}_D^0$ самосопряженный в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оператор обозначим через B_D^0. Из (2.22) и (2.23) вытекает, что

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_7 \|(B_D^0)^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.24}$$

Здесь постоянная c_7 — та же, что и в (2.5).

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ оператор B_D^0 задается дифференциальным выражением

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j - W + \overline{Q} + c_5 \overline{Q_0} \tag{2.25}$$

на области определения $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом

$$\|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}. \tag{2.26}$$

Здесь постоянная $\widehat{c}$ зависит лишь от исходных данных (1.48) и от области $\mathcal{O}$. Для оправдания этого факта сошлемся на теоремы о повышении гладкости решений сильно эллиптических систем (см. [34, глава 4]).

Замечание 2.1.2. *Вместо условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ можно было бы наложить неявное требование: ограниченная область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей такова, что справедли-*

ва оценка (2.26)*. Для такой области результаты главы* 2 *остаются в силе. В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на* $\partial\mathcal{O}$*, обеспечивающие справедливость оценки* (2.26)*, можно найти в* [30] *и* [32, гл. 7] (*в частности, достаточно, чтобы* $\partial\mathcal{O} \in C^\alpha$*,* $\alpha > 3/2$).

Напомним обозначение $f_0^{-2} = \overline{Q_0}$. В ходе дальнейшего изложения нам потребуется оператор $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$. Отметим равенство

$$(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = f_0(\widetilde{B}_D^0 - \zeta I)^{-1} f_0. \tag{2.27}$$

„Усредненная задача" для задачи (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} &b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - b(\mathbf{D})^* V\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - V^* b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ &- W\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \overline{Q}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + c_5\overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \zeta\overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Тогда $\mathbf{u}_0 = (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{F}$.

Лемма 2.1.3. *Для решения* $\mathbf{u}_0$ *задачи* (2.28) *при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ &\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ &\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 c(\phi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Здесь постоянная $\mathcal{C}_1$ *— та же, что в лемме* 2.1.1, $\mathcal{C}_2 = \widehat{c}\|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$. *В операторных терминах,*

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{2.29}$$

$$\|\mathbf{D}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \tag{2.30}$$

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 c(\phi). \tag{2.31}$$

Доказательство. Оценки (2.29), (2.30) устанавливаются аналогично оценкам из леммы 2.1.1. Проверим (2.31). Очевидно,

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\|B_D^0(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.32}$$

В силу (2.27) имеем $B_D^0(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = B_D^0 f_0(\widetilde{B}_D^0 - \zeta I)^{-1} f_0 = f_0^{-1}\widetilde{B}_D^0(\widetilde{B}_D^0 - \zeta I)^{-1} f_0$. Тогда

$$\|B_D^0(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant |f_0^{-1}||f_0| \sup_{x\geqslant 0}\frac{x}{|x-\zeta|} \leqslant \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} c(\phi). \tag{2.33}$$

Мы учли (1.119). Теперь из (2.26), (2.32) и (2.33) вытекает оценка (2.31). $\square$

2.1.4 Формулировка результатов

Выберем числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in (0,1]$ согласно следующему условию.

Условие 2.1.4. *Пусть число* $\varepsilon_0 \in (0,1]$ *таково, что полоску* $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0} = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon_0\big\}$ *можно покрыть конечным числом открытых множеств, допускающих диффеоморфизмы класса* $C^{0,1}$*, распрямляющие границу* $\partial\mathcal{O}$*. Положим* $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$*, где* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Ясно, что ε_1 зависит только от области $\mathcal{O}$ и от параметров решетки Γ. Отметим, что для справедливости условия 2.1.4 достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O}$ была липшицевой. Мы наложили более ограничительное условие $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$, чтобы гарантировать справедливость оценки (2.26).

Сформулируем основные результаты главы 2.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$*. Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (2.8) *при* $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$*. Пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение „усредненной" задачи* (2.28)*. Пусть число* ε_1 *выбрано из условия* 2.1.4*. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{22} c(\phi)^5 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь $c(\phi)$ *— величина* (1.101)*; постоянная* C_{22} *зависит только от исходных данных* (1.48) *и от области* $\mathcal{O}$*. В операторных терминах,*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{22} c(\phi)^5 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}. \tag{2.34}$$

Чтобы аппроксимировать решение в классе Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, введем корректор. Для этого фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^l(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad l \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.35}$$

Такой „универсальный" оператор продолжения существует для любой ограниченной области с липшицевой границей (см. [57] или [53]). При этом

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^l(\mathcal{O})\to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_\mathcal{O}^{(l)}, \tag{2.36}$$

где постоянная $C_\mathcal{O}^{(l)}$ зависит лишь от l и от области $\mathcal{O}$. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Положим

$$K_D(\varepsilon;\zeta) = R_\mathcal{O}\big([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big) S_\varepsilon P_\mathcal{O} (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{2.37}$$

Непрерывность оператора $K_D(\varepsilon;\zeta) : L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ проверяется аналогично непрерывности оператора (1.103).

Положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0$. Через $\mathbf{v}_\varepsilon$ обозначим первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (2.8):

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0, \tag{2.38}$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}. \tag{2.39}$$

Т. е. $\mathbf{v}_\varepsilon = (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}$, где $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — оператор (2.37).

Теорема 2.1.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.5. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ-*периодические решения задач* (1.25) *и* (1.35) *соответственно,* S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.82), *и пусть* $P_{\mathcal{O}}$ — *оператор продолжения* (2.35). *Положим* $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0$. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (2.38), (2.39). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \bigl(C_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{24}c(\phi)^4\varepsilon\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.40}$$

В операторных терминах,

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{24}c(\phi)^4\varepsilon, \tag{2.41}$$

где $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (2.37). *Пусть матрица-функция* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *определена в* (1.27). *Для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \bigl(\widetilde{C}_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{24}c(\phi)^4\varepsilon\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.42}$$

В операторных терминах,

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{24}c(\phi)^4\varepsilon. \tag{2.43}$$

Здесь $G_D(\varepsilon;\zeta) := \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}$. *Постоянные* C_{23}, C_{24}, $\widetilde{C}_{23}$ *и* $\widetilde{C}_{24}$ *зависят только от исходных данных* (1.48) *и от области* $\mathcal{O}$.

Замечание 2.1.7. *При фиксированном* ζ *оценка* (2.34) *имеет точный порядок* $O(\varepsilon)$. *Порядок* $O(\varepsilon^{1/2})$ *оценок* (2.41), (2.43) *хуже из-за влияния границы области. О наличии погранслоя свидетельствует тот факт, что в строго внутренний подобласти можно установить аналоги оценок* (2.41), (2.43) *порядка* $O(\varepsilon)$, *см.* [44, §8].

Первое приближение $\mathbf{v}_\varepsilon$ к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ не удовлетворяет условию Дирихле на $\partial\mathcal{O}$: $\mathbf{v}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)|_{\partial\mathcal{O}}$. Рассмотрим „поправку" $\mathbf{w}_\varepsilon$ — решение задачи

$$B_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon = 0 \text{ в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{w}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)|_{\partial\mathcal{O}}. \tag{2.44}$$

Уравнение понимается в слабом смысле — как интегральное тождество для функции $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$:

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{w}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.45}$$

Поправку $\mathbf{w}_\varepsilon$ часто называют „корректором типа пограничного слоя". Допуская некоторую вольность, наряду с $\mathbf{w}_\varepsilon$ будем пользоваться обозначением $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot;\zeta)$ для решения задачи (2.44). Введем оператор, переводящий $\mathbf{F}$ в $\mathbf{w}_\varepsilon$:

$$\varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta) : L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \ni \mathbf{F} \to \mathbf{w}_\varepsilon(\cdot;\zeta) \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.46}$$

Найдем более явное выражение для оператора $W_D(\varepsilon;\zeta)$. Ясно, что функция

$$\mathbf{r}_\varepsilon(\mathbf{x};\zeta) = \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x};\zeta) - \varepsilon\big(K_D(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}\big)(\mathbf{x}) \tag{2.47}$$

лежит в $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и удовлетворяет тождеству

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{r}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon \mathbf{r}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = \varepsilon\mathcal{I}(\varepsilon;\zeta)[\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}], \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.48}$$

где

$$\mathcal{I}(\varepsilon;\zeta)[\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}] = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[K_D(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}] + \zeta(Q_0^\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.49}$$

При фиксированном $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ равенство (2.49) задает антилинейный непрерывный функционал над $\boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Этот функционал можно отождествить с элементом из $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Этот элемент зависит от $\mathbf{F}$ линейно, обозначим его $T(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}$. Таким образом, равенство

$$\mathcal{I}(\varepsilon;\zeta)[\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}] = (T(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.50}$$

(справа подразумевается распространение скалярного произведения в L_2 на пары из $H^{-1} \times H_0^1$) корректно определяет линейный непрерывный оператор $T(\varepsilon;\zeta) : L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Теперь согласно (2.48) и (2.50) можно записать

$$\mathbf{r}_\varepsilon = \varepsilon(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} T(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}, \tag{2.51}$$

где обобщенная резольвента распространена до непрерывного оператора, действующего из $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

В силу (2.47) и (2.51) выполнено

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot;\zeta) = \varepsilon\big(K_D(\varepsilon;\zeta) + (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} T(\varepsilon;\zeta)\big)\mathbf{F},$$

а тогда (см. (2.46))

$$W_D(\varepsilon;\zeta) = K_D(\varepsilon;\zeta) + (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} T(\varepsilon;\zeta). \tag{2.52}$$

Следующая теорема показывает, что с учетом поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ для решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ справедлива аппроксимация в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ с оценкой погрешности точного порядка $O(\varepsilon)$.

Теорема 2.1.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.6. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *— решение задачи* (2.44). *Пусть* $W_D(\varepsilon;\zeta)$ *— оператор* (2.52). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{25} c(\phi)^4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.53}$$

В операторных терминах,

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta) + \varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{25} c(\phi)^4 \varepsilon. \tag{2.54}$$

Постоянная C_{25} *зависит только от исходных данных* (1.48) *и от области* $\mathcal{O}$.

2.2 Вспомогательные утверждения

2.2.1 Оценки в окрестности границы

В настоящем пункте приводятся вспомогательные утверждения, связанные с оценками интегралов по узкой окрестности $\partial\mathcal{O}$.

Лемма 2.2.1. *Пусть справедливо условие* 2.1.4. *Обозначим* $\Upsilon_\varepsilon = (\partial\mathcal{O})_\varepsilon \cap \mathcal{O}$. *Тогда имеют место следующие утверждения:*
1°. *Для любой функции* $u \in H^1(\mathcal{O})$ *справедлива оценка*

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon} |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \|u\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

2°. *Для любой функции* $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Постоянная β *зависит только от области* $\mathcal{O}$.

Лемма 2.2.2. *Пусть выполнено условие* 2.1.4. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$, *такая что* $f \in L_2(\Omega)$. *Пусть* S_ε — *оператор* (1.82). *Обозначим* $\beta_* = \beta(1 + r_1)$, *где* $2r_1 = \operatorname{diam} \Omega$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ *справедлива оценка*

$$\int_{(\partial \mathcal{O})_\varepsilon} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Для области $\mathcal{O}$ класса C^1 утверждения лемм 2.2.1 и 2.2.2 установлены в [52, §5]. Справедливость этих результатов в случае, когда область $\mathcal{O}$ удовлетворяет менее ограничительному условию 2.1.4, отмечена в [66, леммы 3.5 и 3.6].

2.2.2 Лемма о $Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}$

Доказательство следующего утверждения совершенно аналогично доказательству леммы 1.2.7.

Лемма 2.2.3. *Пусть* $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая* $(n \times n)$*-матрица-функция, причем* $Q_0 \in L_\infty$, *и пусть* $\overline{Q_0} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega Q_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. *Тогда оператор* $[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]$ *непрерывен из* $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ *в* $H^{-1}(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ *и справедлива оценка*

$$\|[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]\|_{H^1(\mathcal{O}) \to H^{-1}(\mathcal{O})} \leqslant C_{Q_0} \varepsilon. \tag{2.55}$$

Постоянная C_{Q_0} *зависит от* d, $\|Q_0\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

2.3 Доказательство теоремы 2.1.8. Начало доказательства теорем 2.1.5 и 2.1.6

В этом разделе мы докажем теорему 2.1.8 и сведем доказательства теорем 2.1.5 и 2.1.6 к оценке поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$.

2.3.1 Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в $\mathbb{R}^d$

В силу леммы 2.1.3 и (2.36) с учетом $|\zeta| \geqslant 1$ имеем

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant k_1 c(\phi) |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad k_1 = C_{\mathcal{O}}^{(0)} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{2.56}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant k_2 c(\phi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad k_2 = C_{\mathcal{O}}^{(1)} \left(\mathcal{C}_1 + \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \right), \tag{2.57}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant k_3 c(\phi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad k_3 = C_{\mathcal{O}}^{(2)} \mathcal{C}_2. \tag{2.58}$$

Положим

$$\widetilde{\mathbf{F}} = (B^0 - \zeta \overline{Q_0}) \widetilde{\mathbf{u}}_0. \tag{2.59}$$

Тогда $\widetilde{\mathbf{F}} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\widetilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$. Из (1.52), (2.56) и (2.58) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_L\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + |\zeta||\overline{Q_0}|\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\widetilde{F}}c(\phi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ &C_{\widetilde{F}} = k_3C_L + k_1\|Q_0\|_{L_\infty}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — решение уравнения в $\mathbb{R}^d$:

$$B_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}}, \tag{2.61}$$

т. е. $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\widetilde{\mathbf{F}}$. Объединяя (2.59)–(2.61) и применяя теоремы 1.4.1 и 1.4.2, находим, что при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4C_{\widetilde{F}}\varepsilon c(\phi)^3|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ &\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_5C_{\widetilde{F}}c(\phi)^3\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (2.62) \\ &\|\mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_6C_{\widetilde{F}}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \qquad (2.63) \end{aligned}$$

Теперь из (2.62) и (2.63) с учетом $|\zeta| \geqslant 1$ следует, что

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C_5 + C_6)C_{\widetilde{F}}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.64}$$

2.3.2 Доказательство теоремы 2.1.8

Обозначим $\mathbf{V}_\varepsilon := \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$. С учетом (2.8) и (2.44), (2.45) функция $\mathbf{V}_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} &\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{v}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] + \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= (\mathbf{F},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{v}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] + \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Продолжим функцию $\boldsymbol{\eta}$ нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$, сохраняя то же обозначение. Тогда $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Вспоминая, что функция $\widetilde{\mathbf{F}}$ является продолжением функции $\mathbf{F}$, и применяя (2.61), находим

$$(\mathbf{F},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\widetilde{\mathbf{F}},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} = b_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Далее, так как функция $\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ — продолжение функции $\mathbf{v}_\varepsilon$, то

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{v}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = b_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Обозначим

$$I_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] := b_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} - b_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] + \zeta(Q_0^\varepsilon\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad \boldsymbol{\eta}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{2.66}$$

Тогда тождество (2.65) принимает вид

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = I_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}], \quad \boldsymbol{\eta}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.67}$$

Оценим величину (2.66) по модулю, учитывая (1.46):

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant |b_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon-\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}]| + |\zeta||(Q_0^\varepsilon(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon-\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon),\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}|\\ &\leqslant c_6\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon-\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} + |\zeta|\|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon-\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Применим (2.62) и (2.64):

$$|I_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant C_{26}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} + C_{27}c(\phi)^3\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.68}$$

где $C_{26} = c_6(C_5+C_6)C_{\widetilde{F}}$, $C_{27} = \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}C_5C_{\widetilde{F}}$.

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ в (2.67), возьмем мнимую часть и воспользуемся оценкой (2.68):

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im}\zeta|(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} = |\operatorname{Im} I_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon]| &\leqslant C_{26}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ C_{27}|\zeta|^{1/2}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.69}$$

При $\operatorname{Re}\zeta\geqslant 0$ (а тогда $\operatorname{Im}\zeta\neq 0$) отсюда выводим

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Im}\zeta|(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{26}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+\frac{1}{2}|\operatorname{Im}\zeta|(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + \frac{1}{2}C_{27}^2\frac{|\zeta|}{|\operatorname{Im}\zeta|}c(\phi)^6\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Следовательно, при $\operatorname{Re}\zeta\geqslant 0$ выполнено

$$(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{26}c(\phi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{27}^2c(\phi)^8|\zeta|^{-1}\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta\geqslant 0. \tag{2.70}$$

Если $\operatorname{Re}\zeta<0$, то в равенстве (2.67) при $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{V}_\varepsilon$ возьмем вещественную часть. При рассматриваемых значениях ζ имеем $c(\phi)=1$ и с учетом (2.68) получаем

$$\begin{aligned}|\operatorname{Re}\zeta|(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon] - \operatorname{Re}\zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant C_{26}\varepsilon\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{27}|\zeta|^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.71}$$

Складывая (2.69) и (2.71), приходим к неравенству

$$|\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{26}\varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + 2C_{27}|\zeta|^{1/2}\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta < 0.$$

Тогда

$$|\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{26}\varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \frac{1}{2}|\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + 2C_{27}^2\varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta < 0.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re}\zeta < 0$ справедлива оценка

$$(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4C_{26}\varepsilon|\zeta|^{-1} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + 4C_{27}^2\varepsilon^2|\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В итоге отсюда и из (2.70) следует, что при всех рассматриваемых значениях ζ выполнено

$$(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4C_{26}c(\phi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + 4C_{27}^2 c(\phi)^8\varepsilon^2|\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.72}$$

Теперь из (2.67) при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$, (2.68) и (2.72) получаем

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] &\leqslant |I_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon]| + |\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant C_{26}c(\phi)^3\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&+ C_{27}|\zeta|^{1/2}c(\phi)^3\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant 7C_{26}c(\phi)^4\varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \frac{13}{2}C_{27}^2 c(\phi)^8\varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

С учетом (2.5) отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant 7c_7^2 C_{26}c(\phi)^4\varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \frac{13}{2}c_7^2 C_{27}^2 c(\phi)^8\varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} + \frac{49}{2}c_7^4 C_{26}^2 c(\phi)^8\varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \frac{13}{2}c_7^2 C_{27}^2 c(\phi)^8\varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{25}^2 c(\phi)^8\varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad C_{25}^2 = 49c_7^4 C_{26}^2 + 13c_7^2 C_{27}^2,$$

что влечет (2.53). $\square$

Кроме оценки (2.53) для H^1-нормы функции $\mathbf{V}_\varepsilon$ нам потребуется также оценка L_2-нормы этой функции.

Лемма 2.3.1. *В условиях теоремы* 2.1.8 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{28}c(\phi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.73}$$

Постоянная C_{28} *зависит только от исходных данных* (1.48) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Из (2.53) и (2.72) получаем

$$(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4(C_{25}C_{26} + C_{27}^2)c(\phi)^8\varepsilon^2|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда вытекает (2.73) с постоянной $C_{28} = 2\|Q_0^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}(C_{25}C_{26} + C_{27}^2)^{1/2}$. □

2.3.3 Выводы

1) Из (2.53) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{25}c(\phi)^4\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{2.74}$$

Поэтому для доказательства оценки (2.40) (главного результата теоремы 2.1.6) достаточно оценить $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$ подходящим образом.
2) Из (2.73) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{28}c(\phi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.75}$$

Имеем

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.76}$$

С учетом (1.4) из (1.94), (1.144) и (2.76) получаем

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon M_1\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon\widetilde{M}_1\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon(M_1^2\alpha_1 + \widetilde{M}_1^2)^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

В силу (2.57) отсюда следует, что

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon(M_1^2\alpha_1 + \widetilde{M}_1^2)^{1/2}k_2c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.77}$$

Теперь неравенства (2.75) и (2.77) влекут

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{29}\varepsilon c(\phi)^4|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.78}$$

где $C_{29} = C_{28} + (M_1^2\alpha_1 + \widetilde{M}_1^2)^{1/2}k_2$. Таким образом, доказательство теоремы 2.1.5 сводится к подходящей оценке для $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$.

2.4 Доказательство $(L_2 \to H^1)$-теоремы

2.4.1 Локализация вблизи границы

Напомним обозначение

$$(\partial\mathcal{O})_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\}.$$

Фиксируем такую гладкую срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$, что

$$\begin{gathered} \theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \operatorname{supp}\theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon, 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1, \\ \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O};\ \varepsilon|\nabla\theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \mu = \mathrm{Const}. \end{gathered} \tag{2.79}$$

Постоянная μ зависит только от d и от области $\mathcal{O}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ функцию

$$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \left(\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x})\right). \tag{2.80}$$

Лемма 2.4.1. *Пусть $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ — функция* (2.80). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)\left(C_{30}|\zeta|^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{31}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\right). \tag{2.81}$$

Постоянные C_{30} и C_{31} зависят только от исходных данных (1.48) *и от области $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Имеем $\mathbf{w}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}}$. Поэтому функция $\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ лежит в $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. С учетом (2.45) справедливо тождество

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] + \zeta(Q_0^\varepsilon\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.82}$$

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon$ в равенство (2.82) и возьмем мнимую часть:

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Im}\zeta|(Q_0^\varepsilon\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon]| + |\zeta||(Q_0^\varepsilon\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}| \\ &\leqslant \mathfrak{c}_2\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + |\zeta|\|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Мы учли (2.20). При $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$ (тогда $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$) отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}\zeta|(Q_0^\varepsilon\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + \frac{1}{2}\frac{|\zeta|^2}{|\operatorname{Im}\zeta|}\|Q_0\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ + \frac{1}{2}|\operatorname{Im}\zeta|\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(Q_0^\varepsilon\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathfrak{c}_2|\zeta|^{-1}c(\phi)\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + \|Q_0\|_{L_\infty}c(\phi)^2\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \geqslant 0.$$

Если $\operatorname{Re}\zeta < 0$, то возьмем вещественную часть равенства и получим

$$|\operatorname{Re}\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + |\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (2.84)$$

Сложим (2.83) и (2.84):

$$\begin{aligned}|\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2\mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 2|\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant 2\mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + \frac{1}{2}|\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + 2|\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4\mathfrak{c}_2 |\zeta|^{-1} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 4\|Q_0\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta < 0.$$

В итоге при всех рассматриваемых значениях ζ получаем

$$(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4\mathfrak{c}_2 |\zeta|^{-1} c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 4\|Q_0\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Теперь из (2.82) при $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon$ с учетом (2.20) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon] &\leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad + |\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 2|\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant 9\mathfrak{c}_2 c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 9|\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

В силу (2.5) имеем

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant c_7^2 \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon] \\ &\leqslant 9\mathfrak{c}_2 c_7^2 c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 9|\zeta| c_7^2 \|Q_0\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} + \frac{81}{2} \mathfrak{c}_2^2 c_7^4 c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} + 9c_7^2 \|Q_0\|_{L_\infty} |\zeta| c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 9\mathfrak{c}_2 c_7^2 c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 3\sqrt{2} c_7 \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} |\zeta|^{1/2} c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вспоминая, что $\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$, получаем (2.81) с постоянными $C_{31} = 9\mathfrak{c}_2 c_7^2 + 1$, $C_{30} = 3\sqrt{2} c_7 \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}$. $\square$

2.4.2 Оценки функции (2.80)

Лемма 2.4.2. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ *— функция* (2.80). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *справедливы оценки*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{32}\varepsilon c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.85}$$

$$\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant c(\phi)\left(C_{33}|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2}+C_{34}\varepsilon\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.86}$$

Постоянные C_{32}, C_{33} *и* C_{34} *зависят только от исходных данных* (1.48) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Начнем с проверки оценки (2.85). Учитывая (1.4), (1.94), (1.144), (2.79), (2.80), находим:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}&\leqslant\varepsilon\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant\varepsilon M_1\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon\widetilde{M}_1\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.56), (2.57) получаем оценку (2.85) с постоянной $C_{32}=M_1\alpha_1^{1/2}k_2+\widetilde{M}_1k_1$.

Перейдем к доказательству оценки (2.86). Рассмотрим производные:

$$\begin{aligned}\partial_j\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon&=\varepsilon(\partial_j\theta_\varepsilon)(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0)+\theta_\varepsilon\left((\partial_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0+(\partial_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)\\&+\varepsilon\theta_\varepsilon(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}&\leqslant3\varepsilon^2\|(\nabla\theta_\varepsilon)(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&+3\big\|\theta_\varepsilon\big((\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0+(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&+3\varepsilon^2\sum_{j=1}^d\|\theta_\varepsilon(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{2.87}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (2.87) через $J_1(\varepsilon)$, $J_2(\varepsilon)$, $J_3(\varepsilon)$. Для оценки $J_1(\varepsilon)$ воспользуемся (2.79) и леммой 2.2.2:

$$\begin{aligned}J_1(\varepsilon)&\leqslant3\mu^2\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2\,d\mathbf{x}\\&\leqslant6\mu^2\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2\,d\mathbf{x}+\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)\\&\leqslant6\mu^2\beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&+6\mu^2\beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned}\tag{2.88}$$

Согласно (1.41) выполнено $|\Omega|^{-1/2}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{M}_1$, где $\widetilde{M}_1$ — постоянная из (1.93). Отсюда и из (1.4), (1.29), (2.88) получаем

$$J_1(\varepsilon) \leqslant 6\mu^2\beta_*\varepsilon \left(M_1^2\alpha_1\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{M}_1^2\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Применяя (2.56)–(2.58) и учитывая, что $|\zeta| \geqslant 1$, находим

$$J_1(\varepsilon) \leqslant \kappa_1 c(\phi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{2.89}$$

Здесь $\kappa_1 = 6\mu^2\beta_* k_2(M_1^2\alpha_1 k_3 + \widetilde{M}_1^2 k_1)$.

В силу (1.42) справедлива оценка $|\Omega|^{-1/2}\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{M}_2$, где $\widetilde{M}_2$ — постоянная из (1.149). Теперь член $J_2(\varepsilon)$ оценивается аналогично на основании леммы 2.2.2 и (1.4), (1.30), (2.56)–(2.58), (2.79). В результате получаем

$$J_2(\varepsilon) \leqslant \kappa_2 c(\phi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{2.90}$$

где $\kappa_2 = 6\beta_* k_2(M_2^2 k_3\alpha_1 + \widetilde{M}_2^2 k_1)$.

Наконец, член $J_3(\varepsilon)$ оценим на основании (1.4), (1.94), (1.144) и (2.79):

$$\begin{aligned} J_3(\varepsilon) &\leqslant 6\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{d} \left(\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right) \\ &\leqslant 6\varepsilon^2 \left(M_1^2\alpha_1\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{M}_1^2\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.57), (2.58) с учетом $|\zeta| \geqslant 1$ получаем

$$J_3(\varepsilon) \leqslant \kappa_3\varepsilon^2 c(\phi)^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{2.91}$$

где $\kappa_3 = 6M_1^2\alpha_1 k_3^2 + 6\widetilde{M}_1^2 k_2^2$. Теперь из (2.87), (2.89), (2.90), (2.91) вытекает оценка (2.86) с постоянными $C_{33} = (\kappa_1 + \kappa_2)^{1/2}$, $C_{34} = \kappa_3^{1/2}$. □

2.4.3 Завершение доказательства теоремы 2.1.6

Из лемм 2.4.1 и 2.4.2 вытекает оценка

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)^2 \left(C_{31}C_{33}|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} + (C_{30}C_{32} + C_{31}C_{32} + C_{31}C_{34})\varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

справедливая при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. Вместе с (2.74) это влечет (2.40) с постоянными $C_{23} = C_{31}C_{33}$, $C_{24} = C_{25} + C_{30}C_{32} + C_{31}C_{32} + C_{31}C_{34}$.

Остается проверить (2.42). Из (2.40) с учетом (1.5) следует, что

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}(C_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{24}c(\phi)^4\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.92}$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0 \\
+ \varepsilon \sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l (\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0).
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

Четвертый член в правой части (2.93) оценим на основании (1.5), (1.94) и (1.144):

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \varepsilon \sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l (\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0) \Big\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \left(M_1 \sum_{l=1}^{d} \|b(\mathbf{D}) D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{M}_1 \sum_{l=1}^{d} \|D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right).
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

С учетом (1.4), (2.57), (2.58) и условия $|\zeta| \geqslant 1$ отсюда получаем оценку

$$
\Big\| \varepsilon \sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l (\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0) \Big\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{35} c(\phi) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \tag{2.95}
$$

с постоянной $C_{35} = \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \big(M_1 \alpha_1^{1/2} k_3 + \widetilde{M}_1 k_2 \big)$.

Далее, в силу предложения 1.3.1 выполнено

$$
\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.96}
$$

С учетом (1.4) и (2.58) отсюда следует, что

$$
\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{36} \varepsilon c(\phi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.97}
$$

где $C_{36} = r_1 \alpha_1^{1/2} k_3 \|g\|_{L_\infty}$. Теперь из (1.27), (2.92), (2.93), (2.95) и (2.97) вытекает неравенство (2.42) с постоянными $\widetilde{C}_{23} = (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{23}$, $\widetilde{C}_{24} = (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{24} + C_{35} + C_{36}$.

Теорема 2.1.6 полностью доказана.

2.5 Доказательство $(L_2 \to L_2)$-теоремы

2.5.1 Оценка поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ по норме в L_2

Лемма 2.5.1. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *— решение задачи* (2.44). *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 2.1.4. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$
\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)^5 (C_{37} \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + C_{38} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.98}
$$

Постоянные C_{37} *и* C_{38} *зависят только от исходных данных* (1.48) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Подставим в тождество (2.82) для функции $\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ в качестве $\boldsymbol{\eta}$ функцию $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = (B_{D,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$, где $\boldsymbol{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда левая часть (2.82) запишется в виде

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_\varepsilon] - \zeta(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} = (\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon,\boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_\varepsilon] + \zeta(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.99}$$

Для аппроксимации $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ по норме в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ воспользуемся уже доказанной теоремой 2.1.6. Положим $\boldsymbol{\eta}_0 = (B_D^0 - \zeta^*\overline{Q_0})^{-1}\boldsymbol{\Phi}$, $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\eta}_0$. Первое приближение к $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ — это функция $\boldsymbol{\eta}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$.

Перепишем тождество (2.99) в следующем виде:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} &= -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 - \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0] \\ &- \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_0] - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0] + \zeta(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.100}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части этого равенства через $\mathcal{I}_j(\varepsilon)$, $j = 1,2,3,4$.

Член $\mathcal{I}_4(\varepsilon)$ оценивается на основании лемм 2.1.1 и 2.4.2:

$$|\mathcal{I}_4(\varepsilon)| \leqslant C_{39} c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/2}\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad C_{39} = C_{32}\|Q_0\|_{L_\infty}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{2.101}$$

Оценим $\mathcal{I}_1(\varepsilon)$ с помощью (2.20):

$$|\mathcal{I}_1(\varepsilon)| \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 - \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Отсюда на основании теоремы 2.1.6 и леммы 2.4.2 получаем

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_1(\varepsilon)| &\leqslant \mathfrak{c}_2 c(\phi)\left(C_{33}|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} + (C_{32}+C_{34})\varepsilon\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\times \left(C_{23} c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{24} c(\phi)^4 \varepsilon\right)\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\mathcal{I}_1(\varepsilon)| \leqslant c(\phi)^5\left(\gamma_1|\zeta|^{-1/2}\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.102}$$

где $\gamma_1 = \mathfrak{c}_2(C_{23}(C_{32}+C_{33}+C_{34}) + C_{24}C_{33})$, $\gamma_2 = \mathfrak{c}_2\left(C_{23}(C_{32}+C_{34}) + C_{24}(C_{32}+C_{33}+C_{34})\right)$.

Далее, имеем

$$\mathcal{I}_2(\varepsilon) = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_0] = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0] - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}_0 - S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]. \tag{2.103}$$

В силу предложения 1.3.1 и оценки (2.58) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ выполнено

$$\|\boldsymbol{\eta}_0 - S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 - S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 k_3 c(\phi) \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда с помощью (2.20) и леммы 2.4.2 выводим неравенство

$$|\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_0 - S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \leqslant \varepsilon c(\phi)^2 \mathfrak{c}_2 r_1 k_3 \left(C_{33} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + (C_{32} + C_{34})\varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_0 - S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \leqslant c(\phi)^2 \left(\gamma_3 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \gamma_4 \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.104}$$

где $\gamma_3 = \mathfrak{c}_2 r_1 k_3 C_{33}$, $\gamma_4 = \mathfrak{c}_2 r_1 k_3 (C_{32} + C_{33} + C_{34})$.

Оценим первое слагаемое в правой части (2.103). Согласно (2.12),

$$\begin{aligned} |\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \leqslant & \left| \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \rangle \, d\mathbf{x} \right| \\ & + \sum_{j=1}^d \int_{\mathcal{O}} \left(|\langle a_j^\varepsilon D_j \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \rangle| + |\langle (a_j^\varepsilon)^* \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, D_j S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \rangle| \right) \, d\mathbf{x} \\ & + \left| \int_{\mathcal{O}} \langle Q^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \rangle \, d\mathbf{x} \right| + c_5 \left| \int_{\mathcal{O}} \langle Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \rangle \, d\mathbf{x} \right| =: \sum_{k=1}^4 \mathcal{I}_2^{(k)}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.105}$$

Так как функция $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ сосредоточена в $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$, в (2.105) все интегралы реально берутся по $\Upsilon_\varepsilon = (\partial\mathcal{O})_\varepsilon \cap \mathcal{O} \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon$. Член $\mathcal{I}_2^{(1)}(\varepsilon)$ оценим с помощью леммы 2.2.1, учитывая (1.4) и (1.83):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^{(1)}(\varepsilon) \leqslant & \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |b(\mathbf{D}) S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ & \leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} (\beta\varepsilon)^{1/2} \left(\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Применяя (1.4), (2.57) и (2.58) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$, а также (2.86), находим

$$\mathcal{I}_2^{(1)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 (\gamma_5 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \gamma_6 \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.106}$$

где $\gamma_5 = \beta^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 (k_2 k_3)^{1/2} (C_{33} + C_{34})$ и $\gamma_6 = \beta^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 (k_2 k_3)^{1/2} C_{34}$.

Оценим член $\mathcal{I}_2^{(2)}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{I}_2^{(2)}(\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^d \|D_j \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(a_j^\varepsilon)^* S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^d \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|a_j^\varepsilon S_\varepsilon D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.107}$$

В силу леммы 2.2.2 выполнено

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(a_j^\varepsilon)^* S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|a_j\|^2_{L_2(\Omega)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда, из (2.56), (2.57) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и (2.86) вытекает оценка для первого слагаемого в правой части (2.107):

$$\sum_{j=1}^d \|D_j \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(a_j^\varepsilon)^* S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leqslant c(\phi)^2 \gamma_7 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (2.108)$$

где $\gamma_7 = C_a \left(\beta_* |\Omega|^{-1} k_1 k_2\right)^{1/2} (C_{33} + C_{34})$.

Второе слагаемое в правой части (2.107) оценивается на основании предложения 1.3.2, (2.57) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и (2.85):

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|a_j^\varepsilon S_\varepsilon D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant |\Omega|^{-1/2} \sum_{j=1}^d \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|a_j\|_{L_2(\Omega)} \|D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \gamma_8 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned}$$

где $\gamma_8 := |\Omega|^{-1/2} C_a C_{32} k_2$. Отсюда и из (2.107), (2.108) вытекает оценка

$$\mathcal{I}_2^{(2)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 (\gamma_7 + \gamma_8) \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \qquad (2.109)$$

Рассмотрим теперь член $\mathcal{I}_2^{(3)}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{I}_2^{(3)}(\varepsilon) \leqslant \||Q^\varepsilon|^{1/2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |Q^\varepsilon| |S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\, d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \qquad (2.110)$$

Первый сомножитель в правой части (2.110) оценим с помощью леммы 1.2.5 и условия (1.14):

$$\||Q^\varepsilon|^{1/2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\check{q},\Omega) \|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \qquad (2.111)$$

где $\check{q} = \infty$ при $d = 1$, $\check{q} = 2s/(s-1)$ при $d \geqslant 2$. Второй сомножитель в правой части (2.110) оценим с помощью леммы 2.2.2:

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |Q^\varepsilon| |S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|Q\|_{L_1(\Omega)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \qquad (2.112)$$

Объединяя (2.110)–(2.112), учитывая (2.56), (2.57) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и используя лемму 2.4.2, находим

$$\mathcal{I}_2^{(3)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \gamma_9 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (2.113)$$

где $\gamma_9 = C(\check{q},\Omega) \|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)} \|Q\|^{1/2}_{L_1(\Omega)} \left(\beta_* |\Omega|^{-1} k_1 k_2\right)^{1/2} (C_{32} + C_{33} + C_{34})$.

Теперь оценим член $\mathcal{I}_2^{(4)}(\varepsilon)$, используя (1.83), (2.56) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и (2.85):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_2^{(4)}(\varepsilon) &\leqslant \lambda \|Q_0\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \gamma_{10} c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \gamma_{10} = c_5 \|Q_0\|_{L_\infty} C_{32} k_1.
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

Таким образом, на основании (2.103)–(2.106), (2.109), (2.113), (2.114) имеем

$$
\mathcal{I}_2(\varepsilon) \leqslant \left((\gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_7 + \gamma_8 + \gamma_9 + \gamma_{10}) \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + (\gamma_4 + \gamma_6)\varepsilon^2 \right) c(\phi)^2 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.115}
$$

Остается оценить член $\mathcal{I}_3(\varepsilon)$:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}_3(\varepsilon)| &= |\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \\
&\leqslant \left| (g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)_{L_2(\mathcal{O})} \right| + \left| \left(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})} \right| \\
&+ \left| \left(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})} \right| + \left| \left(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})} \right| \\
&+ \sum_{j=1}^d \left| \left(a_j^\varepsilon D_j \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})} \right| \\
&+ \sum_{j=1}^d \left| \left((a_j^\varepsilon)^* \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, (D_j \Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + (D_j \widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})} \right| \\
&+ \sum_{j=1}^d \left| \left((a_j^\varepsilon)^* \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})} \right| \\
&+ \left| \left(Q^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})} \right| + c_5 \left| \left(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})} \right|.
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (2.116) через $\mathcal{I}_3^{(j)}(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, 9$.

Первый член оценим с помощью (1.4) и леммы 2.2.2, учитывая, что функция $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ сосредоточена в $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon) &\leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\
&\leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} (\beta_* \varepsilon)^{1/2} |\Omega|^{-1/2} \|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{1/2} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Теперь воспользуемся леммой 2.4.2 и оценками (2.57), (2.58) применительно к $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$. Учитывая (1.4) и (1.28), приходим к оценке

$$
\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 (\gamma_{11} \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \gamma_{12} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.117}
$$

где $\gamma_{11} = \|g\|^{3/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} \alpha_1 \beta_*^{1/2} (k_2 k_3)^{1/2} (C_{33} + C_{34})$ и $\gamma_{12} = \|g\|^{3/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} \alpha_1 \beta_*^{1/2} (k_2 k_3)^{1/2} C_{34}$. Аналогично, с учетом (1.40) получаем

$$\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \gamma_{13} \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.118}$$

Здесь $\gamma_{13} = \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty} (\alpha_1 \beta_* n k_1 k_2)^{1/2} |\Omega|^{-1/2} \alpha_0^{-1/2} C_a (C_{33} + C_{34})$. Чтобы оценить $\mathcal{I}_3^{(3)}(\varepsilon)$, воспользуемся (1.4), (1.5) и (1.144):

$$\mathcal{I}_3^{(3)}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{3/2} d^{1/2} M_1 \|\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда с помощью (2.58) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и леммы 2.4.2 выводим оценку

$$\mathcal{I}_3^{(3)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \left(\gamma_{14} \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \gamma_{15} \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.119}$$

где $\gamma_{14} = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{3/2} d^{1/2} M_1 k_3 C_{33}$, $\gamma_{15} = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{3/2} d^{1/2} M_1 k_3 (C_{33} + C_{34})$.

Аналогично, с учетом (1.94) получаем

$$\mathcal{I}_3^{(4)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \gamma_{16} \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad |\zeta| \geqslant 1, \tag{2.120}$$

с постоянной $\gamma_{16} = \|g\|_{L_\infty} d^{1/2} \alpha_1 \widetilde{M}_1 k_2 (C_{33} + C_{34})$.

Оценим член $\mathcal{I}_3^{(5)}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{I}_3^{(5)}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^d \|D_j \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\|(a_j^\varepsilon)^* \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|(a_j^\varepsilon)^* \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right). \tag{2.121}$$

В силу предложения 1.3.2 выполнено

$$\|(a_j^\varepsilon)^* \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \|a_j^* \Lambda\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.122}$$

Применяя неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, получаем

$$\|a_j^* \Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(q,\Omega) \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)} \|\Lambda\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.123}$$

$q = \infty$ при $d = 1$, $q = 2\rho/(\rho - 2)$ при $d \geqslant 2$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \|(a_j^\varepsilon)^* \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant |\Omega|^{-1/2} \|a_j^* \widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant |\Omega|^{-1/2} C(q,\Omega) \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)} \|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{2.124}$$

Из (2.121)–(2.124) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3^{(5)}(\varepsilon) \leqslant{} & \varepsilon \widehat{C}_a C(q,\Omega) |\Omega|^{-1/2} \|\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \times \left(\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right). \end{aligned} \tag{2.125}$$

В силу (1.29) и (1.30) имеем

$$|\Omega|^{-1/2}\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)} \leqslant M_1 + M_2. \tag{2.126}$$

Согласно (1.41), (1.42), (1.93), (1.149) выполнено

$$|\Omega|^{-1/2}\|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2. \tag{2.127}$$

Из (1.4), (2.86), (2.125)–(2.127) и неравенств (2.56), (2.57) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ получаем, что

$$\mathcal{I}_3^{(5)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2\gamma_{17}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.128}$$

Здесь $\gamma_{17} = \widehat{C}_a C(q,\Omega)(C_{33} + C_{34})\Big((M_1 + M_2)\alpha_1^{1/2}k_2 + (\widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2)k_1\Big)$.

Перейдем к оценке члена $\mathcal{I}_3^{(6)}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3^{(6)}(\varepsilon) \leqslant &\sum_{j=1}^d \|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}\\ &+ \sum_{j=1}^d \|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(D_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.129}$$

Применяя лемму 1.2.5, имеем

$$\|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(q,\Omega)\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \tag{2.130}$$

где $q = \infty$ при $d = 1$, $q = 2\rho/(\rho - 2)$ при $d \geqslant 2$. В силу леммы 2.2.2 выполнено

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|D_j\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.131}$$

Аналогично,

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(D_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|D_j\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.132}$$

Теперь из (2.129)–(2.132) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3^{(6)}(\varepsilon) \leqslant C(q,\Omega)\widehat{C}_a\left(\beta_*|\Omega|^{-1}\varepsilon\right)^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\Big(&\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &+ \|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big).\end{aligned}$$

Учитывая (1.4), (1.30), (1.42), (1.149), неравенства (2.56)–(2.58) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и лемму 2.4.2, отсюда получаем

$$\mathcal{I}_3^{(6)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2(\gamma_{18}\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \gamma_{19}\varepsilon^2)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.133}$$

где

$$\gamma_{18} = (C_{32} + C_{33} + C_{34})C(q,\Omega)\widehat{C}_a\beta_*^{1/2}k_2^{1/2}\bigl(M_2\alpha_1^{1/2}k_3^{1/2} + \widetilde{M}_2k_1^{1/2}\bigr),$$
$$\gamma_{19} = C_{34}C(q,\Omega)\widehat{C}_a\beta_*^{1/2}k_2^{1/2}M_2\alpha_1^{1/2}k_3^{1/2}.$$

Член $\mathcal{I}_3^{(7)}(\varepsilon)$ оценим с помощью (1.94), (1.144) и (2.130):

$$\mathcal{I}_3^{(7)}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\sum_{j=1}^{d}\|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)$$
$$\leqslant \varepsilon C(q,\Omega)\sum_{j=1}^{d}\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\left(M_1\|b(\mathbf{D})D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{M}_1\|D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right).$$

Воспользуемся теперь леммой 2.4.2 и неравенствами (1.4) и (2.57), (2.58) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$. Получим

$$\mathcal{I}_3^{(7)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2(\gamma_{20}\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \gamma_{21}\varepsilon^2)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.134}$$

где

$$\gamma_{20} = \widehat{C}_aC(q,\Omega)\left(C_{33}M_1\alpha_1^{1/2}k_3 + (C_{32} + C_{33} + C_{34})\widetilde{M}_1k_2\right),$$
$$\gamma_{21} = \widehat{C}_aC(q,\Omega)(C_{32} + C_{33} + C_{34})M_1\alpha_1^{1/2}k_3.$$

Оценим теперь член $\mathcal{I}_3^{(8)}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{I}_3^{(8)}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\||Q^\varepsilon|^{1/2}\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \||Q^\varepsilon|^{1/2}\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right). \tag{2.135}$$

На основании предложения 1.3.2 и (1.4) имеем

$$\||Q^\varepsilon|^{1/2}\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\||Q|^{1/2}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.136}$$

В силу неравенства Гёльдера и теоремы вложения

$$\||Q|^{1/2}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\check{q},\Omega)\|Q\|_{L_s(\Omega)}^{1/2}\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.137}$$

Аналогично,

$$\||Q^\varepsilon|^{1/2}\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}C(\check{q},\Omega)\|Q\|_{L_s(\Omega)}^{1/2}\|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.138}$$

Из оценок (2.135)–(2.138) с учетом (2.111), (2.126), (2.127) следует, что

$$\mathcal{I}_3^{(8)}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon C(\check{q},\Omega)^2\|Q\|_{L_s(\Omega)}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\left(\alpha_1^{1/2}(M_1 + M_2)\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + (\widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2)\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right).$$

В силу неравенств (2.56), (2.57) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и леммы 2.4.2 это влечет

$$\mathcal{I}_3^{(8)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \gamma_{22} \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.139}$$

где $\gamma_{22} = C(\check{q},\Omega)^2 \|Q\|_{L_s(\Omega)} (C_{32} + C_{33} + C_{34}) \big((M_1 + M_2)\alpha_1^{1/2} k_2 + (\widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2) k_1 \big)$.

Оценим, наконец, член $\mathcal{I}_3^{(9)}(\varepsilon)$ с помощью (1.4), (1.94), (1.144), неравенств (2.56), (2.57) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и леммы 2.4.2. В результате получаем

$$\mathcal{I}_3^{(9)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \gamma_{23} \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \gamma_{23} = c_5 \|Q_0\|_{L_\infty} C_{32} \left(M_1 \alpha_1^{1/2} k_2 + \widetilde{M}_1 k_1 \right). \tag{2.140}$$

В итоге соотношения (2.116)–(2.120), (2.128), (2.133), (2.134), (2.139), (2.140) влекут

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \Big(&\big(\gamma_{11} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{16} + \gamma_{17} + \gamma_{18} + \gamma_{20} + \gamma_{22} + \gamma_{23} \big) \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \\ &+ \big(\gamma_{12} + \gamma_{15} + \gamma_{19} + \gamma_{21} \big) \varepsilon^2 \Big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{2.141}$$

Итак, мы оценили все члены в правой части (2.100). Из (2.100)–(2.102), (2.115), (2.141) следует неравенство

$$\big| (\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \mathbf{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} \big| \leqslant c(\phi)^5 (\gamma_* \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \gamma_{**} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь $\gamma_* = C_{39} + \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_7 + \gamma_8 + \gamma_9 + \gamma_{10} + \gamma_{11} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{16} + \gamma_{17} + \gamma_{18} + \gamma_{20} + \gamma_{22} + \gamma_{23}$, $\gamma_{**} = \gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_{12} + \gamma_{15} + \gamma_{19} + \gamma_{21}$. Следовательно,

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)^5 (\gamma_* \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \gamma_{**} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с (2.85) это влечет (2.98) с постоянными $C_{37} = \gamma_* + C_{32}$, $C_{38} = \gamma_{**}$. $\square$

2.5.2 Завершение доказательства теоремы 2.1.5

Из (2.78) и (2.98) вытекает неравенство

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{40} c(\phi)^5 (\varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \tag{2.142}$$

с постоянной $C_{40} = \max\{C_{29} + C_{37}; C_{38}\}$. Чтобы получить отсюда (2.34), заметим, что в силу (1.118), (1.119), (2.7) и (2.27) при всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ верна грубая оценка

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2 \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi) |\zeta|^{-1}. \tag{2.143}$$

При $|\zeta| \leqslant \varepsilon^{-2}$ используем (2.142) и заметим, что $\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon |\zeta|^{-1/2}$. При $|\zeta| > \varepsilon^{-2}$ применим (2.143) и учтем, что $|\zeta|^{-1} < \varepsilon |\zeta|^{-1/2}$. Отсюда вытекает (2.34) с постоянной $C_{22} = \max\{2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}; 2C_{40}\}$. Теорема 2.1.5 доказана.

2.6 Специальные случаи

2.6.1 Устранение сглаживателя S_ε в корректоре

Оказывается, что сглаживающий оператор S_ε в корректоре может быть устранен, если наложить на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ условия 1.7.1 и 1.7.3 соответственно.

Наша цель в этом пункте — доказать следующую теорему.

Теорема 2.6.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.6.
1°. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 1.7.1. *Положим*

$$G_{D,1}(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.$$

Тогда при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant C_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C'_{41}c(\phi)^4\varepsilon, \\ &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_{D,1}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}'_{41}c(\phi)^4\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.144}$$

Здесь постоянные C_{23} *и* $\widetilde{C}_{23}$ *— те же, что и в* (2.41) *и* (2.42) *соответственно. Постоянные* C'_{41} *и* $\widetilde{C}'_{41}$ *зависят только от исходных данных* (1.48), *области* $\mathcal{O}$ *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.
2°. *Пусть матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 1.7.3. *Обозначим*

$$G_{D,2}(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.$$

Тогда при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *выполнено*

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}} + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant C_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C''_{41}c(\phi)^4\varepsilon, \\ &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_{D,2}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}''_{41}c(\phi)^4\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.145}$$

Постоянные C''_{41} *и* $\widetilde{C}''_{41}$ *зависят лишь от исходных данных* (1.48), *области* $\mathcal{O}$, *от* p *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.
3°. *Предположим, что условия* 1.7.1 *и* 1.7.3 *выполнены одновременно. Положим*

$$G_{D,3}(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{2.146}$$

Тогда при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы аппроксимации*

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C_{23} c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + C_{41} c(\phi)^4 \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.147}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_{D,3}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{23} c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{41} c(\phi)^4 \varepsilon. \tag{2.148}$$

Постоянные C_{41} *и* $\widetilde{C}_{41}$ *зависят лишь от исходных данных* (1.48), *области* $\mathcal{O}$, *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

При соответствующих условиях непрерывность операторов под знаком нормы в оценках из теоремы 2.6.1 вытекает из следствий 1.2.2, 1.2.6 и леммы 1.2.5.

Чтобы установить теорему 2.6.1, нам потребуются следующие леммы. Их доказательства сходны с доказательствами лемм 1.7.7 и 1.7.8. Опустим детали.

Лемма 2.6.2. *Пусть* Γ*-периодическое матричнозначное решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (1.25) *удовлетворяет условию* 1.7.1. *Пусть* S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (1.82). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнено*

$$\|[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_\Lambda$ *зависит только от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Лемма 2.6.3. *Пусть матричнозначное* Γ*-периодическое решение* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *задачи* (1.35) *удовлетворяет условию* 1.7.3. *Пусть* S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (1.82). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}$ *зависит только от* n, d, α_0, α_1, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от норм* $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, *от* p, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ *и от параметров решетки* Γ.

2.6.2 Доказательство теоремы 2.6.1

Доказательство. Установим сначала аппроксимации обобщенной резольвенты при учете корректора. Из (2.31), (2.36) и леммы 2.6.2 вытекает, что при условии 1.7.1 справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\varepsilon \|[\Lambda^\varepsilon](S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \varepsilon \|[\Lambda^\varepsilon](S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon \mathfrak{C}_\Lambda C_\mathcal{O}^{(2)} \mathcal{C}_2 c(\phi). \end{aligned} \tag{2.149}$$

Отсюда и из (2.41) получаем оценку (2.144) с постоянной $C'_{41} = C_{24} + \mathfrak{C}_\Lambda C_\mathcal{O}^{(2)} \mathcal{C}_2$.

Аналогично, с помощью (2.31), (2.36) и леммы 2.6.3 находим, что при условии 1.7.3 выполнено

$$\varepsilon \| [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}} C_{\mathcal{O}}^{(2)} \mathcal{C}_2 c(\phi). \tag{2.150}$$

Отсюда и из (2.41) вытекает оценка (2.145) с постоянной $C_{41}''' = C_{24} + \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}} C_{\mathcal{O}}^{(2)} \mathcal{C}_2$.

Наконец, если условия 1.7.1 и 1.7.3 выполнены одновременно, из (2.41), (2.149) и (2.150) следует неравенство (2.147), где $C_{41} = C_{24} + (\mathfrak{C}_\Lambda + \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}) C_{\mathcal{O}}^{(2)} \mathcal{C}_2$.

Результаты теоремы 2.6.1, относящиеся к аппроксимации потоков, выводятся из соответствующих оценок для обобщенной резольвенты. Доказательство во многом похоже на доказательство оценки (2.42). Для примера докажем (2.148) в условиях пункта 3° теоремы. Аналогично (2.92) из (2.147) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\| g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(I + \varepsilon([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon])\big)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2} \\ &\leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\big(C_{23} c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{41} c(\phi)^4 \varepsilon\big). \end{aligned} \tag{2.151}$$

Далее, аналогично (2.93)

$$\begin{aligned} &\varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\ &\quad = g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\Lambda\big)^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \big([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) D_l + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] D_l\big)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.152}$$

Отличие от доказательства неравенства (2.42) возникает при оценке третьего слагаемого в правой части тождества (2.152). Используя условие 1.7.1, а также (1.5) и (2.31), получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon \sum_{l=1}^d \| g^\varepsilon b_l [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) D_l (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon \alpha_1 d \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}^2 (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon\alpha_1 d\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\mathcal{C}_2 c(\phi). \end{aligned} \tag{2.153}$$

Далее, в силу (1.5), (2.31), (2.36), условия 1.7.3 и леммы 1.2.5 выполнено

$$\begin{aligned} &\varepsilon \sum_{l=1}^d \| g^\varepsilon b_l [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] D_l (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\mathbf{D}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]P_{\mathcal{O}}\mathbf{D}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q},\Omega) C_{\mathcal{O}}^{(1)} \|\mathbf{D}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q},\Omega) C_{\mathcal{O}}^{(1)} \mathcal{C}_2 c(\phi). \end{aligned} \tag{2.154}$$

Отсюда и из (2.153) вытекает, что третье слагаемое в правой части (2.152) оценивается через $\widehat{C}_{41}\varepsilon c(\phi)$, где

$$\widehat{C}_{41} = (d\alpha_1)^{1/2}\mathcal{C}_2\|g\|_{L_\infty}\big((d\alpha_1)^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty} + C(\widehat{q},\Omega)C_{\mathcal{O}}^{(1)}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}\big).$$

Вместе с (2.151) и (2.152) это влечет оценку (2.148) с постоянной $\widetilde{C}_{41} = (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{41} + \widehat{C}_{41}$. $\square$

2.6.3 Случай, когда корректор обращается в нуль

Предположим, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. справедливы соотношения (1.33). Тогда Г-периодическое решение задачи (1.25) обращается в нуль: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$. Пусть кроме этого выполнено равенство (1.204). Тогда Г-периодическое решение задачи (1.35) также равно нулю: $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому в рассматриваемом случае операторы (2.37) и (2.52) обращаются в нуль, формула (2.54) упрощается и из теоремы 2.1.8 вытекает следующий результат.

Предложение 2.6.4. *Пусть справедливы равенства* (1.33) *и* (1.204). *Тогда в условиях теоремы* 2.1.6 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *верна оценка*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{25}c(\phi)^4\varepsilon. \tag{2.155}$$

2.6.4 Специальный случай

Предположим теперь, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы представления (1.34). Тогда в силу предложения 1.7.2(3°) выполнено условие 1.7.1. При этом согласно [9, замечание 3.5] матрица-функция (1.27) постоянна и совпадает с g^0, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Таким образом, $\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = g^0 b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}$.

Предположим дополнительно, что справедливо равенство (1.204). Тогда $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ и из теоремы 2.6.1(3°) вытекает следующий результат.

Предложение 2.6.5. *Пусть имеют место соотношения* (1.34) *и* (1.204). *Тогда в условиях теоремы* 2.1.5 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *верна оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{23}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{41}c(\phi)^4\varepsilon.$$

2.7 “Другая” аппроксимация обобщенной резольвенты

В теоремах из разделов 2.1 и 2.6 предполагалось, что $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geqslant 1$. В настоящем разделе мы установим результаты, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра.

2.7.1 Общий случай

Условие 2.7.1. *Пусть* $0 < \varepsilon_\flat \leqslant 1$. *Пусть* $c_\flat \geqslant 0$ — *общая нижняя грань операторов* $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$ *для всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$.

Теорема 2.7.2. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — *ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$. *Предположим, что число* ε_1 *выбрано из условия* 2.1.4. *Пусть* $0 < \varepsilon_\flat \leqslant \varepsilon_1$. *Предположим, что* $c_\flat \geqslant 0$ *подчинено условию* 2.7.1. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$. *Обозначим* $\psi = \arg(\zeta - c_\flat)$, $0 < \psi < 2\pi$, *и*

$$\varrho_\flat(\zeta) := \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.156}$$

Здесь $c(\psi)$ *определено в* (1.101). *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (2.8), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ — *решение эффективной задачи* (2.28). *Пусть корректор* $K_D(\varepsilon;\zeta)$ *определен в* (2.37). *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ — *первое приближение* (2.38), (2.39). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{42} \varepsilon \varrho_\flat(\zeta) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.157}$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{43} \bigl(\varepsilon^{1/2} \varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon |1+\zeta|^{1/2} \varrho_\flat(\zeta)\bigr) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.158}$$

В операторных терминах,

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{42} \varepsilon \varrho_\flat(\zeta), \tag{2.159}$$

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C_{43} \bigl(\varepsilon^{1/2} \varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon |1+\zeta|^{1/2} \varrho_\flat(\zeta)\bigr). \end{aligned} \tag{2.160}$$

Пусть матрица-функция $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *определена в* (1.27). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon \bigl(b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{43} \bigl(\varepsilon^{1/2} \varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon |1+\zeta|^{1/2} \varrho_\flat(\zeta)\bigr) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.161}$$

Постоянные C_{42}, C_{43} *и* $\widetilde{C}_{43}$ *зависят только от исходных данных* (1.48) *и области* $\mathcal{O}$.

Замечание 2.7.3. 1) *Выражение* $c(\psi)^2 |\zeta - c_\flat|^{-2}$ *в* (2.156) — *это величина, обратная к квадрату расстояния от* ζ *до* $[c_\flat, \infty)$. 2) *В силу* (1.118), (1.119), (2.4) *и* (2.23) *при любом* $\varepsilon_\flat \in (0,1]$ *можно в качестве* $c_\flat$ *взять* $4^{-1} \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|Q_0\|_{L_\infty}^{-1} (\operatorname{diam} \mathcal{O})^{-2}$. 3) *Пусть* λ_1^0 — *первое собственное значение оператора* B_D^0, *и пусть* $\nu > 0$ — *произвольное достаточно малое число. В силу теоремы* 2.1.5 (*при* $Q_0 = I$), *резольвента оператора* $B_{D,\varepsilon}$ *сходится к резольвенте оператора* B_D^0 *по* L_2*-операторной норме. Следовательно, если* $\varepsilon_\flat$ *достаточно малое, число* $\lambda_1^0 - \nu$ — *общая нижняя грань опeратров* $B_{D,\varepsilon}$ *для всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$. *Поэтому можно выбрать* $c_\flat = \|Q_0\|_{L_\infty}^{-1} (\lambda_1^0 - \nu)$. 4) *Несложно дать оценку сверху для* $c_\flat$. *В силу* (2.3) *и* (2.6) *выполнено* $c_\flat \leqslant c_3 \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \mu_1^0$, *где* μ_1^0 — *первое собственное значение опера-*

тора $-\Delta + I$ *при условии Дирихле на* $\partial\mathcal{O}$. *Поэтому* $c_\flat$ *контролируется через исходные данные* (1.48) *и область* $\mathcal{O}$.

Замечание 2.7.4. *Оценки* (2.157)–(2.161) *полезны при ограниченных* $|\zeta|$ *и малых* $\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)$. *В этом случае величина* $\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)$ *оценивается через* $C\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}$. *При больших* $|\zeta|$ *(и* ϕ*, отделенных от* 0 *и* 2π*) предпочтительнее применять теоремы* 2.1.5 *и* 2.1.6.

Сначала установим следующие две леммы.

Лемма 2.7.5. *Пусть выполнено условие* 2.7.1. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *имеем*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}, \tag{2.162}$$

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3(1 + |\zeta|)^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{2.163}$$

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}, \tag{2.164}$$

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3(1 + |\zeta|)^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{2.165}$$

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_4\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}. \tag{2.166}$$

Здесь $\mathcal{C}_3 = c_6\|f\|_{L_\infty}(c_\flat + 1)^{1/2}(c_\flat + 2)^{1/2}$ *и* $\mathcal{C}_4 = \widehat{c}(c_\flat + 2)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

Доказательство. В условиях леммы спектр оператора $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ содержится в $[c_\flat,\infty)$. Следовательно, $\|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}$. Вместе с (2.7) это влечет (2.162).

Далее, из (2.6) и (2.7) вытекает, что

$$\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2\to L_2} = \|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(f^\varepsilon)^*\|_{L_2\to L_2} \leqslant \|f\|_{L_\infty} \sup_{x\geqslant c_\flat} \frac{x^{1/2}}{|x - \zeta|}.$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x\geqslant c_\flat} \frac{x}{|x-\zeta|^2} \leqslant \begin{cases} (c_\flat + 1)c(\psi)^2|\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1, \\ (c_\flat + 1)c(\psi)^2|\zeta - c_\flat|^{-1}, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1. \end{cases}$$

Заметим, что $|\zeta| + 1 \leqslant 2 + c_\flat$ при $|\zeta - c_\flat| < 1$ и $(|\zeta| + 1)|\zeta - c_\flat|^{-1} \leqslant 2 + c_\flat$ при $|\zeta - c_\flat| \geqslant 1$. Поэтому

$$(|\zeta| + 1)^{1/2}\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty}(c_\flat + 1)^{1/2}(c_\flat + 2)^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}.$$

Отсюда и из (2.5) следует (2.163).

Оценки (2.164) и (2.165) проверяются аналогично (2.162) и (2.163), соответственно, с помощью (1.119), (2.24) и (2.27).

Остается проверить (2.166). В силу (1.119) и (2.26), (2.27),

$$
\begin{aligned}
&\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\|B_D^0(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\leqslant \widehat{c}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat} x|x-\zeta|^{-1} \leqslant \widehat{c}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}(x+1)|x-\zeta|^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.167}
$$

Вычисление показывает, что

$$
\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)^2}{|x-\zeta|^2} \leqslant (c_\flat+2)^2\varrho_\flat(\zeta), \quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty). \tag{2.168}
$$

Теперь из (2.167) и (2.168) вытекает (2.166). $\square$

Лемма 2.7.6. *Пусть выполнено условие* 2.7.1. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_\flat$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *выполнено*

$$
\|K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5(1+|\zeta|)^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{2.169}
$$

$$
\varepsilon\|K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_6\left(\varepsilon+(1+|\zeta|)^{-1/2}\right)\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}. \tag{2.170}
$$

Постоянные $\mathcal{C}_5$ *и* $\mathcal{C}_6$ *зависят только от исходных данных* (1.48) *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Объединяя (1.4), (1.94), (1.144), (2.36) и (2.37), находим

$$
\begin{aligned}
\|K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \alpha_1^{1/2}M_1C_{\mathcal{O}}^{(1)}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&+\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(0)}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

Отсюда и из (2.165) вытекает оценка (2.169) с постоянной $\mathcal{C}_5=\mathcal{C}_3\big(\alpha_1^{1/2}M_1C_{\mathcal{O}}^{(1)}+\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(0)}\big)$. Далее,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\|\mathbf{D}K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \left\|\big((\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})+(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\big)S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&+\varepsilon\left\|\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)S_\varepsilon\mathbf{D}P_{\mathcal{O}}(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

В силу предложения 1.3.2, (1.4), (1.30), (1.94), (1.42), (1.144), (1.149) и (2.36) отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\|\mathbf{D}K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant (M_2\alpha_1^{1/2}+\widetilde{M}_2+\varepsilon\widetilde{M}_1)C_{\mathcal{O}}^{(1)}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&+\varepsilon M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(2)}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, в силу леммы 2.7.5,

$$
\varepsilon\|\mathbf{D}K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6(1+|\zeta|)^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}+\widetilde{\mathcal{C}}_6\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}. \tag{2.171}
$$

Здесь $\widehat{\mathcal{C}}_6=\mathcal{C}_3C_{\mathcal{O}}^{(1)}(M_2\alpha_1^{1/2}+\widetilde{M}_2+\widetilde{M}_1)$, $\widetilde{\mathcal{C}}_6=M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_4$.

Комбинируя (2.169) и (2.171), приходим к оценке (2.170) с постоянной

$$\mathcal{C}_6 = \max\{\mathcal{C}_5 + \widehat{\mathcal{C}}_6; \widetilde{\mathcal{C}}_6\}.$$

$\square$

2.7.2 Доказательство теоремы 2.7.2

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat \leqslant \varepsilon_1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$. Сначала установим оценку (2.159). Из неравенства (2.34) при $\zeta = -1$ следует, что

$$\|(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{22}\varepsilon. \tag{2.172}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\
&\ = (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)\left((B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1}\right)(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\
&\ + (1+\zeta)(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.173}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (2.173) через $\mathcal{T}_1(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathcal{T}_2(\varepsilon;\zeta)$. В силу (2.7),

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} + I)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)}{|x-\zeta|}.
\end{aligned} \tag{2.174}$$

Аналогично (2.174), используя (1.119), получаем

$$\|(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)}{|x-\zeta|}. \tag{2.175}$$

Теперь из (2.168), (2.172), (2.174) и (2.175) следует, что

$$\|\mathcal{T}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{30}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta); \quad \gamma_{30} = C_{22}\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}(c_\flat + 2)^2. \tag{2.176}$$

Второе слагаемое в правой части (2.173) подчинено оценке

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant |1+\zeta|\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\times \|[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]\|_{H^1(\mathcal{O})\to H^{-1}(\mathcal{O})}\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{2.177}$$

Заметим, что образ оператора $(B_{D,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}$ лежит в $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Поэтому, из (2.163) по двойственности получаем

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} = \|(B_{D,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3(1+|\zeta|)^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}. \tag{2.178}$$

Теперь из (2.55), (2.165), (2.177) и (2.178) вытекает, что

$$\|\mathcal{T}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{31}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta); \quad \gamma_{31} = C_{Q_0}\mathcal{C}_3^2. \tag{2.179}$$

В результате соотношения (2.173), (2.176) и (2.179) влекут оценку (2.159) с постоянной $C_{42} = \gamma_{30} + \gamma_{31}$.

Проверим (2.160). В силу неравенства (2.41) при $\zeta = -1$,

$$\|(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;-1)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (C_{23} + C_{24})\varepsilon^{1/2}. \tag{2.180}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\\
&= \left((B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;-1)\right)(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\
&+ (\zeta+1)(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}Q_0^\varepsilon\left((B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1}\right)(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\
&+ (1+\zeta)(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.181}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (2.181) через $\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)$, $\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta$ и $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)$. (Отметим, что $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)$ совпадает с $\mathcal{T}_2(\varepsilon;\zeta)$.) Выполнено

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} &\leqslant \|(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;-1)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\times \|(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{2.182}$$

Вместе с (2.168), (2.175) и (2.180) это влечет

$$\|\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{32}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}; \quad \gamma_{32} = (C_{23} + C_{24})(c_\flat + 2)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{2.183}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части (2.181). Имеем

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant |\zeta+1|\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\|Q_0\|_{L_\infty}\\
&\times \|(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\|(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{2.184}$$

Отсюда и из (2.163), (2.168), (2.172) и (2.175) получаем

$$\|\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{33}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta); \quad \gamma_{33} = \mathcal{C}_3 C_{22}(c_\flat + 2)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}^3. \tag{2.185}$$

Остается оценить третье слагаемое в правой части (2.181). В силу (2.55),

$$\|\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon|1+\zeta|C_{Q_0}\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}. \tag{2.186}$$

Используя (2.5) и (2.165), находим

$$\|\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_6 C_{Q_0}\mathcal{C}_3\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.187}$$

По двойственности, в силу (2.6) и (2.7) имеем

$$\begin{aligned}\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &= \|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}(f^\varepsilon)^*\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &= \|f^\varepsilon\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.188}$$

Так как образ оператора $f^\varepsilon\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}$ лежит в $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, из (2.5) и (2.6) следует, что

$$\begin{aligned}\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} &\leqslant c_6\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}f^\varepsilon\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &= c_6\|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.189}$$

Вместе с (2.168) и (2.188) это влечет

$$\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_6(c_\flat+2)\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}. \tag{2.190}$$

Объединяя (2.187) и (2.190), находим

$$\|\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{34}\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta);\quad \gamma_{34}=c_6^2(c_\flat+2)C_{Q_0}\mathcal{C}_3. \tag{2.191}$$

В результате из соотношений (2.181), (2.183), (2.185) и (2.191) выводим неравенство

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \gamma_{32}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}+(\gamma_{33}+\gamma_{34})\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta).\end{aligned} \tag{2.192}$$

Отсюда вытекает (2.160), где $C_{43}=\max\{\gamma_{32};\gamma_{33}+\gamma_{34}\}$.

Остается проверить (2.161). Из (1.5) и (2.158) следует, что

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{43}\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.193}$$

Далее, используя (1.4), по аналогии с (2.93), (2.94) и (2.96) получаем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0-g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{35}\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.194}$$

Здесь $\gamma_{35} = \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\bigl(M_1(\alpha_1 d)^{1/2} + \widetilde{M}_1 d^{1/2} + r_1\bigr)$. Из (2.36) и (2.166) следует, что

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \gamma_{36}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}; \quad \gamma_{36} = C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_4. \tag{2.195}$$

Объединяя это с (2.193) и (2.194), приходим к оценке (2.161) с постоянной $\widetilde{C}_{43} = (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{43} + \gamma_{35}\gamma_{36}$. □

Следствие 2.7.7. *В условиях теоремы* 2.7.2 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{44}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{3/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.196}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{44}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{3/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.197}$$

Постоянные C_{44} *и* $\widetilde{C}_{44}$ *зависят только от исходных данных* (1.48) *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Из соотношений (2.163), (2.165) и (2.170) вытекает грубая оценка

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{37}(\varepsilon + (1+|\zeta|)^{-1/2})\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{2.198}$$

где $\gamma_{37} = 2\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_6$. При $|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/4} \leqslant \varepsilon^{-1/2}$ воспользуемся аппроксимацией (2.192) и учтем, что $\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta) \leqslant \varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{3/4}$. При $|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/4} > \varepsilon^{-1/2}$ применим (2.198) и примем во внимание, что $(1+|\zeta|)^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} < \varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{3/4}$. Отсюда вытекает (2.196) при $C_{44} = \max\{\gamma_{32}+\gamma_{33}+\gamma_{34}; 2\gamma_{37}\}$.

Соотношения (2.194), (2.195) и (2.196) влекут (2.197) при $\widetilde{C}_{44} = (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{44} + \gamma_{35}\gamma_{36}$. □

2.7.3 Устранение S_ε

Теорема 2.7.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.7.2. *Предположим, что справедливы условия* 1.7.1 *и* 1.7.3. *Пусть оператор* $G_{D,3}(\varepsilon;\zeta)$ *определен в* (2.146). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *имеем*

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant C_{45}\bigl(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\bigr),\end{aligned} \tag{2.199}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_{D,3}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{45}\bigl(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\bigr). \tag{2.200}$$

Постоянные C_{45} *и* $\widetilde{C}_{45}$ *зависят от исходных данных* (1.48), *области* $\mathcal{O}$, *а также от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Применяя леммы 2.6.2 и 2.6.3 вместе с (2.160) и (2.195), получаем (2.199) с постоянной $C_{45} = C_{43} + (\mathfrak{C}_\Lambda + \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}})\gamma_{36}$.

Проверим (2.200). В силу (1.5) и (2.199),

$$\begin{aligned}
&\| g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty} C_{45}\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big).
\end{aligned} \tag{2.201}$$

Соотношение (2.152) остается верным. По аналогии с (2.153) и (2.154), используя (2.166), находим

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\Big\| \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})D_l + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon D_l\big)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \gamma_{38}\varepsilon\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{38}\mathcal{C}_4\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)^{1/2},
\end{aligned} \tag{2.202}$$

где $\gamma_{38} = \|g\|_{L_\infty}\big(\alpha_1 d\|\Lambda\|_{L_\infty} + (\alpha_1 d)^{1/2}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q},\Omega)C_{\mathcal{O}}^{(1)}\big)$. Теперь из (2.152), (2.201) и (2.202) вытекает оценка (2.200) с постоянной $\widetilde{C}_{45} = (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{45} + \gamma_{38}\mathcal{C}_4$. □

Замечание 2.7.9. *Если справедливо только условие* 1.7.1 (*соответственно, условие* 1.7.3), *то сглаживающий оператор* S_ε *может быть устранен только в члене корректора, содержащем* Λ^ε (*соответственно,* $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$).

2.7.4 Аппроксимация с поправкой типа пограничного слоя

С помощью теоремы 2.1.8 установим теперь “другую” аппроксимацию с поправкой типа пограничного слоя.

Теорема 2.7.10. *Предположим, что* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — *ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$. *Пусть* $0 < \varepsilon_\flat \leqslant 1$. *Предположим, что постоянная* $c_\flat \geqslant 0$ *подчинена условию* 2.7.1. *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat,\infty)$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (2.8), *и пусть первое приближение* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определено в* (2.38), (2.39). *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ —*решение задачи* (2.44). *Пусть операторы* $K_D(\varepsilon;\zeta)$ *и* $W_D(\varepsilon;\zeta)$ *определены в* (2.37) *и* (2.52), *соответственно. Тогда*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant (C_{46} + C_{47}|1+\zeta|^{1/2})\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta) + \varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant (C_{46} + C_{47}|1+\zeta|^{1/2})\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).
\end{aligned} \tag{2.203}$$

Постоянные C_{46} *и* C_{47} *зависят только от исходных данных* (1.48) *и области* $\mathcal{O}$. *если матрица-функция* $Q_0(\mathbf{x})$ *постоянна, то* $C_{47} = 0$.

Замечание 2.7.11. *Выбирая* $\varepsilon_\flat = 1$ *и* $c_\flat = 0$, *при* $|\zeta| \geqslant 1$ *имеем* $\varrho_\flat(\zeta) = c(\phi)^2$. *Поэтому, если* $Q_0(\mathbf{x})$ — *постоянная матрица, то* $C_{31} = 0$ *и оценка* (2.203) *усиливает неравенство* (2.54) *по параметру* ϕ.

Доказательство. Используя оценку (2.54) при $\zeta = -1$ и учитывая (2.52), получаем

$$\|(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1} + \varepsilon (B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} T(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{25}\varepsilon. \qquad (2.204)$$

Далее, из определения оператора $T(\varepsilon;\zeta)$ (см. (2.49), (2.50)) ясно, что

$$T(\varepsilon;-1)(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = T(\varepsilon;\zeta).$$

Объединяя это тождество с (2.52), легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta) + \varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta) \\
&\quad = (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + \varepsilon (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} T(\varepsilon;\zeta) \\
&\quad = (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)\big((B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1} + \varepsilon (B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} T(\varepsilon;-1)\big) \\
&\quad \times (B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + (\zeta + 1)(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned} \qquad (2.205)$$

Первое слагаемое справа обозначим через $\mathrm{J}(\varepsilon;\zeta)$. Заметим, что второе слагаемое совпадает с $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)$; ср. (2.181). Очевидно, если $Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \overline{Q_0}$, то $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta) = 0$.

Из (2.3), (2.6), (2.7) и (2.168) следует, что

$$\begin{aligned}
&\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} = \|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} + I)(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad = \|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} + I)\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} + I)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})}\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_3^{1/2}(c_\flat + 2)\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{\Phi}\|_{H^1(\mathcal{O})}
\end{aligned}$$

для любой функции $\mathbf{\Phi} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следовательно, в силу (2.5) и (2.204),

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{J}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_6\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\mathrm{J}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant c_6 c_3^{1/2}(c_\flat + 2)\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}C_{25}\varepsilon\|(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.168) и (2.175), вытекает, что

$$\|\mathrm{J}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{46}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta); \quad C_{46} = c_6 c_3^{1/2}C_{25}(c_\flat + 2)^2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}. \qquad (2.206)$$

Наконец, из (2.191), (2.205) и (2.206) следует оценка (2.203) с постоянной $C_{47} = \gamma_{34}$. $\square$

2.7.5 Специальные случаи

Следующие утверждения проверяются по аналогии с предложениями 2.6.4 и 2.6.5.

Предложение 2.7.12. *Предположим, что* $0 < \varepsilon_\flat \leqslant 1$, *а постоянная* $c_\flat$ *подчинена условию* 2.7.1. *Пусть справедливы соотношения* (1.33) *и* (1.204). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и*

$\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *имеем*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (C_{46} + C_{47}|1+\zeta|^{1/2})\varepsilon \varrho_\flat(\zeta). \tag{2.207}$$

Предложение 2.7.13. *Пусть справедливы условия теоремы* 2.7.2. *Предположим, что имеют место соотношения* (1.34) *и* (1.204). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *имеем*

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \widetilde{C}_{45}\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big).\end{aligned}$$

2.8 Дополнительные результаты

В настоящем разделе мы покажем, что при $\operatorname{Re}\zeta > 0$, оценки из теорем 2.1.5 и 2.1.6 допускают усиление. Улучшение относится к поведению правых частей в оценках по отношению к $\phi = \arg\zeta$. Однако при этом появляется дополнительный „плохой член” (растущий по $|\zeta|$); в случае, когда матрица-функция $Q_0(\mathbf{x})$ постоянна, этот член равен нулю и мы получаем настоящее усиление результата. Метод основан на использовании тождеств для обобщенных резольвент из раздела 2.7. С помощью этих тождеств мы переносим уже доказанные оценки из левой полуплоскости в симметричную точку правой полуплоскости.

Также мы получим новые версии оценок при аппроксимации потоков.

2.8.1 Оценки по $(L_2 \to L_2)$- и $(L_2 \to H^1)$-операторным нормам

Теорема 2.8.1. *В условиях теоремы* 2.1.6 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$ *и* $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$ *выполнено*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{46} c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + C_{47} c(\phi)^2 \varepsilon, \tag{2.208}$$

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant C_{48}\left(c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + c(\phi)^2\varepsilon\right) + C_{49}(\operatorname{Re}\zeta)^{1/2} c(\phi)^2 \varepsilon,\end{aligned} \tag{2.209}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_{48}\left(c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + c(\phi)^2\varepsilon\right) + \widetilde{C}_{49}(\operatorname{Re}\zeta)^{1/2} c(\phi)^2 \varepsilon.\end{aligned} \tag{2.210}$$

Постоянные C_{46}, C_{47}, C_{48}, C_{49}, $\widetilde{C}_{48}$ *и* $\widetilde{C}_{49}$ *зависят только от исходных данных* (1.48) *и области* $\mathcal{O}$. *Если матрица-функция* $Q_0(\mathbf{x})$ *постоянна, то* $C_{47} = C_{49} = \widetilde{C}_{49} = 0$.

Доказательство. Пусть $\zeta = \operatorname{Re}\zeta + i\operatorname{Im}\zeta$, $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$. Положим $\widehat{\zeta} = -\operatorname{Re}\zeta + i\operatorname{Im}\zeta$. Тогда $|\widehat{\zeta}| = |\zeta|$ и $c(\widehat{\phi}) = 1$, где $\widehat{\phi} = \arg\widehat{\zeta}$. Согласно (2.34),

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \widehat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{22}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}. \tag{2.211}$$

Аналогично (2.173), получаем

$$\begin{aligned}&(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\\&=(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon}-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)\Big((B_{D,\varepsilon}-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\Big)(B_D^0-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\\&+(\zeta-\widehat{\zeta})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned} \tag{2.212}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (2.212) через $\mathcal{J}_1(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathcal{J}_2(\varepsilon;\zeta)$. В силу (2.211) и аналогов (2.174) и (2.175),

$$\|\mathcal{J}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_{22}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}\sup_{x\geqslant 0}\frac{|x-\widehat{\zeta}|^2}{|x-\zeta|^2}. \tag{2.213}$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x\geqslant 0}\frac{|x-\widehat{\zeta}|}{|x-\zeta|}\leqslant 2c(\phi). \tag{2.214}$$

Из оценок (2.213) и (2.214) вытекает неравенство

$$\|\mathcal{J}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_{46}c(\phi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2};\quad C_{46}=4C_{22}\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}. \tag{2.215}$$

Так как $\zeta-\widehat{\zeta}=2\mathrm{Re}\,\zeta$, по аналогии с (2.177) и (2.178), учитывая (2.55), получаем

$$\|\mathcal{J}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant 2(\mathrm{Re}\,\zeta)C_{Q_0}\varepsilon\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta^*Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}.$$

Вместе с леммами 2.1.1 и 2.1.3 это влечет

$$\|\mathcal{J}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_{47}c(\phi)^2\varepsilon;\quad C_{47}=2C_{Q_0}(\mathcal{C}_1+\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty})^2. \tag{2.216}$$

Комбинируя (2.212), (2.215) и (2.216), приходим к оценке (2.208).

Перейдем к доказательству неравенства (2.209). Запишем оценку (2.41) в точке $\widehat{\zeta}$:

$$\|(B_{D,\varepsilon}-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant C_{23}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}+C_{24}\varepsilon. \tag{2.217}$$

По аналогии с (2.181) получаем

$$\begin{aligned}&(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\\&=\big((B_{D,\varepsilon}-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\widehat{\zeta})\big)(B_D^0-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\\&+(\zeta-\widehat{\zeta})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}Q_0^\varepsilon\big((B_{D,\varepsilon}-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\big)(B_D^0-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\\&+(\zeta-\widehat{\zeta})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned} \tag{2.218}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (2.218) через $\mathfrak{L}_1(\varepsilon;\zeta)$, $\mathfrak{L}_2(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)$. (Отметим, что $\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)$ совпадает с $\mathcal{J}_2(\varepsilon;\zeta)$.) Аналогично (2.175), в силу (2.214),

$$\|(B_D^0 - \widehat{\zeta\overline{Q_0}})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}c(\phi). \tag{2.219}$$

Поэтому, аналогично (2.182), учитывая (2.217) и (2.219), имеем

$$\|\mathfrak{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{40}c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \gamma_{41}c(\phi)\varepsilon, \tag{2.220}$$

где $\gamma_{40} = 2C_{23}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\gamma_{41} = 2C_{24}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

По аналогии с (2.184), используя лемму 2.1.1 и соотношения (2.211), (2.219), получаем

$$\|\mathfrak{L}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{42}c(\phi)^2\varepsilon; \quad \gamma_{42} = 4C_{22}(\mathcal{C}_1 + \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty})\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|^3_{L_\infty}. \tag{2.221}$$

Член $\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)$ оценивается при помощи леммы 2.1.3 и (2.55) (ср. (2.186)–(2.191)):

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to H^1} &\leqslant 2(\operatorname{Re}\zeta)C_{Q_0}\varepsilon\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}\to H^1}\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to H^1}\\ &\leqslant 2\varepsilon(\operatorname{Re}\zeta)C_{Q_0}(\mathcal{C}_1 + \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty})c(\phi)|\zeta|^{-1/2}c_6^2\sup_{x\geqslant 0}\frac{x}{|x-\zeta^*|} \leqslant C_{49}c(\phi)^2\varepsilon(\operatorname{Re}\zeta)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.222}$$

Здесь $C_{49} = 2c_6^2C_{Q_0}(\mathcal{C}_1 + \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty})$.

В результате из (2.218) и (2.220)–(2.222) вытекает оценка (2.209) с постоянной $C_{48} = \max\{\gamma_{40};\gamma_{41}+\gamma_{42}\}$. Неравенство (2.210) выводится из (2.93), (2.95), (2.97) и (2.209). $\square$

2.8.2 Устранение S_ε

Теорема 2.8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.6. *Предположим, что справедливы условия* 1.7.1 *и* 1.7.3. *Пусть оператор* $G_{D,3}(\varepsilon;\zeta)$ *определен в* (2.146). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, $\operatorname{Re}\zeta\geqslant 0$, *имеем*

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant C_{50}\left(c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + c(\phi)^2\varepsilon\right) + C_{49}(\operatorname{Re}\zeta)^{1/2}c(\phi)^2\varepsilon,\end{aligned} \tag{2.223}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_{D,3}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_{50}\left(c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + c(\phi)^2\varepsilon\right) + \widetilde{C}_{49}(\operatorname{Re}\zeta)^{1/2}c(\phi)^2\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.224}$$

Здесь постоянные C_{49} *и* $\widetilde{C}_{49}$ *такие же, как в теореме* 2.8.1. *Постоянные* C_{50} *и* $\widetilde{C}_{50}$ *зависят только от исходных данных* (1.48), *области* $\mathcal{O}$, *от* p *и норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *and* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.6.1(3°). Чтобы установить (2.223), мы используем оценки (2.149), (2.150) и (2.209). По аналогии с (2.151)–(2.154), неравенство (2.224) выводится из (2.223). Опустим детали. $\square$

2.8.3 Специальный случай

По аналогии с предложением 2.6.5, следующий результат выводится из теоремы 2.8.2.

Предложение 2.8.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.5. *Предположим, что имеют место соотношения* (1.34) *и* (1.204). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$, *выполнено*

$$\begin{gathered}\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ \leqslant \widetilde{C}_{50}\left(c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + c(\phi)^2\varepsilon\right) + \widetilde{C}_{49}(\operatorname{Re}\zeta)^{1/2}c(\phi)^2\varepsilon.\end{gathered}$$

2.9 Примеры применения общих результатов

В случае операторов, действующих во всем пространстве, рассматриваемые в этом параграфе примеры изучались в [61, 65] и главе 1 настоящей работы.

2.9.1 Скалярный эллиптический оператор

Рассмотрим случай, когда $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, а $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция *с вещественными элементами*, $g(\mathbf{x}) > 0$, $g,g^{-1} \in L_\infty$.

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}),\dots,A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, — Γ-периодические вещественные функции, причем выполнено условие (1.247). Пусть $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — вещественные Γ-периодические функции, удовлетворяющие (1.248).

В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathfrak{B}_{D,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1}v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{2.225}$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Точное определение оператора $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[u,u] = \int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u,(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u\rangle + (\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon)|u|^2\right) d\mathbf{x}, \quad u \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

Оператор (2.225) можно понимать как периодический оператор Шрёдингера с метрикой g^ε, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$, содержащим сингулярное слагаемое $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon$.

Легко видеть (см. [61, п. 13.1]), что оператор (2.225) можно переписать следующим образом:

$$\mathfrak{B}_{D,\varepsilon} = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} + \sum_{j=1}^{d}\left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_j(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{2.226}$$

Здесь вещественная функция $Q(\mathbf{x})$ определена равенством (1.250). Комплексные функции $a_j(\mathbf{x})$ заданы выражениями (1.251).

Пусть $Q_0(\mathbf{x})$ — положительно определенная и ограниченная Γ-периодическая функция. Следуя (2.1), введем положительно определенный оператор $\mathcal{B}_{D,\varepsilon} = \mathfrak{B}_{D,\varepsilon} + c_5 Q_0^\varepsilon$. Оператор $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ можно записать в виде

$$\mathcal{B}_{D,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) + c_5 Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Нас интересует поведение оператора $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. В рассматриваемом случае исходные данные (1.48) сводятся к набору (1.253).

Эффективный оператор для $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ действует по правилу

$$\mathcal{B}_D^0 u = -\operatorname{div} g^0 \nabla u + 2i \langle \nabla u, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}} \rangle + (-W + \overline{Q} + c_5 \overline{Q_0}) u, \quad u \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}).$$

Коэффициенты этого оператора определены в п. 1.9.1. Эффективный оператор допускает запись в виде

$$\mathcal{B}_D^0 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) + \mathcal{V}^0 + c_5 \overline{Q_0}, \tag{2.227}$$

где $\mathbf{A}^0$ и $\mathcal{V}^0$ выписаны в (1.257).

Согласно замечанию 1.7.5 в рассматриваемом случае справедливы условия 1.7.1 и 1.7.3, причем нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ оцениваются в терминах данных задачи (1.253). Поэтому можно использовать корректор, не содержащий сглаживающего оператора:

$$\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta) = \Big([\Lambda^\varepsilon] \mathbf{D} + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \Big) (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} = \Big([\Psi^\varepsilon] \nabla + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \Big) (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \tag{2.228}$$

Оператор (2.146) запишется в виде $G_{D,3}(\varepsilon;\zeta) = -i \mathcal{G}_{D,3}(\varepsilon;\zeta)$, где

$$\mathcal{G}_{D,3}(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon \nabla (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon (\nabla \widetilde{\Lambda})^\varepsilon (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \tag{2.229}$$

В соответствии с теоремами 2.1.5 и 2.6.1(3°) справедлив следующий результат.

Предложение 2.9.1. *Пусть выполнены условия п.* 2.9.1. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta| e^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, $|\zeta| \geqslant 1$. *Число* ε_1 *выберем из условия* 2.1.4. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{22} c(\phi)^5 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \tag{2.230}$$

$$\|(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{23} c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + C_{41} c(\phi)^4 \varepsilon, \tag{2.231}$$

$$\|g^\varepsilon \nabla (\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - \mathcal{G}_{D,3}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{23} c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{41} c(\phi)^4 \varepsilon. \tag{2.232}$$

Здесь $c(\phi)$ — *величина* (1.101). *Постоянные* C_{22}, C_{23}, C_{41}, $\widetilde{C}_{23}$ *и* $\widetilde{C}_{41}$ *зависят только от исходных данных* (1.253) *и области* $\mathcal{O}$.

Результаты раздела 2.8 также можно применить к оператору $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$.

“Другая” аппроксимация оператора $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ получается на основании теорем 2.7.2 и 2.7.8.

Предложение 2.9.2. *Пусть справедливы условия п.* 2.9.1. *Положим* $f(\mathbf{x}) := Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$ *и* $f_0 := (\overline{Q_0})^{-1/2}$. *Пусть* $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} := f^\varepsilon \mathcal{B}_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$ *и* $\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 := f_0 \mathcal{B}_D^0 f_0$. *Предположим, что число* ε_1 *подчинено условию* 2.1.4. *Пусть* $0 < \varepsilon_\flat \leqslant \varepsilon_1$. *Пусть* $c_\flat \geqslant 0$ *— общая нижняя грань операторов* $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon}$ *при всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\widetilde{\mathcal{B}}_D^0$. *Пусть величина* $\varrho_\flat(\zeta)$ *определена в* (2.156). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat,\infty)$ *выполнено*

$$\|(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{42} \varepsilon \varrho_\flat(\zeta),$$
$$\|(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{45}\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big),$$
$$\|g^\varepsilon \nabla (\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - \mathcal{G}_{D,3}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{45}\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big).$$

Постоянные C_{42}, C_{45} *и* $\widetilde{C}_{45}$ *зависят только от исходных данных* (1.253) *и от области* $\mathcal{O}$.

2.9.2 Периодический оператор Шрёдингера

Пусть матрица-функция $\check{g}(\mathbf{x})$ и функция $\check{v}(\mathbf{x})$ удовлетворяют условиям п. 1.9.2. В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\check{\mathcal{A}}_D = \mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$ при условии Дирихле. Строгое определение оператора $\check{\mathcal{A}}_D$ дается через квадратичную форму

$$\check{\mathfrak{a}}_D[u,u] = \int_{\mathcal{O}} \big(\langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} u, \mathbf{D} u \rangle + \check{v}(\mathbf{x})|u|^2\big)\, d\mathbf{x}, \quad u \in H_0^1(\mathcal{O}). \tag{2.233}$$

Оператор $\check{\mathcal{A}}_D$ наследует факторизацию оператора $\check{\mathcal{A}}$ (см. п. 1.9.2). Пусть ω — решение уравнения (1.265), удовлетворяющее (1.266). Подстановка $u = \omega z$ с учетом (1.265) преобразует форму (2.233) к виду

$$\check{\mathfrak{a}}_D[u,u] = \int_{\mathcal{O}} \omega(\mathbf{x})^2 \langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} z, \mathbf{D} z \rangle\, d\mathbf{x}, \quad u = \omega z, \quad z \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

Поэтому оператор $\check{\mathcal{A}}_D$ допускает факторизацию $\check{\mathcal{A}}_D = \omega^{-1} \mathbf{D}^* g \mathbf{D} \omega^{-1}$, где $g = \omega^2 \check{g}$.

Рассмотрим теперь оператор с осциллирующими коэффициентами

$$\check{\mathcal{A}}_{D,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1} \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g = \omega^2 \check{g}. \tag{2.234}$$

В исходных терминах выражение (2.234) запишется так:

$$\check{\mathcal{A}}_{D,\varepsilon} = \mathbf{D}^* \check{g}^\varepsilon \mathbf{D} + \varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon. \tag{2.235}$$

Этот оператор можно трактовать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующей метрикой $\check{g}^\varepsilon$ и сильно сингулярным потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$.

Далее, пусть матрица-функция $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathrm{col}\{A_1(\mathbf{x}),\dots,A_d(\mathbf{x})\}$ и функции $\widehat{v}(\mathbf{x})$ и $\check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ удовлетворяют условиям п. 1.9.2. В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением (1.271) при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Строгое определение дается через квадратичную форму. Оператор $\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon}$ можно трактовать как оператор Шрёдингера с метрикой $\check{g}^\varepsilon$, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon$, содержащим сингулярные слагаемые $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon$.

Напомним обозначение (1.272). С учетом (2.234), (2.235) справедливо тождество $\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}(\omega^\varepsilon)^{-1}$, где оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ задан выражением (2.225), в котором g определено в (1.267), а v и $\mathcal{V}$ — в (1.272). В силу (1.270) и свойств функции ω коэффициенты v и $\mathcal{V}$ удовлетворяют условиям (1.248). Тогда оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ можно представить в виде (2.226), где a_j, $j = 1,\dots,d$, и Q построены по g, $\mathbf{A}$ и вышеописанным функциям v и $\mathcal{V}$ согласно (1.250), (1.251).

Пусть $\check{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая вещественная функция, положительно определенная и ограниченная. Положим $Q_0(\mathbf{x}) := \check{Q}_0(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$. Постоянную c_5 выберем для оператора с теми же коэффициентами g, a_j, $j = 1,\dots,d$, и Q, что и у $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$, и коэффициентом $Q_0(\mathbf{x}) := \check{Q}_0(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$. Тогда оператор $\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} := \check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon} + c_5\check{Q}_0^\varepsilon$ связан с оператором $\mathcal{B}_{D,\varepsilon} := \mathfrak{B}_{D,\varepsilon} + c_5 Q_0^\varepsilon$ соотношением $\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathcal{B}_{D,\varepsilon}(\omega^\varepsilon)^{-1}$. Очевидно,

$$(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} = \omega^\varepsilon(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\omega^\varepsilon. \tag{2.236}$$

Под исходными данными будем понимать набор (1.274). На основании (2.236) и предложений 2.9.1, 2.9.2 получим следующий результат.

Предложение 2.9.3. *Пусть выполнены условия п.* 2.9.2. *Пусть* $\mathcal{B}_D^0$ *— эффективный оператор для* $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$*, определенный в* (2.227). *Пусть* $\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)$, $\mathcal{G}_{D,3}(\varepsilon;\zeta)$ *— операторы* (2.228) *и* (2.229) *для оператора* $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$. *Пусть число* ε_1 *выбрано из условия* 2.1.4.
1°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, $|\zeta| \geqslant 1$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \omega^\varepsilon(\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{22}\|\omega\|^2_{L_\infty} c(\phi)^5\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{2.237}$$

$$\begin{aligned}&\|(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon - \varepsilon\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant C_{23}\|\omega\|_{L_\infty}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{41}\|\omega\|_{L_\infty}c(\phi)^4\varepsilon,\end{aligned} \tag{2.238}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon\nabla(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \mathcal{G}_{D,3}(\varepsilon;\zeta)\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_{23}\|\omega\|_{L_\infty}c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{41}\|\omega\|_{L_\infty}c(\phi)^4\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.239}$$

Здесь $c(\phi)$ *— величина* (1.101).
2°. *Положим* $f(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$, $f_0 = (\overline{Q_0})^{-1/2}$. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, *где* $c_\flat \geqslant 0$ *— общая нижняя грань операторов* $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} = f^\varepsilon\mathcal{B}_{D,\varepsilon}f^\varepsilon$ *и* $\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 = f_0\mathcal{B}_D^0 f_0$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$

справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
&\|(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \omega^\varepsilon (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \omega^\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{42} \|\omega\|^2_{L_\infty} \varrho_\flat(\zeta) \varepsilon, \\
&\|(\omega^\varepsilon)^{-1} (\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \omega^\varepsilon - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta) \omega^\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant C_{43} \|\omega\|_{L_\infty} \left(\varepsilon^{1/2} \varrho_\flat(\zeta) + |\zeta + 1|^{1/2} \varepsilon \varrho_\flat(\zeta) \right), \\
&\|g^\varepsilon \nabla (\omega^\varepsilon)^{-1} (\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \mathcal{G}_{D,3}(\varepsilon;\zeta) \omega^\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \widetilde{C}_{43} \|\omega\|_{L_\infty} \left(\varepsilon^{1/2} \varrho_\flat(\zeta) + |\zeta + 1|^{1/2} \varepsilon \varrho_\flat(\zeta) \right).
\end{aligned}
$$

Здесь $\varrho_\flat(\zeta)$ *— величина* (2.156).

Постоянные $C_{22}\|\omega\|^2_{L_\infty}$, $C_{23}\|\omega\|_{L_\infty}$, $C_{41}\|\omega\|_{L_\infty}$, $\widetilde{C}_{23}\|\omega\|_{L_\infty}$ *и* $\widetilde{C}_{41}\|\omega\|_{L_\infty}$ *зависят только от исходных данных* (1.274) *и от области* $\mathcal{O}$. *Постоянные* $C_{42}\|\omega\|^2_{L_\infty}$ *и* $C_{43}\|\omega\|_{L_\infty}$, $\widetilde{C}_{43}\|\omega\|_{L_\infty}$ *зависят от тех же параметров и от выбора* $c_\flat$.

Доказательство. Домножая операторы под знаком нормы в (2.230) с двух сторон на ω^ε и используя (2.236), приходим к оценке (2.237).

В силу (2.236) имеем $(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} = (\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\omega^\varepsilon$. Домножая операторы под знаком нормы в (2.231) справа на ω^ε, получаем (2.238). Аналогично из (2.232) вытекает (2.239).

Результаты п. 2° получаются аналогично на основании предложения 2.9.2. $\square$

Замечание 2.9.4. *Предложение* 2.9.3 *демонстрирует, что для оператора* $\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon}$ *характер усреднения меняется (по сравнению с результатами для оператора* (2.225)). *Наличие сильно сингулярного потенциала* $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$ *приводит к тому, что обобщенная резольвента* $(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}$ *не имеет предела по операторной норме в* $L_2(\mathcal{O})$. *Она аппроксимируется через обобщенную резольвенту* $(\mathcal{B}_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}$, *окаймленную быстро осциллирующими множителями* ω^ε.

Глава 3

Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем

В настоящей главе мы продолжаем работать с классом операторов $B_{D,\varepsilon}$, определенным в п. 2.1.1. Условия п. 2.1.1 считаем выполненными. Нас интересует поведение в пределе малого периода решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения $Q_0^\varepsilon \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon = -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$. В операторных терминах, речь пойдет об аппроксимации полугруппы $e^{-tB_{D,\varepsilon}}$, $t > 0$, по $(L_2 \to L_2)$- и $(L_2 \to H^1)$-операторным нормам.

3.1 Постановка задачи. Формулировка результатов

3.1.1 Постановка задачи

Изучается поведение решения первой начально-краевой задачи

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) = -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial \mathcal{O}} = 0, \quad t > 0; \quad Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. (Решение понимается в слабом смысле.) Найдем связь $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ и $\boldsymbol{\varphi}$. Согласно (1.43) функция $\mathbf{s}_\varepsilon(\mathbf{x},t) := (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{s}_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) = -\widetilde{B}_\varepsilon \mathbf{s}_\varepsilon(\mathbf{x},t) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0; \\ \mathbf{s}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial \mathcal{O}} = 0, \quad t > 0; \quad \mathbf{s}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{s}_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = f^\varepsilon \mathbf{s}_\varepsilon(\cdot,t) = f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\varphi}$.

Наша цель — изучить поведение в пределе малого периода обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ первой начально-краевой задачи (3.1). Иными словами, нас интересуют аппроксимации окаймленной операторной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^*$ при малом ε.

Эффективный оператор B_D^0 для $B_{D,\varepsilon}$ определен в п. 2.1.3, эффективная задача имеет вид
$$\begin{cases} \overline{Q_0}\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}(\mathbf{x},t) = -B^0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\ \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad t>0; \quad \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.2}$$
С учетом факторизации $\overline{Q_0} = f_0^{-2}$ решение этой задачи дается формулой
$$\mathbf{u}_0(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 \boldsymbol{\varphi}(\cdot),$$
где $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$.

3.1.2 Свойства операторной экспоненты

В качестве общей нижней грани операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, и $\widetilde{B}_D^0$ здесь и далее будем брать постоянную
$$c_\flat = 4^{-1}\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|Q_0\|^{-1}_{L_\infty} (\operatorname{diam}\mathcal{O})^{-2}. \tag{3.3}$$
(См. замечание 2.7.3(2).)

Установим следующее простое утверждение об оценках операторных экспонент $e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}$ и $e^{-\widetilde{B}_D^0 t}$.

Лемма 3.1.1. *При* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*
$$\|e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant e^{-c_\flat t}, \quad t\geqslant 0, \tag{3.4}$$
$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_7 t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t>0, \tag{3.5}$$
$$\|e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant e^{-c_\flat t}, \quad t\geqslant 0, \tag{3.6}$$
$$\|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_7 t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t>0, \tag{3.7}$$
$$\|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant c_8 t^{-1} e^{-c_\flat t/2}, \quad t>0. \tag{3.8}$$

Здесь c_7 *— постоянная* (2.5). *Постоянная* c_8 *зависит только от исходных данных* (1.48).

Доказательство. Поскольку число $c_\flat$, определенное в (3.3), является общей нижней гранью операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ и $\widetilde{B}_D^0$, оценки (3.4) и (3.6) очевидны.

В силу (2.5) и (2.6) выполнено
$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_7 \|B_{D,\varepsilon}^{1/2} f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} = c_7 \|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2} e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.9}$$
Поскольку $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}\geqslant c_\flat I$, то
$$\|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2} e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \sup_{x\geqslant c_\flat} x^{1/2}e^{-xt} \leqslant e^{-c_\flat t/2} \sup_{x\geqslant c_\flat} x^{1/2} e^{-xt/2} \leqslant t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}. \tag{3.10}$$

Отсюда и из (3.9) вытекает неравенство (3.5). Точно так же из (2.24) и равенства $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$ следует оценка (3.7).

В силу (1.119), (2.26) и равенства $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$ имеем

$$\|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}\|B_D^0 f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\|\widetilde{B}_D^0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда

$$\|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}\|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{x\geqslant c_\flat} x e^{-xt} \leqslant \widehat{c}\|f^{-1}\|_{L_\infty} t^{-1} e^{-c_\flat t/2}.$$

Тем самым установлена оценка (3.8) с постоянной $c_8 = \widehat{c}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$. □

3.1.3 Аппроксимация решения в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$

Теорема 3.1.2. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Пусть $B_{D,\varepsilon}$ — оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, отвечающий квадратичной форме* (2.2)*. Пусть B_D^0 — оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, заданный выражением* (2.25) *на области определения $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Положим $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$ и $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$, где матрица-функция f определена согласно* (1.118)*, а матрица $f_0 = \big(\overline{Q_0}\big)^{-1/2}$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (3.1)*, и пусть $\mathbf{u}_0$ — решение соответствующей эффективной задачи* (3.2)*. Число ε_1 выберем из условия* 2.1.4*. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{51}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t \geqslant 0.$$

В операторных терминах,

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{51}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Здесь $c_\flat$ — постоянная (3.3)*. Постоянная C_{51} зависит только от исходных данных* (1.48) *и области $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Доказательство опирается на результаты теорем 2.1.5, 2.7.2 и представление экспонент от операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$, $\widetilde{B}_D^0$ через интегралы по контуру от соответствующих резольвент.

Справедливо тождество (см., например, [27, гл. IX, §1.6])

$$e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\, d\zeta, \quad t > 0. \tag{3.12}$$

Здесь $\gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ в положительном направлении. Для экспоненты от оператора $\widetilde{B}_D^0$ справедливо аналогичное представление. Так как постоянная (3.3) — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ и $\widetilde{B}_D^0$, в качестве контура интегрирования удобно выбрать

$$\gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0, \operatorname{Re}\zeta = \operatorname{Im}\zeta + c_\flat/2\} \cup \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \leqslant 0, \operatorname{Re}\zeta = -\operatorname{Im}\zeta + c_\flat/2\}.$$

Умножая (3.12) на f^ε слева и на $(f^\varepsilon)^*$ справа и учитывая тождество (2.7), получаем представление

$$f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\,d\zeta, \quad t > 0.$$

Аналогично,

$$f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\,d\zeta, \quad t > 0.$$

Следовательно,

$$f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\right)d\zeta. \tag{3.13}$$

На основании теорем 2.1.5 и 2.7.2 оценим разность обобщенных резольвент при $\zeta \in \gamma$ равномерно по $\arg\zeta$. Напомним обозначение $\psi = \arg(\zeta - c_\flat)$. Заметим, что при $\zeta \in \gamma$ и $\psi = \pi/2$ либо $\psi = 3\pi/2$ выполнено $|\zeta| = \sqrt{5}c_\flat/2$. Мы воспользуемся теоремой 2.7.2 при тех $\zeta \in \gamma$, для которых $|\zeta| \leqslant \check{c}$, где

$$\check{c} = \max\{1; \sqrt{5}c_\flat/2\}. \tag{3.14}$$

На контуре γ очевидно выполнено $\psi \in (\pi/4, 7\pi/4)$ и

$$\varrho_\flat(\zeta) \leqslant 2\max\{1; 8c_\flat^{-2}\} =: C_{52}, \quad \zeta \in \gamma. \tag{3.15}$$

Поэтому из (2.159) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{42}C_{52}\varepsilon \\ &\quad\leqslant C'_{51}|\zeta|^{-1/2}\varepsilon, \quad \zeta \in \gamma, \quad |\zeta| \leqslant \check{c}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1; \quad C'_{51} = C_{42}C_{52}\check{c}^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

При прочих $\zeta \in \gamma$ справедливо неравенство

$$|\sin\phi| \geqslant 5^{-1/2}, \quad \zeta \in \gamma, \quad |\zeta| > \check{c}, \tag{3.17}$$

и по теореме 2.1.5

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C''_{51}|\zeta|^{-1/2}\varepsilon, \zeta \in \gamma, \quad |\zeta| > \check{c}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{3.18}$$

где $C''_{51} = 5^{5/2} C_{22}$. В итоге, объединяя (3.16) и (3.18), при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ имеем

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C}_{51} |\zeta|^{-1/2} \varepsilon, \quad \zeta \in \gamma, \tag{3.19}$$

где $\widehat{C}_{51} = \max\{C'_{51}; C''_{51}\}$.

Из (3.13) и (3.19) вытекает оценка

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\pi^{-1} \widehat{C}_{51} \varepsilon t^{-1/2} \Gamma(1/2) e^{-c_\flat t/2}.$$

С учетом равенства $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ находим

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2\pi^{-1/2} \widehat{C}_{51} \varepsilon t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2} \\ &\leqslant \check{C}_{51} \varepsilon (t + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t \geqslant \varepsilon^2, \end{aligned} \tag{3.20}$$

где $\check{C}_{51} := 2\sqrt{2}\pi^{-1/2} \widehat{C}_{51}$. При $t \leqslant \varepsilon^2$ воспользуемся грубой оценкой

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}^2 e^{-c_\flat t} \leqslant 2\sqrt{2}\|f\|_{L_\infty}^2 \varepsilon (t + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{3.21}$$

$t \leqslant \varepsilon^2$. Из (3.20) и (3.21) вытекает искомое неравенство (3.11) с постоянной $C_{51} = \max\{\check{C}_{51}; 2\sqrt{2}\|f\|_{L_\infty}^2\}$. $\square$

3.1.4 Аппроксимация решения в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$

Введем *корректор*

$$\mathcal{K}_D(t; \varepsilon) = R_{\mathcal{O}} \left([\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon \right) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0. \tag{3.22}$$

При $t > 0$ оператор (3.22) непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Действительно, согласно (3.8) при $t > 0$ оператор $f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор $b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, а оператор $P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0$ заведомо непрерывен из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Остается учесть непрерывность операторов $[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m) \to H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, вытекающую из предложения 1.3.2 и включений $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t) := P_{\mathcal{O}} \mathbf{u}_0(\cdot, t)$. Через $\mathbf{v}_\varepsilon$ обозначим первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (3.1):

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, t) = \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t), \quad \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, t) := \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, t)|_{\mathcal{O}}. \tag{3.23}$$

Т. е. $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 \boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \varepsilon \mathcal{K}_D(t; \varepsilon) \boldsymbol{\varphi}(\cdot)$.

Теорема 3.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.2. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ*-периодические решения задач* (1.25) *и* (1.35) *соответственно. Пусть* S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.82) *и* $P_\mathcal{O}$ — *оператор продолжения* (2.35). *Положим* $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (3.23). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $t>0$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{53}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{53}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}, \tag{3.24}$$

где $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)$ — *корректор* (3.22). *Пусть матрица-функция* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *определена в* (1.27). *Для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $t>0$ *справедлива аппроксимация*

$$\left\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) - g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\right\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{53}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{53}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}. \tag{3.25}$$

Здесь

$$\mathcal{G}_D(t;\varepsilon) = \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}f_0 + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon P_\mathcal{O}f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}f_0.$$

Постоянные C_{53} *и* $\widetilde{C}_{53}$ *зависят только от исходных данных* (1.48) *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3.1.2, будем пользоваться представлением окаймленных операторных экспонент через интегралы по контуру от соответствующих обобщенных резольвент. Имеем

$$\begin{aligned} &f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\right)d\zeta. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Здесь $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — оператор (2.37).

Рассуждая аналогично (3.16)–(3.19), на основании теорем 2.1.6 и 2.7.2 получаем оценку

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \widehat{C}_{53}\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon\right), \quad \zeta\in\gamma, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \end{aligned} \tag{3.27}$$

с постоянной $\widehat{C}_{53} = \max\{C'_{53}; C''_{53}\}$, где $C'_{53} = (1+\check{c})^{1/2}C_{43}C_{52}$ и $C''_{53} = \max\{5C_{23}; 25C_{24}\}$. Из (3.26) и (3.27) вытекает искомая оценка (3.24) с постоянной $C_{53} = 2\pi^{-1}\Gamma(3/4)\widehat{C}_{53}$.

Аналогичным образом из тождества

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D(t;\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\big(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D(\varepsilon;\zeta)\big)\, d\zeta$$

и оценок (2.43) и (2.161) выводится неравенство (3.25). □

На основании замечания 2.7.3(3) делаем следующее наблюдение.

Замечание 3.1.4. *Пусть λ_1^0 — первое собственное значение оператора B_D^0, и пусть $\varkappa > 0$ — произвольное малое число. Из-за резольвентной сходимости при достаточно малом $\varepsilon_\circ$ число $\lambda_1^0 \|Q_0\|_{L_\infty}^{-1} - \varkappa/2$ — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\circ$. Поэтому можно сдвинуть контур интегрирования так, чтобы он пересекал вещественную ось в точке $\mathfrak{c} = \lambda_1^0 \|Q_0\|_{L_\infty}^{-1} - \varkappa$ вместо $c_\flat/2$. На этом пути получаются оценки* (3.11), (3.24) *и* (3.25) *с заменой $e^{-c_\flat t/2}$ на $e^{-\mathfrak{c}t}$ в правых частях. При этом постоянные в оценках станут зависеть от $\varkappa$.*

Замечание 3.1.5. *Оценки из теоремы* 3.1.3 *при фиксированном t имеют порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ из-за влияния границы области. В строго внутренней подобласти $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ можно установить аналоги оценок* (3.24), (3.25) *порядка $O(\varepsilon)$, см.* [43, теорема 2.14].

3.1.5 Оценки при малом времени

Отметим, что при $0 < t < \varepsilon^2$ нет смысла применять оценки (3.24) и (3.25), поскольку выгоднее использовать следующее простое утверждение (впрочем, справедливое при всех $t > 0$).

Предложение 3.1.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.2. *Тогда при $t > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{54} t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{3.28}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{54} t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{3.29}$$

$$\|g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{54} t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{3.30}$$

где постоянные $C_{54} = 2c_7\|f\|_{L_\infty}$ и $\widetilde{C}_{54} = \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}$ зависят только от исходных данных (1.48).

Доказательство. Неравенство (3.28) следует из (1.119), (3.5) и (3.7).

Далее, в силу (2.6) имеем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}\|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2} e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (3.10) вытекает оценка (3.29). С учетом (1.119) и равенства $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$ оценка (3.30) проверяется аналогично. □

3.1.6 Устранение сглаживателя S_ε в корректоре

Сглаживающий оператор в корректоре удается устранить, если наложить на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ условия 1.7.1 и 1.7.3 соответственно. Следующий результат проверяется аналогично теореме 3.1.3 с помощью теорем 2.6.1 и 2.7.8.

Теорема 3.1.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.3. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *подчинены условиям* 1.7.1 *и* 1.7.3 *соответственно. Положим*

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon) = (\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon) f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0,\\ &\mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Тогда при $t > 0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\begin{aligned}&\| f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{55} \left(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}\right) e^{-c_\flat t/2},\\ &\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{55} \left(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}\right) e^{-c_\flat t/2}.\end{aligned}$$

Постоянные C_{55} *и* $\widetilde{C}_{55}$ *зависят от исходных данных* (1.48), *от* p, *норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$, *а также от области* $\mathcal{O}$.

Замечание 3.1.8. *Если выполнено только условие* 1.7.1 (*соответственно, условие* 1.7.3), *то сглаживающий оператор* S_ε *может быть устранен в члене корректора, содержащем* Λ^ε (*соответственно,* $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$).

Замечание 3.1.9. *Устранить сглаживатель в корректоре также возможно за счет использования сглаживающих свойств экспоненты* $e^{-\widetilde{B}_D^0 t}$ *и мультипликаторных свойств матриц-функций* Λ *и* $\widetilde{\Lambda}$. *Для этого приходится считать границу области достаточно гладкой.* (*См.* [43, п. 2.8]).

3.1.7 Случай нулевого корректора

Предположим дополнительно, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения (1.33). Пусть справедливо условие (1.204). Тогда Γ-периодические решения задач (1.25) и (1.35) равны нулю: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$. На основании предложения 2.6.4 устанавливаем следующий результат.

Предложение 3.1.10. *Пусть справедливы соотношения* (1.33) *и* (1.204). *Тогда в условиях теоремы* 3.1.2 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнена оценка*

$$\| f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{56} \varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0, \tag{3.32}$$

где постоянная C_{56} *зависит только от исходных данных* (1.48) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Мы опираемся на тождество (3.13). При $|\zeta| \leqslant \check{c}$, где $\check{c}$ — постоянная (3.14), используем (2.207) и (3.15), при $|\zeta| > \check{c}$ — (2.155) и (3.17). В результате убеждаемся, что при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнено

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C}_{56}\varepsilon, \quad \zeta \in \gamma;\\ &\widehat{C}_{56} = \max\bigl\{\bigl(C_{46} + C_{47}(1+\check{c})^{1/2}\bigr)C_{52}; 25C_{25}\bigr\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.13) вытекает (3.32) с постоянной $C_{56} = 2\pi^{-1}\widehat{C}_{56}$. □

3.1.8 Специальный случай

Предположим теперь, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы представления (1.34). Тогда в силу предложения 1.7.2(3°) выполнено условие 1.7.1. При этом согласно [9, замечание 3.5] матрица-функция (1.27) постоянна и совпадает с g^0, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Таким образом, $\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 = g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0$.

Предположим дополнительно, что справедливо равенство (1.204). Тогда $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ и из теоремы 3.1.3 с помощью предложения 1.3.1 можно вывести следующий результат.

Предложение 3.1.11. *Пусть имеют место соотношения* (1.34) *и* (1.204). *Тогда в условиях теоремы* 3.1.2 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *верна оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}'_{53} \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2}. \tag{3.33}$$

Постоянная $\widetilde{C}'_{53}$ *зависит только от исходных данных* (1.48).

Доказательство. Из теоремы 3.1.3 следует, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - g^0 S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{53} \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2}. \tag{3.34}$$

С одной стороны, в силу предложения 1.3.1 с учетом (1.4), (1.32), (1.119), (2.36) и (3.8) имеем

$$\begin{aligned}\|g^0 (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} r_1 \alpha_1^{1/2} \|P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} r_1 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(2)} c_8 t^{-1} e^{-c_\flat t/2}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

С другой стороны, из (1.4), (1.32), (1.83), (1.119), (2.36) и (3.7) следует, что

$$\begin{aligned}\|g^0 (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2 \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant 2 \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(1)} c_7 t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Из (3.35) и (3.36) вытекает неравенство

$$\|g^0 (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \check{C}_{53} \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2},$$

где $\check{C}_{53} = \|g\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\bigl(2r_1 C_{\mathcal{O}}^{(1)} C_{\mathcal{O}}^{(2)} c_8 c_7\bigr)^{1/2}$. Отсюда и из (3.34) следует оценка (3.33) с постоянной $\widetilde{C}'_{53} = \widetilde{C}_{53} + \check{C}_{53}$. $\square$

3.2 Усреднение первой начально-краевой задачи для неоднородного уравнения

3.2.1 Старший член аппроксимации

В этом параграфе мы изучаем поведение решения первой начально-краевой задачи для неоднородного параболического уравнения:

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} &= 0, \quad t > 0; \\ Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Здесь $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T) := L_r((0,T); L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n))$, $0 < T \leqslant \infty$, при некотором $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Тогда

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^t f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}(f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\, d\widetilde{t}. \tag{3.38}$$

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= -B^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0; \\ \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} &= 0, \quad t > 0; \\ \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Решение этой задачи дается формулой

$$\mathbf{u}_0(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 \boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^t f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0(t-\widetilde{t})} f_0 \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\, d\widetilde{t}. \tag{3.40}$$

Вычитая (3.40) из (3.38), на основании теоремы 3.1.2 (см. (3.11)) заключаем, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $t > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{51}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{51}\varepsilon \mathcal{L}(\varepsilon; t; \mathbf{F}),$$

где

$$\mathcal{L}(\varepsilon; t; \mathbf{F}) := \int_0^t e^{-c_\flat(t-\widetilde{t})/2}(\varepsilon^2 + t - \widetilde{t})^{-1/2}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2(\mathcal{O})}\, d\widetilde{t}.$$

Оценивая член $\mathcal{L}(\varepsilon; t; \mathbf{F})$, при $1 < r \leqslant \infty$ получаем следующий результат.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (3.37), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение эффективной задачи* (3.39) *при* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $1 < r \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $0 < t < T$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{51}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r\theta(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.$$

Здесь величина $\theta(\varepsilon,r)$ *определена равенством*

$$\theta(\varepsilon,r) = \begin{cases} \varepsilon^{2-2/r}, & 1 < r < 2, \\ \varepsilon(|\ln\varepsilon|+1)^{1/2}, & r = 2, \\ \varepsilon, & 2 < r \leqslant \infty. \end{cases} \tag{3.41}$$

Постоянная c_r *зависит только от* r, *данных задачи* (1.48) *и области* $\mathcal{O}$.

Из теоремы 3.1.2 несложно вывести аппроксимацию решения задачи (3.37) в пространстве $\mathfrak{H}_r(T)$.

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (3.37) *и* (3.39) *соответственно, причем* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $1 \leqslant r < \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеем*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_r(T)} \leqslant c_{r'}\theta(\varepsilon,r')\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{57}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.$$

Здесь $\theta(\varepsilon,\cdot)$ *— величина* (3.41), $r^{-1} + (r')^{-1} = 1$. *Постоянная* C_{57} *зависит только от исходных данных* (1.48) *и области* $\mathcal{O}$, *постоянная* $c_{r'}$ *зависит от тех же величин и от* r.

Замечание 3.2.3. *При* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_\infty(T)$ *из теоремы* 3.2.1 *вытекает оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)} \leqslant c_\infty\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

3.2.2 Аппроксимация решения в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$

Получим теперь аппроксимацию решения задачи (3.37) по $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$-норме с помощью теоремы 3.1.3. Трудности возникают при рассмотрении интегрального члена в (3.38), так как оценка (3.24) „портится“ при малом t. *Считая, что* $t \geqslant \varepsilon^2$, разобьем промежуток интегрирования в (3.38) на две части: $(0,t-\varepsilon^2)$ и $(t-\varepsilon^2,t)$. На интервале $(0,t-\varepsilon^2)$ будем применять (3.24), а на $(t-\varepsilon^2,t)$ — (3.28).

Обозначим

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0\varepsilon^2} f_0^{-1}\mathbf{u}_0(\cdot,t-\varepsilon^2), \tag{3.42}$$

где $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (3.39). В силу (3.40)

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 \boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^{t-\varepsilon^2} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D (t-\widetilde{t})} f_0 \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\, d\widetilde{t}.$$

Теорема 3.2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (3.37) *и* (3.39) *соответственно, причем* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $2 < r \leqslant \infty$. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)$ *— функция* (3.42). *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *— Γ-периодические матричные решения задач* (1.25) *и* (1.35) *соответственно. Пусть* $P_\mathcal{O}$ *— линейный непрерывный оператор продолжения* (2.35), *и пусть* S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (1.82). *Положим* $\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t) := P_\mathcal{O}\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)$ *и обозначим*

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t) := \mathbf{u}_0(\cdot,t) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t).$$

Пусть $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$, *и пусть* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица-функция* (1.27). *Положим*

$$\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,t) := \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t) + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t).$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant 2C_{52}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \check{c}_r\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)},\\
\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \widetilde{C}_{52}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{c}_r\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.
\end{aligned}$$

Здесь постоянные $\check{c}_r$ *и* $\widetilde{c}_r$ *зависят только от исходных данных* (1.48) *и* r,

$$\omega(\varepsilon,r) = \begin{cases} \varepsilon^{1-2/r}, & 2 < r < 4,\\ \varepsilon^{1/2}(|\ln\varepsilon| + 1)^{3/4}, & r = 4,\\ \varepsilon^{1/2}, & 4 < r \leqslant \infty. \end{cases} \tag{3.43}$$

Так как правая часть в оценке (3.25) при $t \to 0$ растет медленнее, чем в оценке (3.24), при $r > 4$ поток $\mathbf{p}_\varepsilon$ удается аппроксимировать через величину

$$\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot,t) = \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t). \tag{3.44}$$

Предложение 3.2.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (3.37) *и* (3.39) *соответственно, причем* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $4 < r \leqslant \infty$. *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ *и пусть* $\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot,t)$ *— функция* (3.44). *Тогда при* $0 < t < T$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{h}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{52}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{58}^{(r)}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}. \tag{3.45}$$

Постоянная $C_{58}^{(r)}$ *зависит только от исходных данных* (1.48) *и от* r.

Доказательство. Для доказательства оценки (3.45) воспользуемся неравенством (3.25) и тождествами (3.38), (3.40). Если $r = \infty$, отсюда получаем (3.45) при $C_{58}^{(\infty)} := (2/c_\flat)^{1/4}\Gamma(1/4)\widetilde{C}_{52}$. Если $4 < r < \infty$, воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{h}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{52}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{C}_{52}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}\mathfrak{I}_r(\varepsilon,t)^{1/r'},$$

$r^{-1} + (r')^{-1} = 1$. Здесь

$$\mathfrak{I}_r(\varepsilon,t) = \int_0^t \tau^{-3r'/4}e^{-c_\flat r'\tau/2}\,d\tau \leqslant (c_\flat r'/2)^{3r'/4-1}\Gamma(1-3r'/4).$$

Это влечет (3.45) с постоянной $C_{58}^{(r)} = (c_\flat r'/2)^{3/4-1/r'}\Gamma(1-3r'/4)^{1/r'}\widetilde{C}_{52}$. □

Из предложения 3.1.6 и теоремы 3.1.7 можно вывести следующий результат.

Теорема 3.2.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2.4. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *удовлетворяют условиям* 1.7.1 *и* 1.7.3 *соответственно. Обозначим*

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t) &= \mathbf{u}_0(\cdot,t) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t),\\
\check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t) &= \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t).
\end{aligned}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant 2C_{55}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r'\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)},\\
\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2\widetilde{C}_{55}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r''\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.
\end{aligned}$$

Постоянные c_r' *и* c_r'' *зависят только от исходных данных* (1.48), *от* r, p, *от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Примеры

3.3 Скалярный эллиптический оператор с сингулярным потенциалом

3.3.1 Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты

Пусть справедливы предположения п. 2.9.1.

Согласно замечанию 1.7.5 в рассматриваемом случае справедливы условия 1.7.1 и 1.7.3, причем нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$ оцениваются в терминах исходных данных (1.253). Поэтому можно использовать корректор, не содержащий сглаживающего оператора:

$$\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon) = \Big([\Lambda^\varepsilon]\mathbf{D} + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Big) f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0 = \Big([\Psi^\varepsilon]\nabla + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Big) f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0. \tag{3.46}$$

Оператор (3.31) запишется в виде $\mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon) = -i\mathfrak{G}_D^0(t;\varepsilon)$, где

$$\mathfrak{G}_D^0(t;\varepsilon) = \widetilde{g}^\varepsilon \nabla f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0 + g^\varepsilon (\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0. \tag{3.47}$$

Следующий результат вытекает из теорем 3.1.2 и 3.1.7.

Предложение 3.3.1. *Пусть выполнены предположения п.* 2.9.1. *Пусть операторы* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ *и* $\mathfrak{G}_D^0(t;\varepsilon)$ *определены равенствами* (3.46) *и* (3.47) *соответственно. Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 2.1.4. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} t} f^\varepsilon - f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{51}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t \geqslant 0;$$
$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} t} f^\varepsilon - f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{55}(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0;$$
$$\|g^\varepsilon \nabla f^\varepsilon e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} t} f^\varepsilon - \mathfrak{G}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{55}(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0.$$

Постоянные C_{51}, C_{55} *и* $\widetilde{C}_{55}$ *зависят только от исходных данных* (1.253) *и от области* $\mathcal{O}$.

3.3.2 Усреднение первой начально-краевой задачи для параболического уравнения с сингулярным потенциалом

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для неоднородного параболического уравнения с сингулярным потенциалом:

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -(\mathbf{D}-\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D}-\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u_\varepsilon(\mathbf{x},t) \\ & \quad -\left(\varepsilon^{-1}v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) + c_5 Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\right) u_\varepsilon(\mathbf{x},t) + F(\mathbf{x},t), \\ & \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\ u_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t>0; \\ Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})u_\varepsilon(\mathbf{x},0) & = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases}$$

Здесь $\varphi \in L_2(\mathcal{O})$ и $F \in \mathfrak{H}_r(T) := L_r((0,T);L_2(\mathcal{O}))$, $0 < T \leqslant \infty$, при некотором $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

В соответствии с (2.227) и (3.39) эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\frac{\partial u_0}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -(\mathbf{D}-\mathbf{A}^0)^* g^0(\mathbf{D}-\mathbf{A}^0)u_0(\mathbf{x},t) - \left(\mathcal{V}^0 + c_5\overline{Q_0}\right) u_0(\mathbf{x},t) + F(\mathbf{x},t), \\ & \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\ u_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t>0; \\ \overline{Q_0}u_0(\mathbf{x},0) & = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases}$$

Применяя теоремы 3.2.1 и 3.2.6, получаем следующий результат.

Предложение 3.3.2. *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 2.1.4. *Пусть выполнены условия п.* 3.3.2, *причем* $1 < r \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $0 < t < T$ *справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{51}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r\theta(\varepsilon,r)\|F\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.$$

Здесь $\theta(\varepsilon,r)$ *— величина* (3.41).

Считая $t \geqslant \varepsilon^2$, *положим* $w_\varepsilon(\cdot,t) := f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}^0_D\varepsilon^2} f_0^{-1} u_0(\cdot,t-\varepsilon^2)$. *Обозначим* $\check{v}_\varepsilon(\cdot,t) = u_0(\cdot,t) + \varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla w_\varepsilon(\cdot,t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon w_\varepsilon(\cdot,t)$ *и* $\check{q}_\varepsilon(\cdot,t) = \widetilde{g}^\varepsilon\nabla w_\varepsilon(\cdot,t) + g^\varepsilon\big(\nabla\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon w_\varepsilon(\cdot,t)$. *Предположим дополнительно, что* $2 < r \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *выполнено*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - \check{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{55}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})} + c'_r\omega(\varepsilon,r)\|F\|_{\mathfrak{H}_r(t)},$$
$$\|g^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(\cdot,t) - \check{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\widetilde{C}_{55}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})} + c''_r\omega(\varepsilon,r)\|F\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.$$

Здесь $\omega(\varepsilon,r)$ *— величина* (3.43). *Постоянные* C_{51}, C_{55} *и* $\widetilde{C}_{55}$ *зависят только от исходных данных* (1.253) *и от области* $\mathcal{O}$. *Постоянные* c_r, c'_r *и* c''_r *зависят от тех же величин и от* r.

3.4 Скалярный оператор с сильно сингулярным потенциалом порядка ε^{-2}

Усреднение первой начально-краевой задачи для параболического уравнения с сильно сингулярным потенциалом изучалось в [1]. Там же можно найти некоторые мотивировки (см. [1, §1]). Однако результаты [1] не могут быть сформулированы в равномерной операторной топологии.

3.4.1 Усреднение первой начально-краевой задачи для параболического уравнения с сильно сингулярным потенциалом

Пусть выполнены условия п. 2.9.2.

К оператору $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon}$, описанному в п. 2.9.2, применимо предложение 3.3.1, причем $f(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})^{-1}$ и в силу (1.266) выполнено $f_0 = 1$ и $\widetilde{\mathcal{B}}^0_D = \mathcal{B}^0_D$. Коэффициенты g^0, $\mathbf{A}^0$ и $\mathcal{V}^0$ эффективного оператора строятся по g, $\mathbf{A}$, v и $\mathcal{V}$ (см. (1.270)), как описано в п. 1.9.2. Применим результаты к усреднению решения первой начально-краевой задачи

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -(\mathbf{D}-\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \check{g}^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D}-\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u_\varepsilon(\mathbf{x},t) \\
& \quad - \left(\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon(\mathbf{x}) + c_5 I\right) u_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\
u_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t>0; \\
u_\varepsilon(\mathbf{x},0) & = \omega^\varepsilon(\mathbf{x})^{-1}\varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}.
\end{cases}
$$

Здесь $\varphi \in L_2(\mathcal{O})$. (Для простоты мы рассматриваем однородное уравнение.) Тогда $u_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon}t}(\omega^\varepsilon)^{-1}\varphi$.

Пусть u_0 — решение усредненной задачи

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u_0}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -(\mathbf{D}-\mathbf{A}^0)^* g^0(\mathbf{D}-\mathbf{A}^0)u_0(\mathbf{x},t) - (\mathcal{V}^0 + c_5)\, u_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\
u_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t>0; \\
u_0(\mathbf{x},0) & = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}.
\end{cases}
$$

Из предложения 3.3.1 выводим следующий результат.

Предложение 3.4.1. *Пусть выполнены условия п.* 3.4.1. *Обозначим*

$$
\begin{aligned}
\check{v}_\varepsilon(\cdot,t) &= u_0(\cdot,t) + \varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla u_0(\cdot,t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon u_0(\cdot,t), \\
\check{q}_\varepsilon(\cdot,t) &= \widetilde{g}^\varepsilon\nabla u_0(\cdot,t) + g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon u_0(\cdot,t).
\end{aligned}
$$

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$
\begin{aligned}
&\|(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\cdot,t) - u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{51}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t\geqslant 0; \\
&\|(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\cdot,t) - \check{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{55}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t>0; \\
&\|g^\varepsilon\nabla(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\cdot,t) - \check{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{55}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t>0.
\end{aligned}
$$

Постоянные C_{51}, C_{55} *и* $\widetilde{C}_{55}$ *зависят от исходных данных* (1.274) *и от области* $\mathcal{O}$.

Отметим, что при наличии сильно сингулярного потенциала в уравнении „хорошо аппроксимируется“ не само решение u_ε, а произведение $(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon$. В этом отличие характера результатов п. 3.4 от результатов п. 3.3.

Заключение

В работе изучено усреднение эллиптических и параболических задач для широкого класса операторов второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Рассматривается оператор B_ε, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (см. (1.44)), и оператор $B_{D,\varepsilon}$, действующий в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, где $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область класса $C^{1,1}$. (См. (2.1).) Перечислим основные результаты, полученные в работе:

1. Для обобщенной резольвенты оператора B_ε, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, получены аппроксимации по $(L_2\to L_2)$- и $(L_2\to H^1)$-операторным нормам с двухпараметрическими (относительно малого периода и спектрального параметра ζ) оценками погрешности. При фиксированном ζ эти оценки имеют точный порядок $O(\varepsilon)$.

2. Для оператора $B_{D,\varepsilon}$, действующего в ограниченной области при условии Дирихле на границе, получены аппроксимации обобщенной резольвенты с двухпараметрическими оценками погрешности. При этом оценка погрешности по $(L_2\to L_2)$-норме имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, а оценка погрешности по $(L_2\to H^1)$-норме имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$. Это объясняется влиянием границы области.

3. Для полугруппы $e^{-B_{D,\varepsilon}t}$, $t>0$, получены аппроксимации по $(L_2\to L_2)$- и $(L_2\to H^1)$-операторным нормам.

Результаты в операторных терминах применяются к усреднению решений периодических эллиптических и параболических систем. В качестве примеров рассмотрены скалярный эллиптический оператор и магнитный оператор Шрёдингера с сильно сингулярным электрическим потенциалом.

Отметим, что из теорем главы 2 об аппроксимации резольвенты можно вывести операторные оценки для периодических гиперболических систем в ограниченной области (см. [37]), что выходит за рамки диссертационного исследования.

Список литературы

[1] Allaire G., Capdeboscq Y., Piatnitski A., Siess V., Vanninathan M., *Homogenization of periodic systems with large potentials*, Arch. Rational Mech. Anal. **174** (2004), №2, 179–220.

[2] Armstrong S., Bordas A., Mourrat J.-C., *Quantitative stochastic homogenization and regularity theory of parabolic equations*, arXiv:1705.07672v3 (2018).

[3] Armstrong S., Kuusi T., Mourrat J.-C., *Quantitative stochastic homogenization and largescale regularity*, arXiv:1705.05300 (2018).

[4] Armstrong S. N., Shen Zh., *Lipschitz estimates in almost-periodic homogenization*, Commun. Pure Appl. Math. **69** (2016), №10, 1882–1923.

[5] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[6] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[7] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[8] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[9] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №6, 1–104.

[10] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.

[11] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ **20** (2008), №2, 19–42.

[12] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), №1, 3–60.

[13] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **24** (2012), №2, 1–103.

[14] Choe J. H., Kong K.-B., Lee Ch.-O., *Convergence in L^p space for the homogenization problems of elliptic and parabolic equations in the plane*, J. Math. Anal. Appl. **287** (2003), №2, 321–336.

[15] Cherednichenko K. D., Cooper S., *Resolvent estimates for high-contrast elliptic problems with periodic coefficients*, Arch. Rat. Mech. Anal. **219** (2016), №3, 1061–1086.

[16] Conca C., Vanninathan M., *Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition*, SIAM J. Appl. Math. **57** (1997), №6, 1639–1659.

[17] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2002), №5, 1166–1198.

[18] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), №3/4, 269–286.

[19] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), №1, 61–79.

[20] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[21] Жиков В. В., *Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами*, Тр. ММО **46**, Издательство Московского университета, М., 1983, 69–98.

[22] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), №3, 305–308.

[23] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), №5, 597–601.

[24] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), №4, 515-524.

[25] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), №2, 224–237.

[26] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН **71 (429)** (2016), №3, 27–122.

[27] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[28] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), №3, 1009–1036.

[29] Козлов С. М., *Приводимость квазипериодических дифференциальных операторов и усреднение*, Тр. ММО **46**, Издательство Московского университета, М., 1983, 99–123.

[30] Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д., *Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, Докл. АН СССР **246** (1979), №4, 812–815.

[31] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[32] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[33] Marcinkiewicz J., *Sur les multiplicateurs des series de Fourier*, Studia Math. **8** (1939), 78–91.

[34] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[35] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), №6, 125–177.

[36] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, arXiv:1705.02531 (2017).

[37] Meshkova Yu. M., *On homogenization of the first initial-boundary value problem for periodic hyperbolic systems*, arXiv:1807.03634 (2018).

[38] Мешкова Ю. М., *Усреднение периодических параболических систем по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме при учете корректора*, St. Petersburg Mathematical Society Preprint # 2018-05 (2018).

[39] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **49** (2015), №1, 88–93.

[40] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$*, Appl. Anal. **95** (2016), №7, 1413–1448.

[41] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Appl. Anal. **95** (2016), №8, 1736–1775.

[42] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение задачи Дирихле для эллиптических и параболических систем с периодическими коэффициентами*, Функц. анализ и его прил. **51** (2017), №3, 87–93.

[43] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности*, Алгебра и анализ **29** (2017), №6, 99–158.

[44] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: Two-parametric error estimates*, arXiv:1702.00550v4 (2017).

[45] Moskow Sh., Vogelius M., *First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), №6, 1263–1299.

[46] Moskow Sh., Vogelius M., *First order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. The case of Neumann boundary conditions*, Preprint, Rutgers University, 1997.

[47] Олейник О. А., Иосифьян, Г. А., Шамаев А. С., *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, М., Моск. гос. ун-т, М., 1990.

[48] Пастухова С. Е., *Аппроксимации операторной экспоненты в периодической задаче диффузии со сносом*, Матем. сб. **204** (2013), №2 133–160.

[49] Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н., *Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения*, Докл. РАН **415** (2007), №3, 304–309.

[50] Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н., *Оценки локально-периодического и повторного усреднения: параболические уравнения*, Докл. РАН **428** (2009), №2, 166–170.

[51] Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н., *Об операторных оценках усреднения для эллиптических уравнений с младшими членами*, Алгебра и анализ, **29** (2017), №5, 179–207.

[52] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), №6, 139–177.

[53] Rychkov V. S., *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 237–257.

[54] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[55] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Мат. сб. **115(157)** (1981), №2(6), 204–222.

[56] Сеник Н. Н., *Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов*, Функц. анализ и его прил. **51** (2017), №2, 92–96.

[57] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[58] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), №4, 86–90.

[59] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **220** (2007), 201–233.

[60] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), №4, 390–447.

[61] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.

[62] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems:* L_2*-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), №2, 463-476.

[63] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), №6, 3453-3493.

[64] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра*, Функц. анализ и его прил. **48** (2014), №4, 88–94.

[65] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *с учетом корректора*, Алгебра и анализ **26** (2014), №4, 195–263.

[66] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), №4, 87–166.

[67] Heida M., Neukamm S., Varga M., *Stochastic unfolding and homogenization*, arXiv:1805.09546 (2018).

[68] Xu Q., *Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic system with lower order terms*, J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), №2, 1066–1107.

[69] Xu Q., *Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic systems with lower order terms on the Neumann boundary problem*, J. Diff. Equ. **261** (2016), №8, 4368–4423.

[70] Xu Q., *Convergence rates for general elliptic homogenization problems in Lipschitz domains*, SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), №6, 3742–3788.