

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Сарафанов Олег Васильевич

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ КВАНТОВЫХ ВОЛНОВОДОВ
И ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕЗОНАНСНОМУ ТУННЕЛИРОВАНИЮ**

Специальность 01.01.03 —

«Математическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук
профессор Пламеневский Б.А.

Санкт-Петербург — 2018

Оглавление

Введение	5
1 Волноводы. Принцип излучения. Матрица рассеяния	29
1.1 Расширенное пространство волн	29
1.1.1 Волны в цилиндре	29
1.1.2 Волны в области G	33
1.2 Собственные функции непрерывного спектра. Матрицы рассеяния	34
1.2.1 Естественный и расширенный принципы излучения	34
1.2.2 Аналитичность матриц рассеяния как функций спектрального параметра	40
1.3 Другие свойства матриц рассеяния	46
1.3.1 Связь матриц $S(\mu)$ и $S(\mu)$ при $\tau' < \mu < \tau$	46
1.3.2 Связь матриц $S(\mu)$ и $S(\mu)$ при $\tau < \mu < \tau''$	48
1.3.3 Пределы $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$	52
2 Метод вычисления матрицы рассеяния в волноводах	58
2.1 Метод вычисления матрицы рассеяния вне порогов	58
2.1.1 Формулировка метода	58
2.1.2 Задача в G^R	60
2.1.3 Обоснование метода вычисления матрицы рассеяния	62
2.2 Метод вычисления матрицы рассеяния вблизи порогов	66
2.3 Метод вычисления матрицы рассеяния для эллиптических систем	70
2.3.1 Матрица рассеяния	70
2.3.2 Формулировка метода	73
2.3.3 Задача в G^R	75
2.3.4 Обоснование метода	78
3 Асимптотическая теория резонансного туннелирования в двумерных квантовых волноводах	83
3.1 Постановка задачи о туннелировании электронов малой энергии	83
3.2 Предельные задачи	86
3.2.1 Предельные задачи первого рода	86
3.2.2 Предельные задачи второго рода.	88

3.3	Специальные решения однородных предельных задач первого рода	90
3.4	Асимптотические формулы	93
3.4.1	Асимптотика волновой функции	93
3.4.2	Формулы для \tilde{S}_{11} , \tilde{S}_{12} , C_1 и C_2	95
3.4.3	Формулы для характеристик резонансного туннелирования	98
3.5	Обоснование асимптотики	99
3.6	Асимптотика резонансного туннелирования электронов высокой энергии	106
3.6.1	Постановка задачи	106
3.6.2	Предельные задачи	107
3.6.3	Асимптотика волновых функций	111
3.6.4	Формулы для постоянных C_{ml}	114
3.6.5	Асимптотика матрицы рассеяния	116
3.6.6	Асимптотика полюсов матрицы рассеяния	117
3.6.7	Асимптотика резонансного туннелирования	119
4	Асимптотическая теория резонансного туннелирования в трехмерных квантовых волноводах	122
4.1	Туннелирование электронов малой энергии в трехмерном несимметричном волноводе	122
4.1.1	Постановка задачи	122
4.1.2	Предельные задачи первого рода	124
4.1.3	Предельные задачи второго рода	127
4.2	Туннелирование в волноводе с одним сужением	128
4.2.1	Частные решения предельных задач первого рода	128
4.2.2	Переход через сужение	131
4.2.3	Асимптотические формулы	134
4.2.4	Оценки остатков	137
4.3	Туннелирование в волноводе с двумя сужениями	140
4.3.1	Специальные решения задачи в резонаторе	140
4.3.2	Асимптотические формулы	142
4.3.3	Оценки остатков	149
4.4	Влияние магнитного поля на резонансное туннелирование	158
4.4.1	Постановка задачи	158
4.4.2	Предельные задачи	161
4.4.3	Асимптотические формулы	165
4.4.4	Асимптотические формулы в двумерном случае	166
5	Сравнение асимптотического и численного подходов	169
5.1	Сравнение между первым и вторым порогами	169

5.2 Сравнение выше второго порога	172
5.3 Сравнение в присутствии магнитного поля	175
Приложение. Принцип излучения и матрица рассеяния вне порогов	179
Заключение	204
Список литературы	206

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена развитию асимптотических и численных методов для стационарных задач рассеяния в квантовых волноводах, а также приложениям этих методов к исследованию резонансного туннелирования. Простейшая одномерная модель резонансного туннелирования описывается стационарным уравнением Шредингера с потенциалом, состоящим из двух потенциальных барьеров. Эффект резонансного туннелирования заключается в том, что коэффициент прохождения (то есть вероятность прохождения электронов сквозь барьеры) равен единице при некоторых "резонансных" значениях энергии. Устройства, основанные на эффекте резонансного туннелирования, широко распространены в электронике. Усилия направлены на миниатюризацию и улучшение свойств резонансных структур. В настоящее время наиболее популярны резонансные структуры на основе квантовых точек. Однако, в качестве резонансной структуры может выступать квантовый волновод переменного сечения. Вместо системы "электрод—квантовая точка—электрод" можно рассмотреть квантовый волновод с двумя сужениями. Сужение волновода служит эффективным потенциальным барьером для продольного движения электронов. Часть волновода между сужениями играет роль резонатора, где может возникать резонансное туннелирование. Такие квантовые резонаторы могут использоваться в качестве элементов наноэлектронных устройств и имеют некоторые преимущества в рабочих свойствах и технологии изготовления.

Коэффициенты прохождения и отражения электронов выражаются через элементы волноводной матрицы рассеяния. В работе обосновывается оригинальный метод приближенного вычисления матрицы рассеяния в волноводах (не только квантовых), который позволяет численно исследовать резонансное туннелирование при условии, что диаметр сужений волновода не слишком мал. При стремлении диаметров сужений к нулю численная процедура теряет устойчивость и становится актуальным вопрос об асимптотическом описании резонансного туннелирования. В диссертации получены асимптотические формулы для резонансных значений энергии, описана форма резонансных пиков. Полученные формулы можно использовать, чтобы другим способом получить числовые значения для основных характеристик резонансного туннелирования. Для этого нужно рассмотреть главные части асимптотических формул и приближенно вычислить входящие в них постоянные коэффициенты. Ясно, что численные результаты, полученные из асимптотики, могут быть надежны только при достаточно малых значениях

диаметров сужений, а результаты, полученные непосредственным вычислением матрицы рассеяния — при достаточно больших значениях диаметров. Сравнение "асимптотических" и "численных" результатов показывает, что существует интервал диаметров сужений, в котором они совпадают с высокой степенью точности. Таким образом, асимптотические и численные методы дополняют друг друга и дают полную картину резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения.

Цели и задачи работы. Целью работы является разработка асимптотических и численных методов исследования задач теории рассеяния в волноводах и приложение этих методов к изучению резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения. Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Установить принцип излучения для квантовых волноводов и дать определение матрицы рассеяния на любом интервале непрерывного спектра, возможно, содержащем пороги.
2. Исследовать поведение матрицы рассеяния вблизи порогов.
3. Обосновать метод приближенного вычисления матрицы рассеяния в волноводах как вне порогов, так и в их окрестности.
4. Дать асимптотическое описание резонансного туннелирования в квантовых волноводах с двумя цилиндрическими выходами на бесконечность и с двумя сужениями при стремлении диаметров сужений к нулю.
5. Исследовать, как влияют на резонансное туннелирование усложнение формы волновода, повышение энергии электронов и присутствие в волноводе магнитного поля.
6. Сравнить результаты асимптотического и численного анализа резонансного туннелирования.

Основные результаты работы, выносимые на защиту.

1. В квантовом волноводе с конечным числом цилиндрических выходов на бесконечность установлен принцип излучения и определена матрица рассеяния на любом интервале непрерывного спектра, включая пороги. Показано, что матрица рассеяния как функция спектрального параметра имеет оба конечных односторонних предела на любом пороге и является на нем непрерывной справа.

2. Обоснован метод вычисления матрицы рассеяния как на интервале непрерывного спектра, отделенном от порогов, так и в окрестности порога. Предложенный

метод нечувствителен к присутствию собственных чисел, погруженных в непрерывный спектр (так называемых ловушечных мод). Схема обоснования метода обобщена на волноводы, описываемые произвольной самосопряженной эллиптической системой.

3. В квантовом волноводе, занимающем на плоскости бесконечную полосу с двумя одинаковыми сужениями малого диаметра, получена асимптотика волновой функции, описывающей рассеяние электронов, проходящих в волновод через один из цилиндрических выходов. Из асимптотики волновой функции выведены асимптотические формулы для основных характеристик резонансного туннелирования.

4. В двумерном квантовом волноводе с двумя сужениями изучено, как меняются асимптотические формулы при повышении энергии электронов, при возникновении дополнительных каналов рассеяния и вырожденных собственных чисел резонатора.

5. Построена асимптотическая теория резонансного туннелирования в трехмерных квантовых волноводах с неодинаковыми сужениями. Описано расщепление резонансных пиков при наличии в квантовом волноводе магнитного поля.

6. Проведено сравнение асимптотического и численного описаний резонансного туннелирования для энергий между первым и вторым порогами. Найден интервал диаметров сужений, в котором работают оба подхода. Изучено, как влияет на согласованность двух подходов увеличение интервала энергий до третьего порога.

Научная новизна и практическая значимость. Все выносимые на защиту результаты получены впервые. Развита новая численная и асимптотическая методы исследования волноводов, с их помощью построена полная картина резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения. Полученные результаты могут использоваться для анализа работы электронных приборов, основанных на явлении резонансного туннелирования (см., например, [14, 15, 19]). Кроме того, развитые методы допускают обобщение для исследования аналогичных явлений в упругих и электромагнитных волноводах.

Публикации и личный вклад. Основные результаты по теме диссертации изложены в статьях [1–10], опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК, а также в научной монографии [11]. Результаты диссертации использовались при подготовке патентов [14, 15]. Цели и задачи исследования определялись совместно Л. М. Баскиным, П. Нейтгаанмяки, Б. А. Пламеневским и диссертантом. Обоснование метода вычисления волноводной матрицы рассеяния вне порогов принадлежит Б. А. Пламеневскому и диссертанту в равной степени. В окрестности порогов постановка задачи с условиями излучения в квантовом волноводе, определение матрицы рассеяния и метод ее вычисления принадлежат в равной степени Б. А.

Пламеневскому, А. С. Порецкому и диссертанту. Асимптотические формулы для основных характеристик резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения получены диссертантом лично. Приведенные в диссертации численные результаты получены М. М. Кабардовым, П. Нейттаанмяки и Н. М. Шарковой. Сравнение асимптотики и вычислений проводилось совместно Л. М. Баскиным, П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневским и диссертантом.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: The Ninth U.S. National Congress on Computational Mechanics (USNCCM IX) (Сан-Франциско, 2007), European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, (ECCOMAS) (Венеция, 2008; Вена, 2012), XXII международная конференция им. И. Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (Москва, 2011), Шестая Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VI" (ОТНА) (Ростов-на-Дону 2016), The Eighth St. Petersburg Conference in Spectral Theory (Санкт-Петербург, 2016), 27-я Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ) (Крым, 2016); Петербургский семинар по дифракции и распространению волн (2011, 2017), Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике (Санкт-Петербург, 2017), научные семинары кафедры высшей математики и математической физики СПбГУ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации составляет 210 страниц, список литературы содержит 48 наименований.

Содержание работы

Во **введении** описываются методы исследования, структура и содержание работы.

Основные характеристики резонансного туннелирования выражаются через элементы волноводной матрицы рассеяния. Поэтому, при изучении резонансного туннелирования, главным образом анализируется поведение матрицы рассеяния. В первых двух главах диссертации определяются матрицы рассеяния, описываются их свойства и обосновывается метод вычисления этих матриц. При этом рассматриваются волноводы более общего вида (с конечным числом цилиндрических выходов на бесконечность), чем нужно в последующих главах для исследования резонансного туннелирования. Это обстоятельство не приводит к усложнению рассуждений, зато позволяет расширить круг возможных приложений.

В главе 1 устанавливается принцип излучения для уравнения Гельмгольца в волноводах (то есть исследуется разрешимость краевой задачи с условиями излучения), определяется матрица рассеяния и изучаются ее свойства вблизи пороговых значений спектрального параметра. Доказательство внепорогового варианта принципа излучения известно [40] и в частном случае (для уравнения Гельмгольца) приведено в приложении для удобства ссылок. В той ситуации, когда область изменения спектрального параметра содержит порог, результаты главы получены в работе [8].

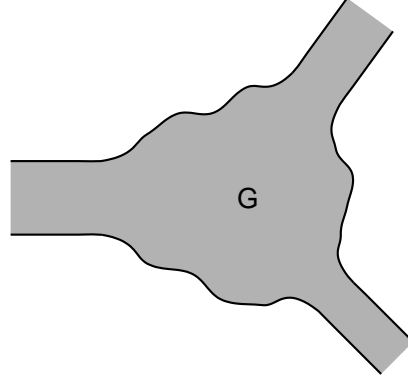


Рисунок 1: Волновод G .

Пусть G — область в \mathbb{R}^{n+1} , $n = 1, 2$, с гладкой границей ∂G , совпадающая вне большого шара с объединением $\Pi_+^1 \cup \dots \cup \Pi_+^T$ конечного числа непересекающихся полуцилиндров

$$\Pi_+^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r, t^r > 0\},$$

где (y^r, t^r) — локальные координаты в Π_+^r и Ω^r — ограниченная область в \mathbb{R}^n (Рис. 1). Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= 0, & x \in G, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial G. \end{aligned} \quad (1)$$

Мы считаем, что при некоторых условиях волновая функция электрона удовлетворяет задаче (1), что она ограничена и не исчезает на бесконечности. Чтобы описать поведение волновой функции на бесконечности, используются решения задачи в цилиндре

$$\begin{aligned} -(\Delta_{y,t} + \mu)u(y,t) &= 0, & (y,t) \in \Omega \times \mathbb{R} = \Pi, \\ u(y,t) &= 0, & (y,t) \in \partial\Pi, \end{aligned} \quad (2)$$

где Ω — область в \mathbb{R}^n и $\Delta_{y,t} = \Delta_y + \partial_t^2$. Непосредственные вычисления показывают, что ненулевые функции

$$\Omega \times \mathbb{R} \ni (y, t) \mapsto \exp(\pm i(\mu - \tau)^{1/2}t)\varphi(y)$$

удовлетворяют задаче (2), только если

$$\begin{aligned} -(\Delta_y + \tau)\varphi(y) &= 0, & y \in \Omega, \\ \varphi(y) &= 0, & y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

то есть φ является собственной функцией задачи (3), а τ — соответствующим собственным числом. Собственные числа задачи (3) называются порогами; они образуют возрастающую последовательность $\tau_1 < \tau_2 < \dots$, стремящуюся к $+\infty$.

Зафиксируем один из порогов $\tau < \mu$ и обозначим через φ_p , $p = 1, \dots, \varkappa(\tau)$, ортонормированный базис в соответствующем собственном подпространстве; $\varkappa(\tau)$ — кратность собственного числа τ задачи (3). Положим

$$u_p^\pm(y, t) = (2|\lambda^\mp|)^{-1/2} \exp(i\lambda^\mp t)\varphi_p(y), \quad (4)$$

где $\lambda^\pm = \pm(\mu - \tau)^{1/2}$. Функции (4) ограничены, удовлетворяют (2) и не стремятся к нулю на бесконечности. Мы будем называть u_p^+ (u_p^-) волной, приходящей из $+\infty$ (уходящей в $+\infty$). В общем случае, когда $\mu \in (\tau_l, \tau_{l+1})$, число пар волн в цилиндре Π равно сумме $\varkappa(\tau_1) + \dots + \varkappa(\tau_l)$.

Пусть μ не совпадает ни с одним из порогов, то есть ни с одним из собственных чисел задач (3) в областях $\Omega_1, \dots, \Omega_\tau$. Зафиксируем μ и пронумеруем все пары волн в цилиндрах Π_1, \dots, Π_τ одним индексом $j = 1, 2, \dots, M$. В пространстве волновых функций, заданных в области G , существуют такие функции Y_1, \dots, Y_M , для которых справедливы разложения

$$Y_l(x) = u_l^+(x) + \sum_{j=1}^M S_{lj} u_j^-(x) + O(\exp(-\delta|x|)) \quad (5)$$

при $|x| \rightarrow \infty$, где δ — достаточно малое положительное число и $l = 1, \dots, M$. Матрица

$$S(\mu) = \|S_{lj}(\mu)\|_{j,l=1}^M$$

называется матрицей рассеяния, она унитарна и симметрична. Размер $M = M(\mu)$ матрицы $S(\mu)$ зависит от μ , остается постоянным между двумя соседними порогами и испытывает скачки на порогах, возрастая до $+\infty$ при $\mu \rightarrow +\infty$. В диссер-

тации показано, что на любом пороге τ существуют оба односторонних предела матрицы $S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$ и, кроме того, S можно естественным образом определить на пороге τ , причем она будет непрерывна справа.

Пусть теперь $\tau' < \tau''$ — пороги волновода G , между которыми расположен единственный порог τ . Положим

$$w_k^\pm(y, t; \mu) = 2^{-1/2} \left(\frac{e^{it\sqrt{\mu-\mu_k}} + e^{-it\sqrt{\mu-\mu_k}}}{2} \mp \frac{e^{it\sqrt{\mu-\mu_k}} - e^{-it\sqrt{\mu-\mu_k}}}{2\sqrt{\mu-\mu_k}} \right) \varphi_k(y), \quad (6)$$

$$w_p^\pm(y, t; \mu) = u_p^\pm(y, t; \mu), \quad (7)$$

где $p = 1, \dots, L$, $k = L+1, \dots, M$, $M = L + \varkappa(\tau)$, а функции u_p^\pm определены формулами вида (4).

Предложение 0.0.1. *Функции $\mu \mapsto w_k^\pm(y, t; \mu)$, $k = L+1, \dots, M$, допускают аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Эти целые функции гладко зависят от параметров $y \in \bar{\Omega}$, $t \in \mathbb{R}$ (т. е. любые производные по y и t также являются целыми функциями).*

Базис волн (6)–(7) будем называть устойчивым на пороге τ . Для $\mu \in (\tau', \tau)$ волны w_k^\pm оказываются экспоненциально растущими при $x \rightarrow \infty$. На интервале (τ, τ'') в пространстве собственных функций непрерывного спектра существует базис $\mathcal{Y}_1(\cdot, \mu), \dots, \mathcal{Y}_M(\cdot, \mu)$, подчиненный условиям

$$\mathcal{Y}_j(x, \mu) = w_j^+(x, \mu) + \sum_{k=1}^M \mathcal{S}_{jk}(\mu) w_k^-(x, \mu) + O(e^{-\delta|x|}). \quad (8)$$

В отличие от матрицы $S(\mu)$ новая матрица $\mathcal{S}(\mu) = \|\mathcal{S}_{jk}(\mu)\|$ сохраняет размер на интервале (τ', τ'') ; она унитарна и симметрична. Матрица $\mathcal{S}(\mu)$ называется расширенной матрицей рассеяния. Отметим, что число μ может оказаться собственным числом задачи (1). Тогда собственные функции непрерывного спектра (8) определены лишь с точностью до линейной комбинации собственных функций, отвечающих числу μ . Так как собственные функции (в отличие от \mathcal{Y}_j) обязаны убывать на бесконечности с экспоненциальной скоростью, то матрица $\mathcal{S}(\mu)$ определена однозначно.

Приведем корректную постановку задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= f, & x \in G, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial G, \end{aligned} \quad (9)$$

с "расширенными" условиями излучения в волноводе G . При целых $l \geq 0$ обозначим через $H^l(G)$ пространство Соболева. Пусть ρ_γ — гладкая положительная в \overline{G} функция, которая на Π_+^r задана равенством $\rho_\gamma(y^r, t^r) = \exp(\gamma t^r)$, причем $\gamma \in \mathbb{R}$. Пусть еще $H_\gamma^l(G)$ — пространство с нормой $\|u; H_\gamma^l(G)\| = \|\rho_\gamma u; H^l(G)\|$, а $\dot{H}_\gamma^2(G)$ обозначает замыкание в $H_\gamma^2(G)$ множества гладких на \overline{G} функций, имеющих компактный носитель в \overline{G} и обращающихся в ноль на границе ∂G . Оператор $u \mapsto (-\Delta - \mu)u$ задачи (9) осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{A}_\gamma(\mu) : \dot{H}_\gamma^2(G) \rightarrow H_\gamma^0(G). \quad (10)$$

Обозначим через \mathfrak{K} линейную оболочку $\mathcal{L}(w_1^-, \dots, w_M^-)$. Норму элемента $w = \sum c_j w_j^- + v \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$, где $c_j \in \mathbb{C}$ и $v \in \dot{H}_\gamma^2(G)$, определим равенством

$$\|w\| = \sum |c_j| + \|v; H_\gamma^2(G)\|.$$

Пусть $\mathbf{A}(\mu)$ — сужение оператора $\mathcal{A}_\gamma(\mu)$ на пространство $\mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$, тогда непрерывно отображение

$$\mathbf{A}(\mu) : \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G) \rightarrow H_\gamma^0(G).$$

Теорема 0.0.2. Пусть $\mu \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$, $\gamma \in (\sqrt{\delta}, \sqrt{\tau'' - \tau - \delta})$, и пусть $\{w_k^\pm(\cdot, \mu)\}$ — описанный выше устойчивый базис волн в G . Пусть z_1, \dots, z_d — базис в пространстве $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)$, $f \in H_\gamma^0(G)$ и $(f, z_j)_G = 0$, $j = 1, \dots, d$. Тогда:

1. Существует решение $w \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$ уравнения $\mathbf{A}(\mu)w = f$, определенное с точностью до произвольного слагаемого из линеала $\mathcal{L}(z_1, \dots, z_d)$.
2. Справедливо включение

$$v \equiv w - c_1 w_1^- - \dots - c_M w_M^- \in H_\gamma^2(G),$$

где $c_j = (f, \overline{\mathcal{Y}}_j)_G$; черта над \mathcal{Y}_j означает комплексное сопряжение.

3. Для решения w выполняется неравенство

$$\|v; H_\gamma^2(G)\| + |c_1| + \dots + |c_M| \leq \text{const} (\|f; H_\gamma^0(G)\| + \|\rho_\gamma v; L_2(G)\|). \quad (11)$$

Решение w_0 , подчиненное условиям $(w_0, z_j)_G = 0$ при $j = 1, \dots, d$, единственно, и для него верна оценка (11) с заменой правой части на $\text{const} \|f; \mathcal{H}_\gamma(G)\|$.

Перейдем к описанию аналитических свойств матриц $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$.

Теорема 0.0.3. Пусть $\tau' < \tau < \tau''$ — три последовательных порога для задачи (1). Тогда:

i). На интервалах (τ', τ) и (τ, τ'') существуют аналитические базисы $\{\mu \mapsto Y_j(\cdot, \mu)\}$ в пространствах собственных функций непрерывного спектра задачи (1), удовлетворяющие формулам (5) с матрицей рассеяния $\mu \mapsto S(\mu)$, аналитической на указанных интервалах.

ii). На интервале (τ', τ'') существует аналитический базис $\{\mu \mapsto \mathcal{Y}_j(\cdot, \mu)\}$ в пространствах собственных функций непрерывного спектра задачи (1), удовлетворяющий формулам (8) с матрицей рассеяния $\mu \mapsto \mathcal{S}(\mu)$, аналитической на указанном интервале.

Элементы "нерасширенной" матрицы $S(\mu)$ выражаются в терминах, связанных только с матрицей $\mathcal{S}(\mu)$. Это позволяет, в частности, доказать существование конечных пределов $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$ и вычислить такие пределы. Для базиса $\{\mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu)\}_j^M$ в пространстве собственных функций непрерывного спектра (см. теорему 0.0.3, ii)) введем столбцы $\mathcal{Y}_{(1)}^+ = (\mathcal{Y}_1^+, \dots, \mathcal{Y}_L^+)^t$ и $\mathcal{Y}_{(2)}^+ = (\mathcal{Y}_{L+1}^+, \dots, \mathcal{Y}_M^+)^t$ и, в соответствии с этими обозначениями, запишем при $\mu \in (\tau', \tau'')$ матрицу рассеяния в виде

$$\mathcal{S}(\mu) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)}(\mu) & \mathcal{S}_{(12)}(\mu) \\ \mathcal{S}_{(21)}(\mu) & \mathcal{S}_{(22)}(\mu) \end{pmatrix},$$

где, например, $\mathcal{S}_{(11)}(\mu)$ — блок размера $L \times L$, а $\mathcal{S}_{(22)}(\mu)$ — блок размера $(M - L) \times (M - L)$. Положим еще

$$D = ((\mu - \tau)^{1/2} + 1)/((\mu - \tau)^{1/2} - 1),$$

причем $(\mu - \tau)^{1/2} = i(\tau - \mu)^{1/2}$ для $\mu \leq \tau$ и $(\tau - \mu)^{1/2} \geq 0$.

Лемма 0.0.4. Пусть $\mu \in (\tau', \tau]$ и $\mathcal{S}(\mu)$ — матрица рассеяния из теоремы 0.0.3, ii). Тогда

$$\begin{aligned} \ker(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)) &\subset \ker \mathcal{S}_{(12)}(\mu), \\ \text{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)) &\supset \text{Im} \mathcal{S}_{(21)}(\mu). \end{aligned}$$

Поэтому оператор $\mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}$ определен на образе $\text{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))$ и на образе $\text{Im} \mathcal{S}_{(21)}(\mu)$.

Следующее утверждение по существу содержится в [41].

Предложение 0.0.5. Пусть $\mu \in (\tau', \tau)$, а $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$ — матрицы рассеяния из теоремы 0.0.3. Тогда справедливо равенство

$$S(\mu) = \mathcal{S}_{(11)}(\mu) - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{(21)}(\mu). \quad (12)$$

На интервале (τ, τ'') матрицу S разобьем на четыре блока с диагональными блоками S_{11} размера $L \times L$ и S_{22} размера $(M - L) \times (M - L)$. Положим еще $d^\pm = 2^{-1}(\lambda^{1/2} \pm \lambda^{-1/2})$.

Предложение 0.0.6. При $\mu \in (\tau, \tau'')$ для блоков $S_{ij}(\mu)$ матрицы рассеяния $S(\mu)$ справедливы представления

$$S_{11} = \mathcal{S}_{11} - \mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}\mathcal{S}_{21}, \quad (13)$$

$$S_{12} = \mathcal{S}_{12}d^+ - \mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+ + I_{M-L}d^-), \quad (14)$$

$$S_{21} = (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}\mathcal{S}_{21}, \quad (15)$$

$$S_{22} = (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+ + I_{M-L}d^-). \quad (16)$$

Так как матрица $\mathcal{S}(\mu)$ аналитична в окрестности порога τ , то из формул (12)–(16) вытекает

Теорема 0.0.7. Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \tau-0} S(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{11}(\mu) = \mathcal{S}_{(11)}(\tau) - \mathcal{S}_{(12)}(\tau)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\tau))^{-1}\mathcal{S}_{(21)}(\tau), \\ \lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{12}(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{21}(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{22}(\mu) = P - Q, \end{aligned}$$

где P — ортогональный проектор в \mathbb{C}^{M-L} на ядро $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$ и $Q = I - P$. В частности, если ядро $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$ тривиально, то $\lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{22}(\mu) = -I_{M-L}$.

Переход к устойчивому базису решений в связи со сменой асимптотических режимов является достаточно стандартным приемом в асимптотических исследованиях. Например, в [22, 38] устойчивый базис вводился для исследования асимптотики решений эллиптических краевых задач в окрестности конической точки на границе. Расширенная матрица рассеяния в различных геометрических ситуациях вводилась в работах [31, 41, 43] для общих эллиптических систем, самосопряженных относительно формулы Грина. В [30] асимптотика матрицы рассеяния для дифракционной решетки (малым параметром служило удаление энергии электрона от порога) была обоснована, по существу, с использованием устойчивого базиса. В [39] свойства матрицы рассеяния вблизи порога исследовались методами работы [30].

Во второй главе обосновывается метод вычисления матрицы рассеяния, применяемый впоследствии для численного исследования резонансного туннелирования. Введем следующие обозначения:

$$\Pi_+^{r,R} = \{(y^r, t^r) \in \Pi^r : t^r > R\}, \quad G^R = G \setminus \bigcup_{r=1}^N \Pi_+^{r,R}$$

при больших R . Тогда $\partial G^R \setminus \partial G = \Gamma^R = \cup_r \Gamma^{r,R}$, где $\Gamma^{r,R} = \{(y^r, t^r) \in \Pi^r : t^r = R\}$. Мы ищем приближение для строки (S_{l1}, \dots, S_{lM}) матрицы рассеяния $S = S(\mu)$. Таким приближением служит минимизатор некоторого квадратичного функционала. Чтобы построить этот функционал, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -(\Delta + \mu)\mathcal{X}_l^R &= 0, & x \in G^R; \\ \mathcal{X}_l^R &= 0, & x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)\mathcal{X}_l^R &= (\partial_\nu + i\zeta)(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j u_j^-), & x \in \Gamma^R, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ фиксируется произвольным образом, ν — вектор единичной нормали, а a_1, \dots, a_M — комплексные числа.

Поясним происхождение этой задачи. Волновая функция электрона Ψ_l является решением задачи (1), следовательно, удовлетворяет первым двум уравнениям из (17). Асимптотика (5) допускает дифференцирование, поэтому

$$(\partial_\nu + i\zeta)\Psi_l = (\partial_\nu + i\zeta)(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j u_j^-) + O(e^{-\gamma R})$$

при $a_j = S_{lj}$. Таким образом, Ψ_l удовлетворяет последнему уравнению в (17) с точностью до экспоненциально малой невязки.

В качестве приближения для строки (S_{l1}, \dots, S_{lM}) возьмем минимизатор $a^0(R) = (a_1^0(R), \dots, a_M^0(R))$ функционала

$$J_l^R(a_1, \dots, a_M) = \|\mathcal{X}_l^R - u_l^+ - \sum_{j=1}^M a_j u_j^-; L_2(\Gamma^R)\|^2, \quad (18)$$

где \mathcal{X}_l^R — решение задачи (17). Можно ожидать, что $a_j^0(R, \mu) \rightarrow S_{lj}(\mu)$ с экспоненциальной скоростью при $R \rightarrow \infty$ и $j = 1, \dots, M$. Чтобы найти зависимость решения \mathcal{X}_l^R от параметров a_1, \dots, a_M , рассмотрим краевые задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)v_j^\pm &= 0, & x \in G^R; \\ v_j^\pm &= 0, & x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)v_j^\pm &= (\partial_\nu + i\zeta)u_j^\pm, & x \in \Gamma^R; \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (19)$$

Ясно, что $\mathcal{X}_l^R = v_{l,R}^+ + \sum_j a_j v_{j,R}^-$, где $v_j^\pm = v_{j,R}^\pm$ — решения задач (19). Введем матрицы размера $M \times M$ с элементами

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ij}^R &= ((v_i^- - u_i^-), (v_j^- - u_j^-))_{\Gamma^R}, \\ \mathcal{F}_{ij}^R &= ((v_i^+ - u_i^+), (v_j^- - u_j^-))_{\Gamma^R},\end{aligned}\tag{20}$$

и положим

$$\mathcal{G}_i^R = ((v_i^+ - u_i^+), (v_i^+ - u_i^+))_{\Gamma^R}.$$

Функционал (18) можно переписать в виде

$$J_l^R(a, \mu) = \langle a \mathcal{E}^R(\mu), a \rangle + 2\operatorname{Re} \langle \mathcal{F}_l^R(\mu), a \rangle + \mathcal{G}_l^R(\mu),$$

где \mathcal{F}_l^R — строка матрицы \mathcal{F}^R с номером l , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{C}^M . Минимум достигается на строке $a^0 = a^0(R, \mu)$, удовлетворяющей системе $a^0(R, \mu) \mathcal{E}^R + \mathcal{F}_l^R = 0$. Таким образом, в качестве приближения $S^R(\mu)$ для матрицы рассеяния $S(\mu)$ принимается решение уравнения $S^R \mathcal{E}^R + \mathcal{F}^R = 0$.

Для того чтобы обосновать метод, необходимо убедиться, что задачи (19) однозначно разрешимы при больших R и при $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, матрица \mathcal{E}^R невырожденная, а минимизатор $a^0(R, \mu)$ функционала $J_l^R(\cdot, \mu)$ стремится к строке $(S_{l1}(\mu), \dots, S_{lM}(\mu))$ матрицы рассеяния при $R \rightarrow \infty$ и $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Предложение 0.0.8. *При любых $\mu \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $R \geq R_0$, где R_0 — достаточно большое положительное число, задача*

$$\begin{aligned}-(\Delta + \mu)v &= 0, & x \in G^R; \\ v &= 0, & x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)v &= h, & x \in \Gamma^R,\end{aligned}\tag{21}$$

имеет единственное обобщенное решение $v \in H^1(G^R)$ для любой правой части $h \in L_2(\Gamma^R)$.

Предложение 0.0.9. *Пусть μ , ζ и R подчинены тем же условиям, что и в предложении 0.0.8. Тогда матрица \mathcal{E}^R с элементами (20) невырождена.*

Теорема 0.0.10. *Пусть $[\mu', \mu'']$ — отрезок непрерывного спектра, не содержащий порогов. При всех $R \geq R_0$, $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\mu \in [\mu', \mu'']$ существует единственный минимизатор $a(R, \mu) = (a_1(R, \mu), \dots, a_M(R, \mu))$ функционала (18), причем*

$$|a_j(R, \mu) - S_{lj}(\mu)| \leq c(\Lambda, \zeta) e^{-\Lambda R}, \quad j = 1, \dots, M,\tag{22}$$

где постоянные Λ и $c(\Lambda, \zeta)$ положительны и не зависят от R и μ .

Для уравнения Гельмгольца в близкой ситуации обсуждаемый метод был предложен в работе [24]. Там же была описана схема его обоснования без полного исследования разрешимости задачи в G^R ; предполагалось, что исходная задача в волноводе G не имеет вещественных собственных значений (ловушечных мод). Обобщение метода на случай самосопряженных эллиптических систем с переменными коэффициентами, стабилизирующимися на бесконечности с экспоненциальной скоростью, дано в [7]. В [3] этот результат был распространен на периодические волноводы с медленной стабилизацией коэффициентов. В упомянутых работах [7] и [3] разрешимость задачи в G^R постулировалась.

Полное обоснование метода впервые дано в работе [2] для уравнения Гельмгольца в двумерном волноводе с одним выходом на бесконечность. При этом было показано, что метод нечувствителен к наличию точечного спектра. В волноводах сложной геометрии точечный спектр, как правило, присутствует, и возможность об этом не заботиться является существенным преимуществом метода. Для уравнения Гельмгольца в волноводах произвольной размерности и с произвольным (конечным) числом цилиндрических выходов метод обоснован в книге [11]. Метод вычисления матрицы рассеяния в электромагнитных волноводах анонсирован в заметке [44]. Реализация метода для квантовых волноводов проведена в [4], [6], [9].

На интервале непрерывного спектра, содержащем порог, аналогичным образом можно найти приближение для расширенной матрицы рассеяния $\mathcal{S}(\mu)$, определенной соотношениями (8). Если матрица $\mathcal{S}(\mu)$ вычислена, то, используя связь между $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$, установленную в первой главе, можно получить приближение для "нерасширенной" матрицы рассеяния $S(\mu)$ в окрестности порога (в том числе и на самом пороге). Эти результаты получены в работе [8], вычисления вблизи порога проводились в [28], [29].

Отметим в этой связи метод R-матрицы, изложенный, например, в [20]. Он применим только к волноводам специфической формы — составленным из отрезков цилиндров разного радиуса (см. [45–48]). Однако такие волноводы оказываются неудовлетворительными с точки зрения физики.

В третьей главе начинается асимптотическое исследование резонансного туннелирования. Волновод занимает на плоскости бесконечную полосу с двумя одинаковыми сужениями диаметра ε , симметричную относительно координатных осей. Волновая функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца в этой полосе и обращается в ноль на границе. Энергия электронов (спектральный параметр в уравнении Гельмгольца) предполагается принадлежащей интервалу между первым и вторым порогами, поэтому каждому выходу на бесконечность соответствует только один

канал рассеяния. Цель — вывести асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ для резонансной энергии k_{res}^2 , для коэффициентов прохождения $T(k^2)$ и отражения $R(k^2)$, а также для добротности резонатора. Эти результаты получены в [4].

Как оказывается, асимптотические формулы существенным образом зависят от предельной формы сужений. Мы считаем, что предельный волновод вблизи каждого сужения совпадает с парой вертикальных углов. На первом этапе строится асимптотика соответствующей волновой функции методом "составных" асимптотических разложений (общая теория метода изложена, например, в [37], [33]). Такие разложения содержат слагаемые двух родов: слагаемые первого рода зависят от "медленной" переменной x и дают приближение для волновой функции "далеко" от сужений; слагаемые второго рода зависят от быстрых переменных x/ε и служат приближением в окрестности сужений. Эти слагаемые являются решениями так называемых предельных задач первого и второго рода, соответственно. Анализ полученных разложений позволяет вывести асимптотические формулы для упомянутых характеристик резонансного туннелирования.

Для того, чтобы описать область $G(\varepsilon)$ в \mathbb{R}^2 , занимаемую волноводом, мы введем две вспомогательные области G и Ω в \mathbb{R}^2 . Область G — полоса

$$G = \mathbb{R} \times D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty); y \in D = (-l/2, l/2)\}.$$

Перейдем к описанию Ω . Через K обозначим пару вертикальных углов с вершиной в начале координат O ; считаем, что область K содержит ось x и симметрична относительно координатных осей. Множество $K \cap S^1$, где S^1 — единичная окружность, состоит из двух простых дуг. Предположим, что Ω содержит K вместе с некоторой окрестностью начала O , а вне большого круга (с центром в начале) Ω совпадает с K . Граница $\partial\Omega$ области Ω предполагается гладкой (см. Рис. 2).

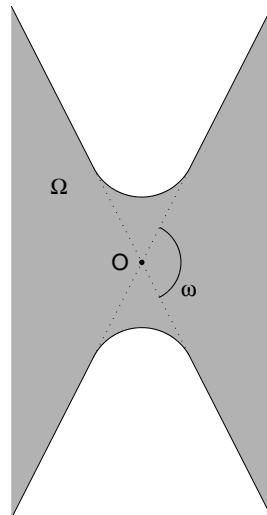
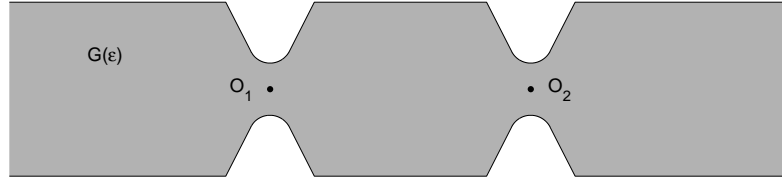


Рисунок 2: Область Ω .

Рисунок 3: Волновод $G(\varepsilon)$.

Обозначим через $\Omega(\varepsilon)$ область, полученную из Ω сжатием с центром в O и коэффициентом ε . Другими словами, $(x,y) \in \Omega(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \in \Omega$. Пусть K_j и $\Omega_j(\varepsilon)$ обозначают K и $\Omega(\varepsilon)$, сдвинутые на вектор $\mathbf{r}_j = (x_j^0, 0)$, $j = 1, 2$. Положим $G(\varepsilon) = G \cap \Omega_1(\varepsilon) \cap \Omega_2(\varepsilon)$ (см. Рис. 3).

Волновая функция свободного электрона с энергией k^2 удовлетворяет краевой задаче

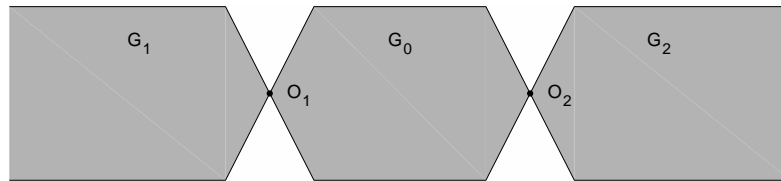
$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) - k^2 u(x, y) &= 0, & (x, y) \in G(\varepsilon), \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial G(\varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

Кроме того, u подчиняется некоторым условиям излучения на бесконечности. Предположим, что k^2 лежит в интервале между первым и вторым порогами, то есть в каждом выходе на бесконечность может распространяться только одна входящая и одна уходящая волны. Пусть, например, справедливо разложение

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1^+(x, y) + S_{11} u_1^-(x, y) + O(\exp(\delta x)), & x \rightarrow -\infty, \\ S_{12} u_2^-(x, y) + O(\exp(-\delta x)), & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (24)$$

Тогда u описывает рассеяние волны, входящей из $-\infty$, и определяет первую строку (S_{11}, S_{12}) матрицы рассеяния. Коэффициент прохождения определяется равенством $T = |S_{12}|^2$.

Положим $G(0) = G \cap K_1 \cap K_2$ (Рис. 4); то есть $G(0)$ состоит из трех частей G_0, G_1 и G_2 , где G_1 и G_2 — бесконечные области, а G_0 — ограниченный резонатор. Краевые задачи

Рисунок 4: "Предельный" волновод $G(0)$.

$$\begin{aligned} -\Delta v(x,y) - k^2 v(x,y) &= f, & (x,y) \in G_j, \\ v(x,y) &= 0, & (x,y) \in \partial G_j, \end{aligned} \quad (25)$$

где $j = 0,1,2$, называются предельными задачами первого рода. В областях Ω_j , $j = 1,2$, мы рассматриваем краевые задачи

$$\begin{aligned} \Delta w(\xi_j, \eta_j) &= F(\xi_j, \eta_j), & (\xi_j, \eta_j) \in \Omega_j, \\ w(\xi_j, \eta_j) &= 0, & (\xi_j, \eta_j) \in \partial \Omega_j, \end{aligned} \quad (26)$$

которые называются предельными задачами второго рода; (ξ_j, η_j) — декартовы координаты с центром в O_j .

Пусть Θ — срезающая функция на \mathbb{R}_+ , такая, что $\Theta(t) = 1$ при $t < t_0$ и $\Theta(t) = 0$ при $t > 2t_0$, где t_0 — достаточно малое положительное число. Введем срезки

$$\begin{aligned} \chi_{1,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_1/\varepsilon)) \mathbf{1}_{G_1}(x,y), & \chi_{2,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_2/\varepsilon)) \mathbf{1}_{G_2}(x,y), \\ \chi_{0,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_1/\varepsilon) - \Theta(r_2/\varepsilon)) \mathbf{1}_{G_0}(x,y), \end{aligned}$$

где r_j — расстояние от точки (x,y) до O_j , $\mathbf{1}_{G_j}$ — характеристическая функция множества G_j . Асимптотика волновой функции u имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,y;\varepsilon) &= \chi_{1,\varepsilon}(x,y)v_1(x,y;\varepsilon) + \chi_{0,\varepsilon}(x,y)v_0(x,y;\varepsilon) + \chi_{2,\varepsilon}(x,y)v_2(x,y;\varepsilon) \\ &+ \varepsilon^2 \Theta(r_1)w_1(\varepsilon^{-1}(x - x_1^0), \varepsilon^{-1}y; \varepsilon) + \varepsilon^2 \Theta(r_2)w_2(\varepsilon^{-1}(x - x_2^0), \varepsilon^{-1}y; \varepsilon) + R(x,y;\varepsilon), \end{aligned} \quad (27)$$

где v_j — решения однородных предельных задач первого рода (25), w_j — решения предельных задач второго рода (26), R — остаток.

Обозначим через k_e^2 простое собственное число задачи (25) в резонаторе G_0 , а через $k_r^2(\varepsilon)$ — резонансную энергию, такую, что $k_r^2(\varepsilon) \rightarrow k_e^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$ справедливы асимптотические разложения

$$T(k,\varepsilon) = \frac{1}{1 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon^{4\pi/\omega}} \right)^2} (1 + O(\varepsilon^{2-\delta})), \quad (28)$$

$$k_r^2(\varepsilon) = k_e^2 + Q\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega+2-\delta}), \quad (29)$$

$$\Upsilon(\varepsilon) = \frac{1}{P} \varepsilon^{4\pi/\omega} (1 + O(\varepsilon^{2-\delta})), \quad (30)$$

где $T(k,\varepsilon)$ — коэффициент прохождения, $\Upsilon(\varepsilon)$ — ширина резонансного пика на половине его высоты (то есть $\Upsilon(\varepsilon)^{-1}$ — добротность резонатора), ω — растрор углов

K_j (см. Рис. 2), δ — достаточно малое положительное число; P и Q представляют собой произведения нескольких постоянных из асимптотических разложений для решений предельных задач вблизи угловых точек или на бесконечности.

Опишем схему обоснования асимптотики. В первую очередь оценивается остаток R в формуле (27). Для этого R выражается из (27) и подставляется в задачу (23). Если известна оценка для резольвенты задачи

$$\Delta u + k^2 u = f \quad \text{в } G(\varepsilon), \quad u = 0 \quad \text{на } \partial G(\varepsilon), \quad (31)$$

то остаток оценивается через норму возникшей невязки. Вывод оценки для резольвенты осложняется тем, что она зависит от двух параметров k и ε . Причем резольвента, как функция параметра k , имеет полюс в нижней комплексной полуплоскости, стремящийся к вещественной оси (точнее, к собственному числу резонатора) при $\varepsilon \rightarrow 0$. На втором шаге с помощью оценки для R выводятся оценки остатков в асимптотических формулах (28)–(30).

Введем функциональные пространства для задачи (31). Пусть Θ — та же функция, что и в (27), и пусть срезки η_j , $j = 0, 1, 2$, отличны от нуля только в G_j и удовлетворяют соотношению $\eta_1(x, y) + \Theta(r_1) + \eta_0(x, y) + \Theta(r_2) + \eta_2(x, y) = 1$ в $G(\varepsilon)$. Для любых $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и $l = 0, 1, \dots$ пространство $V_{\gamma, \delta}^l(G(\varepsilon))$ есть пополнение по норме

$$\begin{aligned} & \|u; V_{\gamma, \delta}^l(G(\varepsilon))\| \\ &= \left(\int_{G(\varepsilon)} \sum_{|\alpha|=0}^l \left(\sum_{j=1}^2 \Theta^2(r_j) (r_j^2 + \varepsilon_j^2)^{\gamma-l+|\alpha|} + \eta_1^2 e^{2\delta|x|} + \eta_0 + \eta_2^2 e^{2\delta|x|} \right) |\partial^\alpha v|^2 dx dy \right)^{1/2} \end{aligned}$$

множества гладких функций с компактным носителем на множестве $\overline{G(\varepsilon)}$. Обозначим через $V_{\gamma, \delta}^{0,1}$ пространство функций f , аналитически зависящих от k^2 , принимающих значения в $V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))$ и удовлетворяющих при $k^2 = k_e^2$ условию $(\chi_{0, \varepsilon^\sigma} f, v_e)_{G_0} = 0$, где $\sigma > 0$ — достаточно малое число, k_e^2 — простое собственное число задачи (25) в G_0 , а v_e — собственная функция, отвечающая числу k_e^2 .

Предложение 0.0.11. Пусть k_r^2 — резонанс, $k_r^2 \rightarrow k_e^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и пусть $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$. Пусть еще γ удовлетворяет условию $\pi/\omega - 2 < \gamma - 1 < \pi/\omega$, $f \in V_{\gamma, \delta}^{0,1}(G(\varepsilon))$, а u — решение задачи (31), допускающее представление

$$u = \tilde{u} + \eta_1 A_1^- U_1^- + \eta_2 A_2^- U_2^-,$$

где $A_j^- = \text{const}$ и $\tilde{u} \in V_{\gamma,\delta}^2(G(\varepsilon))$ при малых $\delta > 0$. Тогда

$$\|\tilde{u}; V_{\gamma,\delta}^2(G(\varepsilon))\| + |A_1^-| + |A_2^-| \leq c \|f; V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))\|,$$

где постоянная c не зависит ни от f , ни от ε .

Главная часть асимптотики (27) допускает разложение вида (24) с некоторыми другими постоянными \tilde{S}_{11} , \tilde{S}_{12} вместо S_{11} , S_{12} . Следующая теорема показывает, что эти постоянные служат приближением для элементов первой строки матрицы рассеяния (S_{11}, S_{12}) .

Теорема 0.0.12. Пусть выполнены условия предложения 0.0.11. Тогда справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} |S_{11} - \tilde{S}_{11}| + |S_{12} - \tilde{S}_{12}| &\leq c |\tilde{S}_{12}| \varepsilon^{2-\delta}, \\ |S_{21} - \tilde{S}_{21}| + |S_{22} - \tilde{S}_{22}| &\leq c |\tilde{S}_{22}| \varepsilon^{2-\delta}, \end{aligned}$$

где постоянная c не зависит от ε и k , δ — произвольно малое положительное число.

Анализ формул для \tilde{S}_{11} , \tilde{S}_{12} и оценки из предыдущей теоремы приводят к итоговому результату.

Теорема 0.0.13. Пусть выполнены условия предложения 0.0.11. Тогда справедливы асимптотические разложения (28)–(30).

В заключительном параграфе третьей главы собственное число резонатора предполагается вырожденным. Считаем, что область изменения спектрального параметра не содержит порогов, то есть число каналов рассеяния остается постоянным, но теперь может быть любым. Как было сказано выше, в окрестности простого собственного числа резонатора график коэффициента прохождения имеет острый пик при некотором "резонансном" значении энергии, которое при стремлении диаметра сужений к нулю приближается к собственному числу резонатора. В случае вырожденного собственного числа, главный член асимптотики коэффициента прохождения имеет два пика с таким же поведением.

Теорема 0.0.14. Пусть k_e^2 — собственное число задачи (25) в резонаторе G_0 кратности $\kappa \geq 2$. В окрестности числа k_e^2 присутствуют два резонансных значения спектрального параметра k_1^2 и k_2^2 , при этом справедливы разложения

$$k_j^2 = k_e^2 - \Lambda_j \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega+\tau}), \quad j = 1, 2,$$

где постоянные Λ_j положительны. При $|k^2 - k_e^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$ асимптотика коэффициента прохождения имеет вид

$$T(k, \varepsilon) = \frac{P \varepsilon^{4\pi/\omega} (k^2 - k_e^2)^2}{[(k^2 - k_1^2)^2 + Q_1 \varepsilon^{4\pi/\omega}] [(k^2 - k_2^2)^2 + Q_2 \varepsilon^{4\pi/\omega}]} (1 + O(\varepsilon^\tau)),$$

где постоянные P и Q_j положительны и зависят только от геометрии волновода; τ — некоторое положительное число.

Отметим, что при $k = k_e$ старший член асимптотики обращается в ноль, то есть происходит резонансное отражение, чего не наблюдалось в случае, когда собственное число резонатора предполагалось простым. Исследование многоканального резонансного туннелирования впервые проведено в книге [11] при условии, что собственное число резонатора простое. Случай вырожденного собственного числа резонатора изучен в работе [10].

Резонансы в квантовых волноводах, помещенных во внешнее поле, исследовались весьма активно (см., например, [23, 36] и приведенную там литературу). Резонансное туннелирование, вызванное геометрией волновода (в отсутствие заполнения и внешних полей), асимптотическими средствами практически не изучалось. Упомянем в этой связи работу [17], где рассматривался случай, когда резонатор имеет форму шара и почти касается цилиндра. Случай прямоугольного резонатора, соединенного с выходами на бесконечность тонкими перемычками, рассмотрен в [18]. В обеих работах [17, 18] изучалась нестационарная задача рассеяния в рамках теории Бирмана-Като.

В четвертой главе излагается обобщение асимптотической теории, развитой в главе 3, на несимметричные трехмерные квантовые волноводы и на волноводы, помещенные в магнитное поле. **В первых трех параграфах четвертой главы** рассматривается трехмерный волновод с двумя непересекающимися цилиндрическими выходами \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 на бесконечность; оси этих выходов могут иметь произвольное направление. Волновод имеет два сужения: одно сужение в \mathcal{C}_1 , а второе — в \mathcal{C}_2 . Диаметры сужений ε_1 и ε_2 , вообще говоря, различны. Граница волновода предполагается гладкой. Обозначим волновод через $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Предельный волновод $G(0, 0)$ состоит из двух неограниченных частей G_1, G_2 и из ограниченного резонатора G_0 . Резонатор может иметь произвольную форму. В окрестности точки $O_j = \overline{G_0} \cap \overline{G_j}$ множество $G(0, 0)$ совпадает с двойным конусом \mathcal{K}_j , $j = 1, 2$. Конус \mathcal{K}_j состоит из двух частей, симметричных друг другу относительно общей вершины.

Волновая функция свободного электрона с энергией $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ удовлетворяет краевой задаче

$$-\Delta u - k^2 u = 0 \text{ в } G(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad u = 0 \text{ на } \partial G(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

и некоторым условиям излучения на бесконечности. Мы рассматриваем рассеяние волны, приходящей из \mathcal{C}_1 , и разыскиваем "резонансные" значения $k_r = k_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ параметра k , при которых коэффициент прохождения $T = T(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ принимает максимальные значения. Эти результаты получены в [1].

Теорема 0.0.15. Пусть k_e^2 — простое собственное число (лежащее между первым и вторым порогами) задачи в резонаторе

$$-\Delta v(x) - k^2 v(x) = 0, \quad x \in G_0; \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial G_0.$$

Вблизи такого собственного числа имеется резонансное значение $k_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, допускающее разложение

$$k_r^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = k_e^2 - \Lambda_1 \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} - \Lambda_2 \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} + O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1+\tau_1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1+\tau_2}) \quad (32)$$

при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$. Коэффициенты Λ_j , μ_{j1} и τ_j — положительные числа ($j = 1, 2$). При условии $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1+\tau_1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1+\tau_2})$ коэффициент прохождения $T(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеет асимптотику

$$T(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(\frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}} \right)^2 \right)^{-1} (1 + O(\varepsilon_1^{\tau_1} + \varepsilon_2^{\tau_2})), \quad (33)$$

где τ_j — те же, что и в (32), $z = Q \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} / \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}$, P и Q — положительные постоянные. Ширина резонансного пика на половине его высоты (вычисленная по асимптотике коэффициента T) равна

$$\Upsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{P} \left(z + \frac{1}{z} \right) \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} (1 + O(\varepsilon_1^{\tau_1} + \varepsilon_2^{\tau_2})).$$

Из приведенных разложений следует, что в случае, когда диаметры сужений различны, резонансное значение коэффициента прохождения является бесконечно малым при стремлении диаметров сужений к нулю. То есть резонансное туннелирование практически не наблюдается. То же самое может случиться, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, но сужения имеют неодинаковую форму. Число μ_{j1} в действительности является наименьшим собственным числом оператора Лапласа-Бельтрами в области, вы-

резаемой на единичной сфере какой-либо частью двойного конуса K_j . Поэтому, если $\mu_{11} \neq \mu_{21}$, то величина $z + z^{-1}$ в разложении (33) будет бесконечно большой. Пусть теперь сужения имеют одинаковую форму и один и тот же диаметр, тогда максимум коэффициента прохождения равен $4(Q + Q^{-1})^{-2}$ с точностью до малых поправок. Постоянная Q зависит от геометрии резонатора. Если резонатор несимметричен, то, вообще говоря, Q не равна единице. Отсюда следует, что максимальное значение коэффициента прохождения не является малым, но может и не достигать единицы, если резонатор несимметричен. Таким образом, для практического использования наиболее интересны симметричные волноводы, имеющие два одинаковых сужения.

В четвертом параграфе четвертой главы изучено влияние магнитного поля на резонансное туннелирование. Пусть волновод занимает в трехмерном пространстве цилиндр с двумя одинаковыми сужениями малого диаметра ε . Форма сужений предполагается такой же, как и в первых трех параграфах этой главы. Волновая функция $\Psi = (\Psi_+, \Psi_-)^T$ электрона с энергией $E = k^2 \hbar^2 / 2m$ в магнитном поле \mathbf{H}_0 удовлетворяет уравнению Паули

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2 \Psi + (\hat{\sigma}, \mathbf{H}) \Psi = k^2 \Psi, \quad (34)$$

где $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули; $\mathbf{H} = -(e/c\hbar \mathbf{H}_0) = \text{rot } \mathbf{A}$. Если магнитное поле направлено вдоль оси z , то есть $\mathbf{H} = H\mathbf{k}$, где H — скалярная функция, то (34) распадается на два скалярных уравнения

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2 \Psi_{\pm} \pm H \Psi_{\pm} = k^2 \Psi_{\pm}. \quad (35)$$

Пусть функция H зависит только от $\rho = ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2}$, причем $H(\rho) = 0$ при $\rho > R$, где R — некоторое фиксированное положительное число. Такое поле создается бесконечным соленоидом радиуса R , ось которого параллельна оси z . Тогда $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_{\psi}$, где $\mathbf{e}_{\psi} = \rho^{-1}(-y + y_0, x - x_0, 0)$,

$$A(\rho) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \int_0^{\rho} t H(t) dt, & \rho < R; \\ \int_0^R t H(t) dt, & \rho > R. \end{cases}$$

Равенство $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ определяет \mathbf{A} с точностью до слагаемого вида ∇f . Мы пренебрегаем проникновением электронов за стенки волновода и рассматриваем уравнения (35), дополненные однородным условием Дирихле

$$\Psi_{\pm} = 0 \quad \text{на } \partial G(\varepsilon). \quad (36)$$

Кроме того, Ψ_{\pm} должны удовлетворять на бесконечности некоторым условиям излучения. Чтобы сформулировать эти условия излучения, нам нужно определить приходящие и уходящие волны. При наших ограничениях на магнитное поле и выборе вектор-потенциала коэффициенты уравнений (35) стабилизируются на бесконечности лишь со степенной скоростью. Такая медленная стабилизация создает трудности для определения упомянутых волн. Поэтому мы изменим \mathbf{A} калибровочным преобразованием так, чтобы внутри волновода коэффициенты уравнений (35) стали постоянными при достаточно больших $|x|$.

Пусть (ρ, ψ) — полярные координаты в плоскости xy с центром в (x_0, y_0) , причем $\psi = 0$ на луче, сонаправленном с осью x . Введем функцию $f(x, y, z) = c\psi$, где $c = \int_0^R tH(t) dt$. Для определенности будем считать, что $-\pi/2 < \psi < 3\pi/2$. Функция f однозначно определена внутри волновода при $|x - x_0| > 0$, кроме того, $\nabla f = \mathbf{A}$ при $|x - x_0| > R$. Пусть τ — срезка на \mathbb{R}_+ , равная 1 при $t > R + 2$ и 0 при $t < R + 1$. Положим $\mathbf{A}'(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) - \nabla(\tau(|x - x_0|)f(x, y, z))$. Тогда $\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ и $\mathbf{A}' = 0$ при $|x - x_0| > R + 2$. Волновые функции $\Psi'_{\pm} = \Psi_{\pm} \exp\{i\tau f\}$ удовлетворяют уравнениям (35) с заменой \mathbf{A} на \mathbf{A}' . При $|x - x_0| > R + 2$ коэффициенты уравнений (35) с новым вектор-потенциалом \mathbf{A}' совпадают с коэффициентами уравнения Гельмгольца

$$-\Delta \Psi'_{\pm} = k^2 \Psi'_{\pm}.$$

Дальнейший анализ резонансного туннелирования проводится по схеме, развитой в предыдущих параграфах для волноводов при отсутствии магнитного поля.

Теорема 0.0.16. Пусть $k_{e,\pm}^2$ — простое собственное число задачи в резонаторе

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2 \Psi(x) \pm H\Psi_{\pm}(x) = k^2 \Psi(x), \quad x \in G_0; \quad \Psi(x) = 0, \quad x \in \partial G_0,$$

лежащее между первым и вторым порогами; знак $+$ или $-$ здесь выбирается произвольно, но считается фиксированным. Вблизи каждого такого собственного числа имеется резонансное значение $k_{r,\pm}(\varepsilon)$, для которого справедливо разложение

$$k_{r,\pm}^2(\varepsilon) = k_{e,\pm}^2 - \Lambda_{\pm} \varepsilon^{2\mu+1} + O(\varepsilon^{2\mu+1+\tau}) \quad (37)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Коэффициенты Λ_{\pm} , μ и τ постоянны и положительны. При $|k^2 - k_{r,\pm}^2| = O(\varepsilon^{2\mu+1+\tau})$ коэффициент прохождения $T_1(k, \varepsilon)$ допускает представление

$$T_1(k, \varepsilon) = \left(\frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon^{4\mu+2}} \right)^2 \right)^{-1} (1 + O(\varepsilon^\tau)),$$

где τ — то же, что и в (37), z и P — положительные постоянные. Ширина резонансного пика на половине его высоты равна

$$\Upsilon(\varepsilon) = \frac{1}{P} \left(z + \frac{1}{z} \right) \varepsilon^{4\mu+1} (1 + O(\varepsilon^\tau)).$$

Появление в резонаторе магнитного поля приводит не только к расщеплению резонансных пиков. Как показывают вычисления, постоянная z в асимптотике коэффициента прохождения не равна единице, даже если резонатор симметричен. Таким образом, в симметричном волноводе с двумя одинаковыми сужениями и в присутствии магнитного поля высота резонансных пиков не достигает единицы. Изложенные результаты получены в работе [5]. Аналогичное исследование в двумерном волноводе проведено в [6].

В пятой главе проведено сравнение результатов асимптотического и численного анализа резонансного туннелирования на примере плоского волновода с двумя сужениями одинаковой ширины, симметричного относительно координатных осей. Сравнение проводится как при наличии, так и в отсутствие магнитного поля. Результаты главы получены в статьях [4], [6], [9] и в монографии [11].

Асимптотические формулы в Теоремах 0.0.13–0.0.16 содержат несколько неизвестных постоянных в главных слагаемых; вопрос об их вычислении не обсуждался. Не зная этих констант, из асимптотики можно извлекать лишь качественную информацию. Если же константы найдены, то асимптотику можно рассматривать как приближенное решение задачи. Впрочем, остается неясным, в каком диапазоне параметров такое приближение будет надежным. С другой стороны, следует ожидать, что численный подход окажется эффективным, только если сужения волновода не слишком узкие, а резонансный пик коэффициента прохождения достаточно широкий. Поэтому подробную картину резонансного туннелирования можно надеяться получить при сочетании асимптотического и численного подходов.

Пусть сначала энергия электронов (спектральный параметр) лежит между первым и вторым порогами. Для вычисления неизвестных постоянных в асимптотике нужно решить предельные краевые задачи. Кроме того, независимо от асимптотического подхода приближенно вычисляется матрица рассеяния волновода. Для этой цели применяется метод из второй главы. Теперь можно сопоставить асимптотики

при вычисленных постоянных и матрицу рассеяния (коэффициенты прохождения и отражения). Оказывается, что существует интервал значений ε , где асимптотические и численные результаты практически совпадают. Если принять ширину волновода равной единице, то совпадение асимптотики и вычислений наблюдается в интервале $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.5$. При увеличении ε за границу этого интервала исчезает асимптотика, но сохраняет эффективность вычисление матрицы рассеяния; при уменьшении ε с выходом из интервала становится неустойчивым вычисление, но остается актуальной асимптотика.

Поскольку предполагается, что волновод симметричен относительно координатных осей на плоскости, проходящая волна, четная (соответственно, нечетная) относительно его оси, рассеивается только по четным (соответственно, по нечетным) волнам. Поэтому при увеличении диапазона энергий электронов до третьего порога дополнительные каналы рассеяния не появляются и асимптотические формулы не изменяются. Однако согласование асимптотических и численных результатов ухудшается. Для резонансной энергии оба подхода по-прежнему дают достаточно близкие результаты; различие составляет менее 5% на всем интервале $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.5$. Для ширины резонансного пика результаты близки лишь при $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.15$. С ростом ε разница между численным и асимптотическим результатами нарастает, и при $\varepsilon = 0.3$ численное значение ширины резонансного пика почти вдвое превосходит асимптотическое. Таким образом, между вторым и третьим порогами асимптотика резонансной энергии остается надежной, а асимптотика ширины резонансного пика требует уточнения.

Заключение содержит основные результаты диссертации и описание их практической значимости.

В приложении для удобства приведены известные результаты о задачах с условиями излучения для уравнения Гельмгольца в областях с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность. По существу, это частный случай теории, развитой в [40] для общих самосопряженных эллиптических систем.

Глава 1

Волноводы. Принцип излучения. Матрица рассеяния

1.1 Расширенное пространство волн

1.1.1 Волны в цилиндре

В цилиндре $\Pi = \{(y, t) : y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega, t \in \mathbb{R}\}$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)u(y, t) &= 0, & (y, t) \in \Pi, \\ u(y, t) &= 0 & (y, t) \in \partial\Pi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\Delta = \Delta_y + \partial_t^2, \quad \Delta_y = \sum_{j=1}^n \partial_j^2, \quad \partial_j = \partial/\partial y_j.$$

Свяжем с задачей (1.1) операторный пучок $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)$, полагая

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu)v(y) = (-\Delta_y + \lambda^2 - \mu)v(y), \quad y \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.2)$$

Спектр операторного пучка (при каждом фиксированном $\mu \in \mathbb{R}$) составляют изолированные собственные значения, расположенные на осях комплексной плоскости. Число $\lambda = 0$ является собственным для пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$ в том и только в том случае, если μ — собственное число задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta_y - \mu)v(y) &= 0, & y \in \Omega, \\ v(y) &= 0, & y \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Собственные числа задачи (1.3) называются порогами для задачи (1.1). Пороги образуют положительную последовательность $\tau_1 < \tau_2 < \dots$, строго возрастающую к бесконечности. Введем неубывающую последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных чисел задачи (1.3), пронумерованных с учетом кратности (нумерации чисел τ_l и μ_k вообще говоря различны; каждое число μ_k совпадает с одним из порогов τ_l). Будем считать, что соответствующие собственные векторы φ_k ортогональны и нормированы условием

$$\int_{\Omega} \varphi_k(y) \overline{\varphi_k(y)} dy = 1. \quad (1.4)$$

Для всякого μ собственные числа λ_k^{\pm} пучка $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)$ определяются равенствами $\lambda_k^{\pm} = \pm(\mu - \mu_k)^{1/2}$. Если при этом $\lambda_k^{\pm} \neq 0$, то собственным числам λ_k^{\pm} отвечает один и тот же собственный вектор φ_k (который является и собственным вектором задачи (1.3), отвечающим собственному числу μ_k). Присоединенных векторов в этом случае нет. Если $\mu_{k-1} < \mu < \mu_k$, то числа $\lambda_k^{\pm}, \lambda_{k+1}^{\pm}, \dots$ чисто мнимые, а $\lambda_1^{\pm}, \dots, \lambda_{k-1}^{\pm}$ — вещественные. Если же $\mu = \mu_k$ для некоторого k , то собственному числу $0 = \lambda_k^+ = \lambda_k^-$ соответствуют собственный вектор φ_k и присоединенный вектор, а следующего присоединенного вектора нет.

Фиксируем число $\mu \in \mathbb{R}$, не совпадающее ни с одним из порогов (что эквивалентно условиям $\mu \neq \mu_k, k = 1, 2, \dots$), и натянем комплексное линейное пространство на функции

$$(y, t) \mapsto \exp(i\lambda_k^{\pm}t)\varphi_k(y) \quad (1.5)$$

с вещественными $\lambda_k^{\pm} = \pm(\mu - \mu_k)^{1/2}$; функции (1.5) удовлетворяют задаче (1.1). Обозначим это пространство через $W(\mu)$ и назовем пространством волн. Его размерность совпадает с удвоенным количеством чисел μ_k (пронумерованных с учетом кратности), для которых $\mu_k < \mu$. Функции

$$u_k^{\pm}(y, t; \mu) = (2|\lambda_k^{\mp}|)^{-1/2} \exp(i\lambda_k^{\mp}t)\varphi_k(y) \quad (1.6)$$

составляют базис в пространстве $W(\mu)$. Назовем $u_k^+(\cdot, \mu)$ волной, приходящей из $+\infty$, а $u_k^-(\cdot, \mu)$ — волной, уходящей в $+\infty$.

Пусть теперь $\mu = \tau$ — один из порогов и, значит, собственное число задачи (1.3) кратности $\varkappa \geq 1$. Тогда \varkappa чисел μ_l удовлетворяют равенству $\mu_l = \tau$. Для каждого такого l функции $\exp(i\lambda_l^+t)\varphi_l(y)$ и $\exp(i\lambda_l^-t)\varphi_l(y)$ совпадают. Поэтому количество линейно независимых функций вида (1.5) при $\mu = \tau$ на \varkappa меньше, чем при μ , подчиненных условию $\tau < \mu < \tau + \beta$ с малым $\beta > 0$. Однако при более общем понятии волн размерность пространства $W(\mu)$ непрерывна справа

на пороге. В этом случае определение приходящих и уходящих волн основано на энергетических соображениях, как и в принципах Зоммерфельда и Мандельштама.

Для такого определения введем форму

$$q_N(u, v) := ((-\Delta - \mu)u, v)_{\Pi(N)} + (u, -\partial_\nu v)_{\partial\Pi(N)} - (u, (-\Delta - \mu)v)_{\Pi(N)} - (-\partial_\nu u, v)_{\partial\Pi(N)}, \quad (1.7)$$

где $\Pi(N) = \{(y, t) \in \Pi : t < N\}$, число $\mu \in \mathbb{R}$ пока считаем непороговым, $u = \chi f$ и $v = \chi g$, а в качестве f и g примем любые из функций (1.6), отвечающие вещественным $\lambda_k^\pm(\mu)$ (возможно с разными индексами); через χ обозначена гладкая срезающая функция, $\chi(t) = 0$ для $t < T - 1$ и $\chi(t) = 1$ для $t > T$, причем $T < N$. Интегрированием по частям проверяются равенства

$$iq_N(\chi u_k^\pm, \chi u_l^\mp) = 0, \quad (1.8)$$

$$iq_N(\chi u_k^\pm, \chi u_l^\pm) = \mp \delta_{kl} \quad \text{при всех } k, l, \quad (1.9)$$

так что результат не зависит ни от N , ни от χ ; впредь мы не выписываем индекс N , а χ сохраняем для будущих надобностей. Называя волну $u_k^+(u_k^-)$ приходящей (уходящей) при знаке $-(+)$ справа в (1.9), мы получим определение приходящих (уходящих) волн, равносильное старому определению.

Перейдем к построению базиса в (расширенном) пространстве волн, "устойчивого на порогах". Пусть $\mu \in \mathbb{R}$ — регулярное значение спектрального параметра задачи (1.3), и пусть μ_m — собственное число с наибольшим номером, удовлетворяющее неравенству $\mu_m < \mu$. Примем еще, что $\mu_l < \mu_{l+1} = \dots = \mu_m$. Таким образом, числа $\tau' := \mu_l$, $\tau := \mu_{l+1} = \dots = \mu_m$ и $\tau'' := \mu_{m+1}$ оказываются тремя последовательными порогами $\tau' < \tau < \tau''$ для задачи (1.1) в цилиндре Π . (Мы обсуждаем общую ситуацию; случаи $l + 1 = m$, $m = 1$ и т.п. рассматриваются с очевидными упрощениями.)

Положим

$$w_k^\pm(y, t; \mu) = 2^{-1/2} \left(\frac{e^{it\sqrt{\mu-\mu_k}} + e^{-it\sqrt{\mu-\mu_k}}}{2} \mp \frac{e^{it\sqrt{\mu-\mu_k}} - e^{-it\sqrt{\mu-\mu_k}}}{2\sqrt{\mu-\mu_k}} \right) \varphi_k(y), \quad (1.10)$$

$$w_p^\pm(y, t; \mu) = u_p^\pm(y, t; \mu), \quad (1.11)$$

где $k = l + 1, \dots, m$ и $p = 1, \dots, l$, а функции u_p^\pm определены формулами (1.6).

Предложение 1.1.1. *Функции $\mu \mapsto w_k^\pm(y, t; \mu)$, $k = l + 1, \dots, m$, допускают аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Эти целые функции гладко*

зависят от параметров $y \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}$ (т. е. любые производные по y и t также являются целыми функциями).

Функции $\mu \mapsto w_p^\pm(y, t; \mu)$ аналитичны на комплексной плоскости с разрезом вдоль луча $\{\mu \in \mathbb{R} : -\infty < \mu \leq \mu_p\}$, $p = 1, \dots, l$; они гладко зависят от y и t .

Все функции w_k^\pm , $k = 1, \dots, m$, являются решениями задачи (1.1). Для каждого μ из интервала $(\tau' < \mu < +\infty)$ функции (1.10)–(1.11) удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$iq(\chi w_r^\pm(\cdot; \mu), \chi w_s^\mp(\cdot; \mu)) = 0, \quad (1.12)$$

$$iq(\chi w_r^\pm(\cdot; \mu), \chi w_s^\pm(\cdot; \mu)) = \mp \delta_{rs} \quad \text{при всех } r, s = 1, \dots, m. \quad (1.13)$$

Доказательство. Первая и вторая дроби в скобках из (1.10) раскладываются в ряды

$$\sum_{l \geq 0} \frac{(\mu_k - \mu)^l t^{2l}}{(2l)!} \quad \text{и} \quad it \sum_{l \geq 0} \frac{(\mu_k - \mu)^l t^{2l}}{(2l + 1)!}, \quad (1.14)$$

сходящиеся абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset \{(\mu, t) : \mu \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}$. Отсюда вытекают свойства аналитичности $w_k^\pm(y, t; \mu)$ при $k = l + 1, \dots, m$. Соответствующие утверждения относительно $w_p^\pm(y, t; \mu)$ с номерами $p = 1, \dots, l$ очевидны.

Остается проверить условия ортогональности и нормировки. Пусть сначала $\mu > \tau$. Займемся, например, формулой (1.13). Если индексы r и s различны, то равенства (1.13) вытекают из ортогональности φ_r и φ_s (как и формулы (1.8), (1.9)). Если же $r = s \leq l$, то нужная формула содержится в (1.9). Пусть, наконец, $r = s > l$; подставим в $q(\chi w_r^\pm, \chi w_s^\pm)$ выражения (1.10). Полагая $\lambda := \sqrt{\mu - \tau}$, получим

$$\begin{aligned} iq(\chi w_s^\pm, \chi w_s^\pm) &= \lambda^{-2}((\lambda \pm 1)(\lambda \mp 1)iq^{+-} + (\lambda \mp 1)(\lambda \pm 1)iq^{-+} \\ &\quad + (\lambda \mp 1)^2 iq^{++} + (\lambda \pm 1)^2 iq^{--}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где, например, $q^{+-} = 2^{-3}q(\chi e^{it\lambda}\varphi_s, \chi e^{-it\lambda}\varphi_s)$ и т.п. Учитывая (1.6), (1.8) и (1.9), выводим отсюда равенства (1.13).

Теперь рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \ni \mu \mapsto q_N(u, v; \mu) &:= ((-\Delta - \mu)u, v)_{\Pi(N)} + (u, -\partial_\nu v)_{\partial\Pi(N)} \\ &\quad - (u, (-\Delta - \bar{\mu})v)_{\Pi(N)} - (-\partial_\nu u, v)_{\partial\Pi(N)}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $\Pi(N)$, N и χ те же, что и в (1.7), $u = \chi w_r^\pm(\cdot; \mu)$ и $v = \chi w_s^\mp(\cdot; \bar{\mu})$. Ввиду аналитичности u и \bar{v} , функция $\mu \mapsto q_N(u, v; \mu)$ также оказывается аналитической. Поэтому равенства (1.13) (для $r = s > l$) сохраняются при всех $\mu \in \mathbb{C}$. \square

Из (1.10) следует, что $w_k^\pm(y, t; \tau) = 2^{-1/2}(1 \mp it)\varphi_k(y)$, $k = l + 1, \dots, m$, а в случае $\mu < \tau$ амплитуды этих волн экспоненциально растут при $t \rightarrow \infty$. Пространство, натянутое на волны (1.10)–(1.11), при $\tau' < \mu < \tau$ назовем расширенным пространством волн и обозначим через $W_a(\mu)$. Через $W(\mu)$ при $\tau \leq \mu < \tau''$ будем обозначать линейную оболочку функций (1.10)–(1.11), а при $\tau' < \mu < \tau$ — оболочку функций (1.11); линеал $W(\mu)$ называем пространством волн. Элемент w пространства $W_a(\mu)$ (или $W(\mu)$) называется волной, приходящей из $+\infty$ (уходящей в $+\infty$), если $iq(\chi w, \chi w) < 0$ ($iq(\chi w, \chi w) > 0$).

Набор волн $\{w^\pm\}_{k=1}^m$, определенный формулами (1.10), (1.11), назовем базисом волн, устойчивым в окрестности порога τ . Базис волн вида (1.6) по определению устойчив на интервале (μ', μ'') , если $[\mu', \mu'']$ не содержит порога.

1.1.2 Волны в области G

Пусть G — область в \mathbb{R}^{n+1} с гладкой границей ∂G , совпадающая вне большого шара с объединением $\Pi_+^1 \cup \dots \cup \Pi_+^{\mathcal{T}}$ конечного числа непересекающихся полуцилиндров

$$\Pi_+^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r, t^r > 0\},$$

где (y^r, t^r) — локальные координаты в Π_+^r и Ω^r — ограниченная область в \mathbb{R}^n .

Введем задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= 0, \quad x \in G, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial G. \end{aligned} \tag{1.17}$$

С каждым выходом Π_+^r на бесконечность свяжем задачу вида (1.1) в цилиндре $\Pi^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r, t^r \in \mathbb{R}\}$. Пусть $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — срезающая функция, $\chi(t) = 0$ при $t < 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 1$. Каждую волну в Π^r умножим на функцию $t \mapsto \chi(t^r - t_0^r)$ с некоторым $t_0^r > 0$ и распространим нулем на всю область G . Все так полученные функции (для всех Π^r) будем называть волнами в G . Число τ называется пороговым значением спектрального параметра μ для задачи (1.17) (или просто порогом), если τ — порог хотя бы для одной из задач вида (1.1) в цилиндре Π^r , $r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Пусть $\tau' < \tau < \tau''$ — три последовательных порога для задачи (1.17), так что интервалы (τ', τ) и (τ, τ'') свободны от пороговых значений. При $\mu \in (\tau', \tau)$ введем расширенное пространство $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ волн в области G как объединение волн в G , отвечающих волнам из $W_a(\mu)$ для Π^r , $r =$

$1, \dots, \mathcal{T}$; если же в некотором Π^r пространство $W_a(\mu)$ не вводится на интервале $\tau' < \mu < \tau$ (то есть τ — не порог для задачи (1.1) в таком цилиндре), тогда из этого цилиндра в пространство $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ включаются волны, порожденные элементами соответствующего $\mathcal{W}(\mu)$. При $\mu \in (\tau', \tau'')$ пространство $\mathcal{W}(\mu, G)$ волн в G есть, по определению, объединение волн в G , отвечающих волнам из $W(\mu)$ для всех Π^r .

Базисы волн $\{u_j^\pm(\cdot, \mu)\}$ и $\{w_j^\pm(\cdot, \mu)\}$ в пространствах $\mathcal{W}(\mu, G)$ и $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ составляют волны, полученные в G из базисных волн в цилиндрах Π^r , $r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Базисные волны в пространствах $\mathcal{W}(\mu, G)$ и $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ подчиняются условиям биортогональности и нормировки вида (1.8), (1.9) и (1.12), (1.13) с заменой формы q в цилиндре на форму q_G в области G :

$$\begin{aligned} q_G(u, v) := & ((-\Delta - \mu)u, v)_G + (u, -\partial_\nu v)_{\partial G} \\ & - (u, (-\Delta - \mu)v)_G - (-\partial_\nu u, v)_{\partial G}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Элемент w пространства $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ (или $\mathcal{W}(\mu, G)$) называется волной, приходящей из ∞ (уходящей в ∞), если $iq_G(\chi w, \chi w) < 0$ ($iq_G(\chi w, \chi w) > 0$).

Базис волн в области G называется устойчивым в окрестности значения ν спектрального параметра, если этот базис составлен из базисов в цилиндрах $\Pi^1, \dots, \Pi^{\mathcal{T}}$, устойчивых в окрестности точки ν .

1.2 Собственные функции непрерывного спектра. Матрицы рассеяния

Пусть $\tau' < \tau < \tau''$ — три последовательных порога для задачи (1.17). Ради простоты изложения примем, что эти три числа являются порогами для задачи вида (1.1) только в одном из цилиндров $\Pi^1, \dots, \Pi^{\mathcal{T}}$, например, в цилиндре $\Pi^1 = \Omega^1 \times \mathbb{R}$. Кроме того, предположим, что $\tau' = \mu_l$, $\tau = \mu_{l+1} = \dots = \mu_m$ и $\tau'' = \mu_{m+1}$, где μ_k — собственные числа задачи (1.3) в области Ω^1 . Таким образом, при $\Pi = \Pi^1$ мы будем иметь дело с ситуацией, рассмотренной в разделе 1.1.1.

1.2.1 Естественный и расширенный принципы излучения

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= f(x), \quad x \in G, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial G, \end{aligned} \quad (1.19)$$

для которой приведем две корректные постановки с условиями излучения на бесконечности — естественный и расширенный принципы излучения. В первом принципе естественные условия излучения содержат только уходящие волны из пространства $\mathcal{W}(\mu, G)$. Второй принцип — расширенный — включает уходящие волны из расширенного пространства волн $\mathcal{W}_a(\mu, G)$. Естественный принцип мы будем применять вне порогов, а расширенный — в окрестности порога, используя при этом для расширенного принципа устойчивый базис волн в пространстве $\mathcal{W}_a(\mu, G)$, построенный в разделе 1.1. Для общих эллиптических задач, самосопряженных относительно формулы Грина, первая из постановок обсуждалась в [40], а вторая — в статьях [41], [31] (в различных геометрических ситуациях; устойчивый базис не вводился). В частном случае для уравнения Гельмгольца естественный принцип излучения доказан в приложении, расширенный принцип устанавливается по той же схеме.

Сначала определим нужные для этой цели функциональные пространства. При целых $l \geq 0$ обозначим через $H^l(G)$ пространство Соболева с нормой

$$\|v; H^l(G)\| = \left(\sum_{j=0}^l \int_G \sum_{|\alpha|=j} |D_x^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пусть ρ_γ — гладкая положительная в \bar{G} функция, которая на Π_+^r задана равенством $\rho_\gamma(y^r, t^r) = \exp(\gamma t^r)$, причем $\gamma \in \mathbb{R}$. Пусть еще $H_\gamma^l(G)$ — пространство с нормой $\|u; H_\gamma^l(G)\| = \|\rho_\gamma u; H^l(G)\|$, а $\dot{H}_\gamma^2(G)$ — замыкание в $H_\gamma^2(G)$ множества гладких функций с компактным носителем в \bar{G} , обращающихся в ноль на ∂G . Оператор задачи (1.19) осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{A}_\gamma(\mu) : \dot{H}_\gamma^2(G) \rightarrow H_\gamma^0(G). \quad (1.20)$$

Известно, что оператор (1.20) фредгольмов, если и только если прямая $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im} \lambda = \gamma\}$ свободна от собственных чисел пучков $\lambda \mapsto \mathfrak{A}^r(\lambda, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$, где \mathfrak{A}^r — пучок вида (1.2) для задачи (1.1) в цилиндре Π^r . (Напомним, что оператор называется фредгольмовым, если его образ замкнут, а ядро и коядро конечномерны.)

Перейдем к описанию естественного принципа излучения. Пусть μ — непороговое значение спектрального параметра, $\mu \in (\tau', \tau'')$, $\mu \neq \tau$. Пусть еще δ — столь малое положительное число, что полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\text{Im} \lambda| \leq \delta\}$ содержит лишь вещественные собственные числа пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$; обозначим количество таких чисел (с учетом кратности) через $2M = 2M(\mu)$. В ядре $\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$

оператора $\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ существуют наборы элементов $\{Y_1^+(\cdot, \mu), \dots, Y_M^+(\cdot, \mu)\}$ и $\{Y_1^-(\cdot, \mu), \dots, Y_M^-(\cdot, \mu)\}$, такие что

$$\left(Y_j^+(\cdot, \mu) - u_j^+(\cdot, \mu) - \sum_{k=1}^M S_{jk}(\mu) u_k^-(\cdot, \mu) \right) \in H_\delta^2(G), \quad (1.21)$$

$$\left(Y_j^-(\cdot, \mu) - u_j^-(\cdot, \mu) - \sum_{k=1}^M T_{jk}(\mu) u_k^+(\cdot, \mu) \right) \in H_\delta^2(G), \quad (1.22)$$

где $S(\mu) = \|S_{jk}(\mu)\|$ — унитарная матрица рассеяния и $S(\mu)^{-1} = T(\mu) = \|T_{jk}(\mu)\|$. Для последующего использования перепишем (1.21)–(1.22) в виде

$$Y_j^+(\cdot, \mu) = u_j^+(\cdot, \mu) + \sum_{k=1}^M S_{jk}(\mu) u_k^-(\cdot, \mu) + O(e^{-\delta|x|}), \quad (1.23)$$

$$Y_j^-(\cdot, \mu) = u_j^-(\cdot, \mu) + \sum_{k=1}^M T_{jk}(\mu) u_k^+(\cdot, \mu) + O(e^{-\delta|x|}).$$

Каждый из указанных наборов $\{Y_1^+(\cdot, \mu), \dots, Y_M^+(\cdot, \mu)\}$ и $\{Y_1^-(\cdot, \mu), \dots, Y_M^-(\cdot, \mu)\}$ является базисом (по модулю $\ker \mathcal{A}_\delta(\mu)$) в ядре $\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$. Это означает, что любой элемент $v \in \ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ есть линейная комбинация функций $Y_1^+(\cdot, \mu), \dots, Y_M^+(\cdot, \mu)$ с точностью до слагаемого из $\ker \mathcal{A}_\delta(\mu)$; то же верно и для $Y_1^-(\cdot, \mu), \dots, Y_M^-(\cdot, \mu)$. Если число μ не оказывается собственным значением оператора (1.20), то есть $\ker \mathcal{A}_\delta(\mu) = 0$, то каждый из наборов $\{Y_j^+\}$ и $\{Y_j^-\}$ — базис для $\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ в обычном смысле.

Элементы $Y(\cdot, \mu)$ из $\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu) \setminus \ker \mathcal{A}_\delta(\mu)$ называются собственными функциями непрерывного спектра задачи (1.17), отвечающими числу μ .

Обозначим через \mathfrak{N} линейную оболочку $\mathfrak{L}(u_1^-, \dots, u_M^-)$. Норму элемента $u = \sum c_j u_j^- + v \in \mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$, где $c_j \in \mathbb{C}$ и $v \in \dot{H}_\delta^2(G)$, определим равенством

$$\|u\| = \sum |c_j| + \|v; H_\delta^2(G)\|.$$

Пусть $\mathbf{A}(\mu)$ — сужение оператора $\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ на пространство $\mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$. Отображение

$$\mathbf{A}(\mu) : \mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G) \rightarrow H_\delta^0(G) \quad (1.24)$$

непрерывно. Следующая теорема доставляет корректную постановку краевой задачи (1.19) с естественными условиями излучения на бесконечности (предполагается, что числа μ и δ подчинены условиям, приведенным в последнем абзаце перед формулой (1.21)).

Теорема 1.2.1. Пусть z_1, \dots, z_d — базис в пространстве $\ker \mathcal{A}_\delta(\mu)$, $f \in H_\delta^0(G)$ и $(f, z_j)_G = 0$, $j = 1, \dots, d$. Тогда:

1. Существует решение $u \in \mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$ уравнения $\mathbf{A}(\mu)u = f$, определенное с точностью до произвольного слагаемого из линейала $\mathcal{L}(z_1, \dots, z_d)$.

2. Справедливо включение

$$v \equiv u - c_1 u_1^- - \dots - c_M u_M^- \in H_\delta^2(G), \quad (1.25)$$

где $c_j = i(f, Y_j^-)_G$.

3. Для решения u выполняется неравенство

$$\|v; H_\delta^2(G)\| + |c_1| + \dots + |c_M| \leq \text{const} (\|f; H_\delta^0(G)\| + \|\rho_\delta v; L_2(G)\|). \quad (1.26)$$

Решение u_0 , подчиненное дополнительным условиям $(u_0, z_j)_G = 0$ для $j = 1, \dots, d$, единственно, и для него верна оценка (1.26) с заменой правой части на $\text{const}\|f; H_\delta^0(G)\|$.

4. Если $f \in H_\delta^0(G) \cap H_{\delta'}^0(G)$, причем полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : \min\{\delta, \delta'\} \leq \text{Im}\lambda \leq \max\{\delta, \delta'\}\}$ не содержит собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$, то решения $u \in \mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$ и $u' \in \mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_{\delta'}^2(G)$ совпадают, а от выбора между δ и δ' по существу зависит лишь постоянная в (1.26).

Замечание 1.2.2. В теореме 1.2.1 показатель δ и постоянную const в оценке (1.26) можно выбрать неизменными для всех μ из отрезка $[\mu', \mu''] \subset (\tau, \tau'')$ (отрезка $[\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau)$). Если слева приближать μ'' к порогу, то показатель δ приходится устремлять к нулю: допустимый интервал для δ сужается из-за приближения собственных чисел пучка по мнимой оси к нулю; постоянная в (1.26) при этом увеличивается. Если же μ' приближается (справа) к порогу, то "портится" базис волн (1.6); из доказательства теоремы 1.2.1 (см. приложение, заключительный пункт) можно усмотреть, что это приводит к росту постоянной в (1.26). \square

Обратимся к расширенному принципу излучения в окрестности порога τ . С этой целью построим устойчивый на пороге τ базис в пространстве волн для задачи (1.17). Такой базис составим из волн, порожденных функциями (1.10), (1.11), и волн, отвечающих вещественным собственным числам пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 2, \dots, \mathcal{T}$. Согласно предположению (см. начало раздела 1.2) на отрезке $[\tau', \tau'']$ нет порогов для задач вида (1.1) в цилиндрах $\Pi^2, \dots, \Pi^{\mathcal{T}}$. Поэтому количество вещественных собственных чисел каждого из пучков $\mathbb{R} \ni \lambda \rightarrow \mathfrak{A}^r(\lambda, \mu)$, $r = 2, \dots, \mathcal{T}$, остается постоянным при $\mu \in [\tau', \tau'']$. Значит, при переходе из цилиндра Π^1 в область G размерность пространства волн увеличивается на одну и ту же величину при всех $\mu \in (\tau', \tau'')$. Положим $2L = \dim \mathcal{W}(\mu, G)$ при $\mu \in (\tau', \tau)$ и

$2M = \dim \mathcal{W}(\mu, G)$ при $\mu \in (\tau, \tau'')$; тогда $M - L = m - l$, где m и l — те же, что в (1.10), (1.11), и $\dim \mathcal{W}_a(\mu, G) = 2M$ при $\mu \in (\tau', \tau)$.

Число γ для операторов $\mathcal{A}_{\pm\gamma}(\mu)$ будем выбирать так, чтобы оно годилось для всех μ из некоторой окрестности порога $\tau = \mu_m$. Поясним такой выбор. Имеем $\lambda_k^\pm(\mu) = \pm(\mu - \mu_k)^{1/2}$, $\mu_{l+1} = \dots, \mu_m$, и потому $\lambda_k^\pm(\tau) = 0$ при $k = l + 1, \dots, m$. Интервал мнимой оси с концами $-i(\mu_{m+1} - \mu_m)^{1/2}$, $i(\mu_{m+1} - \mu_m)^{1/2}$, проколотый в начале координат, свободен от спектра пучков $\mathfrak{A}^q(\cdot, \mu_m)$, $q = 1, \dots, \mathcal{T}$. При малом сдвиге μ вдоль \mathbb{R} мало перемещаются и собственные числа пучков $\mathfrak{A}^q(\cdot, \mu)$, оставаясь на осях координат. Поэтому для (малого) $\alpha > 0$ существует такое $\beta > 0$, что при $\mu \in (\mu_m - \beta, \mu_m + \beta)$ на интервалах $iI_{\pm\alpha} := \pm i(\alpha, (\mu_{m+1} - \mu_m)^{1/2} - \alpha)$ спектра пучков $\mathfrak{A}^q(\cdot, \mu)$ нет. Значит, прямые $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im} \lambda = \pm\gamma\}$, где $\gamma \in I_\alpha$, свободны от спектра пучков $\mathfrak{A}^q(\cdot, \mu)$, а полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\text{Im} \lambda| \leq \gamma\}$ содержит лишь вещественные собственные числа этих пучков и числа $\lambda_k^\pm(\mu) = \pm(\mu - \mu_k)^{1/2} = \pm(\mu - \mu_m)^{1/2}$ из формул (1.10), $k = l + 1, \dots, m$.

Пусть $\mu \in (\tau - \beta, \tau + \beta)$, $\gamma \in I_\alpha$, и пусть $\{w_k^\pm(\cdot, \mu)\}$ — описанный выше устойчивый базис волн в G . В ядре $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$ оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$ существуют наборы элементов $\{\mathcal{Y}_1^+(\cdot, \mu), \dots, \mathcal{Y}_M^+(\cdot, \mu)\}$ и $\{\mathcal{Y}_1^-(\cdot, \mu), \dots, \mathcal{Y}_M^-(\cdot, \mu)\}$, такие что

$$\left(\mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu) - w_j^+(\cdot, \mu) - \sum_{k=1}^M \mathcal{S}_{jk}(\mu) w_k^-(\cdot, \mu) \right) \in H_\gamma^2(G), \quad (1.27)$$

$$\left(\mathcal{Y}_j^-(\cdot, \mu) - w_j^-(\cdot, \mu) - \sum_{k=1}^M \mathcal{T}_{jk}(\mu) w_k^+(\cdot, \mu) \right) \in H_\gamma^2(G), \quad (1.28)$$

где $\mathcal{S}(\mu) = \|\mathcal{S}_{jk}(\mu)\|$ — унитарная матрица рассеяния и $\mathcal{S}(\mu)^{-1} = \mathcal{T}(\mu) = \|\mathcal{T}_{jk}(\mu)\|$. Каждый из указанных наборов $\{\mathcal{Y}_1^+(\cdot, \mu), \dots, \mathcal{Y}_M^+(\cdot, \mu)\}$ и $\{\mathcal{Y}_1^-(\cdot, \mu), \dots, \mathcal{Y}_M^-(\cdot, \mu)\}$ является базисом (по модулю $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)$) в ядре $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$.

Элементы $\mathcal{Y}(\cdot, \mu)$ из $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu) \setminus \ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)$ называются собственными функциями непрерывного спектра задачи (1.17), отвечающими числу μ . Матрицу $\mathcal{S}(\mu)$ (при $\mu \in (\tau - \beta, \tau)$) будем называть расширенной матрицей рассеяния.

Обозначим через \mathfrak{K} линейную оболочку $\mathfrak{L}(w_1^-, \dots, w_M^-)$. Норму элемента $w = \sum c_j w_j^- + v \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$, где $c_j \in \mathbb{C}$ и $v \in \dot{H}_\gamma^2(G)$, определим равенством

$$\|w\| = \sum |c_j| + \|v; H_\gamma^2(G)\|.$$

Пусть $\mathbf{A}(\mu)$ — сужение оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$ на пространство $\mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$; тогда непрерывно отображение

$$\mathbf{A}(\mu) : \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G) \rightarrow H_\gamma^0(G). \quad (1.29)$$

Теорема 1.2.3. Пусть $\mu \in (\tau - \beta, \tau + \beta)$, $\gamma \in I_\alpha$, и пусть $\{w_k^\pm(\cdot, \mu)\}$ — описанный выше устойчивый базис волн в G . Пусть z_1, \dots, z_d — базис в пространстве $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)$, $f \in H_\gamma^0(G)$ и $(f, z_j)_G = 0$, $j = 1, \dots, d$. Тогда:

1. Существует решение $w \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$ уравнения $\mathbf{A}(\mu)w = f$, определенное с точностью до произвольного слагаемого из линеала $\mathfrak{L}(z_1, \dots, z_d)$.

2. Справедливо включение

$$v \equiv w - c_1 w_1^- - \dots - c_M w_M^- \in H_\gamma^2(G),$$

где $c_j = i(f, \mathcal{Y}_j^-)_G$.

3. Для решения w выполняется неравенство

$$\|v; H_\gamma^2(G)\| + |c_1| + \dots + |c_M| \leq \text{const} (\|f; H_\gamma^0(G)\| + \|\rho_\gamma v; L_2(G)\|). \quad (1.30)$$

Решение w_0 , подчиненное условиям $(w_0, z_j)_G = 0$ при $j = 1, \dots, d$, единственно, и для него верна оценка (1.30) с заменой правой части на $\text{const}\|f; H_\gamma^0(G)\|$.

4. Если $f \in H_\gamma^0(G) \cap H_{\gamma'}^0(G)$, причем полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : \min\{\gamma, \gamma'\} \leq \text{Im}\lambda \leq \max\{\gamma, \gamma'\}\}$ не содержит собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$, то решения $w(\cdot, \mu) \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$ и $w'(\cdot, \mu) \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_{\gamma'}^2(G)$ уравнения $\mathbf{A}(\mu)w = f$ совпадают, а от выбора между γ и γ' по существу зависит лишь постоянная в (1.30).

Мы намерены распространить формулы вида (1.27), (1.28) на весь интервал (τ', τ'') с аналитическими функциями $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^\pm(\mu)$. В отличие от ситуации в замечании 1.2.2, распространить (1.27), (1.28) на произвольный интервал $[\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$ с одним и тем же показателем γ , вообще говоря, нельзя. Однако можно для этой цели обойтись конечным набором показателей на разных частях интервала $[\mu', \mu'']$. Составление такого набора описывается в следующей лемме.

Лемма 1.2.4. Для любого отрезка $[\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$ существуют конечное покрытие $\{U_p\}_{p=0}^N$ открытыми интервалами и набор постоянных $\{\gamma^p\}_{p=0}^N$, подчиненные условиям (с некоторым неотрицательным целым числом N):

1) $\mu' \in U_0$, $\mu'' \in U_N$; $U_0 \cap U_p = \emptyset$, $p = 2, \dots, N$; $U_N \cap U_p = \emptyset$, $p = 0, \dots, N-1$; при этом U_p пересекается только с интервалами U_{p-1} и U_{p+1} , $1 \leq p \leq N-1$.

2) Прямая $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda = \gamma^p\}$ свободна от спектра пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$, при всех $\mu \in U_p \cap [\mu', \mu'']$; здесь $p = 0, \dots, N$.

3) Полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : \gamma^p \leq \text{Im}\lambda \leq \gamma^{p+1}\}$ свободна от спектра пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$, при всех $\mu \in U_p \cap U_{p+1}$ и $p = 0, \dots, N-1$.

4) При $\mu \in U_p \cap [\mu', \mu'']$ справедливо неравенство $|\operatorname{Im}(\mu - \tau)^{1/2}| < \gamma^p$ (напомним, что $\pm(\mu - \tau)^{1/2}$ – собственные числа пучка $\mathfrak{A}^1(\cdot, \mu)$, $\tau = \mu_{l+1} = \dots = \mu_m$); других собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$, кроме вещественных собственных чисел, в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leq \gamma^p\}$ нет, $p = 0, \dots, N$.

Доказательство леммы наметим. Рассмотрим отрезок $[\mu', \mu'']$, считая, что $\tau \in (\mu', \mu'')$. Перед формулами (1.27) и (1.28) был определен интервал $(\tau - \beta, \tau + \beta)$, который можно взять одним из элементов искомого покрытия; как было ранее показано, в качестве γ для этого элемента годится любое число из интервала $I_\alpha = (\alpha, (\mu_{m+1} - \mu_m)^{1/2} - \alpha)$, где α – (малое) положительное число, а β зависит от α .

Выберем $\nu \in (\tau, \tau + \beta)$. Собственное число $\lambda_m(\mu) = (\mu - \mu_m)^{1/2}$ пучка $\mathfrak{A}^1(\cdot, \mu)$ вещественное при $\mu > \nu$, а число $\lambda_{m+1}(\mu) = i(\mu_{m+1} - \mu)^{1/2}$ этого пучка стремится к нулю с возрастанием μ от ν до $\tau'' = \mu_{m+1}$, причем интервал $\{z \in \mathbb{C} : z = it, 0 < t < (\mu_{m+1} - \mu'')^{1/2}\}$ мнимой оси остается свободным от спектра пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $\mu' \leq \mu \leq \mu''$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Поэтому в качестве элемента покрытия можно взять интервал $(\nu, \tilde{\nu})$, где $\mu'' < \tilde{\nu} < \tau''$, а показателем для этого интервала можно выбрать любое число $\gamma \in (0, (\mu_{m+1} - \mu'')^{1/2})$.

Осталось предъявить элементы U_p , расположенные слева от порога τ , и соответствующие показатели γ_p . Эти элементы и показатели можно выбрать так, чтобы графики функций $U_p \ni \mu \mapsto \gamma^p = \text{const}$ располагались между графиками функций $(\tau', \tau) \ni \mu \mapsto \operatorname{Im}\lambda_k(\mu) = (\mu_k - \mu)^{1/2}$, $k = m, m+1$, а показатели составляли убывающую последовательность $\gamma^0 > \gamma^1 > \dots$. \square

1.2.2 Аналитичность матриц рассеяния как функций спектрального параметра

Мы рассмотрим базисы $\{\mathcal{Y}_j^+\}$ и $\{\mathcal{Y}_j^-\}$ в пространствах собственных функций непрерывного спектра (СФНС), определенные вблизи порога τ (см. (1.27) и (1.28)). Сначала покажем, что функции $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^\pm(\cdot, \mu)$ допускают аналитическое продолжение на весь интервал (τ', τ'') . Здесь и далее под аналитичностью функции на интервале понимается возможность аналитического продолжения функции в комплексную окрестность каждой точки интервала. Затем мы установим аналитичность матрицы рассеяния $\mu \mapsto \mathcal{S}(\mu)$ на том же интервале (τ', τ'') . Этой аналитичности не вредит возможное присутствие собственных чисел задачи (1.17) на непрерывном спектре (произвол при выборе СФНС требованием аналитичности устраняется). Кроме того, устанавливается аналитичность элементов $\mu \mapsto Y_j^\pm(\cdot, \mu)$ базисов СФНС из (1.21) и (1.22) и соответствующей матрицы рассеяния $\mu \mapsto S(\mu)$ на интервалах (τ', τ) и (τ, τ'') .

Оператор $\mathcal{A}_\gamma(\mu)$, нужный для формул вида (1.27) и (1.28), можно определить в окрестности любой точки интервала (τ', τ'') . Показатель γ для этой цели доставляется леммой 1.2.4: одно и то же число γ^p может служить для всех $\mu \in U_p$. Поэтому при $\mu \in U_p$ существуют семейства $\{\mathcal{Y}_j^\pm(\cdot, \mu)\} \subset \ker \mathcal{A}_{-\gamma^p}(\mu)$, удовлетворяющие соотношениям вида (1.27) и (1.28) с унитарной матрицей $\mathcal{S}(\mu)$; имеет место теорема 1.2.3 при $\mu \in U_p$. Таким образом, дело сводится к доказательству аналитичности "локальных семейств" $\{\mathcal{Y}_j^\pm(\cdot, \mu)\}$ и $\mathcal{S}(\mu)$ на U_p и согласованности таких семейств на пересечениях окрестностей.

Предварительно мы получим представление оператора $\mathbb{A}(\mu)^{-1}$, где $\mathbb{A}(\mu)$ — оператор (1.24) или (1.29), в окрестности собственного числа задачи (1.17). Для этой цели напомним некоторые сведения из теории голоморфных оператор-функций (см., например, [25]). Пусть \mathcal{D} — область на комплексной плоскости, B_1, B_2 — банаховы пространства и \mathbb{A} — голоморфная оператор-функция $\mathcal{D} \ni \mu \mapsto \mathbb{A}(\mu) : B_1 \rightarrow B_2$. Спектр функции $\mathbb{A}(\cdot)$ есть множество таких точек $\mu \in \mathcal{D}$, для которых $\mathbb{A}(\mu)$ — необратимый оператор. Число μ_0 называется собственным для \mathbb{A} , если существует ненулевой вектор $\varphi_0 \in B_1$, такой что $\mathbb{A}(\mu_0)\varphi_0 = 0$; вектор φ_0 называют собственным. Пусть μ_0 и φ_0 — собственные число и вектор. Элементы $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ называются присоединенными (или обобщенными собственными) векторами, если

$$\sum_{q=0}^n \frac{1}{q!} (\partial_\mu^q \mathbb{A})(\mu_0) \varphi_{n-q} = 0,$$

где $n = 1, \dots, m$. Говорят, что голоморфная функция \mathbb{A} фредгольмова, если оператор $\mathbb{A}(\mu) : B_1 \rightarrow B_2$ фредгольмов для всех $\mu \in \mathcal{D}$ и обратим хотя бы для одного значения μ . Спектр фредгольмовой функции \mathbb{A} составляют изолированные собственные значения конечной алгебраической кратности. Голоморфная функция \mathbb{A}^* , сопряженная с \mathbb{A} , задана на множестве $\{\mu : \bar{\mu} \in \mathcal{D}\}$ и определена равенством $\mathbb{A}^*(\mu) = (\mathbb{A}(\bar{\mu}))^* : B_1^* \rightarrow B_2^*$. Если одна из функций \mathbb{A}, \mathbb{A}^* фредгольмова, то и вторая оказывается фредгольмовой. Число μ_0 — собственное для \mathbb{A} в том и только в том случае, когда $\bar{\mu}_0$ — собственное число для \mathbb{A}^* ; алгебраическая и геометрическая кратности $\bar{\mu}_0$ такие же, как у числа μ_0 .

Мы будем рассматривать оператор-функцию $\mu \mapsto \mathbb{A}(\mu)$ из формулы (1.24) или (1.29) на отрезке $[\mu', \mu'']$, который принадлежит хотя бы одному из интервалов (τ', τ) и (τ, τ'') . Учитывая замечание 1.2.2, показатель δ в (1.24) и в теореме 1.2.1 выберем одним и тем же для всех $\mu \in [\mu', \mu'']$. Функция $\mu \mapsto \mathbb{A}(\mu)$ из (1.29) рассматривается на отрезке $[\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$ столь малом, чтобы лемма 1.2.4 позволила выбрать единое число γ в (1.29) и в теореме 1.2.3 для всех $\mu \in [\mu', \mu'']$. Согласно предложению 1.1.1 волны из определений операторов (1.24) и (1.29) го-

ломорфны в комплексной окрестности соответствующего отрезка $[\mu', \mu'']$. Значит, там же голоморфны и оператор-функции $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ из теорем 1.2.1 и 1.2.3.

Предложение 1.2.5. i). Пусть $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ — оператор-функция из теоремы 1.2.3, μ_0 — собственное число оператора (1.20) и (z_1, \dots, z_d) — базис собственного подпространства $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu_0)$. Тогда в проколотой окрестности числа μ_0 справедливо представление

$$\mathbf{A}^{-1}(\mu)f = (\mu - \mu_0)^{-1}\mathbf{P}f + \mathbf{R}(\mu)f, \quad (1.31)$$

где $f \in H_\gamma^0(G)$,

$$\mathbf{P}f = - \sum_{j=1}^d (f, z_j)_G z_j, \quad (1.32)$$

а функция $\mathbf{R}(\mu) : H_\gamma^0(G) \rightarrow \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$ голоморфна в окрестности точки μ_0 .

ii). Пусть $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ — оператор-функция из теоремы 1.2.1, μ_0 — собственное число оператора (1.20) из интервала (τ', τ) или (τ, τ'') и (z_1, \dots, z_d) — базис собственного подпространства $\ker \mathcal{A}_\delta(\mu_0)$. Тогда в проколотой окрестности числа μ_0 справедливо представление (1.31), в котором $\mathbf{P}f$ определяется равенством (1.32), причем \mathbf{R} есть оператор-функция $\mathbf{R}(\mu) : H_\delta^0(G) \rightarrow \mathfrak{X} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$, голоморфная в окрестности точки μ_0 .

Доказательство. i). По теореме 1.2.3 оператор $\mathbf{A}(\mu)$ фредгольмов в каждой точке $\mu \in [\mu'_m, \mu''_m]$. Можно считать, что $\mathbf{A}(\mu)$ фредгольмов и в окрестности U (это свойство устойчиво относительно малых по норме возмущений оператора).

Число μ называется собственным числом задачи (1.17), если существует гладкое ненулевое решение этой задачи в пространстве $L_2(G)$. Собственные числа вещественны, сгущаются разве что на бесконечности; всякая собственная функция принадлежит пространству $\dot{H}_\gamma^2(G)$ с некоторым $\gamma > 0$. Теорема 1.2.3 обеспечивает обратимость оператора $\mathbf{A}(\mu)$ при всех $\mu \in [\mu'_m, \mu''_m]$, за исключением собственных чисел задачи (1.17). Значит, оператор-функция $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ фредгольмова в окрестности точки μ_0 на комплексной плоскости. Из теоремы 1.2.3 следует, что собственные подпространства оператора $\mathbf{A}(\mu)$ и задачи (1.17) совпадают, т. е. $\ker \mathbf{A}(\mu_0) = \ker \mathcal{A}_\gamma(\mu_0) \subset \dot{H}_\gamma^2(G)$. Легко проверяется, что присоединенных (обобщенных собственных) векторов в точке μ_0 оператор-функция \mathbf{A} не имеет. Тогда из теоремы Келдыша о резольвенте голоморфной оператор-функции (см. [25]) вытекает равенство

$$\mathbf{A}^{-1}(\mu)f = (\mu - \mu_0)^{-1}\mathbf{T}f + \mathbf{R}(\mu)f; \quad (1.33)$$

здесь $\mathbf{T}f = \sum_{j=1}^d (f, \psi_j) z_j$, причем $(\cdot, \cdot)_G$ — расширение скалярного произведения в $L_2(G)$ на пару пространств $H_\gamma^0(G), H_\gamma^0(G)^*$. Элементы $\psi_j \in \ker \mathbf{A}(\mu_0)^* \subset W(G; \gamma)^*$

подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$((\partial_\mu \mathbf{A})(\mu_0)z_j, \psi_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, d. \quad (1.34)$$

Далее, $(\partial_\mu \mathbf{A})(\mu_0)z_j = -z_j \in W(G; \gamma)$, откуда получаем $\psi_k = -z_k$. Теперь $\mathbf{T}f$ совпадает с $\mathbf{P}f$ в (1.32), а формула (1.33) принимает вид (1.31).

ii). Можно повторить с очевидными изменениями рассуждения из первой части доказательства. \square

Теперь мы готовы к обсуждению аналитичности базисов в пространствах собственных функций непрерывного спектра (СФНС). Займемся, например, базисом $\{\mathcal{Y}_j^+\}$ из формулы (1.27). Из определения волны w_j^+ в G (см. п. 1.1.2) следует, что носитель функции $G \ni x \mapsto w_j^+(x, \mu)$ сосредоточен в одном из выходов G на бесконечность, причем

$$\begin{aligned} -\Delta w_j^+(x, \mu) - \mu w_j^+(x, \mu) &= f_j(x, \mu), & x \in G, \\ w_j^+(x, \mu) &= 0, & x \in \partial G, \end{aligned}$$

а функция $x \mapsto f_j(x, \mu)$ имеет компактный носитель. Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{A}(\mu)w(\cdot, \mu) = f_j(\cdot, \mu) \quad (1.35)$$

на интервале $[\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$, предполагая сначала, что отрезок $[\mu', \mu'']$ свободен от собственных чисел оператор-функции $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$. По теореме 1.2.3 для всех $\mu \in [\mu', \mu'']$ существует единственное решение $w = v + c_1 w_1^- + \dots + c_M w_M^-$ уравнения (1.35), причем

$$w(\cdot, \mu) = \{c_1(\mu), \dots, c_M(\mu), v(\cdot, \mu)\} \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G). \quad (1.36)$$

Поскольку каждая из функций $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)^{-1}$ и $\mu \mapsto f_j(\cdot, \mu)$ голоморфна в комплексной окрестности интервала $[\mu', \mu'']$, голоморфными оказываются и компоненты вектор-функции $\mu \mapsto w(\cdot, \mu)$. Поэтому аналитичность функции $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu)$ в той же окрестности следует из равенства

$$\mathcal{Y}_j^+ = w_j^+ - w. \quad (1.37)$$

Теперь допустим, что на интервале $[\mu', \mu'']$ имеется собственное число μ_0 оператор-функции $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$. Для $f = f_j$ из правой части (1.35) найдем вычет $\mathbf{P}f$ в (1.31).

При $z \in \ker \mathcal{A}_\gamma(\mu_0)$ имеем

$$(f, z)_G = (f_j, z)_G = (-\Delta w_j^+ - \mu w_j^+, z)_G = (w_j^+, -\Delta z - \mu z)_G = 0.$$

Значит, $\mathbf{R}f_j = 0$ и, в силу (1.31),

$$w(\cdot, \mu) = \mathbf{A}(\mu)^{-1}f_j = \mathbf{R}(\mu)f_j,$$

то есть функция $\mu \mapsto w(\cdot, \mu)$ аналитическая в окрестности точки μ_0 . Отсюда, как и в предыдущем случае, вытекает аналитичность функции $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu)$.

Аналитичность функций $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^-(\cdot, \mu)$ проверяется таким же путем. С очевидными изменениями устанавливается аналитичность функций вида $\mu \mapsto Y_j^+(\cdot, \mu)$ и $\mu \mapsto Y_j^-(\cdot, \mu)$ из (1.21) и (1.22) в комплексной окрестности отрезков $[\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau)$ или $[\mu', \mu''] \subset (\tau, \tau'')$.

Применяя лемму 1.2.4 и утверждение 4 из теоремы 1.2.3, можно формулы (1.27) и (1.28) распространить на весь интервал (τ', τ'') для аналитических семейств $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^\pm(\cdot, \mu)$, хотя и с "переменным" показателем γ ; впрочем, в окрестности любой точки $\mu \in (\tau', \tau'')$ можно показатель γ выбирать постоянным. Замечание 1.2.2 и утверждение 4 из теоремы 1.2.1 позволяют распространить формулы (1.21) и (1.22) на интервалы (τ', τ) и (τ, τ'') для аналитических семейств $\mu \mapsto Y_j^\pm(\cdot, \mu)$.

Теорема 1.2.6. Пусть $\tau' < \tau < \tau''$ — три последовательных порога для задачи (1.17) и сохраняются предположения, введенные в начале раздела 1.2. Тогда:

i). На интервалах (τ', τ) и (τ, τ'') существуют аналитические базисы $\{\mu \mapsto Y_j^\pm(\cdot, \mu)\}$ в пространствах СФНС задачи (1.17), удовлетворяющие формулам (1.21) и (1.22) с матрицей рассеяния $\mu \mapsto S(\mu)$, аналитической на указанных интервалах.

ii). На интервале (τ', τ'') существуют аналитические базисы $\{\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^\pm(\cdot, \mu)\}$ в пространствах СФНС задачи (1.17), удовлетворяющие формулам (1.27) и (1.28) с матрицей рассеяния $\mu \mapsto \mathcal{S}(\mu)$, аналитической на указанном интервале.

Доказательство. Рассуждения, проведенные в разделе 1.2.2, позволяют ограничиться проверкой аналитичности матриц рассеяния. Рассмотрим, например, матрицу $\mu \mapsto S(\mu)$. Равенство (1.37), представление $w = v + c_1 w_1^- + \dots + c_M w_M^-$ и включение (1.36) означают, что

$$\mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu) = w_j^+(\cdot, \mu) - \sum_{k=1}^M c_k(\mu) w_k^-(\cdot, \mu) \in H_\gamma^2(G).$$

Поэтому $\mathcal{S}_{jk}(\mu) = -c_k(\mu)$, $k = 1, \dots, M$. Остается вспомнить, что $\mu \mapsto c_k(\mu)$ — аналитические функции на интервале (τ', τ'') . Аналитичность матрицы $\mu \mapsto S(\mu)$ проверяется с очевидными изменениями. \square

Для базиса $\{\mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu)\}_j^M$ в пространстве СФНС (см. теорему 1.2.6, ii)) введем столбцы $\mathcal{Y}_{(1)}^+ = (\mathcal{Y}_1^+, \dots, \mathcal{Y}_L^+)^t$ и $\mathcal{Y}_{(2)}^+ = (\mathcal{Y}_{L+1}^+, \dots, \mathcal{Y}_M^+)^t$ и в соответствии с этими обозначениями запишем при $\mu \in (\tau', \tau'')$ матрицу рассеяния в виде

$$\mathcal{S}(\mu) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)}(\mu) & \mathcal{S}_{(12)}(\mu) \\ \mathcal{S}_{(21)}(\mu) & \mathcal{S}_{(22)}(\mu) \end{pmatrix},$$

где, например, $\mathcal{S}_{(11)}(\mu)$ — блок размера $L \times L$, а $\mathcal{S}_{(22)}(\mu)$ — блок размера $(M - L) \times (M - L)$. Положим еще

$$D = ((\mu - \tau)^{1/2} + 1)/((\mu - \tau)^{1/2} - 1),$$

причем $(\mu - \tau)^{1/2} = i(\tau - \mu)^{1/2}$ для $\mu \leq \tau$ и $(\tau - \mu)^{1/2} \geq 0$. Следующее утверждение используется в разделе 1.3.

Лемма 1.2.7. Пусть $\mu \in (\tau', \tau]$ и $\mathcal{S}(\mu)$ — матрица рассеяния из теоремы 1.2.6, ii). Тогда

$$\ker(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)) \subset \ker \mathcal{S}_{(12)}(\mu), \quad (1.38)$$

$$\text{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)) \supset \text{Im} \mathcal{S}_{(21)}(\mu). \quad (1.39)$$

Поэтому оператор $\mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}$ определен на образе $\text{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))$.

Доказательство. Займемся включением (1.38). Пусть $h \in \ker(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))$ и пусть $(0, h)^t \in \mathbb{C}^M$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)}(\mu) & \mathcal{S}_{(12)}(\mu) \\ \mathcal{S}_{(21)}(\mu) & \mathcal{S}_{(22)}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(12)}(\mu)h \\ -Dh \end{pmatrix}.$$

Так как матрица $\mathcal{S}(\mu)$ унитарная и $|D| = 1$, то $\|h\|^2 = \|\mathcal{S}_{(12)}(\mu)h\|^2 + \|h\|^2$ и, значит, $\mathcal{S}_{(12)}(\mu)h = 0$, то есть соотношение (1.38) справедливо. Включение (1.39) равносильно формуле

$$\ker(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^* \subset \ker \mathcal{S}_{(21)}(\mu)^*. \quad (1.40)$$

Поскольку

$$\mathcal{S}(\mu)^* = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)}(\mu)^* & \mathcal{S}_{(21)}(\mu)^* \\ \mathcal{S}_{(12)}(\mu)^* & \mathcal{S}_{(22)}(\mu)^* \end{pmatrix}$$

и матрица $\mathcal{S}(\mu)^*$ унитарная, формула (1.40) доказывается таким же рассуждением, как и (1.38). \square

1.3 Другие свойства матриц рассеяния

В этом разделе устанавливается связь матриц $\mathcal{S}(\mu)$ и $S(\mu)$ на интервале $\tau' < \mu < \tau$, доказывается существование односторонних конечных пределов $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$ и описывается преобразование матрицы рассеяния при замене базиса в пространстве волн $\mathcal{W}(\mu, G)$ для $\mu \in (\tau, \tau'')$. Мы сохраняем предположения, сделанные в самом начале раздела 1.2.

1.3.1 Связь матриц $\mathcal{S}(\mu)$ и $S(\mu)$ при $\tau' < \mu < \tau$

Напомним описание (устойчивого) базиса, выбранного для определения матрицы $\mathcal{S}(\mu)$. В полуцилиндре Π_+^1 введем функции

$$\Pi_+^1 \ni (y, t) \mapsto e_k^\pm(y, t; \mu) := \chi(t) \exp(\pm it \sqrt{\mu - \mu_k}) \varphi_k(y),$$

где $k = l + 1, \dots, m$ (обозначения такие же, как в (1.10); как и прежде, $\mu_{l+1} = \dots = \mu_m = \tau$). Распространим эти функции нулем на всю область G и положим

$$w_{L+j}^\pm(\cdot; \mu) = 2^{-1/2} \left(\frac{e_{l+j}^+(\cdot; \mu) + e_{l+j}^-(\cdot; \mu)}{2} \mp \frac{e_{l+j}^+(\cdot; \mu) - e_{l+j}^-(\cdot; \mu)}{2\sqrt{\mu - \mu_{l+j}}} \right) \quad (1.41)$$

при $j = 1, \dots, m - l = M - L$ (равенство $m - l = M - L$ объясняется после замечания 1.2.2). Все остальные волны с носителями в Π_+^1 , полученные из функций (1.11), и волны такого же типа с носителями в Π_+^2, \dots, Π_+^T , пронумеруем одним индексом $j = 1, \dots, L$ и обозначим через $w_1^\pm(\cdot; \mu), \dots, w_L^\pm(\cdot; \mu)$. Составленный таким образом набор $\{w_1^\pm, \dots, w_M^\pm\}$ является базисом волн в G , устойчивым в окрестности порога τ . Наконец, введем столбцы $\mathbf{w}_{(1)}^\pm = (w_1^\pm, \dots, w_L^\pm)^t$, $\mathbf{w}_{(2)}^\pm = (w_{L+1}^\pm, \dots, w_M^\pm)^t$ и $(\mathbf{w}_{(1)}^\pm, \mathbf{w}_{(2)}^\pm) = (w_1^\pm, \dots, w_M^\pm)^t$, где t обозначает транспонирование матрицы. Компоненты вектора $\mathbf{w}_{(1)}^\pm$ ограничены, а компоненты вектора $\mathbf{w}_{(2)}^\pm$ экспоненциально растут на бесконечности в полуцилиндре Π_+^1 . Полагая $\mathbf{e}_{(1)}^\pm = (e_1^\pm, \dots, e_L^\pm)^t$, $\mathbf{e}_{(2)}^\pm = (e_{L+1}^\pm, \dots, e_M^\pm)^t$, придем к равенствам

$$\mathbf{w}_{(2)}^\pm = D^\mp \mathbf{e}_{(2)}^+ + D^\pm \mathbf{e}_{(2)}^-, \quad (1.42)$$

где

$$D^\pm = ((\mu - \tau)^{1/2} \pm 1) / 2\sqrt{2}(\mu - \tau)^{1/2}.$$

Следующее утверждение по существу содержится в [41].

Предложение 1.3.1. Пусть $\mu \in (\tau', \tau)$, а $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$ – матрицы рассеяния из теоремы 1.2.6. Тогда справедливо равенство

$$S(\mu) = \mathcal{S}_{(11)}(\mu) - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{(21)}(\mu) \quad (1.43)$$

при

$$D = D^+/D^- = ((\mu - \tau)^{1/2} + 1)/((\mu - \tau)^{1/2} - 1).$$

Доказательство. Проверим равенство (1.43). Перепишем (1.27) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{(1)}^+ - \mathbf{w}_{(1)}^+ - \mathcal{S}_{(11)}\mathbf{w}_{(1)}^- - \mathcal{S}_{(12)}\mathbf{w}_{(2)}^- &\in H_\gamma^2(G), \\ \mathcal{Y}_{(2)}^+ - \mathbf{w}_{(2)}^+ - \mathcal{S}_{(21)}\mathbf{w}_{(1)}^- - \mathcal{S}_{(22)}\mathbf{w}_{(2)}^- &\in H_\gamma^2(G). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Напомним, что параметр $\gamma > 0$ выбирается в соответствии с леммой 1.2.4, так что полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < \gamma\}$ содержит собственные числа $\pm(\mu - \tau)^{1/2}$ пучка $\mathfrak{A}^1(\cdot, \mu)$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < \delta\}$ содержала лишь вещественные собственные числа пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Тогда $\delta < \gamma$, а $H_\gamma^2(G) \subset H_\delta^2(G)$. Подставим в формулы (1.44) вместо $\mathbf{w}_{(2)}^\pm$ их выражения из (1.42); при указанном δ вектор-функция $\mathbf{e}_{(2)}^+$ принадлежит пространству $H_\delta^2(G)$. В результате получаем

$$\mathcal{Y}_{(1)}^+ = \mathbf{w}_{(1)}^+ + \mathcal{S}_{(11)}\mathbf{w}_{(1)}^- + \mathcal{S}_{(12)}D^-\mathbf{e}_{(2)}^- + \mathfrak{R}_{(1)}, \quad (1.45)$$

$$\mathcal{Y}_{(2)}^+ = \mathcal{S}_{(21)}\mathbf{w}_{(1)}^- + (D + \mathcal{S}_{(22)})D^-\mathbf{e}_{(2)}^- + \mathfrak{R}_{(2)}, \quad (1.46)$$

где $\mathfrak{R}_{(1)}, \mathfrak{R}_{(2)} \in H_\delta^2(G)$. Введем ортогональный проектор

$$\mathcal{P} : \mathbb{C}^{M-L} \rightarrow \operatorname{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)).$$

Учитывая (1.39) и (1.46), приходим к равенству

$$\mathcal{P}\mathcal{Y}_{(2)}^+ = \mathcal{S}_{(21)}\mathbf{w}_{(1)}^- + (D + \mathcal{S}_{(22)})D^-\mathbf{e}_{(2)}^- + \mathcal{P}\mathfrak{R}_{(2)}. \quad (1.47)$$

К обеим частям (1.47) применим оператор $\mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}$ и полученное равенство вычтем из (1.45). Имеем

$$Z = \mathbf{w}_{(1)}^+ + (\mathcal{S}_{(11)}(\mu) - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{(21)}(\mu))\mathbf{w}_{(1)}^- + R, \quad (1.48)$$

где

$$Z = \mathcal{Y}_{(1)}^+ - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1} \mathcal{P} \mathcal{Y}_{(2)}^+, \quad (1.49)$$

$$R = \mathfrak{R}_{(1)} - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1} \mathcal{P} \mathfrak{R}_{(2)}. \quad (1.50)$$

Компоненты векторов $\mathcal{Y}_{(1)}^+$ и $\mathcal{Y}_{(2)}^+$ удовлетворяют задаче (1.17); ввиду (1.49) то же верно и для компонент вектора Z . Кроме того, из включений $\mathfrak{R}_{(1)}, \mathfrak{R}_{(2)} \in H_\delta^2(G)$ и равенства (1.50) вытекает, что $R \in H_\delta^2(G)$. Значит, формула (1.48) описывает рассеяние вектора $\mathbf{w}_{(1)}^+$ входящих волн в "нерасширенном" базисе $\mathbf{w}_{(1)}^+, \mathbf{w}_{(1)}^-$, как и формула (1.21), и потому выполняется равенство (1.43). \square

1.3.2 Связь матриц $\mathcal{S}(\mu)$ и $S(\mu)$ при $\tau < \mu < \tau''$

При $\tau < \mu < \tau''$ рассматриваются два базиса в пространстве волн $\mathcal{W}(\mu, G)$. Один из базисов составляют волны в G , отвечающие функциям вида $u_q^\pm(\cdot, \mu)$ из (1.6), а второй базис состоит из волн, порожденных функциями $w_q^\pm(\cdot, \mu)$ (см. (1.10), (1.11)). Как и прежде, матрицы рассеяния, определенные в указанных базисах, обозначаются через $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$ (см. теорему 1.2.6); теперь, то есть при $\mu \in (\tau, \tau'')$, это матрицы одного и того же порядка M .

Матрицы рассеяния не зависят от выбора срезающей функции χ в определении пространства волн $\mathcal{W}(\mu, G)$. Можно исключить срезку из дальнейших рассуждений, отождествляя "эквивалентные" волны. С этой целью введем факторпространство

$$\dot{\mathcal{W}}(\mu, G) := (\mathcal{W}(\mu, G) \dot{+} H_\gamma^2(G)) / H_\gamma^2(G).$$

Через \dot{v} обозначим класс из $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$, представителем которого является волна $v \in \mathcal{W}(\mu, G)$. Далее волны вида $\chi u_q^\pm(\cdot, \mu)$ и $\chi w_q^\pm(\cdot, \mu)$ в области G будем обозначать просто $u_q^\pm(\cdot, \mu)$ и $w_q^\pm(\cdot, \mu)$. Наборы $\{\dot{u}_q^\pm(\cdot, \mu)\}_{j=1}^M$ и $\{\dot{w}_k^\pm(\cdot, \mu)\}_{k=1}^M$ являются базисами в пространстве $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$, так что $\dim \dot{\mathcal{W}}(\mu, G) = 2M$. Форма $q_G(u, v)$ из (1.18) не зависит от выбора представителей в классах \dot{u}, \dot{v} и потому определена на произведении $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G) \times \dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$. Из (1.8), (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} iq_G(\dot{u}_k^\pm(\cdot; \mu), \dot{u}_l^\mp(\cdot; \mu)) &= 0 \quad \text{при всех } k, l = 1, \dots, M, \\ iq_G(\dot{u}_k^\pm(\cdot; \mu), \dot{u}_l^\pm(\cdot; \mu)) &= \mp \delta_{kl}, \end{aligned}$$

а формулы (1.12), (1.13) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} iq_G(\dot{w}_r^\pm(\cdot; \mu), \dot{w}_s^\mp(\cdot; \mu)) &= 0 \quad \text{при всех } r, s = 1, \dots, M, \\ iq_G(\dot{w}_r^\pm(\cdot; \mu), \dot{w}_s^\pm(\cdot; \mu)) &= \mp \delta_{rs}. \end{aligned}$$

Итак, $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$ является $2M$ -мерным комплексным пространством, наделенным индефинитным скалярным произведением $\langle \dot{u}, \dot{v} \rangle := -iq_G(\dot{u}, \dot{v})$. Проекция

$$\pi : \mathcal{W}(\mu, G) \dot{+} H_\gamma^2(G) \rightarrow \dot{\mathcal{W}}(\mu, G) \quad (1.51)$$

переводит пространство собственных функций непрерывного спектра в M -мерное подпространство в $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$; обозначим это подпространство через $\mathcal{E}(\mu)$.

Пусть V_1, \dots, V_{2M} — базис в $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$, подчиненный условиям ортогональности и нормировки

$$\langle V_j, V_l \rangle = \delta_{jl}, \quad \langle V_{j+M}, V_{l+M} \rangle = -\delta_{jl} \quad \text{при } j, l = 1, \dots, M. \quad (1.52)$$

Элементы V_1, \dots, V_M назовем приходящими волнами, а элементы V_{M+1}, \dots, V_{2M} — уходящими. Пусть еще X_1, \dots, X_M — базис в пространстве $\mathcal{E}(\mu)$, которому в базисе волн V_1, \dots, V_{2M} отвечает $M \times M$ -матрица рассеяния $\mathfrak{S}(\mu)$ (ср.с (1.21)). Векторы X_j представим строками координат и составим $M \times 2M$ -матрицу $X = (X_1, \dots, X_M)^t$ (столбец из букв X_1, \dots, X_M). Наконец, пусть I обозначает единичную матрицу размера $M \times M$. В таких обозначениях формула вида (1.21) приводит к равенству

$$X = (I, \mathfrak{S}(\mu))V,$$

где V есть $2M \times 2M$ -матрица $(V_1, \dots, V_{2M})^t$, составленная из координатных строк векторов V_j , а $(I, \mathfrak{S}(\mu))$ является матрицей размера $M \times 2M$.

Предположим, что $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_{2M}$ — другой базис волн, подчиненный условиям вида (1.52), а $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_M$ — базис в пространстве $\mathcal{E}(\mu)$ и $\tilde{\mathfrak{S}}(\mu)$ — соответствующая матрица рассеяния, такие что

$$\tilde{X} = (I, \tilde{\mathfrak{S}}(\mu))\tilde{V}. \quad (1.53)$$

Будем считать, что $\tilde{V} = \mathfrak{T}V$, и запишем $(2M \times 2M)$ -матрицу \mathfrak{T} в виде $\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}_{kl})_{k,l=1}^2$ с блоками \mathfrak{T}_{kl} размера $M \times M$.

Лемма 1.3.2. *Матрицы $\mathfrak{T}_{11} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{21}$ и $\mathfrak{T}_{12} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{22}$ обратимые, причем*

$$\mathfrak{S}(\mu) = (\mathfrak{T}_{11} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{21})^{-1}(\mathfrak{T}_{12} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{22}). \quad (1.54)$$

Доказательство. Для базисов X_1, \dots, X_M и $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_M$ существует такая неособенная $M \times M$ матрица B , что $\tilde{X} = BX$. Поэтому, в силу (1.53), имеем

$$BX = (I, \tilde{\mathfrak{S}}(\mu))\mathfrak{T}V.$$

Учитывая (1.3.2), отсюда выводим, что

$$B(I, \mathfrak{S}(\mu))V = (I, \tilde{\mathfrak{S}}(\mu))\mathfrak{T}V.$$

Значит,

$$B(I, \mathfrak{S}(\mu)) = (I, \tilde{\mathfrak{S}}(\mu))\mathfrak{T}.$$

Последнее равенство переписывается в виде

$$(B, B\mathfrak{S}(\mu)) = (\mathfrak{T}_{11} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{21}, \mathfrak{T}_{12} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{22}).$$

Теперь утверждения леммы очевидны. \square

Мы намерены применить формулу (1.54), выбирая в качестве \tilde{V} образ при канонической проекции (1.51) устойчивого базиса волн в пространстве $\mathcal{W}(\mu, G)$ из формулы (1.27), а в качестве V — образ базиса волн из формулы (1.21). Роль $\tilde{\mathfrak{S}}(\mu)$ будет играть матрица рассеяния $\mathcal{S}(\mu)$, а роль $\mathfrak{S}(\mu)$ отводится матрице $S(\mu)$. Займемся вычислением матрицы \mathfrak{T} в равенстве $\tilde{V} = \mathfrak{T}V$. При этом вместо \tilde{V} и V можно рассматривать их только что упомянутые прообразы в $\mathcal{W}(\mu, G)$. Положим

$$u_j := u_j^+, \quad u_{j+M} := u_j^-, \quad j = 1, \dots, M, \quad (1.55)$$

где u_j^\pm — волны из пространства $\mathcal{W}(\mu, G)$, порожденные функциями вида (1.6). Введем еще

$$\begin{aligned} w_j &:= w_j^+ = u_j^+, & w_{j+M} &:= w_j^- = u_j^-, & j &= 1, \dots, L, \\ w_p &:= w_p^+, & w_{p+M} &:= w_p^-, & p &= L+1, \dots, M-L, \end{aligned} \quad (1.56)$$

причем w_p^\pm — волны из $\mathcal{W}(\mu, G)$, порожденные функциями (1.10). Для матрицы \mathfrak{T} справедливо равенство $w = \mathfrak{T}u$ с векторами-столбцами $w = (w_1, \dots, w_{2M})^t$ и $u = (u_1, \dots, u_{2M})^t$. Функции (1.10) (обозначая их здесь для удобства так же, как волны w_p^\pm) запишем в виде

$$w_p^\pm(\mu) = 2^{-1/2}((e^{it\lambda} + e^{-it\lambda})/2) \mp (e^{it\lambda} - e^{-it\lambda})/2\lambda \varphi_p,$$

где $\lambda = \sqrt{\mu - \tau}$ и τ — порог; функции (1.6) записываются в виде

$$u_p^\pm(\mu) = (2\lambda)^{-1/2} e^{\mp it\lambda} \varphi_p.$$

Значит,

$$w_p^\pm = (1/2)(u_p^+(\lambda^{1/2} \pm \lambda^{-1/2}) + u_p^-(\lambda^{1/2} \mp \lambda^{-1/2})), \quad p = L + 1, \dots, M - L,$$

причем в этом равенстве под w_p^\pm и u_p^\pm можно понимать как функции (в цилиндре), так и соответствующие волны в области G . Вместе с (1.55) и (1.56) это приводит к следующему описанию блоков \mathfrak{T}_{ij} матрицы \mathfrak{T} .

Лемма 1.3.3. *Каждая из матриц \mathfrak{T}_{ij} состоит из четырех блоков и является блочно-диагональной. Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{11}(\mu) &= \mathfrak{T}_{22}(\mu) = \text{diag}\{I_L, 2^{-1}(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})I_{M-L}\}, \\ \mathfrak{T}_{21}(\mu) &= \mathfrak{T}_{12}(\mu) = \text{diag}\{O_L, 2^{-1}(\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2})I_{M-L}\}, \end{aligned}$$

где I_K — единичная матрица размера $K \times K$, матрица O_L размера $L \times L$ состоит из нулей, $\lambda = \sqrt{\mu - \tau}$ и $\mu \in (\tau, \tau'')$.

Вернемся к формуле (1.54) с матрицами \mathcal{S} и \mathcal{S} вместо $\tilde{\mathfrak{S}}$ и \mathfrak{S} . Матрицу \mathcal{S} разобьем на четыре блока с диагональными блоками \mathcal{S}_{11} размера $L \times L$ и \mathcal{S}_{22} размера $(M - L) \times (M - L)$. Положим еще $d^\pm = 2^{-1}(\lambda^{1/2} \pm \lambda^{-1/2})$. Тогда

$$\mathfrak{T}_{11} + \mathcal{S}\mathfrak{T}_{21} = \begin{pmatrix} I_L & \mathcal{S}_{12}d^- \\ O & \mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+ \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 1.3.2, матрица $\mathfrak{T}_{11} + \mathcal{S}\mathfrak{T}_{21}$ обратима, следовательно, обратима и матрица $\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+$, так что

$$(\mathfrak{T}_{11} + \mathcal{S}\mathfrak{T}_{21})^{-1} = \begin{pmatrix} I_L & -\mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1} \\ O & (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Теперь из формулы (1.54) вытекает

Предложение 1.3.4. *При $\mu \in (\tau, \tau'')$ для блоков S_{ij} матрицы рассеяния*

$$S(\mu) = (\mathfrak{T}_{11} + \mathcal{S}(\mu)\mathfrak{T}_{21})^{-1}(\mathfrak{T}_{12} + \mathcal{S}(\mu)\mathfrak{T}_{22})$$

справедливы представления

$$S_{11} = \mathcal{S}_{11} - \mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}\mathcal{S}_{21}, \quad (1.57)$$

$$S_{12} = \mathcal{S}_{12}d^+ - \mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+ + I_{M-L}d^-), \quad (1.58)$$

$$S_{21} = (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}\mathcal{S}_{21}, \quad (1.59)$$

$$S_{22} = (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+ + I_{M-L}d^-). \quad (1.60)$$

1.3.3 Пределы $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$

Для вычисления предела $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau - 0$ используем формулу (1.43), а при $\mu \rightarrow \tau + 0$ будем применять равенства (1.57)–(1.60). Процедура вычисления пределов зависит от того, является или не является число 1 собственным для матрицы $\mathcal{S}_{22}(\tau)$.

Сначала вычислим пределы $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$ в случае, когда 1 не является собственным числом матрицы $\mathcal{S}_{22}(\tau)$. Напомним, что функции $\mu \mapsto \mathcal{S}_{kl}(\mu)$ аналитичны в окрестности точки $\mu = \tau$. Поэтому из (1.43) непосредственно получаем

$$\lim_{\mu \rightarrow \tau - 0} S(\mu) = \mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau)(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)^{-1}\mathcal{S}_{21}(\tau). \quad (1.61)$$

Займемся вычислением пределов при $\mu \rightarrow \tau + 0$. В силу (1.57) и (1.61) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \tau + 0} S_{11}(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow \tau + 0} (\mathcal{S}_{11}(\mu) - \mathcal{S}_{12}(\mu)(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+(\mu)/d^-(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{21}(\mu)) \\ &= \mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau)(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)^{-1}\mathcal{S}_{21}(\tau) = \lim_{\mu \rightarrow \tau - 0} S(\mu). \end{aligned}$$

Согласно (1.60),

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \tau + 0} S_{22}(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow \tau + 0} (\mathcal{S}_{22} + d^+/d^-)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+/d^- + 1) \\ &= (\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)^{-1}(-\mathcal{S}_{22}(\tau) + 1) = -I_{M-L}. \end{aligned}$$

Из (1.59) выводим, что

$$S_{21}(\mu) = (\mathcal{S}_{22} + d^+/d^-)^{-1}\mathcal{S}_{21}/d^-.$$

Поскольку $d^-(\mu) = 2^{-1}((\mu - \tau)^{1/2} - 1)/(\mu - \tau)^{1/4}$, приходим к формуле

$$S_{21}(\mu) = O((\mu - \tau)^{1/4}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \tau + 0.$$

Наконец, обратимся к блоку $S_{12}(\mu)$. Перепишем (1.58) в виде

$$\begin{aligned} S_{12} &= \mathcal{S}_{12}d^+(1 - (\mathcal{S}_{22} + d^+/d^-)^{-1}(\mathcal{S}_{22} + d^-/d^+)) \\ &= \mathcal{S}_{12}d^+(\mathcal{S}_{22} + d^+/d^-)^{-1}(d^+/d^- - d^-/d^+). \end{aligned}$$

Так как

$$d^+(\mu)(d^+/d^- - d^-/d^+) = 2(\mu - \tau)^{1/4}/((\mu - \tau)^{1/2} - 1),$$

получаем

$$S_{12}(\mu) = O((\mu - \tau)^{1/4}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \tau + 0.$$

Теперь найдем пределы $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$ в случае, когда 1 — собственное число матрицы $\mathcal{S}_{22}(\tau)$. Положим $\lambda = \sqrt{\mu - \tau}$, $\mu = \tau + \lambda^2$ и рассмотрим функцию $\lambda \mapsto \Phi(\lambda) : \mathbb{C}^{M-L} \rightarrow \mathbb{C}^{M-L}$,

$$\Phi(\lambda) := \mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+(\mu)/d^-(\mu) = \mathcal{S}_{22}(\tau + \lambda^2) + (\lambda + 1)/(\lambda - 1). \quad (1.62)$$

Число $\lambda = 0$ является собственным для функции $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)$ в том и только том случае, если 1 есть собственное число матрицы $\mathcal{S}_{22}(\tau)$; при этом $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1) = \ker \Phi(0)$. Для вычисления пределов $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$ понадобятся сведения о резольвенте $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)^{-1}$ в окрестности точки $\lambda = 0$. Они приводятся ниже в предложениях 1.3.5 и 1.3.6.

Предложение 1.3.5. *Справедливо равенство*

$$\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1) = \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)^* - 1). \quad (1.63)$$

Доказательство. Пусть $h \in \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$. Тогда, как было установлено в доказательстве леммы 1.2.7, вектор $(0, h)^t \in \mathbb{C}^M$ принадлежит ядру $\ker(\mathcal{S}(\tau) - 1)$ и $\mathcal{S}_{12}(\tau)h = 0$. Таким же рассуждением, примененным к матрице $\mathcal{S}(\tau)^*$ вместо $\mathcal{S}(\tau)$, проверяется, что если $g \in \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)^* - 1)$, то $(0, g)^t \in \ker(\mathcal{S}(\tau)^* - 1)$ и $\mathcal{S}_{21}(\tau)^*g = 0$. Поскольку $\mathcal{S}(\tau)^* = \mathcal{S}(\tau)^{-1}$, имеем

$$\ker(\mathcal{S}(\tau) - 1) = \ker(\mathcal{S}(\tau)^* - 1). \quad (1.64)$$

Пусть $h_1, \dots, h_{\varkappa}$ — базис ядра $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$, а $g_1, \dots, g_{\varkappa}$ — базис ядра $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)^* - 1)$. Положим $\tilde{h}_j = (0, h_j)^t$ и $\tilde{g}_j = (0, g_j)^t$. Из формулы (1.64) и сказанного перед ней следует, что

$$\tilde{h}_j, \tilde{g}_j \in \ker(\mathcal{S}(\tau) - 1) = \ker(\mathcal{S}(\tau)^* - 1), \quad j = 1, \dots, \varkappa.$$

Поэтому всякий вектор набора $h_1, \dots, h_{\varkappa}$ является линейной комбинацией векторов из набора $g_1, \dots, g_{\varkappa}$ и наоборот. \square

Заметим, что из доказательства предложения 1.3.5 следуют, между прочим, равенства $S_{12}(\tau)h = 0$ и $S_{21}(\tau)^*h = 0$ для элементов ядер (1.63).

Предложение 1.3.6. Пусть Φ — матрица-функция из (1.62) и $\dim \ker \Phi(0) = \varkappa > 0$. Тогда в проколотой окрестности точки $\lambda = 0$ для резольвенты $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)^{-1}$ справедливо представление

$$\Phi(\lambda)^{-1} = -(2\lambda)^{-1} \sum_{j=1}^{\varkappa} \{\cdot, h_j\} h_j + \Gamma(\lambda); \quad (1.65)$$

здесь $h_1, \dots, h_{\varkappa}$ — ортонормированный базис ядра $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$, $\{u, v\}$ — скалярное произведение в пространстве \mathbb{C}^{M-L} , а $\lambda \mapsto \Gamma(\lambda) : \mathbb{C}^{M-L} \rightarrow \mathbb{C}^{M-L}$ — матрица-функция, голоморфная в окрестности точки $\lambda = 0$.

Доказательство. Согласно известной формуле (см., например, [26], [25]), резольвента $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$ голоморфной оператор-функции $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda)$ в проколотой окрестности изолированного собственного значения λ_0 при определенных условиях допускает представление

$$\mathfrak{A}(\lambda)^{-1} = (\lambda - \lambda_0)^{-1} \sum_{j=1}^{\varkappa} (\cdot, \psi_j) \phi_j + \Gamma(\lambda), \quad (1.66)$$

где $\phi_1, \dots, \phi_{\varkappa}$ и $\psi_1, \dots, \psi_{\varkappa}$ — базисы в пространствах $\ker \mathfrak{A}(\lambda_0)$ и $\ker \mathfrak{A}(\lambda_0)^*$, подчиненные условиям ортогональности и нормировки

$$(\partial_{\lambda} \mathfrak{A}(\lambda_0) \phi_j, \psi_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, \varkappa,$$

а Γ — оператор-функция, голоморфная в окрестности точки λ_0 . Формула (1.66) относится к случаю, когда в точке λ_0 нет присоединенных векторов оператор-функции $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda)$. Для того чтобы обосновать формулу (1.65), мы должны убедиться в отсутствии присоединенных векторов у функции $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ и проверить совпадение (1.65) с представлением вида (1.66).

Займемся сначала присоединенными векторами. Пусть $0 \neq h^0 \in \ker \Phi(0)$. Уравнение $\Phi(0)h^1 + (\partial_{\lambda} \Phi)(0)h^0 = 0$ для присоединенного вектора h^1 переписывается в виде

$$(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)h^1 = 2h^0.$$

Необходимым условием разрешимости такого уравнения является ортогональность вектора h^0 линейалу $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)^* - 1) = \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$ (см. (1.63)). Поскольку

$0 \neq h^0 \in \ker \Phi(0) = \ker (\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$, условие разрешимости не выполнено и, значит, присоединенных векторов нет.

Сравним формулы (1.65) и (1.66). Имеем $(\partial_\lambda \Phi)(0) = -2I_{M-L}$. Кроме того, учитывая (1.63), базисы $\phi_1, \dots, \phi_\varkappa$ и $\psi_1, \dots, \psi_\varkappa$ в (1.66) можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства $\phi_j = -\psi_j = h_j/\sqrt{2}$, а в качестве h_1, \dots, h_\varkappa взять ортонормированный базис ядра $\ker (\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$. Тогда

$$\{(\partial_\lambda \Phi)(0)\phi_j, \psi_k\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, \varkappa,$$

а представление (1.66) принимает вид (1.65). \square

Обратимся к вычислению предела $\lim S(\mu)$ при $\mu \rightarrow \tau - 0$. Согласно лемме 1.2.7, $\text{Im}(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1) \supset \text{Im} \mathcal{S}_{21}(\tau)$. Поэтому из предложения 1.3.5 следуют равенства $\{\mathcal{S}_{21}(\tau)f, h_j\} = 0$ для любого вектора $f \in \mathbb{C}^L$ и векторов h_1, \dots, h_\varkappa из (1.65). Благодаря аналитичности функции $\mu \rightarrow \mathcal{S}_{21}(\mu)$ имеем $\mathcal{S}_{21}(\mu) = \mathcal{S}_{21}(\tau) + O(|\mu - \tau|)$; напомним, что $|\mu - \tau| = |\lambda|^2$. Применяя формулу (1.65), получаем

$$(\mathcal{S}_{22}(\mu) + D(\mu))^{-1} \mathcal{S}_{21}(\mu) = \Gamma(\lambda) \mathcal{S}_{21}(\mu) + O(|\lambda|). \quad (1.67)$$

Теперь из (1.43) вытекает соотношение

$$\lim_{\mu \rightarrow \tau - 0} S(\mu) = \mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau) \Gamma(0) \mathcal{S}_{21}(\tau); \quad (1.68)$$

с помощью леммы 1.2.7 правую часть можно интерпретировать как оператор $\mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau)(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)^{-1} \mathcal{S}_{21}(\tau)$ (ср. с формулой (1.61)). При $\mu \rightarrow \tau - 0$ имеет место оценка

$$S(\mu) - (\mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau) \Gamma(0) \mathcal{S}_{21}(\tau)) = O(|\mu - \tau|^{1/2}). \quad (1.69)$$

Переходим к вычислению пределов при $\mu \rightarrow \tau + 0$. Предел $\lim_{\mu \rightarrow \tau + 0} S_{11}(\mu)$ вычисляется так же, как $\lim_{\mu \rightarrow \tau - 0} S(\mu)$, и получается равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \tau + 0} S_{11}(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \tau - 0} S(\mu). \quad (1.70)$$

По формуле (1.60)

$$\begin{aligned} S_{22}(\mu) &= (\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+/d^-)^{-1} (\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^-/d^+) d^+/d^- \\ &= d^+/d^- + (\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+/d^-)^{-1} (d^-/d^+ - d^+/d^-) d^+/d^-. \end{aligned}$$

Применяя представление (1.65) для резольвенты, переписываем последнее равенство в виде

$$S_{22}(\mu) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \left(I + \frac{2}{\lambda^2 - 1} \sum_{j=1}^{\infty} (\cdot, h_j) h_j - \frac{4\lambda}{\lambda^2 - 1} \Gamma(\lambda) \right). \quad (1.71)$$

Следовательно,

$$\lim_{\mu \rightarrow \tau + 0} S_{22}(\mu) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (\cdot, h_j) h_j - I = P - Q,$$

где $P = \sum_{j=1}^{\infty} (\cdot, h_j) h_j$ — ортогональный проектор \mathbb{C}^{M-L} на ядро $\ker (\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$ и $Q = I - P$. Кроме того, при $\mu \rightarrow \tau + 0$ из (1.71) вытекает оценка

$$S_{22}(\mu) - P + Q = O(|\mu - \tau|^{1/2}).$$

Согласно (1.59),

$$S_{21}(\mu) = (\mathcal{S}_{22}(\mu) + I_{M-L} d^+ / d^-)^{-1} \mathcal{S}_{21} / d^-.$$

С учетом формулы (1.67) и равенства $d^- = (\lambda - 1) / 2\sqrt{\lambda}$ получаем

$$S_{21}(\mu) = (\Gamma(\lambda) \mathcal{S}_{21}(\mu) + O(|\lambda|)) 2\sqrt{\lambda} / (\lambda - 1).$$

Таким образом,

$$S_{21}(\mu) = O(|\mu - \tau|^{1/4}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \tau + 0.$$

Осталось вычислить предел блока $S_{12}(\mu)$. Ввиду (1.58)

$$S_{12}(\mu) = \mathcal{S}_{12}(\mu) d^+ (I - (\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+ / d^-)^{-1} (\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^- / d^+)).$$

Поскольку

$$(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+ / d^-)^{-1} (\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^- / d^+) = I - \frac{4\lambda}{\lambda^2 - 1} (\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+ / d^-)^{-1},$$

приходим к равенству

$$S_{12}(\mu) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \mathcal{S}_{12}(\mu) \left(-\frac{1}{2\lambda} \sum (\cdot, h_j) h_j + \Gamma(\lambda) \right).$$

Вспомним, что $h_j \in \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1) \subset \ker \mathcal{S}_{12}(\tau)$ (см. (1.38)), $\mathcal{S}_{12}(\mu) = \mathcal{S}_{12}(\tau) + O(|\mu - \tau|)$ и $\mu - \tau = \lambda^2$. Поэтому при $\mu \rightarrow \tau + 0$ имеем

$$S_{12}(\mu) = O(|\mu - \tau|^{1/4}) \rightarrow 0.$$

Глава 2

Метод вычисления матрицы рассеяния в волноводах

2.1 Метод вычисления матрицы рассеяния вне порогов

2.1.1 Формулировка метода

Введем обозначения

$$\Pi_+^{r,R} = \{(y^r, t^r) \in \Pi^r : t^r > R\}, \quad G^R = G \setminus \cup_{r=1}^N \Pi_+^{r,R}$$

для больших R . Тогда $\partial G^R \setminus \partial G = \Gamma^R = \cup_r \Gamma^{r,R}$, где $\Gamma^{r,R} = \{(y^r, t^r) \in \Pi^r : t^r = R\}$. Будем искать строку (S_{l1}, \dots, S_{lM}) матрицы рассеяния $S = S(\mu)$. В качестве приближения для этой строки возьмем вектор, минимизирующий некоторый квадратичный функционал. Для построения функционала рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)\mathcal{X}_l^R &= 0, \quad x \in G^R; \\ \mathcal{X}_l^R &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)\mathcal{X}_l^R &= (\partial_\nu + i\zeta)(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j u_j^-), \quad x \in \Gamma^R, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ∂_ν — дифференцирование по внешней нормали, а числа a_1, \dots, a_M комплексные.

Объясним происхождение этой задачи. Решение Y_l однородной задачи (1.19) удовлетворяет первым двум уравнениям (2.1). Асимптотику (1.23) можно дифференцировать, поэтому

$$(\partial_\nu + i\zeta)Y_l = (\partial_\nu + i\zeta)(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j u_j^-) + O(e^{-\gamma R})$$

при $a_j = S_{lj}$. Таким образом, функция Y_l оставляет в последнем уравнении (2.1) экспоненциально малую невязку. В качестве приближения для строки (S_{l1}, \dots, S_{lM}) возьмем вектор $a^0(R) = (a_1^0(R), \dots, a_M^0(R))$, доставляющий минимум функционалу

$$J_l^R(a_1, \dots, a_M) = \|\mathcal{X}_l^R - u_l^+ - \sum_{j=1}^M a_j u_j^-\|_{L_2(\Gamma^R)}^2, \quad (2.2)$$

где \mathcal{X}_l^R — решение задачи (2.1). Можно ожидать, что $a^0(R, \mu) \rightarrow S_{lj}(\mu)$ с экспоненциальной скоростью при $R \rightarrow \infty$ и $j = 1, \dots, M$. Чтобы выписать зависимость \mathcal{X}_l^R от параметров a_1, \dots, a_M , рассмотрим задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)v_j^\pm &= 0, \quad x \in G^R; \\ v_j^\pm &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)v_j^\pm &= (\partial_\nu + i\zeta)u_j^\pm, \quad x \in \Gamma^R; \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выразим \mathcal{X}_l^R через решения $v_j^\pm = v_{j,R}^\pm$ задач (2.3). Имеем $\mathcal{X}_l^R = v_{l,R}^+ + \sum_j a_j v_{j,R}^-$. Введем $M \times M$ -матрицы с элементами

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ij}^R &= ((v_i^- - u_i^-), (v_j^- - u_j^-))_{\Gamma^R}, \\ \mathcal{F}_{ij}^R &= ((v_i^+ - u_i^+), (v_j^- - u_j^-))_{\Gamma^R}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Положим еще

$$\mathcal{G}_i^R = ((v_i^+ - u_i^+), (v_i^+ - u_i^+))_{\Gamma^R}.$$

Теперь функционал (2.2) можно записать в виде

$$J_l^R(a, \mu) = \langle a \mathcal{E}^R(\mu), a \rangle + 2\operatorname{Re} \langle \mathcal{F}_l^R(\mu), a \rangle + \mathcal{G}_l^R(\mu),$$

где \mathcal{F}_l^R — строка с номером l матрицы \mathcal{F}^R и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{C}^M . Минимум реализуется на векторе $a^0 = a^0(R, \mu)$ (строке), удовлетворяющем системе $a^0(R, \mu) \mathcal{E}^R + \mathcal{F}_l^R = 0$. Итак, в качестве приближения $S^R(\mu)$ для матрицы рассеяния $S(\mu)$ выступает решение уравнения $S^R \mathcal{E}^R + \mathcal{F}^R = 0$.

Для обоснования алгоритма нужно показать, что задачи (2.3) однозначно разрешимы при $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и больших R , что матрица \mathcal{E}^R невырожденная и что вектор $a^0(R, \mu)$, минимизирующий функционал $J_l^R(\cdot, \mu)$, стремится к строке $(S_{l1}(\mu), \dots, S_{lM}(\mu))$ матрицы рассеяния при $R \rightarrow \infty$ и $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

В следующей теореме число $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, участвующее в определении функционала $J_l^R(\cdot, \mu)$ зафиксировано произвольным образом, а интервал $[\mu_1, \mu_2]$ непрерывно-

ного спектра задачи (1.17) свободен от порогов, но может содержать собственные числа, которым отвечают собственные функции, экспоненциально затухающие на бесконечности.

Теорема 2.1.1. Для любых $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и $R \geq R_0$, где R_0 — достаточно большое число, существует единственный минимизатор $a(R, \mu) = (a_1(R, \mu), \dots, a_M(R, \mu))$ функционала $J_1^R(a, \mu)$, заданного равенством (2.2). Справедливы оценки

$$|a_j(R, \mu) - S_{lj}(\mu)| \leq Ce^{-\delta R}, \quad j = 1, \dots, M,$$

с той же константой δ , что и в (1.23), а постоянная C не зависит ни от R , ни от μ .

2.1.2 Задача в G^R

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)u(x) &= 0, \quad x \in G^R; \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)u(x) &= h(x), \quad x \in \Gamma^R, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathbb{R}$ и $h \in L_2(\Gamma^R)$. Определим обобщенное решение этой задачи. Положим

$$\mathcal{H} = \{u \in H^1(G^R) : u \in C^2(\overline{G^R} \setminus \partial\Gamma^R); \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R\};$$

как обычно, $H^1(G^R)$ обозначает пространство Соболева в G^R с нормой

$$\|u; H^1(G^R)\| = \left(\int_{G^R} \sum_{|\alpha| \leq 1} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Функция $u \in \mathcal{H}$ является решением задачи (2.5) тогда и только тогда, когда

$$((-\Delta - \mu)u, v)_{G^R} + (\partial_\nu u + i\zeta u, v)_{\Gamma^R} = (h, v)_{\Gamma^R} \quad (2.6)$$

при всех $v \in \mathcal{H}$. Интегрируя по частям и учитывая, что u и v исчезают на $\partial G^R \setminus \Gamma^R$, перепишем (2.6) в виде

$$(\nabla u, \nabla v)_{G^R} - \mu(u, v)_{G^R} + i\zeta(u, v)_{\Gamma^R} = (h, v)_{\Gamma^R}. \quad (2.7)$$

Каждое слагаемое в формуле (2.7) имеет смысл для u и v из $H^1(G^R)$. Пусть $\overline{\mathcal{H}}$ обозначает замыкание множества \mathcal{H} по норме пространства $H^1(G^R)$.

Функция $u \in \overline{\mathcal{H}}$ называется обобщенным решением задачи (2.5), если равенство (2.7) справедливо для любых $v \in \overline{\mathcal{H}}$.

Пусть $T : \overline{\mathcal{H}}(G^R) \rightarrow L_2(G^R)$ и $\mathcal{T} : H^{1/2}(\Gamma^R) \rightarrow L_2(\Gamma^R)$ — операторы вложения. Известно, что эти операторы компактны. Кроме того, пусть $j : \overline{\mathcal{H}}(G^R) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma^R)$ — оператор сужения. Тогда

$$(u, v)_{G^R} = (Tu, Tv)_{G^R} = [T^*Tu, v],$$

где $[\cdot, \cdot]$ — скалярное произведение в $H^1(G^R)$ (или, что то же самое — в $\overline{\mathcal{H}}(G^R)$), заданное равенством

$$[w, v] = (\nabla w, \nabla v)_{G^R} + (w, v)_{G^R}.$$

Имеем также

$$(u, v)_{\Gamma^R} = (\mathcal{T}ju, \mathcal{T}jv)_{\Gamma^R} = [j^*T^*\mathcal{T}ju, v].$$

Равенство (2.7) теперь означает, что

$$[u, v] + [Vu, v] = [f, v]$$

при всех $v \in \overline{\mathcal{H}}$; здесь

$$V = -(\mu + 1)T^*T + i\zeta j^*T^*\mathcal{T}j$$

и $f = j^*T^*h$. Поэтому

$$u + Vu = f. \quad (2.8)$$

Так как оператор V компактен в $\overline{\mathcal{H}}$, то для уравнения (2.8) имеет место альтернатива Фредгольма. Таким образом, для того, чтобы проверить однозначную разрешимость этого уравнения, достаточно установить, что $\ker(I + V) = 0$.

Предложение 2.1.2. *При всех $\mu \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R} \setminus 0$ и $h \in L_2(\Gamma^R)$ задача (2.5) имеет единственное обобщенное решение $u \in \overline{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Допустим, что $u \in \ker(I + V)$. Полагая $v = u$ и $h = 0$ в соотношении (2.7), получаем $\zeta(u, u)_{\Gamma^R} = 0$, то есть $u = 0$ на Γ^R . Задача (2.5) эллиптическая; согласно известным свойствам решений эллиптических задач, обобщенное решение является гладкой функцией на $\overline{G^R} \setminus \partial\Gamma^R$. Из третьего уравнения задачи (2.5) при $h = 0$ следует, что $\partial_\nu u = -i\zeta u = 0$ on Γ^R . Таким образом, u имеет

нулевые данные Коши на Γ^R . Поэтому $u \equiv 0$ в G^R по теореме о единственности продолжения (см. [21], Часть II, п. 1.4). \square

Предложение 2.1.3. Пусть u — обобщенное решение задачи (2.5) с правой частью $h \in L_2(\Gamma^R)$. Тогда справедлива оценка

$$\|u; L_2(\Gamma^R)\| \leq \frac{1}{|\zeta|} \|h : L_2(\Gamma^R)\|. \quad (2.9)$$

Доказательство. Соотношение (2.7) при $v = u$ принимает вид

$$(\nabla u, \nabla u)_{G^R} - \mu(u, u)_{G^R} + i\zeta(u, u)_{\Gamma^R} = (h, u)_{\Gamma^R}. \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что $\zeta(u, u)_{\Gamma^R} = \text{Im}(h, u)_{\Gamma^R}$. Значит,

$$\|u; L_2(\Gamma^R)\|^2 \leq \frac{1}{|\zeta|} \|h : L_2(\Gamma^R)\| \|u; L_2(\Gamma^R)\|. \quad \square$$

Предложение 2.1.4. Пусть u — обобщенное решение задачи (2.5), где h — гладкая функция на Γ^R и $h \in L_2(\Gamma^R)$. Тогда

$$(\partial_\nu u, u)_{\Gamma^R} - (u, \partial_\nu u)_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Из условия предложения вытекает, что функция u гладкая на множестве $\overline{G^R} \setminus \partial\Gamma^R$. Поэтому краевое условие на Γ^R можно понимать в классическом смысле. Полагая $h = \partial_\nu u + i\zeta u$ в (2.10), получим

$$\zeta(u, u)_{\Gamma^R} = \text{Im}(\partial_\nu u + i\zeta u, u)_{\Gamma^R} = \text{Im}(\partial_\nu u, u)_{\Gamma^R} + \zeta(u, u)_{\Gamma^R}$$

и $\text{Im}(\partial_\nu u, u)_{\Gamma^R} = 0$. \square

2.1.3 Обоснование метода вычисления матрицы рассеяния

Для обоснования метода осталось проверить невырожденность матрицы \mathcal{E}^R с элементами (2.4) и стабилизацию минимизатора $a^0(R)$ функционала (2.2) при $R \rightarrow \infty$ к l -ой строке матрицы рассеяния.

Предложение 2.1.5. Матрица \mathcal{E}^R с элементами (2.4) не вырождается при всех $R \geq R_0$, где R_0 — достаточно большое число.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда для любого R^0 существует такое число $R > R^0$, что матрица \mathcal{E}^R вырождена и функции $\mathcal{U} =$

$\sum_j c_j u_j^-$ и $\mathcal{V} = \sum_j c_j v_j^-$ связаны соотношением

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{V}(x), \quad x \in \Gamma^R, \quad (2.12)$$

где v_j^- — решение задачи (2.3), $\vec{c} = (c_1, \dots, c_M)$ — некоторый вектор, причем $|\vec{c}| = 1$. Согласно краевому условию на Γ^R из (2.3), имеем

$$\partial_\nu \mathcal{U}(x) = \partial_\nu \mathcal{V}(x), \quad x \in \Gamma^R. \quad (2.13)$$

В силу предложения 2.1.4,

$$(\partial_\nu \mathcal{V}, \mathcal{V})_{\Gamma^R} - (\mathcal{V}, \partial_\nu \mathcal{V})_{\Gamma^R} = 0.$$

Теперь (2.12) и (2.13) приводят к равенству

$$(\partial_\nu \mathcal{U}, \mathcal{U})_{\Gamma^R} - (\mathcal{U}, \partial_\nu \mathcal{U})_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.14)$$

Для волн u_j^\pm в области G (см. (1.6) и (1.4)), справедливы равенства

$$(\partial_\nu u_j^\pm, u_k^\pm)_{\Gamma^R} - (u_j^\pm, \partial_\nu u_k^\pm)_{\Gamma^R} = \mp i \delta_{jk}, \quad (2.15)$$

$$(\partial_\nu u_j^\pm, u_k^\mp)_{\Gamma^R} - (u_j^\pm, \partial_\nu u_k^\mp)_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.16)$$

Из (2.14), (2.15) и (2.16) получаем, что

$$0 = \sum_{j,k} c_j \bar{c}_k ((\partial_\nu u_j^-, u_k^-)_{\Gamma^R} - (u_j^-, \partial_\nu u_k^-)_{\Gamma^R}) = i \sum_j |c_j|^2 = i.$$

Полученное противоречие заканчивает доказательство. \square

Предложение 2.1.6. Пусть вектор $a(R) = (a_1(R), \dots, a_M(R))$ доставляет минимум функционалу J_l^R из формулы (2.2). Тогда

$$J_l^R(a(R)) = O(e^{-2\delta R}) \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

где γ — то же число, что и в (1.23). Для всех $R \geq R_0$ компоненты вектора $a(R)$ равномерно ограничены,

$$|a_j(R)| \leq \text{const} < \infty, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.18)$$

Доказательство. Обозначим через Y_l^R решение задачи (2.1), где в качестве a_j , $j = 1, \dots, M$, взяты элементы S_{lj} матрицы рассеяния S задачи (1.17). Асимптотику

(1.23) можно дифференцировать, поэтому

$$(\partial_\nu + i\zeta)(Y_l^R - Y_l)|_{\Gamma^R} = O(e^{-\delta R}).$$

Так как разность $Y_l^R - Y_l$ удовлетворяет первым двум уравнениям задачи (2.5), то оценка (2.9) справедлива при $u = Y_l^R - Y_l$:

$$\|Y_l^R - Y_l; L_2(\Gamma^R)\| \leq |\zeta|^{-1} \|(\partial_\nu + i\zeta)(Y_l^R - Y_l); L_2(\Gamma^R)\| \leq ce^{-\delta R}.$$

Это неравенство вместе с (1.23) приводит к оценке

$$J_l^R(S_l) = \|Y_l^R - (u_l^+ + \sum_{j=1}^M S_{lj}u_j^-); L_2(\Gamma^R)\|^2 \leq ce^{-2\delta R}$$

с постоянной c , не зависящей от R . Чтобы получить (2.17), остается заметить, что $J_l^R(a(R)) \leq J_l^R(S_l)$

Перейдем к оценке минимизатора $a(R)$. Пусть Z_l^R — решение задачи (2.1), отвечающее вектору $a(R) = (a_1(R), \dots, a_M(R))$. По предложению 2.1.4

$$(\partial_\nu Z_l^R, Z_l^R)_{\Gamma^R} - (Z_l^R, \partial_\nu Z_l^R)_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.19)$$

В силу (2.17),

$$\|Z_l^R - (u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R)u_j^-); L_2(\Gamma^R)\| = O(e^{-\delta R}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Так как

$$(\partial_\nu + i\zeta)Z_l^R|_{\Gamma^R} = (\partial_\nu + i\zeta)(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R)u_j^-)|_{\Gamma^R},$$

то из (2.20) следует, что

$$\|\partial_\nu(Z_l^R - (u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R)u_j^-)); L_2(\Gamma^R)\| = O(e^{-\delta R}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Из (2.20) и (2.21) получаем, что $Z_l^R = \varphi_l + T^R$, где $\varphi_l = u_l^+ + \sum a_j(R)u_j^-$, $\|T^R; L_2(\Gamma^R)\| = O(e^{-\delta R})$ и $\|\partial_\nu T^R; L_2(\Gamma^R)\| = O(e^{-\delta R})$. Подставим это выраже-

ние для Z_l^R в равенство (2.19), тогда

$$\begin{aligned} & (\partial_\nu \varphi_l, \varphi_l)_{\Gamma^R} - (\varphi_l, \partial_\nu \varphi_l)_{\Gamma^R} \\ &= (\varphi_l, \partial_\nu T^R)_{\Gamma^R} - (\partial_\nu T^R, \varphi_l)_{\Gamma^R} + (T^R, \partial_\nu \varphi_l)_{\Gamma^R} - (\partial_\nu \varphi_l, T^R)_{\Gamma^R} \\ &+ (T^R, \partial_\nu T^R)_{\Gamma^R} - (\partial_\nu T^R, T^R)_{\Gamma^R}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ввиду (2.15) и (2.16), левая часть (2.22) вычисляется непосредственно:

$$(\partial_\nu \varphi_l, \varphi_l)_{\Gamma^R} - (\varphi_l, \partial_\nu \varphi_l)_{\Gamma^R} = -i(1 - |a(R)|^2).$$

Отсюда и из (2.22) выводим оценку

$$|1 - |a(R)|^2| = (\|\varphi_l; L_2(\Gamma^R)\| + \|\partial_\nu \varphi_l; L_2(\Gamma^R)\|)O(e^{-\delta R}).$$

Кроме того, учитывая неравенство $(\|\varphi_l; L_2(\Gamma^R)\| + \|\partial_\nu \varphi_l; L_2(\Gamma^R)\| \leq C(1 + |a(R)|))$, получаем

$$|1 - |a(R)|^2| = (1 + |a(R)|)O(e^{-\delta R})$$

и $|a(R)| = 1 + o(1)$ при $R \rightarrow \infty$. \square

Доказательство теоремы 2.1.1. Пусть Y_l, Z_l^R и $(a_1(R), \dots, a_M(R))$ — те же, что и в доказательстве предложения 2.1.6. Подставим $u = U_l := Y_l - Z_l^R$ в (2.11), тогда

$$(\partial_\nu U_l, U_l)_{\Gamma^R} - (U_l, \partial_\nu U_l)_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.23)$$

Положим

$$\varphi_l = u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R) u_j^-, \quad \psi_l = u_l^+ + \sum_{j=1}^M S_{lj} u_j^- \quad (2.24)$$

и запишем U_l в следующем виде:

$$U_l = Y_l - Z_l^R = (Y_l - \psi_l) + (\psi_l - \varphi_l) + (\varphi_l - Z_l^R).$$

В силу (1.23) имеем $(Y_l - \psi_l)|_{\Gamma^R} = O(e^{-\gamma R})$. Волны u_j^\pm — ограниченные функции, минимизатор также ограничен (см (2.18)), следовательно, $\psi_l - \varphi_l = O(1)$. Принимая во внимание (2.20) и (2.21), преобразуем (2.23) в равенство

$$(\partial_\nu(\psi_l - \varphi_l), \psi_l - \varphi_l)_{\Gamma^R} - (\psi_l - \varphi_l, \partial_\nu(\psi_l - \varphi_l))_{\Gamma^R} = O(e^{-\delta R}). \quad (2.25)$$

Здесь левая часть вычисляется непосредственно (с помощью (2.24), (2.15) и (2.16)) и равна $i \sum_{j=1}^M |a_j(R) - S_{lj}|^2$. Окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^M |a_j(R) - S_{lj}|^2 = O(e^{-\delta R}). \quad (2.26)$$

Теперь проверим, что оценка

$$\sum_{j=1}^M |a_j(R) - S_{lj}|^2 = O(\exp\{-2\delta(1 - 2^{-N})R\}), \quad (2.27)$$

совпадающая с (2.26) при $N = 1$, справедлива для любого натурального N . Достаточно доказать, что N в неравенстве (2.27) можно заменить на $N + 1$. Используя (2.27), получаем

$$\psi_l - \varphi_l = \sum_{j=1}^M (S_{lj} - a_j(R))u_j^- = O(\exp\{-\delta(1 - 2^{-N})R\}).$$

Воспользуемся этой оценкой вместо $\psi_l - \varphi_l = O(1)$ и перейдем от (2.23) к (2.25) с заменой правой части на $O(\exp(-\delta(1 - 2^{-N})R - \delta R))$. Снова вычисляя левую часть (2.25), имеем

$$\sum_{j=1}^M |a_j(R) - S_{lj}|^2 = O(\exp\{-2\delta(1 - 2^{-N-1})R\}).$$

Отметим, что с самого начала мы могли бы заменить δ на несколько большее число δ' . Выбирая теперь достаточно большое N , получаем $2\delta'(1 - 2^{-N-1}) > 2\delta$. \square

2.2 Метод вычисления матрицы рассеяния вблизи порогов

Теперь обратимся к вычислению матрицы $\mathcal{S}(\mu)$ из теоремы 1.2.6, *ii*) при $\mu \in [\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$. Порог τ может лежать на отрезке $[\mu', \mu'']$; кроме того, на этом отрезке могут содержаться собственные числа оператора (1.29). Для простоты мы считаем, что интервал $[\mu', \mu'']$ настолько мал, что содержится в одном из открытых интервалов U_p , определенных в лемме 1.2.4. Тогда индекс γ в асимптотике (1.27) не зависит от $\mu \in [\mu', \mu'']$ и удовлетворяет неравенствам $\sqrt{\tau - \mu'} < \gamma < \sqrt{\mu'' - \tau''}$.

Введем краевую задачу

$$\begin{aligned} -\Delta \mathcal{X}_j^R - \mu \mathcal{X}_j^R &= 0, \quad x \in G^R; \\ \mathcal{X}_j^R &= 0 \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_n + i\zeta) \mathcal{X}_j^R &= (\partial_n + i\zeta)(w_j^+ + \sum_{k=1}^M a_k w_k^-), \quad x \in \Gamma^R, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где w_j^\pm — устойчивый базис (1.10), (1.11) в пространстве волн, $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_k \in \mathbb{C}$. В качестве приближения для строки $(\mathcal{S}_{j1}, \dots, \mathcal{S}_{jM})$ предлагается минимизатор $a^0(R) = (a_1^0(R), \dots, a_M^0(R))$ функционала

$$\mathcal{J}_j^R(a_1, \dots, a_M) = \|\mathcal{X}_j^R - w_j^+ - \sum_{k=1}^M a_k w_k^-; L_2(\Gamma^R)\|^2, \quad (2.29)$$

где \mathcal{X}_j^R — решение задачи (2.28). Рассмотрим задачи

$$\begin{aligned} -\Delta z_j^\pm - \mu z_j^\pm &= 0, \quad x \in G^R; \\ z_j^\pm &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_n + i\zeta) z_j^\pm &= (\partial_n + i\zeta) w_j^\pm, \quad x \in \Gamma^R; \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

ПОЛОЖИМ

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{jk}^R &= (z_j^- - w_j^-, z_k^- - w_k^-)_{\Gamma^R}, \\ \mathcal{F}_{jk}^R &= (z_j^+ - w_j^+, z_k^- - w_k^-)_{\Gamma^R}, \\ \mathcal{G}_j^R &= (z_j^+ - w_j^+, z_j^+ - w_j^+)_{\Gamma^R}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

и перепишем функционал (2.29) в виде

$$\mathcal{J}_j^R(a) = \langle a \mathcal{E}^R, a \rangle + 2\operatorname{Re} \langle \mathcal{F}_j^R, a \rangle + \mathcal{G}_j^R,$$

где \mathcal{F}_j^R — строка с номером j матрицы \mathcal{F}^R . Таким образом, минимизатор $a^0(R)$ является решением системы $a^0(R) \mathcal{E}^R + \mathcal{F}_j^R = 0$.

Схема обоснования метода подобна схеме, изложенной в предыдущем параграфе. Следующее предложение проверяется тем же путем, что и предложение 2.1.5.

Предложение 2.2.1. Матрица $\mathcal{E}^R(\mu)$ с элементами (2.30) не вырождается при всех $\mu \in [\mu', \mu'']$ и $R \geq R_0$, где R_0 — достаточно большое число.

Предложение 2.2.2. Пусть $a^0(R, \mu) = (a_1^0(R, \mu), \dots, a_M^0(R, \mu))$ доставляет минимум функционалу \mathcal{J}_l^R из формулы (2.29). Тогда

$$\mathcal{J}_l^R(a^0(R, \mu)) \leq C e^{-2\gamma R} \quad \text{for } R \rightarrow \infty \quad (2.31)$$

с постоянной C , не зависящей от $R \geq R_0$, $\mu \in [\mu', \mu'']$; γ — число из формулы (1.27). Для всех $R \geq R_0$ и $\mu \in [\mu', \mu'']$ компоненты вектора $a^0(R, \mu)$ равномерно ограничены,

$$|a_j^0(R, \mu)| \leq \text{const} < \infty, \quad j = 1, \dots, M.$$

Доказательство. Соотношение (2.31) получается тем же путем, что и (2.17). Проверим равномерную ограниченность минимизатора $a(R)$. Обозначим через Z_l^R решение задачи (2.28), отвечающее вектору $a^0(R, \mu) = (a_1^0(R, \mu), \dots, a_M^0(R, \mu))$. В формуле Грина положим $u = v = Z_l^R$. Имеем

$$(\partial_\nu Z_l^R, Z_l^R)_{\Gamma^R} - (Z_l^R, \partial_\nu Z_l^R)_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.32)$$

В силу (2.31),

$$\|Z_l^R - (w_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R, \mu) w_j^-); L_2(\Gamma^R)\| = O(e^{-\gamma R}), \quad R \rightarrow \infty, \quad (2.33)$$

равномерно относительно μ . Поскольку

$$(\partial_\nu + i\zeta) Z_l^R|_{\Gamma^R} = (\partial_\nu + i\zeta)(w_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j^0(R) w_j^-)|_{\Gamma^R},$$

из (2.32) получаем

$$\|\partial_\nu(Z_l^R - (w_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j^0(R) w_j^-)); L_2(\Gamma^R)\| = O(e^{-\gamma R}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

Напомним, что при $\mu > \tau$ волны w_l^\pm являются ограниченными функциями; при $\mu < \tau$ волны w_l^\pm с номерами $L < l \leq M$, определенные равенствами (1.41), растут на бесконечности как $O(e^{\sqrt{\tau-\mu}|x|})$, а при $\mu = \tau$ — как $O(|x|)$. Кроме того, $\sqrt{\tau - \mu^l} < \gamma$.

Используя (2.33) и (2.34), приведем (2.32) к виду

$$(\partial_\nu \varphi_l, \varphi_l)_{\Gamma^R} - (\varphi_l, \partial_\nu \varphi_l)_{\Gamma^R} = (\|\varphi_l; L_2(\Gamma^R)\| + \|\partial_\nu \varphi_l; L_2(\Gamma^R)\|) O(e^{-(\gamma - \sqrt{\tau - \mu - \varepsilon})R}),$$

где $\varphi_l = w_l^+ + \sum a_j^0(R)w_j^-$; как и ранее, $\sqrt{\tau - \mu} = i\sqrt{\mu - \tau}$ при $\mu > \tau$, ε — произвольно малое положительное число. В силу (1.12)–(1.13) левая часть равна $-i(1 - \sum |a_j^0(R)|^2)$. Итак,

$$|1 - |a(R)||^2 = (1 + |a(R)|)O(e^{-(\gamma - \sqrt{\tau - \mu} - \varepsilon)}),$$

откуда следует, что $|a^0(R)| = 1 + o(1)$. \square

Теорема 2.2.3. Для всех $R \geq R_0$, где R_0 — достаточно большое положительное число, и всех $\mu \in [\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$ существует единственный вектор $a^0(R, \mu) = (a_1^0(R, \mu), \dots, a_M^0(R, \mu))$, минимизирующий функционал \mathcal{J}_l^R из (2.29). Справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^M |\mathcal{S}_{jk}(\mu) - a_k^0(R, \mu)| \leq Ce^{-\Lambda R}$$

при всех $R \geq R_0$, $\mu \in [\mu', \mu'']$ и $0 < \Lambda \leq \gamma - \sqrt{\tau - \mu'}$, где γ — то же число, что и в (1.27); постоянная $C = C(\Lambda)$ не зависит от R и μ .

Доказательство. Пусть Y_l^R — решение задачи (2.28), где в качестве a_j , $j = 1, \dots, M$, взяты элементы \mathcal{S}_{lj} матрицы рассеяния \mathcal{S} , и пусть Z_l^R и $(a_1^0(R, \mu), \dots, a_M^0(R, \mu))$ — те же, что в предложении 2.2.2. Подставим $u = v = U_l := \mathcal{Y}_l - Z_l^R$ в формулу Грина. Так как U_l удовлетворяет первым двум уравнениям (2.28), то имеем

$$(\partial_\nu U_l, U_l)_{\Gamma^R} - (U_l, \partial_\nu U_l)_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.35)$$

Положим

$$\varphi_l = w_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j^0(R, \mu)w_j^-, \quad \psi_l = w_l^+ + \sum_{j=1}^M \mathcal{S}_{lj}(\mu)w_j^-,$$

и запишем U_l в виде

$$U_l = \mathcal{Y}_l - Z_l^R = (\mathcal{Y}_l - \psi_l) + (\psi_l - \varphi_l) + (\varphi_l - Z_l^R).$$

Заметим, что $(\mathcal{Y}_l - \psi_l)|_{\Gamma^R} = O(e^{-\gamma R})$ в силу (1.27). Кроме того, по предложению 2.2.2 компоненты минимизатора $a_j(R, \mu)$ равномерно ограничены. Ввиду оценок (2.33) и (2.34) это позволяет свести (2.35) к соотношению

$$(\partial_\nu(\psi_l - \varphi_l), (\psi_l - \varphi_l))_{\Gamma^R} - ((\psi_l - \varphi_l), \partial_\nu(\psi_l - \varphi_l))_{\Gamma^R} = O(e^{-(\gamma - \sqrt{\tau - \mu} - \varepsilon)R}), \quad (2.36)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Непосредственное вычисление показывает, что левая часть равна $i \sum_{j=1}^M |a_j^0(R, \mu) - \mathcal{S}_{lj}(\mu)|^2$ (достаточно учесть

(2.35), (1.12) и (1.13)), и мы приходим к оценке

$$\sum_{j=1}^M |a_j^0(R, \mu) - \mathcal{S}_{lj}(\mu)|^2 = O(e^{-(\gamma - \sqrt{\tau - \mu} - \varepsilon)R}). \quad (2.37)$$

Теперь проверим неравенство

$$\sum_{j=1}^M |a_j(R, \mu) - \mathcal{S}_{lj}(\mu)|^2 = O(e^{-2(\gamma - \sqrt{\tau - \mu} - \varepsilon)(1 - 2^{-N})R}), \quad (2.38)$$

совпадающее с (2.37) при $N = 1$. Достаточно убедиться, что N в (2.38) можно заменить на $N + 1$. Используя (2.38), получаем

$$\psi_l - \varphi_l = \sum_{j=1}^M (\mathcal{S}_{lj} - a_j(R)) u_j^- = O(\exp \{ -(\gamma - \sqrt{\tau - \mu} - \varepsilon)(1 - 2^{-N})R \}).$$

Воспользуемся этой оценкой вместо $\psi_l - \varphi_l = O(e^{(\sqrt{\tau - \mu} + \varepsilon)|x|})$ и выведем из (2.35) оценку (2.36) с правой частью, замененной на $O(\exp(-\delta(1 - 2^{-N})R - \delta R))$ при $\delta = \gamma - \sqrt{\tau - \mu} - \varepsilon$. Снова вычисляя левую часть в (2.36), получаем

$$\sum_{j=1}^M |a_j(R) - \mathcal{S}_{lj}|^2 = O(\exp \{ -2(\gamma - \sqrt{\tau - \mu} - \varepsilon)(1 - 2^{-N-1})R \}).$$

С самого начала можно было взять вместо γ несколько большее число γ' , такое, что $\gamma' - \varepsilon > \gamma$. Выбирая теперь достаточно большое N , получаем $2(\gamma' - \sqrt{\tau - \mu} - \varepsilon)(1 - 2^{-N-1}) > 2(\gamma - \sqrt{\tau - \mu})$. Остается заменить $\sqrt{\tau - \mu}$ на $\max_{\mu \in [\mu', \mu'']} \sqrt{\tau - \mu} = \sqrt{\tau - \mu'}$. \square

В окрестности порога τ вычисление матрицы $\mathcal{S}(\mu)$ не встречает затруднений. Так как $S(\mu)$ имеет конечные пределы при $\mu \rightarrow \tau \pm 0$, то, используя связь между $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$, можно вычислить $S(\mu)$ для μ , сколь угодно близких к τ .

2.3 Метод вычисления матрицы рассеяния для эллиптических систем

2.3.1 Матрица рассеяния

В области G введем формально самосопряженную $(k \times k)$ -матрицу $\|\mathcal{L}_{ij}(x, D_x)\|$ дифференциальных операторов, где $\text{ord } \mathcal{L}_{ij} = \tau_i + \tau_j$, τ_j — неотрицательные целые

числа и $\tau_1 + \dots + \tau_k = m$. Будем считать, что справедлива формула Грина

$$(\mathcal{L}u, v)_G + (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\partial G} = (u, \mathcal{L}v)_G + (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\partial G} \quad (2.39)$$

для всех $u, v \in C_c^\infty(\overline{G}, \mathbb{C}^k)$, $(k \times m)$ -матрицы $\mathcal{B} = \|\mathcal{B}_{qj}\|$ и $\mathcal{Q} = \|\mathcal{Q}_{qj}\|$ состоят из дифференциальных операторов, причем $\text{ord } \mathcal{B}_{qj} = \sigma_q + \tau_j$, где σ_q — целое число, $\text{ord } \mathcal{B}_{qj} + \text{ord } \mathcal{Q}_{qi} \leq \tau_j + \tau_i - 1$ и по определению $\mathcal{B}_{qj} = 0$ в случае $\sigma_q + \tau_j < 0$; через $(\cdot, \cdot)_G$ и $(\cdot, \cdot)_{\partial G}$ обозначены скалярные произведения на комплексных $L_2(G)$ и $L_2(\partial G)$. Коэффициенты операторов \mathcal{L} , \mathcal{B} и \mathcal{Q} предполагаются комплексными и гладкими. Мы считаем, что оператор $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$ краевой задачи в области G эллиптический по Дуглису-Ниренбергу.

Опишем поведение коэффициентов операторов \mathcal{L} и \mathcal{B} на бесконечности. Пусть $\{L^p, B^p\}$ — оператор эллиптической задачи в цилиндре $\Pi^p = \Omega^p \times \mathbb{R}$ с коэффициентами, не зависящими от $t^p \in \mathbb{R}$ и гладкими в $\overline{\Omega^p}$, причем $\text{ord } L_{ij}^p = \text{ord } \mathcal{L}_{ij}$ и $\text{ord } B_{ij}^p = \text{ord } \mathcal{B}_{ij}$. Примем, что всякий коэффициент a оператора $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$ удовлетворяет в Π_+^p соотношению

$$D^\alpha (a(y^p, t^p) - a^p(y^p)) = O(\exp(-\delta t^p)) \quad (2.40)$$

при $t^p \rightarrow \infty$ и всех мультииндексах α , где a^p — соответствующий коэффициент оператора $\{L^p, B^p\}$, δ — некоторое положительное число, $i^{|\alpha|} D^\alpha$ — производная по переменным (y^p, t^p) . Из (2.39) вытекает, что в каждом цилиндре Π^p справедлива формула Грина, которая получается из (2.39) заменой G на Π^p и операторов \mathcal{L} , \mathcal{B} , \mathcal{Q} на L^p , B^p , Q^p .

В области $\Omega = \Omega^p$ введем операторный пучок

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}^p(\lambda, \mu) = \{L^p(\lambda) - \mu I, B^p(\lambda)\},$$

где $L^p(\lambda) = L^p(y, D_y, \lambda)$, $B^p(\lambda) = B^p(y, D_y, \lambda)$. Таким образом, мы имеем пучки $\mathfrak{A}^1(\cdot, \mu), \dots, \mathfrak{A}^P(\cdot, \mu)$. Спектр пучка составляют изолированные собственные значения. Каждая полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\text{Im } \lambda| < h < \infty\}$ содержит разве лишь конечное число собственных значений (см. [16]).

Уточним предположения относительно отрезка $[\mu_1, \mu_2]$. Будем считать, что при $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ каждому вещественному собственному числу пучка $\lambda \mapsto \mathfrak{A}^p(\lambda, \mu)$, $p = 1, \dots, P$, отвечают лишь собственные векторы, присоединенных векторов нет, а сумма кратностей вещественных собственных чисел пучка $\mathfrak{A}^p(\cdot, \mu)$ остается постоянной при $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$; это и означает, что порогов на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$ нет. Известно, что сумма кратностей вещественных собственных чисел пучка четная (см. [40]).

Перенумеруем все вещественные собственные числа пучка $\mathfrak{A}^p(\cdot, \mu)$ с учетом кратности. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{2M^p}$ — все такие числа и $\varphi_1, \dots, \varphi_{2M^p}$ — отвечающие этим числам собственные векторы. Функции

$$u_k(y, t) = \exp(i\lambda_k t)\varphi_k(y) \quad (2.41)$$

удовлетворяют однородной задаче

$$\begin{cases} (L^p(y, D_y, D_t) - \mu)v(y, t) = 0, & (y, t) \in \Pi^p, \\ B^p(y, D_y, D_t)v(y, t) = 0, & (y, t) \in \partial\Pi^p. \end{cases} \quad (2.42)$$

Введем форму

$$q^p(u, v) = (L^p u, v)_{\Pi^p} + (B^p u, Q^p v)_{\partial\Pi^p} - (u, L^p v)_{\Pi^p} - (Q^p u, B^p v)_{\partial\Pi^p}.$$

Если $u, v \in C_c^\infty(\overline{\Pi^p})$, то $q^p(u, v) = 0$. Пусть $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(t) = 1$ при $t \geq 2$ и $\chi(t) = 0$ при $t \leq 1$. Форма q^p распространяется на пары $\{\chi u_j, \chi u_k\}$, причем собственные векторы $\{\varphi_k\}$ можно выбрать так, что выполняются условия $q^p(\chi u_j, \chi u_k) = \pm i\delta_{jk}$, где знак не может быть выбран произвольно, а определяется собственным числом λ_k .

Продолжим нулем функции χu_k из Π_+^p на область G . Введем линейное пространство E таких $w \in C^\infty(\overline{G})$, что $D^\alpha w(x) = O(\exp(-\beta|x|))$ при $|x| \rightarrow \infty$ для всех мультииндексов α и некоторого $\beta > 0$ (нам удобно принять, что β совпадает с числом γ из (2.46)). Через \mathcal{W} обозначим линейную оболочку функций вида $\chi u_k + w$, где $w \in E$. Тогда форма

$$q(u, v) = (\mathcal{L}u, v)_G + (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\partial G} - (u, \mathcal{L}v)_G - (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\partial G}$$

принимает конечные значения для любых $u, v \in \mathcal{W}$. Очевидно, $q(u, v) = -\overline{q(v, u)}$ и $q(u, u) \in i\mathbb{R}$. Выберем элемент $u \in \mathcal{W}$, представимый в виде $u = U^r + w$, где U^r — линейная комбинация функций вида χu_k с носителями в Π_+^p , а $w \in E$. По определению u является приходящей (уходящей) волной, если $iq(u, u) > 0$ ($iq(u, u) < 0$). Как показано в [40], в факторпространстве \mathcal{W}/E можно выбрать базис

$$u_1^+, \dots, u_M^+, u_1^-, \dots, u_M^-, \quad M = \sum_{p=1}^P M^p, \quad (2.43)$$

подчиненный условиям

$$q(u_j^\pm, u_k^\pm) = \mp i\delta_{jk}, \quad q(u_j^\pm, u_k^\mp) = 0, \quad j, k = 1, \dots, M; \quad (2.44)$$

здесь u_1^+, \dots, u_M^+ — приходящие волны и u_1^-, \dots, u_M^- — уходящие волны.

Обратимся к задаче

$$\mathcal{L}(x, D_x)u(x) - \mu u(x) = 0, \quad x \in G; \quad \mathcal{B}(x, D_x)u(x) = 0, \quad x \in \partial G. \quad (2.45)$$

Пусть $0 < \gamma < \delta$, где δ — число из формулы (2.40), и пусть полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leq \gamma\}$ содержит лишь вещественные собственные числа пучков $\mathfrak{Q}^p(\cdot, \mu)$, где $p = 1, \dots, P$ и $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Известно [40], что существуют решения $Y_1(\cdot, \mu), \dots, Y_M(\cdot, \mu)$ задачи (2.45), гладкие в \overline{G} и допускающие при больших $|x|$ представления

$$Y_j(x, \mu) = u_j^+(x) + \sum_{k=1}^M S_{jk}(\mu) u_k^-(x) + O(e^{-\gamma|x|}). \quad (2.46)$$

Если число μ не является собственным для задачи (2.45), то функции $Y_j(\cdot, \mu)$ определены однозначно и образуют базис в пространстве ограниченных решений однородной задачи (2.45) (собственных функций непрерывного спектра). В противном случае, всякое решение $Y_j(\cdot, \mu)$ определено с точностью до слагаемого, которое является собственной функцией из $L_2(G)$ задачи (2.45). Тогда любое ограниченное решение задачи (2.45) представляется линейной комбинацией функций $Y_j(\cdot, \mu)$ с точностью до собственной функции из $L_2(G)$.

Матрица рассеяния $S(\mu) = \|S_{jk}(\mu)\|_{j,k=1}^M$ в (2.46) определена однозначно при всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$; она не зависит от возможного произвола в определении $Y_j(\cdot, \mu)$ для μ , оказывающихся собственными значениями. Матрица $S(\mu)$ унитарна и симметрична при всех μ .

2.3.2 Формулировка метода

Введем обозначения

$$\Pi_+^{p,R} = \{(y^p, t^p) \in \Pi^p : t^p > R\}, \quad G^R = G \setminus \bigcup_{p=1}^P \Pi_+^{p,R}$$

для больших R . Тогда $\partial G^R \setminus \partial G = \Gamma^R = \bigcup_p \Gamma^{p,R}$, где $\Gamma^{p,R} = \{(y^p, t^p) \in \Pi^p : t^p = R\}$. При больших R имеет место равенство

$$(\mathcal{L}u, v)_{G^R} + (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\partial G^R \setminus \Gamma^R} + (\mathcal{N}u, \mathcal{D}v)_{\Gamma^R} = (u, \mathcal{L}v)_{G^R} + (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\partial G^R \setminus \Gamma^R} + (\mathcal{D}u, \mathcal{N}v)_{\Gamma^R}, \quad (2.47)$$

где \mathcal{D} и \mathcal{N} — матрицы дифференциальных операторов размера $m \times k$, \mathcal{D} — система Дирихле (см. [35]). Примером системы Дирихле является матрица из m строк вида

$e^{(j)}\partial_\nu^h$, где $j = 1, \dots, k$, $h = 1, \dots, \tau_j - 1$, $e^{(j)} = (\delta_{1,j}, \dots, \delta_{k,j})$, а ν — внешняя нормаль к Γ^R . Оператор \mathcal{N} при выбранном операторе \mathcal{D} определяется требованием, чтобы выполнялась формула Грина (2.47).

Будем искать строку (S_{l1}, \dots, S_{lM}) матрицы рассеяния $S = S(\mu)$. В качестве приближения для этой строки возьмем вектор, минимизирующий некоторый квадратичный функционал. Для построения функционала рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(x, D_x) - \mu)\mathcal{X}_l^R &= 0, \quad x \in G^R; \\ \mathcal{B}(x, D_x)\mathcal{X}_l^R &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})\mathcal{X}_l^R &= (\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j u_j^-), \quad x \in \Gamma^R; \end{aligned} \quad (2.48)$$

где $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а числа a_1, \dots, a_M комплексные. В качестве приближения для строки (S_{l1}, \dots, S_{lM}) возьмем вектор $a^0(R) = (a_1^0(R), \dots, a_M^0(R))$, доставляющий минимум функционалу

$$J_l^R(a_1, \dots, a_M) = \|\mathcal{D}(\mathcal{X}_l^R - u_l^+ - \sum_{j=1}^M a_j u_j^-); L_2(\Gamma^R)\|^2, \quad (2.49)$$

где \mathcal{X}_l^R — решение задачи (2.48). Можно ожидать, что $a_j^0(R) \rightarrow S_{lj}$ с экспоненциальной скоростью при $R \rightarrow \infty$ и $j = 1, \dots, M$. Чтобы выписать зависимость \mathcal{X}_l^R от параметров a_1, \dots, a_M , рассмотрим задачи

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(x, D_x) - \mu)v_j^\pm &= 0, \quad x \in G^R; \\ \mathcal{B}(x, D_x)v_j^\pm &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})v_j^\pm &= (\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})u_j^\pm, \quad x \in \Gamma^R; \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Выразим \mathcal{X}_l^R через решения $v_j^\pm = v_{j,R}^\pm$ задач (2.50). Имеем $\mathcal{X}_l^R = v_{l,R}^+ + \sum_j a_j v_{j,R}^-$. Введем $M \times M$ -матрицы с элементами

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ij}^R &= (\mathcal{D}(v_i^- - u_i^-), \mathcal{D}(v_j^- - u_j^-))_{\Gamma^R}, \\ \mathcal{F}_{ij}^R &= (\mathcal{D}(v_i^+ - u_i^+), \mathcal{D}(v_j^- - u_j^-))_{\Gamma^R}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Положим еще

$$\mathcal{G}_i^R = (\mathcal{D}(v_i^+ - u_i^+), \mathcal{D}(v_i^+ - u_i^+))_{\Gamma^R}.$$

Теперь функционал (2.49) можно записать в виде

$$J_l^R(a) = \langle a\mathcal{E}^R, a \rangle + 2\text{Re} \langle \mathcal{F}_l^R, a \rangle + \mathcal{G}_l^R,$$

где \mathcal{F}_l^R — строка с номером l матрицы \mathcal{F}^R и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{C}^M . Минимум реализуется на векторе a^0 (строке), удовлетворяющем системе $a^0(R)\mathcal{E}^R + \mathcal{F}_l^R = 0$. Итак, в качестве приближения $S^R(\mu)$ для матрицы рассеяния $S(\mu)$ выступает решение уравнения $S^R\mathcal{E}^R + \mathcal{F}^R = 0$.

Остальная часть параграфа посвящена доказательству следующей теоремы, которая является основным результатом.

Теорема 2.3.1. *Пусть ζ — любое фиксированное ненулевое вещественное число. Пусть отрезок $[\mu_1, \mu_2]$ непрерывного спектра задачи (2.45) удовлетворяет условиям, указанным перед формулой (2.41) (иными словами, интервал $[\mu_1, \mu_2]$ свободен от пороговых значений спектрального параметра μ). Тогда для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и $R > R_0$, где R_0 — достаточно большое число, существует единственный минимизатор $a^0(R, \mu) = (a_1^0(R, \mu), \dots, a_M^0(R, \mu))$ функционала $J_l^R(\cdot; \mu)$ из (2.49). Справедливы неравенства*

$$|a_j^0(R, \mu) - S_{lj}(\mu)| \leq Ce^{-\Lambda R}, \quad j = 1, \dots, M,$$

где Λ — положительное число, а постоянная C не зависит ни от μ , ни от R .

2.3.3 Задача в G^R

Введем краевую задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, D_x)u(x) - \mu u(x) &= f(x), & x \in G^R, \\ \mathcal{B}(x, D_x)u(x) &= g(x), & x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R, \\ (\mathcal{N}(x, D_x) + i\zeta\mathcal{D}(x, D_x))u(x) &= h(x), & x \in \Gamma^R, \end{aligned} \quad (2.52)$$

где $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{R}$. Граница ∂G^R содержит ребро $\partial\Gamma^R$ при $\dim G > 2$ или угловые точки при $\dim G = 2$; на $\partial\Gamma^R$ меняются граничные условия. Для исследования задачи (2.52) можно использовать обычную схему теории эллиптических краевых задач в областях с кусочно гладкой границей (см., например, [32], [27], [40], [34]). В отличие от гладкой ситуации выбор функциональных пространств для краевой задачи не является универсальным и требует учета специфических свойств решений вблизи ребер (иногда привлекаются пространства с весовыми нормами, где вес есть степень расстояния до ребра). Для ряда классических задач математической физики нужные пространства известны. По этим причинам здесь мы ограничимся некоторыми соображениями, связанными со спецификой задачи (2.52), примером и постулированием свойств функциональных пространств без их детального определения.

Для того чтобы обеспечить замкнутость образа оператора задачи (2.52), функциональные пространства выбираются так, что оператор задачи оказывается фредгольмовым (то есть его образ замкнут, а ядро и коядро конечномерны). Тогда тривиальность ядра и коядра необходима и достаточна для существования и единственности решения задачи при любой правой части. Для доказательства этой тривиальности понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3.2. Пусть u — решение задачи (2.52) при $f = 0$ и $g = 0$. Тогда верно неравенство

$$\|\mathcal{D}u; L_2(\Gamma^R)\| \leq \frac{1}{|\zeta|} \|h; L_2(\Gamma^R)\|. \quad (2.53)$$

Доказательство. Из равенства (2.47) следует формула Грина

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}u, v)_{G^R} + (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\partial G^R \setminus \Gamma^R} - (u, \mathcal{L}v)_{G^R} - (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\partial G^R \setminus \Gamma^R} = \\ & = ((\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})u, \mathcal{D}v)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}u, (\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})v)_{\Gamma^R} - 2i\zeta(\mathcal{D}u, \mathcal{D}v)_{\Gamma^R}. \end{aligned}$$

Положим в ней $v = u$:

$$0 = (h, \mathcal{D}u)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}u, h)_{\Gamma^R} - 2i\zeta \|\mathcal{D}u; L_2(\Gamma^R)\|^2.$$

Отсюда

$$2|\zeta| \|\mathcal{D}u; L_2(\Gamma^R)\|^2 = |(h, \mathcal{D}u)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}u, h)_{\Gamma^R}| \leq 2\|\mathcal{D}u; L_2(\Gamma^R)\| \|h; L_2(\Gamma^R)\|,$$

и мы приходим к неравенству (2.53). \square

Вернемся к проверке тривиальности ядра. Пусть u — решение однородной задачи (2.52). Из (2.53) и однородного краевого условия $(\mathcal{N}(x, D_x) + i\zeta\mathcal{D}(x, D_x))u(x) = 0$ при $x \in \Gamma^R$ вытекает, что решение u имеет нулевые данные Коши на Γ^R . Если коэффициенты оператора достаточно гладкие для применимости теоремы о единственности продолжения решения (см. [21], часть II, §1.5), то мы получаем тривиальность ядра. Из аналогичных соображений для сопряженной задачи вытекает тривиальность коядра (предполагается, конечно, что функциональные пространства, в которых рассматривается задача, допускают такие соображения). Мы реализуем этот план в простой ситуации следующего примера.

Пример. Будем считать, что $\dim G = 2$, и рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (\Delta - \mu)u(x) &= f(x), \quad x \in G^R, \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R, \\ \partial_\nu u(x) + i\zeta u(x) &= h(x), \quad x \in \Gamma^R. \end{aligned} \quad (2.54)$$

С угловыми точками границы ∂G^R свяжем задачу с комплексным параметром (операторный пучок)

$$\begin{aligned} (\partial_\omega^2 - \lambda^2)v(\omega) &= p(\omega), \quad \omega \in (0, \pi/2), \\ v(0) = v'(\pi/2) &= 0. \end{aligned}$$

Спектр этой задачи состоит из простых собственных чисел $\lambda_q = (2q + 1)i$, где $q = 0, \pm 1, \dots$. Числу λ_q отвечает собственная функция $\varphi_q(\omega) = \sin(2q + 1)\omega$.

Введем пространство $V_\beta^l(G^R)$ с нормой

$$\|u; V_\beta^l(G^R)\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{G^R} r^{2(\beta - l + |\alpha|)} |D_x^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $\beta \in \mathbb{R}$, $l = 0, 1, \dots$ и через r обозначена функция, совпадающая вблизи угловой точки с расстоянием до этой точки, вне окрестности угловых точек равная единице, гладкая и строго положительная на $\overline{G^R}$ (кроме угловых точек). Пусть еще $V_\beta^{l-1/2}(\partial G^R \setminus \Gamma^R)$ и $V_\beta^{l-1/2}(\Gamma^R)$ при $l = 1, 2, \dots$ обозначают пространства следов функций из $V_\beta^l(G^R)$ на $\partial G^R \setminus \Gamma^R$ и Γ^R , соответственно.

Оператор $\mathcal{A}^R(\mu)$ задачи (2.52) осуществляет непрерывное отображение

$$\begin{aligned} V_\beta^2(G^R) \ni u &\mapsto \mathcal{A}^R(\mu)u = \{f, g, h\} \in \\ &\in V_\beta^0(G^R) \times V_\beta^{3/2}(\partial G^R \setminus \Gamma^R) \times V_\beta^{1/2}(\Gamma^R). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Известно, что оператор (2.55) фредгольмов в том и только в том случае, когда число $\beta - 1$ не совпадает ни с одним из чисел $\text{Im} \lambda_q$, т.е. оператор фредгольмов, когда β не является четным. Если функция w удовлетворяет однородной задаче (2.52) и $w \in V_\beta^2(G^R)$ при некотором $\beta \in (2q, 2q + 2)$ и каком-нибудь целом q , то вблизи угловой точки

$$w(x) = Cr^{2q+1} \sin(2q + 1)\omega + O(r^{2q+2-\varepsilon}),$$

где r, ω — полярные координаты с центром в угловой точке, C — постоянная, а ε — любое положительное число, подчиненное неравенству $\varepsilon < 1$. Поэтому для любого элемента из ядра оператора (2.55) при $\beta \in (0, 2)$ верна оценка (2.53), из которой следует, что $\|w; L_2(\Gamma^R)\| = 0$. Значит, ядро тривиально при $\beta \in (0, 2)$, а потому и при всех $\beta < 2$.

Теперь займемся коядром. Обозначим через $V_{-\beta}^{-l}(G^R)$ пространство, сопряженное с $V_\beta^l(G^R)$ относительно скалярного произведения в $L_2(G^R)$; через $V_{-\beta}^{-1/2}(\Gamma^R)$ —

пространство, сопряженное с $V_{\beta}^{-1/2}(\Gamma^R)$ относительно двойственности в $L_2(\Gamma^R)$; аналогичный смысл имеет $V_{-\beta}^{-3/2}(\partial G^R \setminus \Gamma^R)$. Пусть еще $\mathcal{A}^R(\mu)^*$ — оператор, сопряженный с оператором (2.55),

$$\mathcal{A}^R(\mu)^* : V_{-\beta}^0(G^R) \times V_{-\beta}^{-3/2}(\partial G^R \setminus \Gamma^R) \times V_{-\beta}^{-1/2}(\Gamma^R) \rightarrow V_{-\beta}^{-2}(G^R). \quad (2.56)$$

Коядро оператора (2.55) совпадает с ядром оператора (2.56). Согласно известным результатам о регулярности решений эллиптических задач для всякого элемента $\{u, v, w\}$ ядра оператора (2.56) справедливо включение

$$\{u, v, w\} \in V_{2-\beta}^2(G^R) \times V_{2-\beta}^{1/2}(\partial G^R \setminus \Gamma^R) \times V_{2-\beta}^{3/2}(\Gamma^R), \quad (2.57)$$

причем u удовлетворяет однородной краевой задаче (2.54) с заменой $\partial_{\nu} + i\zeta$ на $\partial_{\nu} - i\zeta$ в краевом условии на Γ^R , а v и w определяются равенствами

$$v(x) = -\partial_{\nu}u(x), \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \quad w(x) = u(x), \quad x \in \Gamma^R. \quad (2.58)$$

Приведенное выше обсуждение тривиальности ядра оператора (2.55) не зависит от знака ζ . Поэтому, учитывая (2.57), получаем, что $u = 0$ при всех β таких, что $2 - \beta < 2$. В силу (2.58) при таких же β имеем $v = 0$ и $w = 0$. Итак, если $\beta \in (0, 2)$, то тривиальны и ядро, и коядро оператора (2.55). Значит, при $\beta \in (0, 2)$ и всех μ и $\zeta \neq 0$ оператор (2.55) — изоморфизм. Можно показать, что при четном β образ этого оператора не замкнут, при $\beta < 0$ оператор имеет нетривиальное коядро, а при $\beta > 2$ — нетривиальное ядро. \square

2.3.4 Обоснование метода

Для обоснования метода осталось проверить невырожденность матрицы \mathcal{E}^R с элементами (2.51) и стабилизацию минимизатора $a_0(R)$ функционала (2.49) при $R \rightarrow \infty$ к l -ой строке матрицы рассеяния. Все оценки этого раздела выполняются равномерно относительно $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Лемма 2.3.3. Пусть u_j^{\pm} — входящие и уходящие волны (2.43), подчиненные соотношениям (2.44). Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}u_j^{\pm}, \mathcal{D}u_k^{\pm})_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}u_j^{\pm}, \mathcal{N}u_k^{\pm})_{\Gamma^R} &= \mp i\delta_{jk} + O(e^{-\gamma R}), \\ (\mathcal{N}u_j^{\pm}, \mathcal{D}u_k^{\mp})_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}u_j^{\pm}, \mathcal{N}u_k^{\mp})_{\Gamma^R} &= O(e^{-\gamma R}) \end{aligned}$$

при $R \rightarrow \infty$; здесь γ — то же положительное число, что и в формуле (2.46).

Доказательство. Согласно (2.47),

$$(\mathcal{N}u, \mathcal{D}v)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}u, \mathcal{N}v)_{\Gamma^R} = (u, \mathcal{L}v)_{G^R} + (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\partial G^R \setminus \Gamma^R} - (\mathcal{L}u, v)_{G^R} - (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\partial G^R \setminus \Gamma^R}.$$

Правая часть последнего равенства отличается от $q(u, v)$ на слагаемое

$$(u, \mathcal{L}v)_{G \setminus G^R} + (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\partial G \setminus \partial G^R} - (\mathcal{L}u, v)_{G \setminus G^R} - (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\partial G \setminus \partial G^R}. \quad (2.59)$$

Ввиду стабилизации коэффициентов оператора $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$, в каждом из полуцилиндров Π_+^p коэффициенты оператора $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\} - \{L^p, B^p\}$ допускают оценку $O(e^{-\gamma|x|})$. Достаточно считать, что $u = U^p + w$, где U^p — линейная комбинация функций вида χu_k с носителями в Π^p , а $w \in E$ (см. обозначения перед формулой (2.43)). Учитывая, что u_k удовлетворяют однородной задаче (2.42), получаем оценку

$$\{\mathcal{L} - \mu, \mathcal{B}\}u(x) = \{L^p - \mu, B^p\}w(x) + \{\mathcal{L} - L^p, \mathcal{B} - B^p\}u(x) = O(e^{-\gamma R})$$

при $R \rightarrow \infty$, равномерную по $x = (t^p, y^p) \in \Pi_+^p$ при $t^p > R$. Следовательно, если обе функции u и v имеют вид $U^p + w$, то

$$\begin{aligned} (u, \mathcal{L}v)_{G \setminus G^R} - (\mathcal{L}u, v)_{G \setminus G^R} &= (u, (\mathcal{L} - \mu)v)_{G \setminus G^R} - ((\mathcal{L} - \mu)u, v)_{G \setminus G^R} = O(e^{-\gamma R}), \\ (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\partial G \setminus \partial G^R} - (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\partial G \setminus \partial G^R} &= O(e^{-\gamma R}), \end{aligned}$$

и величина (2.59) допускает оценку $O(e^{-\gamma R})$ при $R \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}u_j^\pm, \mathcal{D}u_k^\pm)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}u_j^\pm, \mathcal{N}u_k^\pm)_{\Gamma^R} &= q(u_j^\pm, u_k^\pm) + O(e^{-\gamma R}), \\ (\mathcal{N}u_j^\pm, \mathcal{D}u_k^\mp)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}u_j^\pm, \mathcal{N}u_k^\mp)_{\Gamma^R} &= q(u_j^\pm, u_k^\mp) + O(e^{-\gamma R}), \end{aligned}$$

и остается лишь учесть (2.44). \square

Предложение 2.3.4. Матрица \mathcal{E}^R с элементами (2.51) не вырождается при всех $R \geq R_0$, где R_0 — достаточно большое число.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда для любого R^0 существует такое число $R > R^0$, что матрица \mathcal{E}^R вырождена и функции $\mathcal{U} = \sum_j c_j u_j^-$ и $\mathcal{V} = \sum_j c_j v_j^-$ связаны соотношением

$$\mathcal{D}\mathcal{U} = \mathcal{D}\mathcal{V} \quad \text{на } \Gamma^R, \quad (2.60)$$

где v_j^- — решение задачи (2.50), $\vec{c} = (c_1, \dots, c_M)$ — некоторый вектор, причем $|\vec{c}| = 1$. Согласно уравнению на Γ^R из (2.50), имеем

$$\mathcal{N}\mathcal{U} = \mathcal{N}\mathcal{V} \quad \text{на } \Gamma^R. \quad (2.61)$$

В формуле Грина (2.39) положим $u = v = \mathcal{V}$. Учтем первые два уравнения (2.50) и формулы (2.60), (2.61) и получим

$$(\mathcal{N}\mathcal{U}, \mathcal{D}\mathcal{U})_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}\mathcal{U}, \mathcal{N}\mathcal{U})_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.62)$$

Отсюда и из леммы 2.3.3 следует, что

$$0 = i \sum_j |c_j|^2 + o(1) = i + o(1).$$

Полученное противоречие заканчивает доказательство. \square

Предложение 2.3.5. Пусть вектор $a(R) = (a_1(R), \dots, a_M(R))$ доставляет минимум функционалу J_l^R из формулы (2.49). Тогда

$$J_l^R(a(R)) = O(e^{-2\gamma R}) \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (2.63)$$

где γ — число из формулы (2.46). Для всех $R \geq R_0$ компоненты вектора $a(R)$ равномерно ограничены,

$$|a_j(R)| \leq \text{const} < \infty, \quad j = 1, \dots, M.$$

Доказательство. Обозначим через Y_l^R решение задачи (2.48), где в качестве a_j , $j = 1, \dots, M$, взяты элементы S_{lj} матрицы рассеяния S задачи (2.45). Поскольку асимптотику (2.46) можно дифференцировать, получаем

$$(\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})(Y_l^R - Y_l)|_{\Gamma} = O(e^{-\gamma R}).$$

Так как разность $Y_l^R - Y_l$ удовлетворяет первым двум уравнениям задачи (2.52) при $f = 0$ и $g = 0$, то имеет место оценка (2.53) при $u = Y_l^R - Y_l$:

$$\|\mathcal{D}(Y_l^R - Y_l); L_2(\Gamma^R)\| \leq |\zeta|^{-1} \|(\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})(Y_l^R - Y_l); L_2(\Gamma^R)\| \leq ce^{-\gamma R}.$$

Вместе с (2.46) это приводит к оценке

$$J_l^R(S_l) = \|\mathcal{D}(Y_l^R - (u_l^+ + \sum_{j=1}^M S_{lj}u_j^-)); L_2(\Gamma^R)\|^2 \leq ce^{-2\gamma R}$$

с постоянной c , не зависящей от R . Для того чтобы получить (2.63), остается заметить, что $J_l^R(a(R)) \leq J_l^R(S_l)$.

Перейдем к оценке минимизатора $a(R)$. Обозначим через Z_l^R решение задачи (2.48), отвечающее вектору $a(R) = (a_1(R), \dots, a_M(R))$. В формуле Грина (2.39) положим $u = v = Z_l^R$. Имеем

$$(\mathcal{N}Z_l^R, \mathcal{D}Z_l^R)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}Z_l^R, \mathcal{N}Z_l^R)_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.64)$$

В силу (2.63)

$$\|\mathcal{D}(Z_l^R - (u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R)u_j^-)); L_2(\Gamma^R)\| = O(e^{-\gamma R}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.65)$$

Поскольку

$$(\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})Z_l^R|_{\Gamma^R} = (\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R)u_j^-)|_{\Gamma^R},$$

из (2.65) получаем

$$\|\mathcal{N}(Z_l^R - (u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R)u_j^-)); L_2(\Gamma^R)\| = O(e^{-\gamma R}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.66)$$

Используя (2.65) и (2.66), приведем (2.64) к виду

$$(\mathcal{N}\varphi_l, \mathcal{D}\varphi_l)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}\varphi_l, \mathcal{N}\varphi_l)_{\Gamma^R} = O(e^{-\gamma R}),$$

где $\varphi_l = u_l^+ + \sum a_j(R)u_j^-$. По лемме 2.3.3 левая часть равна $-i(1 - \sum |a_j(R)|^2) + o(1)$. Итак,

$$\sum_{j=1}^M |a_j(R)|^2 = 1 + o(1). \quad \square$$

Доказательство теоремы 2.3.1. Пусть Y_l , Z_l^R и $(a_1(R), \dots, a_M(R))$ — те же, что в предложении 2.3.5. Подставим $u = v = U_l := Y_l - Z_l^R$ в формулу Грина (2.39).

Поскольку U_l удовлетворяет первым двум уравнениям (2.48), имеем

$$(\mathcal{N}U_l, \mathcal{D}U_l)_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}U_l, \mathcal{N}U_l)_{\Gamma^R} = 0. \quad (2.67)$$

Положим

$$\varphi_l = u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R)u_j^-, \quad \psi_l = u_l^+ + \sum_{j=1}^M S_{lj}u_j^- \quad (2.68)$$

и запишем U_l в виде

$$U_l - Y_l - Z_l^R = (Y_l - \psi_l) + (\psi_l - \varphi_l) + (\varphi_l - Z_l^R).$$

Заметим, что $(Y_l - \psi_l)|_{\Gamma^R} = O(e^{-\gamma R})$ в силу (2.46). С учетом оценок (2.65), (2.66) и предложения 2.3.5 это позволяет перейти от (2.67) к соотношению

$$(\mathcal{N}(\psi_l - \varphi_l), \mathcal{D}(\psi_l - \varphi_l))_{\Gamma^R} - (\mathcal{D}(\psi_l - \varphi_l), \mathcal{N}(\psi_l - \varphi_l))_{\Gamma^R} = O(e^{-\gamma R}).$$

Здесь левая часть вычисляется непосредственно и равна $i \sum_{j=1}^M |a_j(R) - S_{lj}|^2 + O(e^{-\gamma R})$ (достаточно воспользоваться представлениями (2.68) и леммой 2.3.3). Окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^M |a_j(R) - S_{lj}|^2 = O(e^{-\gamma R}). \quad \square$$

Глава 3

Асимптотическая теория резонансного туннелирования в двумерных квантовых волноводах

3.1 Постановка задачи о туннелировании электронов малой энергии

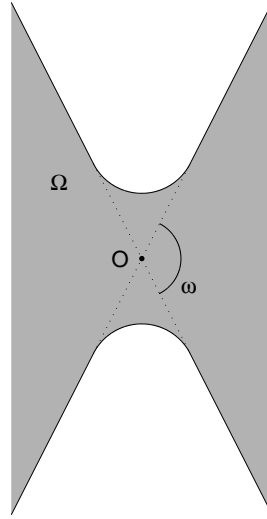
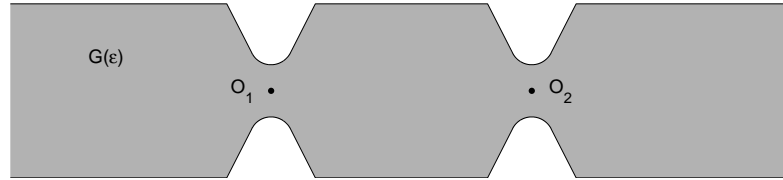
Опишем область $G(\varepsilon)$ в \mathbb{R}^2 , занимаемую волноводом. Для этого введем вспомогательные области G и Ω в \mathbb{R}^2 . Область G — полоса

$$G = \mathbb{R} \times D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty); y \in D = (-l/2, l/2)\}.$$

Определим Ω . Пусть K — "двойной угол" (пара вертикальных углов) с вершиной в начале координат O . Считаем, что угол K содержит ось x и симметричен относительно координатных осей. Множество $K \cap S^1$, где S^1 — единичная окружность, состоит из двух простых дуг. Предположим, что Ω содержит угол K вместе с некоторой окрестностью вершины; кроме того, вне достаточно большого диска (с центром в начале) Ω совпадает с K . Граница $\partial\Omega$ области Ω предполагается гладкой (см. Рис. 3.1).

Перейдем к волноводу $G(\varepsilon)$. Обозначим через $\Omega(\varepsilon)$ область, полученную из Ω , преобразованием подобия с центром в O и коэффициентом ε . Другими словами, $(x, y) \in \Omega(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \in \Omega$. Пусть K_j и $\Omega_j(\varepsilon)$ обозначают K и $\Omega(\varepsilon)$, сдвинутые на вектор $\mathbf{r}_j = (x_j^0, 0)$, $j = 1, 2$. Мы предполагаем величину $|x_1^0 - x_2^0|$ достаточно большой, так что расстояние между $\partial K_1 \cap \partial K_2$ и G положительно. Введем

$$G(\varepsilon) = G \cap \Omega_1(\varepsilon) \cap \Omega_2(\varepsilon)$$

Рисунок 3.1: Область Ω .Рисунок 3.2: Волновод $G(\varepsilon)$.

(см. Рис. 3.2). Волновая функция электрона с энергией k^2 удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) &= 0, & (x, y) \in G(\varepsilon), \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial G(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Кроме того, u подчиняется условиям излучения на бесконечности. Чтобы сформулировать эти условия, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta v(y) + \lambda^2 v(y) &= 0, & y \in D, \\ v(-l/2) = v(l/2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Собственные числа λ_q^2 этой задачи, где $q = 1, 2, \dots$, называются порогами; они образуют последовательность $\lambda_q^2 = (\pi q/l)^2$, $q = 1, 2, \dots$. Предположим, что число k^2 в (3.1) не совпадает ни с одним из порогов. При фиксированном вещественном k существует конечное число линейно независимых ограниченных волновых функций. В качестве базиса в линейном пространстве таких функций можно взять

набор волновых функций, удовлетворяющих условиям излучения

$$\begin{aligned}
 u_m(x,y) &= \begin{cases} e^{i\nu_m x} \Psi_m(y) + \sum_{j=1}^M S_{mj}(k) e^{-i\nu_j x} \Psi_j(y) + O(e^{\delta x}), & x \rightarrow -\infty, \\ \sum_{j=1}^M S_{m,M+j}(k) e^{i\nu_j x} \Psi_j(y) + O(e^{-\delta x}), & x \rightarrow +\infty; \end{cases} \quad (3.3) \\
 u_{M+m}(x,y) &= \begin{cases} \sum_{j=1}^M S_{M+m,j}(k) e^{-i\nu_j x} \Psi_j(y) + O(e^{\delta x}), & x \rightarrow -\infty, \\ e^{-i\nu_m x} \Psi_m(y) + \\ + \sum_{j=1}^M S_{M+m,M+j}(k) e^{i\nu_j x} \Psi_j(y) + O(e^{-\delta x}), & x \rightarrow +\infty; \end{cases}
 \end{aligned}$$

здесь M — число порогов, не превосходящих k^2 , причем $m = 1, 2, \dots, M$, $\nu_m = \sqrt{k^2 - \lambda_m^2}$, а через Ψ_m обозначена собственная функция задачи (3.2), отвечающая числу λ_m^2 ,

$$\Psi_m(y) = \begin{cases} \sqrt{2/l\nu_m} \sin \lambda_m y, & m \text{ четное,} \\ \sqrt{2/l\nu_m} \cos \lambda_m y, & m \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Функция $U_j(x,y) = e^{i\nu_j x} \Psi_j(y)$ в полосе G при $j = 1, \dots, M$ является волной, приходящей из $-\infty$ и уходящей в $+\infty$, а $U_{M+j}(x,y) = e^{-i\nu_j x} \Psi_j(y)$ есть волна, идущая из $+\infty$ в $-\infty$. Величины

$$R_m = \sum_{j=1}^M |S_{mj}|^2, \quad T_m = \sum_{j=1}^M |S_{m,M+j}|^2$$

называются коэффициентом отражения и коэффициентом прохождения, соответственно, для волны U_m , приходящей в $G(\varepsilon)$ из $-\infty$, $m = 1, \dots, M$. (Аналогичные определения можно дать и для волны U_{M+m} , приходящей из $+\infty$.)

В настоящей главе мы обсуждаем только случай, когда $(\pi/l)^2 < k^2 < (2\pi/l)^2$, то есть k^2 лежит между первым и вторым порогами. В этом случае матрица рассеяния имеет размер 2×2 . Мы рассматриваем только рассеяние волны, идущей из $-\infty$, и обозначаем коэффициенты отражения и прохождения через

$$R = R(k, \varepsilon) = |S_{11}(k, \varepsilon)|^2, \quad T = T(k, \varepsilon) = |S_{12}(k, \varepsilon)|^2.$$

Цель — найти "резонансное" значение $k_r = k_r(\varepsilon)$ параметра k , при котором коэффициент прохождения достигает максимума, и описать поведение $T(k, \varepsilon)$ вблизи $k_r(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.2 Предельные задачи

Асимптотику волновой функции (то есть решения задачи (3.1)) при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы строим методом составных разложений. С этой целью вводятся "предельные" краевые задачи, не зависящие от параметра ε .

3.2.1 Предельные задачи первого рода

Положим $G(0) = G \cap K_1 \cap K_2$ (Рис. 3.3); таким образом, $G(0)$ состоит из трех частей G_0 , G_1 и G_2 , где G_1 и G_2 — бесконечные области, а G_0 — ограниченный резонатор. Краевые задачи

$$\Delta v(x, y) + k^2 v(x, y) = f, \quad (x, y) \in G_j; \quad v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial G_j, \quad (3.5)$$

где $j = 0, 1, 2$, называются предельными задачами первого рода.

Введем функциональные пространства для задачи (3.5) в G_0 . Пусть ϕ_1 и ϕ_2 — гладкие вещественные функции на замыкании $\overline{G_0}$ области G_0 , такие что $\phi_j = 1$ в некоторой окрестности точки O_j , $j = 1, 2$, причем $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$. При $l = 0, 1, \dots$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ обозначим через $V_\gamma^l(G_0)$ пополнение по норме

$$\|v; V_\gamma^l(G_0)\| = \left(\int_{G_0} \sum_{|\alpha|=0}^l \sum_{j=1}^2 \phi_j^2(x, y) r_j^{2(\gamma-l+|\alpha|)} |\partial^\alpha v(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

множества функций, гладких на $\overline{G_0}$ и равных нулю вблизи O_1 и O_2 ; здесь r_j — расстояние от точки (x, y) до начала O_j , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — мультииндекс, $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}$. Предложение 3.2.1 следует из известных общих результатов; см, например, [40, главы 2 и 4, §§1–3] или [37, т. 1, глава 1].

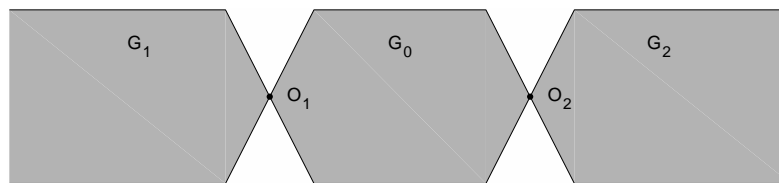


Рисунок 3.3: "Предельный" волновод $G(0)$.

Предложение 3.2.1. *Предположим, что $|\gamma - 1| < \pi/\omega$. Тогда для $f \in V_\gamma^0(G_0)$ и произвольного k^2 , за исключением положительной возрастающей последовательности $\{k_p^2\}_{p=1}^\infty$ собственных чисел, $k_p^2 \rightarrow \infty$, существует единственное решение $v \in V_\gamma^2(G_0)$ задачи (3.5) в G_0 . Справедлива оценка*

$$\|v; V_\gamma^2(G_0)\| \leq c \|f; V_\gamma^0(G_0)\| \quad (3.6)$$

с постоянной c , не зависящей от f . Если f — гладкая функция в $\overline{G_0}$, равная нулю в окрестности точек O_1, O_2 , и v — произвольное решение из $V_\gamma^2(G_0)$ задачи (3.5), то v — гладкая функция в $\overline{G_0}$, за исключением точек O_1 и O_2 , и допускает асимптотическое разложение

$$v(x, y) = \begin{cases} b_1 \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1) \Phi(\varphi_1) + O(r_1^{2\pi/\omega}), & r_1 \rightarrow 0; \\ b_2 \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2) \Phi(\pi - \varphi_2) + O(r_2^{2\pi/\omega}), & r_2 \rightarrow 0; \end{cases}$$

вблизи точек O_1 и O_2 , где (r_j, φ_j) — полярные координаты с центром в O_j , b_j — постоянные коэффициенты, \tilde{J}_μ обозначает функцию Бесселя, умноженную на некоторую постоянную, такую что $\tilde{J}_\mu(kr) = r^\mu + o(r^\mu)$ и, наконец, $\Phi(\varphi) = \pi^{-1/2} \cos(\pi\varphi/\omega)$.

Пусть $k^2 = k_e^2$ — собственное число задачи (3.5), тогда задача (3.5) в G_0 разрешима, если и только если $(f, v_e)_{G_0} = 0$ для любой собственной функции v_e , отвечающей числу k_e^2 . При выполнении данного условия существует единственное решение v задачи (3.5), ортогональное всем упомянутым собственным функциям и удовлетворяющее неравенству (3.6) (то есть справедлива альтернатива Фредгольма).

Обратимся к задачам (3.5) при $j = 1, 2$. Пусть $\chi_{0,j}$ и $\chi_{\infty,j}$ — гладкие вещественные функции на замыкании $\overline{G_j}$ области G_j , такие что $\chi_{0,j} = 1$ в окрестности точки O_j , $\chi_{0,j} = 0$ вне некоторого компактного множества и $\chi_{0,j}^2 + \chi_{\infty,j}^2 = 1$. Мы также предполагаем, что носитель $\text{supp} \chi_{\infty,j}$ сосредоточен в цилиндрической части области G_j . Для $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и $l = 0, 1, \dots$ пространство $V_{\gamma, \delta}^l(G_j)$ является пополнением по норме

$$\|v; V_{\gamma, \delta}^l(G_j)\| = \left(\int_{G_j} \sum_{|\alpha|=0}^l (\chi_{0,j}^2 r_j^{2(\gamma-l+|\alpha|)} + \chi_{\infty,j}^2 \exp(2\delta x)) |\partial^\alpha v|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

множества функций с компактным носителем, гладких на $\overline{G_j}$ и равных нулю в окрестности точки O_j .

Напомним, что по предположению k^2 лежит между первым и вторым порогами, поэтому в каждой области G_j имеется единственная уходящая волна; пусть $U_1^- = U_2$ — уходящая волна в G_1 и $U_2^- = U_1$ — уходящая волна в G_2 (определение волн U_j в G дано в п. 3.1). Следующее предложение вытекает, например, из теоремы 5.3.5 в [40].

Предложение 3.2.2. Пусть $|\gamma - 1| < \pi/\omega$ и однородная задача (3.5) (где $f = 0$) не имеет нетривиальных решений из $V_{\gamma,\delta}^2(G_j)$ при произвольно малом положительном δ . Тогда для любой правой части $f \in V_{\gamma,\delta}^0(G_j)$ существует единственное решение v задачи (3.5), допускающее представление

$$v = u + A_j \chi_{\infty,j} U_j^-,$$

где $A_j = \text{const}$, $u \in V_{\gamma,\delta}^2(G_j)$ и число δ достаточно мало; при этом справедлива оценка

$$\|u; V_{\gamma,\delta}^2(G_j)\| + |A_j| \leq c \|f; V_{\gamma,\delta}^0(G_j)\|,$$

в которой постоянная c не зависит от f . Если функция f гладкая и аннулируется в окрестности точки O_j , то решение v задачи в области G_1 допускает разложение

$$v(x,y) = a_1 \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1) \Phi(\pi - \varphi_1) + O(r_1^{2\pi/\omega}), \quad r_1 \rightarrow 0,$$

а решение задачи в области G_2 — разложение

$$v(x,y) = a_2 \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2) \Phi(\varphi_2) + O(r_2^{2\pi/\omega}), \quad r_2 \rightarrow 0,$$

где a_j — некоторые постоянные.

3.2.2 Предельные задачи второго рода.

В областях Ω_j , $j = 1, 2$, введенных в п. 3.1, рассмотрим краевые задачи

$$\Delta w(\xi_j, \eta_j) = F(\xi_j, \eta_j), \quad (\xi_j, \eta_j) \in \Omega_j; \quad w(\xi_j, \eta_j) = 0 \quad (\xi_j, \eta_j) \in \partial\Omega_j, \quad (3.7)$$

которые называются предельными задачами второго рода; через (ξ_j, η_j) обозначаются декартовы координаты с центром в O_j .

Пусть $\rho_j = \text{dist}((\xi_j, \eta_j), O_j)$ и пусть $\psi_{0,j}, \psi_{\infty,j}$ — гладкие вещественные функции на $\bar{\Omega}_j$, такие что $\psi_{0,j} = 1$ при $\rho_j < N/2$, $\psi_{0,j} = 0$ при $\rho_j > N$ и $\psi_{0,j}^2 + \psi_{\infty,j}^2 = 1$, где N — достаточно большое положительное число. Для $\gamma \in \mathbb{R}$ и $l = 0, 1, \dots$

пространство $V_\gamma^l(\Omega_j)$ есть пополнение по норме

$$\begin{aligned} & \|v; V_\gamma^l(\Omega_j)\| \\ &= \left(\int_{\Omega_j} \sum_{|\alpha|=0}^l (\psi_{0,j}(\xi_j, \eta_j)^2 + \psi_{\infty,j}(\xi_j, \eta_j)^2 \rho_j^{2(\gamma-l+|\alpha|)}) |\partial^\alpha v(\xi_j, \eta_j)|^2 d\xi_j d\eta_j \right)^{1/2} \end{aligned}$$

множества $C_c^\infty(\bar{\Omega}_j)$ гладких функций с компактным носителем в $\bar{\Omega}_j$. Следующее предложение вытекает из теоремы 4.3.6 в [40].

Предложение 3.2.3. Пусть $|\gamma - 1| < \pi/\omega$. Тогда для $F \in V_\gamma^0(\Omega_j)$ существует единственное решение $w \in V_\gamma^2(\Omega_j)$ задачи (3.7), такое что справедлива оценка

$$\|w; V_\gamma^2(\Omega_j)\| \leq c \|F; V_\gamma^0(\Omega_j)\|,$$

в которой постоянная c не зависит от F . Если $F \in C_c^\infty(\bar{\Omega}_j)$, то функция w — гладкая на $\bar{\Omega}_j$ и допускает представление

$$w(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} \alpha_j \rho_j^{-\pi/\omega} \Phi(\pi - \varphi_j) + O(\rho_j^{-3\pi/\omega}), & \xi_j < 0, \\ \beta_j \rho_j^{-\pi/\omega} \Phi(\varphi_j) + O(\rho_j^{-3\pi/\omega}), & \xi_j > 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

при $\rho_j \rightarrow \infty$; здесь (ρ_j, φ_j) — полярные координаты в Ω_j с центром O_j , а функция Φ — та же, что и в предложении 3.2.1. Постоянные коэффициенты α_j и β_j вычисляются по формулам

$$\alpha_j = -(F, w_j^l)_\Omega, \quad \beta_j = -(F, w_j^r)_\Omega,$$

где w_j^l и w_j^r — единственные решения однородной задачи (3.7), удовлетворяющие при $\rho_j \rightarrow \infty$ условиям

$$w_j^l = \begin{cases} (\rho_j^{\pi/\omega} + \alpha \rho_j^{-\pi/\omega}) \Phi(\pi - \varphi_j) + O(\rho_j^{-3\pi/\omega}), & \xi_j < 0; \\ \beta \rho_j^{-\pi/\omega} \Phi(\varphi_j) + O(\rho_j^{-3\pi/\omega}), & \xi_j > 0; \end{cases} \quad (3.9)$$

$$w_j^r = \begin{cases} \beta \rho_j^{-\pi/\omega} \Phi(\pi - \varphi_j) + O(\rho_j^{-3\pi/\omega}), & \xi_j < 0; \\ (\rho_j^{\pi/\omega} + \alpha \rho_j^{-\pi/\omega}) \Phi(\varphi_j) + O(\rho_j^{-3\pi/\omega}), & \xi_j > 0; \end{cases} \quad (3.10)$$

коэффициенты α и β зависят только от формы области Ω и подлежат вычислению.

3.3 Специальные решения однородных предельных задач первого рода

В каждой из областей G_j , $j = 0, 1, 2$, введем специальные решения однородных задач (3.5). Эти решения понадобятся в следующем пункте при построении асимптотики волновой функции. Из предложений 3.2.1 и 3.2.2 следует, что ограниченные решения однородных задач (3.5) тривиальны (за исключением собственных функций задачи в резонаторе), поэтому мы будем рассматривать решения, не ограниченные в окрестности точек O_j .

Рассмотрим задачу в двойном угле K

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } K, \quad u = 0 \text{ на } \partial K. \quad (3.11)$$

Функция

$$v(r, \varphi) = \tilde{N}_{\pi/\omega}(kr) \Phi(\varphi) \quad (3.12)$$

удовлетворяет задаче (3.11); здесь $\tilde{N}_{\pi/\omega}$ — функция Неймана, умноженная на такую постоянную, что

$$\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr) = r^{-\pi/\omega} + o(r^{-\pi/\omega}),$$

а Φ — та же функция, что и в предложении 3.2.1. Пусть $t \mapsto \Theta(t)$ — срезка на \mathbb{R} , равная 1 при $t < \delta/2$ и 0 при $t > \delta$, δ — малое положительное число. Введем решение

$$\mathbf{v}_1(x, y) = \Theta(r_1) v(r_1, \varphi_1) + \tilde{v}_1(x, y) \quad (3.13)$$

однородной задачи (3.5) в G_1 , где \tilde{v}_1 удовлетворяет (3.5) при $f = -[\Delta, \Theta]v$; существование \tilde{v}_1 обеспечено предложением 3.2.2. Таким образом,

$$\mathbf{v}_1(x, y) = \begin{cases} (\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + a\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1))\Phi(\pi - \varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \rightarrow 0, \\ AU_1^-(x, y) + O(e^{\delta x}), & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (3.14)$$

где $\tilde{J}_{\pi/\omega}$ — та же функция, что и в предложениях 3.2.1 и 3.2.2, а постоянная $A \neq 0$ зависит только от формы области G_1 и должна быть вычислена.

В области G_2 введем решение \mathbf{v}_2 однородной задачи (3.5) по формуле $\mathbf{v}_2(x, y) = \mathbf{v}_1(d - x, y)$, где $d = \text{dist}(O_1, O_2)$. Тогда

$$\mathbf{v}_2(x, y) = \begin{cases} (\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_2) + a\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2))\Phi(\varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \rightarrow 0, \\ Ae^{-i\nu_1 d} U_2^-(x, y) + O(e^{-\delta x}), & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.15)$$

Лемма 3.3.1. *Справедливо равенство $|A|^2 = \text{Im } a$.*

Доказательство. Пусть $(u, v)_Q$ обозначает интеграл $\int_Q u(x)\overline{v(x)} dx$, а $G_{N, \delta}$ — обрезанную область $G_1 \cap \{x > -N\} \cap \{r_1 > \delta\}$. По формуле Грина

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta \mathbf{v}_1 + k^2 \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)_{G_{N, \delta}} - (\mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}_1 + k^2 \mathbf{v}_1)_{G_{N, \delta}} \\ &= (\partial \mathbf{v}_1 / \partial n, \mathbf{v}_1)_{\partial G_{N, \delta}} - (\mathbf{v}_1, \partial \mathbf{v}_1 / \partial n)_{\partial G_{N, \delta}} = 2i \text{Im} (\partial \mathbf{v}_1 / \partial n, \mathbf{v}_1)_E, \end{aligned}$$

где $E = (\partial G_{N, \delta} \cap \{x = -N\}) \cup (\partial G_{N, \delta} \cap \{r_1 = \delta\})$. Принимая во внимание (3.14) при $x \rightarrow +\infty$ и (3.4), имеем

$$\begin{aligned} \text{Im} (\partial \mathbf{v}_1 / \partial n, \mathbf{v}_1)_{\partial G_{N, \delta} \cap \{x = -N\}} &= -\text{Im} \int_{-l/2}^{l/2} A \frac{\partial U_1^-}{\partial x}(x, y) \overline{A U_1^-(x, y)} \Big|_{x=-N} dy + o(1) \\ &= |A|^2 \nu_1 \int_{-l/2}^{l/2} |\Psi_1(y)|^2 dy + o(1) = |A|^2 + o(1). \end{aligned}$$

Используя (3.14) при $r_1 \rightarrow 0$ и определение Φ (см. предложение 3.2.1), мы получим

$$\begin{aligned} \text{Im} (\partial \mathbf{v}_1 / \partial n, \mathbf{v}_1)_{\partial G_{N, \delta} \cap \{r_1 = \delta\}} &= \text{Im} \int_{\pi - \omega/2}^{\pi + \omega/2} \left[-\frac{\partial}{\partial r_1} (\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + a \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)) \right] \\ &\quad \times (\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + \bar{a} \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)) |\Phi(\pi - \varphi_1)|^2 r_1 \Big|_{r_1 = \delta} d\varphi_1 + o(1) \\ &= -(\text{Im } a) \frac{2\pi}{\omega} \int_{\pi - \omega/2}^{\pi + \omega/2} |\Phi(\pi - \varphi_1)|^2 d\varphi_1 + o(1) = -\text{Im } a + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, $|A|^2 - \text{Im } a + o(1) = 0$ при $N \rightarrow \infty$ и $\delta \rightarrow 0$, что и требовалось. \square

Пусть k_e^2 — простое собственное число оператора $-\Delta$ с условием Дирихле в резонаторе G_0 , а v_e — собственная функция, отвечающая числу k_e^2 и нормированная условием $\int_{G_0} |v_e|^2 dx = 1$. В силу предложения 3.2.1

$$v_e(x) \sim \begin{cases} b_1 \tilde{J}_{\pi/\omega}(k_e r_1) \Phi(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ b_2 \tilde{J}_{\pi/\omega}(k_e r_2) \Phi(\pi - \varphi_2), & r_2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Мы считаем, что $b_j \neq 0$; это верно, например, для собственной функции, отвечающей наименьшему собственному числу резонатора. Так как резонатор симметричен относительно преобразования $(x, y) \mapsto (d - x, y)$, то $q = b_1/b_2 = \pm 1$. Для k^2 из проколотой окрестности числа k_e^2 , отделенной от остальных собственных чисел,

введем решения v_{0j} однородной задачи (3.5) в G_0 соотношениями

$$v_{0j}(x,y) = \Theta(r_j)v(r_j,\varphi_j) + \tilde{v}_{0j}(x,y), \quad j = 1,2, \quad (3.17)$$

где v определена равенством (3.12), а \tilde{v}_{0j} — ограниченное решение задачи (3.5) в G_0 при $f_j(x,y) = -[\Delta, \Theta(r_j)]v(r_j,\varphi_j)$.

Лемма 3.3.2. *В окрестности $V \subset \mathbb{C}$ числа k_e^2 , не содержащей собственных чисел задачи (3.5) в G_0 , отличных от k_e^2 , справедливы равенства $\tilde{v}_{0j} = -b_j(k^2 - k_e^2)^{-1}v_e + \hat{v}_{0j}$, где b_j те же, что и в (3.16), а функции \hat{v}_{0j} аналитически зависят от $k^2 \in V$.*

Доказательство. Сначала проверим, что $(v_{0j}, v_e)_{G_0} = -b_j/(k^2 - k_e^2)$, где v_{0j} определены соотношениями (3.17). Имеем

$$(\Delta v_{0j} + k^2 v_{0j}, v_e)_{G_\delta} - (v_{0j}, \Delta v_e + k^2 v_e)_{G_\delta} = -(k^2 - k_e^2)(v_{0j}, v_e)_{G_\delta};$$

область G_δ получена из G_2 выбрасыванием дисков радиуса δ с центрами в точках O_1 и O_2 . Применяя формулу Грина, как в доказательстве леммы 3.3.1, приходим к равенству $-(k^2 - k_e^2)(v_{0j}, v_e)_{G_\delta} = b_j + o(1)$. Остается устремить δ к нулю.

Поскольку k_e^2 — простое собственное число, имеем

$$\tilde{v}_{0j} = \frac{B_j(k^2)}{k^2 - k_e^2}v_e + \hat{v}_{0j}, \quad (3.18)$$

где $B_j(k^2)$ не зависит от x , а \hat{v}_{0j} — некоторые функции, аналитические по k^2 вблизи точки $k^2 = k_e^2$. Умножая (3.17) на v_e и принимая во внимание (3.18), полученную формулу для $(v_{0j}, v_e)_{G_0}$ и условие нормировки $(v_e, v_e)_{G_0} = 1$, приходим к равенству $B_j(k^2) = -b_j + (k^2 - k_e^2)\tilde{B}_j(k^2)$, где \tilde{B}_j — некоторые аналитические функции. Вместе с (3.18) это приводит нас к требуемому утверждению. \square

Ввиду леммы 3.3.2 выражения $\mathbf{v}_{01} = (k^2 - k_e^2)v_{01}$ и $\mathbf{v}_{02} = b_2v_{01} - b_1v_{02}$ можно доопределить в точке k_e^2 до функций, непрерывных по k^2 . Согласно предложению 3.2.1

$$\mathbf{v}_{01}(x,y) \sim \begin{cases} ((k^2 - k_e^2)\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + c_1(k)\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1))\Phi(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ c_2(k)\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)\Phi(\pi - \varphi_2), & r_2 \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{v}_{02}(x,y) \sim \begin{cases} (b_2\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + d_1(k)\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1))\Phi(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ (-b_1\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_2) + d_2(k)\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2))\Phi(\pi - \varphi_2), & r_2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Из доказательства леммы 3.3.2 следует, что $c_j(k_e) = -b_1b_j$.

3.4 Асимптотические формулы

Этот раздел посвящен выводу асимптотических формул. В пункте 3.4.1 приводится формула для волновой функции (см. (3.21)), объясняется ее структура, описываются участвующие в ней решения предельных задач первого рода. Построение формулы (3.21) завершается в 3.4.2, где описаны решения предельных задач второго рода и вычислены коэффициенты из выражений для решений задач первого рода. В 3.4.3 исследуется выражение для \tilde{S}_{12} , полученное в 3.4.2, при этом выводятся формальные асимптотики характеристик резонансного туннелирования. Отметим, что остатки в формулах (3.39)–(3.41) возникли на промежуточном этапе рассуждений при упрощении главной части асимптотики; они не являются остатками в окончательных асимптотических формулах. "Окончательные" остатки оцениваются в следующем разделе, см. теорему 3.5.3. Сначала будет получена интегральная оценка (3.51) остатка в формуле (3.21), которой оказывается достаточно, чтобы получить более простые оценки остатков в формулах для характеристик резонансного туннелирования. Формула (3.21) и оценка (3.51) являются служебными и исследуются лишь в той мере, насколько это нужно при выводе асимптотических выражений для характеристик резонансного туннелирования.

3.4.1 Асимптотика волновой функции

Мы рассматриваем рассеяние в волноводе $G(\varepsilon)$ волны $U(x, y) = e^{i\nu_1 x} \Psi_1(y)$, приходящей из $-\infty$ (см. (3.4)). Соответствующая волновая функция допускает представление

$$\begin{aligned} u(x, y; \varepsilon) = & \chi_{1, \varepsilon}(x, y) v_1(x, y; \varepsilon) \\ & + \Theta(r_1) w_1(\varepsilon^{-1} x_1, \varepsilon^{-1} y_1; \varepsilon) + \chi_{0, \varepsilon}(x, y) v_0(x, y; \varepsilon) \\ & + \Theta(r_2) w_2(\varepsilon^{-1} x_2, \varepsilon^{-1} y_2; \varepsilon) + \chi_{2, \varepsilon}(x, y) v_2(x, y; \varepsilon) + R(x, y; \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Поясним обозначения и структуру этой формулы. При построении асимптотики мы сначала описываем поведение волновой функции u вне сужений, где приближением для u служат решения v_j однородных задач (3.5) в G_j . В качестве v_j принимаем линейные комбинации специальных решений, введенных в предыдущем пункте; при этом v_1 и v_2 удовлетворяют на бесконечности тем же условиям излу-

чения, что и u :

$$\begin{aligned} v_1(x,y;\varepsilon) &= \frac{1}{A}\bar{\mathbf{v}}_1(x,y) + \frac{\tilde{S}_{11}(\varepsilon)}{A}\mathbf{v}_1(x,y) \\ &\sim U_1^+(x,y) + \tilde{S}_{11}(\varepsilon)U_1^-(x,y), \quad x \rightarrow -\infty; \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$v_0(x,y;\varepsilon) = C_1(\varepsilon)\mathbf{v}_{01}(x,y) + C_2(\varepsilon)\mathbf{v}_{02}(x,y); \quad (3.23)$$

$$v_2(x,y;\varepsilon) = \frac{\tilde{S}_{12}(\varepsilon)}{Ae^{-i\nu_1 d}}\mathbf{v}_2(x,y) \sim \tilde{S}_{12}(\varepsilon)U_2^-(x,y), \quad x \rightarrow +\infty; \quad (3.24)$$

приближения $\tilde{S}_{11}(\varepsilon)$, $\tilde{S}_{12}(\varepsilon)$ для элементов матрицы рассеяния $S_{11}(\varepsilon)$, $S_{12}(\varepsilon)$ и коэффициенты $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ пока неизвестны. Через $\chi_{j,\varepsilon}$ обозначены срезки, определенные равенствами

$$\begin{aligned} \chi_{1,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_1/\varepsilon)) \mathbf{1}_{G_1}(x,y), & \chi_{2,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_2/\varepsilon)) \mathbf{1}_{G_3}(x,y), \\ \chi_{0,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_1/\varepsilon) - \Theta(r_2/\varepsilon)) \mathbf{1}_{G_2}(x,y), \end{aligned}$$

где $r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$, а (x_j, y_j) — координаты точки (x, y) в системе, полученной сдвигом начала в точку O_j ; $\mathbf{1}_{G_j}$ — характеристическая функция множества G_j (равна 1 в G_j и 0 вне G_j); $\Theta(\rho)$ — та же срезка, что и в (3.13) (равна 1 при $0 \leq \rho \leq \delta/2$ и 0 при $\rho \geq \delta$, δ — фиксированное достаточно малое положительное число). Таким образом, $\chi_{j,\varepsilon}$ определены на всем волноводе $G(\varepsilon)$, как и функции $\chi_{j,\varepsilon}v_j$ в (3.21).

При подстановке суммы $\sum_{j=0}^2 \chi_{j,\varepsilon}v_j$ в (3.1) возникает невязка в правой части уравнения Гельмгольца, сосредоточенная вблизи сужений. Мы выделяем главную часть этой невязки и компенсируем ее с помощью предельных задач второго рода. А именно, невязка, сосредоточенная вблизи точки O_j , переписывается в координатах $(\xi_j, \eta_j) = (\varepsilon^{-1}x_j, \varepsilon^{-1}y_j)$ в области Ω_j и принимается в качестве правой части уравнения Лапласа. Решение w_j соответствующей задачи (3.7) переписывается в координатах (x_2, y_2) и умножается на срезку. В результате возникают слагаемые $\Theta(r_j)w_j(\varepsilon^{-1}x_j, \varepsilon^{-1}y_j; \varepsilon)$ в (3.21).

Предложение 3.2.3 обеспечивает существование решений w_j , убывающих на бесконечности, как $O(\rho_j^{-\pi/\omega})$ (см. (3.8)). Однако, выбирая такие решения, мы не достигаем цели, так как при подстановке (3.21) в (3.1) получаем от них невязку высокого порядка, которую снова необходимо компенсировать. Поэтому мы требуем оценку $w_j = O(\rho_j^{-3\pi/\omega})$ при $\rho_j \rightarrow \infty$. По предложению 3.2.3 такое решение существует, если правая часть задачи (3.7) удовлетворяет дополнительным условиям

$$(F, w_j^l)_{\Omega_j} = 0, \quad (F, w_j^r)_{\Omega_j} = 0.$$

Указанные условия (по два в каждом сужении) единственным образом определяют коэффициенты $\tilde{S}_{11}(\varepsilon)$, $\tilde{S}_{12}(\varepsilon)$, $C_1(\varepsilon)$ и $C_2(\varepsilon)$. Остаток $R(x, y; \varepsilon)$ мал по сравнению с главной частью (3.21) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.4.2 Формулы для \tilde{S}_{11} , \tilde{S}_{12} , C_1 и C_2

Теперь укажем правые части F_j задач (3.7) и найдем $\tilde{S}_{11}(\varepsilon)$, $\tilde{S}_{12}(\varepsilon)$, $C_1(\varepsilon)$ и $C_2(\varepsilon)$. Подставляя $\chi_{1,\varepsilon}v_1$ в (3.1), получаем невязку

$$(\Delta + k^2)\chi_{1,\varepsilon}v_1 = [\Delta, \chi_{\varepsilon,1}]v_1 + \chi_{\varepsilon,1}(\Delta + k^2)v_1 = [\Delta, 1 - \Theta(\varepsilon^{-1}r_1)]v_1,$$

отличную от нуля лишь вблизи точки O_1 , где v_1 можно заменить асимптотикой; краевое условие в (3.1) выполнено. Согласно (3.22) и (3.14)

$$v_1(x, y; \varepsilon) = (a_1^-(\varepsilon)\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + a_1^+(\varepsilon)\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1))\Phi(\pi - \varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), \quad r_1 \rightarrow 0,$$

где

$$a_1^-(\varepsilon) = \frac{1}{A} + \frac{\tilde{S}_{11}(\varepsilon)}{A}, \quad a_1^+ = \frac{\bar{a}}{A} + \frac{\tilde{S}_{11}(\varepsilon)a}{A}. \quad (3.25)$$

Выделим в каждом слагаемом старший член и положим $\rho_1 = r_1/\varepsilon$, тогда

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)\chi_{\varepsilon,1}v_1 &\sim [\Delta, 1 - \Theta(\varepsilon^{-1}r_1)] \left(a_1^- r_1^{-\pi/\omega} + a_1^+ r_1^{\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi_1) \\ &= \varepsilon^{-2} [\Delta_{(\rho_1, \varphi_1)}, 1 - \Theta(\rho_1)] \left(a_1^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_1^{-\pi/\omega} + a_1^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_1^{\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi_1). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Тем же путем, с помощью (3.23) и (3.19)–(3.20), выписывается старший член невязки от $\chi_{\varepsilon,2}v_2$, сосредоточенной вблизи O_1 :

$$(\Delta + k^2)\chi_{\varepsilon,1}v_1 \sim \varepsilon^{-2} [\Delta_{(\rho_1, \varphi_1)}, 1 - \Theta(\rho_1)] \left(b_1^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_1^{-\pi/\omega} + b_1^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_1^{\pi/\omega} \right) \Phi(\varphi_1), \quad (3.27)$$

где

$$b_1^- = C_1(\varepsilon)(k^2 - k_e^2) + C_2(\varepsilon)b_2, \quad b_1^+ = C_1(\varepsilon)c_1 + C_2(\varepsilon)d_1. \quad (3.28)$$

В качестве правой части F_1 задачи (3.7) в Ω_1 примем функцию

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1, \eta_1) &= - [\Delta, \zeta^-] \left(a_1^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_1^{-\pi/\omega} + a_1^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_1^{\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi_1) \\ &\quad - [\Delta, \zeta^+] \left(b_1^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_1^{-\pi/\omega} + b_1^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_1^{\pi/\omega} \right) \Phi(\varphi_1), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где ζ^+ (соотв. ζ^-) обозначает функцию $1 - \Theta$, сначала суженную на область $\xi_1 > 0$ (соотв. $\xi_1 < 0$) и затем продолженную нулем на всю область Ω_1 . Пусть w_1 — соответствующее решение, тогда слагаемое $\Theta(r_1)w_1(\varepsilon^{-1}x_1, \varepsilon^{-1}y_1; \varepsilon)$ в (3.21) при подстановке в (3.1) компенсирует невязки (3.26)–(3.27).

Аналогично, используя (3.23)–(3.24), (3.19)–(3.20) и (3.15), находим правую часть задачи (3.7) при $j = 2$:

$$\begin{aligned} F_2(\xi_2, \eta_2) &= - [\Delta, \zeta^-] \left(a_2^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_2^{-\pi/\omega} + a_2^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_2^{\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi_2) \\ &\quad - [\Delta, \zeta^+] \left(b_2^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_2^{-\pi/\omega} + b_2^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_2^{\pi/\omega} \right) \Phi(\varphi_2); \\ a_2^-(\varepsilon) &= -C_2(\varepsilon)b_1, \quad a_2^+(\varepsilon) = C_1(\varepsilon)c_2 + C_2(\varepsilon)d_2, \\ b_2^-(\varepsilon) &= \frac{\tilde{S}_{12}(\varepsilon)}{Ae^{-i\nu_1 d}}, \quad b_2^+(\varepsilon) = \frac{a\tilde{S}_{12}(\varepsilon)}{Ae^{-i\nu_1 d}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Лемма 3.4.1. *Если решение w_j задачи (3.7) с правой частью*

$$\begin{aligned} F_j(\xi_j, \eta_j) &= - [\Delta, \zeta^-] \left(a_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_j^{-\pi/\omega} + a_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_j^{\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi_j) \\ &\quad - [\Delta, \zeta^+] \left(b_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_j^{-\pi/\omega} + b_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_j^{\pi/\omega} \right) \Phi(\varphi_j), \end{aligned}$$

$j = 1, 2$, допускает оценку $O(\rho_j^{-3\pi/\omega})$ при $\rho_j \rightarrow \infty$, то справедливы соотношения

$$a_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} - \alpha a_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} - \beta b_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} = 0, \quad b_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} - \alpha b_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} - \beta a_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} = 0, \quad (3.31)$$

где α, β — коэффициенты в разложениях (3.9)–(3.10).

Доказательство. В силу предложения 3.2.3 имеем $w_j = O(\rho_j^{-3\pi/\omega})$ при $\rho_j \rightarrow \infty$, если и только если правая часть задачи (3.7) удовлетворяет условиям

$$(F_j, w_j^l)_{\Omega_j} = 0, \quad (F_j, w_j^r)_{\Omega_j} = 0, \quad (3.32)$$

где w_j^l, w_j^r — решения однородной задачи (3.7), допускающие разложения (3.9)–(3.10). Введем функции f_{\pm} на Ω_j равенствами $f_{\pm}(\rho_j, \varphi_j) = \rho_j^{\pm\pi/\omega} \Phi(\varphi_j)$. Для того чтобы получить (3.31) из (3.32), достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} ([\Delta, \zeta^-] f_-, w_j^l)_{\Omega_j} &= ([\Delta, \zeta^+] f_-, w_j^r)_{\Omega_j} = -1, \\ ([\Delta, \zeta^-] f_+, w_j^l)_{\Omega_j} &= ([\Delta, \zeta^+] f_+, w_j^r)_{\Omega_j} = \alpha, \\ ([\Delta, \zeta^+] f_-, w_j^l)_{\Omega_j} &= ([\Delta, \zeta^-] f_-, w_j^r)_{\Omega_j} = 0, \\ ([\Delta, \zeta^+] f_+, w_j^l)_{\Omega_j} &= ([\Delta, \zeta^-] f_+, w_j^r)_{\Omega_j} = \beta. \end{aligned}$$

Проверим первое из этих равенств, остальные рассматриваются аналогично. Так как носитель $[\Delta, \zeta^+]f_-$ компактен, то при вычислении $([\Delta, \zeta^-]f_-, w_j^l)_{\Omega_j}$ можно заменить Ω_j на $\Omega_j^R = \Omega_j \cap \{\rho_j < R\}$ при достаточно большом R . Обозначим через E множество $\partial\Omega_j^R \cap \{\rho_j = R\} \cap \{\xi_j > 0\}$. По формуле Грина

$$\begin{aligned} ([\Delta, \zeta^-]f_-, w_j^l)_{\Omega_j} &= (\Delta\zeta^- f_-, w_j^l)_{\Omega_j^R} - (\zeta^- f_-, \Delta w_j^l)_{\Omega_j^R} \\ &= (\partial f_- / \partial n, w_j^l)_E - (f_-, \partial w_j^l / \partial n)_E. \end{aligned}$$

Учитывая (3.9) при $\xi_j < 0$ и определение Φ из предложения 3.2.1, получим

$$\begin{aligned} ([\Delta, \zeta^-]f_-, w_j^l)_{\Omega_j} &= \left[\frac{\partial \rho_j^{-\pi/\omega}}{\partial \rho_j} (\rho_j^{\pi/\omega} + \alpha \rho_j^{-\pi/\omega}) - \rho_j^{-\pi/\omega} \frac{\partial}{\partial \rho_j} (\rho_j^{\pi/\omega} + \alpha \rho_j^{-\pi/\omega}) \right] \rho_j \Big|_{\rho_j=R} \\ &\times \int_{\pi-\omega/2}^{\pi+\omega/2} \Phi(\pi - \varphi_j)^2 d\varphi_j + o(1) = -\frac{2\pi}{\omega} \int_{\pi-\omega/2}^{\pi+\omega/2} \Phi(\pi - \varphi_j)^2 d\varphi_j + o(1) \\ &= -1 + o(1). \end{aligned}$$

Остается перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$. \square

Замечание 3.4.2. Решения w_j , о которых идет речь в лемме 3.4.1, можно представить в виде линейной комбинации некоторых модельных функций, не зависящих от ε . Приведем соответствующее выражение, поскольку оно понадобится в следующем разделе при оценке остатков в асимптотических формулах. Пусть w_j^l, w_j^r — решения задачи (3.7), определенные условиями (3.9)–(3.10), а ζ^+, ζ^- — те же срезки, что и в (3.29). Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j^l &= w_j^l - \zeta^- \left(\rho_j^{\pi/\omega} + \alpha \rho_j^{-\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi_j) - \zeta^+ \beta \rho_j^{-\pi/\omega} \Phi(\varphi_j), \\ \mathbf{w}_j^r &= w_j^r - \zeta^- \beta \rho_j^{-\pi/\omega} \Phi(\pi - \varphi_j) - \zeta^+ \left(\rho_j^{\pi/\omega} + \alpha \rho_j^{-\pi/\omega} \right) \Phi(\varphi_j). \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} w_j &= a_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \mathbf{w}_j^l + \frac{1}{\beta} \left(a_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} - \alpha a_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \right) \mathbf{w}_j^r \\ &= \frac{1}{\beta} \left(b_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} - \alpha b_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \right) \mathbf{w}_j^l + b_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \mathbf{w}_j^r. \end{aligned}$$

Используя (3.25) и (3.28), преобразуем (3.31) при $j = 1$ к виду

$$\gamma(\varepsilon) \widetilde{S}_{11}(\varepsilon) + \overline{\gamma(\varepsilon)} = C_1(\varepsilon) c_1 + C_2(\varepsilon) d_1, \quad \delta(\varepsilon) \widetilde{S}_{11}(\varepsilon) + \overline{\delta(\varepsilon)} = C_1(\varepsilon) (k^2 - k_e^2) + C_2(\varepsilon) b_2, \quad (3.33)$$

где

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{1}{A\beta} \left(\varepsilon^{-2\pi/\omega} - a\alpha \right), \quad \delta(\varepsilon) = \frac{1}{A\beta} \left(\alpha + a(\beta^2 - \alpha^2)\varepsilon^{2\pi/\omega} \right). \quad (3.34)$$

При $j = 2$, учитывая (3.30), приводим (3.31) к равенствам

$$\gamma(\varepsilon)\tilde{S}_{12}(\varepsilon) = (C_1(\varepsilon)c_2 + C_2(\varepsilon)d_2)e^{-i\nu_1 d}, \quad \delta(\varepsilon)\tilde{S}_{12}(\varepsilon) = -C_2(\varepsilon)b_1e^{-i\nu_1 d}. \quad (3.35)$$

Из (3.33) и (3.35) с помощью леммы 3.3.1 находим $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$, $\tilde{S}_{11}(\varepsilon)$ и $\tilde{S}_{12}(\varepsilon)$:

$$C_1(\varepsilon) = (b_1c_2)^{-1} (\gamma(\varepsilon)b_1 + \delta(\varepsilon)d_2) \tilde{S}_{12}(\varepsilon)e^{i\nu_1 d}, \quad C_2(\varepsilon) = -b_1^{-1}\delta(\varepsilon)\tilde{S}_{12}(\varepsilon)e^{i\nu_1 d}, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{11}(\varepsilon) = & (2ib_1c_2)^{-1} \left((k^2 - k_e^2)b_1|\gamma(\varepsilon)|^2 + ((k^2 - k_e^2)d_2 - b_2c_2)\overline{\gamma(\varepsilon)}\delta(\varepsilon) \right. \\ & \left. - b_1c_1\gamma(\varepsilon)\overline{\delta(\varepsilon)} - (c_1d_2 - c_2d_1)|\delta(\varepsilon)|^2 \right) \tilde{S}_{12}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{12}(\varepsilon) = & 2ib_1c_2e^{-i\nu_1 d} \left(-(k^2 - k_e^2)b_1\gamma(\varepsilon)^2 - ((k^2 - k_e^2)d_2 - b_1c_1 - b_2c_2)\gamma(\varepsilon)\delta(\varepsilon) \right. \\ & \left. + (c_1d_2 - c_2d_1)\delta(\varepsilon)^2 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.4.3 Формулы для характеристик резонансного туннелирования

Решения предельных задач первого рода, входящие в (3.21), определены и при комплексных k^2 . Полученное выражение (3.38) для \tilde{S}_{12} имеет полюс k_p^2 в нижней полуплоскости. Чтобы найти k_p^2 , приравняем $2ib_1c_2e^{-i\nu_1 d}/\tilde{S}_{12}$ к нулю и разрешим это уравнение относительно $k^2 - k_e^2$:

$$k^2 - k_e^2 = \left((b_1c_1 + b_2c_2)\gamma(\varepsilon)\delta(\varepsilon) + (c_1d_2 - c_2d_1)\delta(\varepsilon)^2 \right) (b_1\gamma(\varepsilon)^2 + d_2\gamma(\varepsilon)\delta(\varepsilon))^{-1}.$$

Так как правая часть последнего уравнения ведет себя, как $O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, то можно решить его методом последовательных приближений. Учитывая формулы (3.34), $c_j(k_e) = -b_1b_j$, $b_1 = \pm b_2$, лемму 3.3.1 и отбрасывая слагаемые младших порядков, получаем $k_p^2 = k_r^2 - ik_i^2$,

$$k_r^2 = k_e^2 - 2\alpha b_1^2 \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \quad k_i^2 = 2\beta^2 b_1^2 |A(k_e^2)|^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}). \quad (3.39)$$

При малых $k^2 - k_p^2$ формула (3.38) принимает вид

$$\tilde{S}_{12}(k, \varepsilon) = -\varepsilon^{4\pi/\omega} \frac{2i\beta^2 A(k)^2 c_2(k) e^{-i\nu_1 d}}{k^2 - k_p^2} \left(1 + O(|k^2 - k_p^2| + \varepsilon^{2\pi/\omega}) \right).$$

Пусть $k^2 - k_e^2 = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$, тогда $|k^2 - k_p^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$, $A(k) = A(k_e^2) + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$, $c_2(k^2) = -b_1 b_2 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$, $\nu_1(k) = \nu_1(k_e^2) + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$ и

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{12}(k, \varepsilon) &= \varepsilon^{4\pi/\omega} \frac{2i\beta^2 b_1 b_2 A(k_e)^2 e^{-i\nu_1(k_e)d}}{k^2 - k_p^2} \left(1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})\right) \\ &= \frac{q(A(k_e)/|A(k_e)|)^2 e^{-i\nu_1(k_e)d}}{1 - iP \frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon^{4\pi/\omega}}} \left(1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})\right),\end{aligned}$$

где $q = b_2/b_1$ и $P = (2b_1^2 \beta^2 |A(k_e)|^2)^{-1}$. Таким образом,

$$\tilde{T}(k, \varepsilon) = |\tilde{S}_{12}|^2 = \frac{1}{1 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon^{4\pi/\omega}}\right)^2} (1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})). \quad (3.40)$$

Полученное приближение \tilde{T} для коэффициента прохождения имеет пик при $k^2 = k_r^2$, ширина которого на половине высоты равна

$$\tilde{\Upsilon}(\varepsilon) = \frac{2}{P} \varepsilon^{4\pi/\omega}. \quad (3.41)$$

3.5 Обоснование асимптотики

Введем функциональные пространства для задачи

$$\Delta u + k^2 u = f \quad \text{в } G(\varepsilon), \quad u = 0 \quad \text{на } \partial G(\varepsilon). \quad (3.42)$$

Пусть Θ — та же функция, что и в (3.13), и пусть срезки η_j , $j = 0, 1, 2$, отличны от нуля лишь в G_j и удовлетворяют соотношению $\eta_1(x, y) + \Theta(r_1) + \eta_0(x, y) + \Theta(r_2) + \eta_2(x, y) = 1$ в $G(\varepsilon)$. При $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и $l = 0, 1, \dots$ пространство $V_{\gamma, \delta}^l(G(\varepsilon))$ является пополнением по норме

$$\begin{aligned}& \|u; V_{\gamma, \delta}^l(G(\varepsilon))\| \\ &= \left(\int_{G(\varepsilon)} \sum_{|\alpha|=0}^l \left(\sum_{j=1}^2 \Theta^2(r_j) (r_j^2 + \varepsilon_j^2)^{\gamma-l+|\alpha|} + \eta_1^2 e^{2\delta|x|} + \eta_0 + \eta_2^2 e^{2\delta|x|} \right) |\partial^\alpha v|^2 dx dy \right)^{1/2}\end{aligned}$$

множества гладких функций на $\overline{G(\varepsilon)}$ с компактными носителями. Обозначим через $V_{\gamma, \delta}^{0, \perp}$ пространство функций f , аналитически зависящих от k^2 , принимающих

значения в $V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))$ и при $k^2 = k_e^2$ удовлетворяющих условию $(\chi_{0,\varepsilon} f, v_e)_{G_0} = 0$ с некоторым малым $\sigma > 0$.

Предложение 3.5.1. Пусть k_r^2 – резонанс, $k_r^2 \rightarrow k_e^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и пусть $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$. Предположим, что γ удовлетворяет условию $\pi/\omega - 2 < \gamma - 1 < \pi/\omega$, $f \in V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon))$, а u – решение задачи (3.42), допускающее представление

$$u = \tilde{u} + \eta_1 A_1^- U_1^- + \eta_3 A_2^- U_2^-;$$

здесь $A_j^- = \text{const}$, $\tilde{u} \in V_{\gamma,\delta}^2(G(\varepsilon))$ при малом $\delta > 0$. Тогда

$$\|\tilde{u}; V_{\gamma,\delta}^2(G(\varepsilon))\| + |A_1^-| + |A_2^-| \leq c \|f; V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))\|, \quad (3.43)$$

где c – постоянная, не зависящая от f и ε .

Доказательство. Шаг А. Сначала мы построим вспомогательную функцию u_p . Как отмечалось ранее, \tilde{S}_{12} имеет полюс $k_p^2 = k_r^2 - ik_i^2$ (см. (3.39)). Умножим решения предельных задач, участвующие в (3.21), на $A(k)b_2\beta\varepsilon^{2\pi/\omega}/S_{12}(\varepsilon,k)e^{i\nu_1 d}$, положим $k = k_p$ и переобозначим полученные функции, снабжая их индексом p . Тогда

$$\begin{aligned} v_{jp}(x,y;\varepsilon) &= b_j\beta\varepsilon^{2\pi/\omega}\mathbf{v}_j(x,y;k_p), \quad j = 1,2; \\ v_{0p}(x,y;\varepsilon) &= \left(-\frac{1}{b_1} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})\right)\mathbf{v}_{01}(x,y;k_p) \\ &+ \varepsilon^{2\pi/\omega}\left(-\alpha\frac{b_2}{b_1} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})\right)\mathbf{v}_{02}(x,y;k_p), \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$w_{1p}(\xi_1,\eta_1;\varepsilon) = b_1\varepsilon^{\pi/\omega}\left(a(k_p)\beta\varepsilon^{2\pi/\omega}\mathbf{w}_1^l(\xi_1,\eta_1) + \left(1 - \alpha a(k_p)\varepsilon^{2\pi/\omega}\right)\mathbf{w}_1^r(\xi_1,\eta_1)\right), \quad (3.45)$$

$$w_{2p}(\xi_2,\eta_2;\varepsilon) = b_2\varepsilon^{\pi/\omega}\left(\left(1 - \alpha a(k_p)\varepsilon^{2\pi/\omega}\right)\mathbf{w}_1^l(\xi_2,\eta_2) + a(k_p)\beta\varepsilon^{2\pi/\omega}\mathbf{w}_1^r(\xi_2,\eta_2)\right); \quad (3.46)$$

зависимость k_p от ε не указывается. Положим

$$\begin{aligned} u_p(x,y;\varepsilon) &= \Xi(x,y)\left[\chi_{1,\varepsilon}(x,y)v_{1p}(x,y;\varepsilon) + \Theta(\varepsilon^{-2\sigma}r_1)w_{1p}(\varepsilon^{-1}x_1,\varepsilon^{-1}y_1;\varepsilon) \right. \\ &+ \chi_{0,\varepsilon}(x,y)v_{0p}(x,y;\varepsilon) + \Theta(\varepsilon^{-2\sigma}r_2)w_{2p}(\varepsilon^{-1}x_2,\varepsilon^{-1}y_2;k,\varepsilon) + \chi_{2,\varepsilon}(x,y)v_{2p}(x,y;k,\varepsilon)\left. \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

где Ξ – срезка на $G(\varepsilon)$, равная 1 на множестве $G(\varepsilon) \cap \{|x| < R\}$ и 0 на $G(\varepsilon) \cap \{|x| > R + 1\}$ при достаточно большом $R > 0$. Основной вклад в норму функции u_p дает

слагаемое $\chi_{0,\varepsilon}v_{0p}$. Учитывая определения функций v_{0p} и \mathbf{v}_{01} (см. параграф 3.3) и лемму 3.3.2, получаем $\|\chi_{0,\varepsilon}v_{02p}\| = \|v_\varepsilon\| + o(1)$.

Шаг В. Покажем, что

$$\|(\Delta + k_p^2)u_p; V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))\| \leq c\varepsilon^{\pi/\omega+\kappa}, \quad (3.48)$$

где $\kappa = \min\{\pi/\omega, 3\pi/\omega - \sigma_1, \gamma + 1\}$, $\sigma_1 = 2\sigma(3\pi/\omega - \gamma + 1)$. Если $\pi/\omega < \gamma + 1$ и σ достаточно мало, так что $2\pi/\omega > \sigma_1$, то $\kappa = \pi/\omega$.

В силу (3.47)

$$\begin{aligned} & (\Delta + k_p^2)u_p(x,y;\varepsilon) \\ &= [\Delta, \chi_{1,\varepsilon}] \left(v_1(x,y;\varepsilon) - b_1\beta\varepsilon^{2\pi/\omega}(r_1^{-\pi/\omega} + a(k_p)r_1^{\pi/\omega})\Phi(\pi - \varphi_1) \right) \\ &+ [\Delta, \Theta]w_{1p}(\varepsilon^{-1}x_1, \varepsilon^{-1}y_1;\varepsilon) - k^2\Theta(\varepsilon^{-2\sigma}r_1)w_{1p}(\varepsilon^{-1}x_1, \varepsilon^{-1}y_1;\varepsilon) \\ &+ [\Delta, \chi_{0,\varepsilon}] \left(v_0(x,y;\varepsilon) - \Theta(r_1)(b_{1p}^-(\varepsilon)r_1^{-\pi/\omega} + b_{1p}^+(\varepsilon)r_1^{\pi/\omega})\Phi(\pi - \varphi_1) \right. \\ &\quad \left. - \Theta(r_2)(a_{2p}^-(\varepsilon)r_2^{-\pi/\omega} + a_{2p}^+(\varepsilon)r_2^{\pi/\omega})\Phi(\varphi_2) \right) \\ &+ [\Delta, \Theta]w_{2p}(\varepsilon^{-1}x_2, \varepsilon^{-1}y_2;\varepsilon) - k^2\Theta(\varepsilon^{-2\sigma}r_2)w_{2p}(\varepsilon^{-1}x_2, \varepsilon^{-1}y_2;\varepsilon) \\ &+ [\Delta, \chi_{2,\varepsilon}] \left(v_2(x,y;\varepsilon) - b_2\beta\varepsilon^{2\pi/\omega}(r_2^{-\pi/\omega} + a(k_p)r_2^{\pi/\omega})\Phi(\varphi_2) \right) \\ &\quad + [\Delta, \Xi]v_1(x,y;\varepsilon) + [\Delta, \Xi]v_2(x,y;\varepsilon), \end{aligned}$$

где $b_{1p}^- = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$, $b_{1p}^+ = b_1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$, $a_{2p}^- = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$, $a_{2p}^+ = b_2 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$. Учитывая асимптотику \mathbf{v}_1 при $r_1 \rightarrow 0$ и переходя к переменным $(\xi_1, \eta_1) = (\varepsilon^{-1}x_1, \varepsilon^{-1}y_1)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| (x,y) \mapsto [\Delta, \chi_{1,\varepsilon}] \left(\mathbf{v}_1(x,y) - (r_1^{-\pi/\omega} + a(k_p)r_1^{\pi/\omega})\Phi(\pi - \varphi_1) \right); V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon)) \right\|^2 \\ & \leq c \int_{G(\varepsilon)} (r_1^2 + \varepsilon^2)^\gamma \left| [\Delta, \chi_{1,\varepsilon}] r_1^{-\pi/\omega+2} \Phi(\pi - \varphi_1) \right|^2 dx dy \leq c\varepsilon^{2(\gamma-\pi/\omega+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.44) следует оценка

$$\begin{aligned} & \left\| (x,y) \mapsto [\Delta, \chi_{1,\varepsilon}] \left(v_1(x,y) - (r_1^{-\pi/\omega} + a(k_p)r_1^{\pi/\omega})\Phi(\pi - \varphi_1) \right); V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon)) \right\| \\ & \leq c\varepsilon^{\gamma+\pi/\omega+1}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \left\| (x, y) \mapsto [\Delta, \chi_{0, \varepsilon}] \left(v_0(x, y) - \Theta(r_1) (b_{1p}^-(\varepsilon) r_1^{-\pi/\omega} + b_{1p}^+(\varepsilon) r_1^{\pi/\omega}) \Phi(\pi - \varphi_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \Theta(r_2) (a_{2p}^-(\varepsilon) r_2^{-\pi/\omega} + a_{2p}^+(\varepsilon) r_2^{\pi/\omega}) \Phi(\varphi_2) \right) \right\| \leq c \varepsilon^{\gamma + \pi/\omega + 1}, \\ & \left\| (x, y) \mapsto [\Delta, \chi_{2, \varepsilon}] \left(v_2(x, y) - (r_2^{-\pi/\omega} + a(k_p) r_2^{\pi/\omega}) \Phi(\varphi_2) \right); V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon)) \right\| \\ & \leq c \varepsilon^{\gamma + \pi/\omega + 1}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\|[\Delta, \Xi] v_l; V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\| \leq c \varepsilon^{2\pi/\omega}, \quad l = 1, 2.$$

Далее, поскольку \mathbf{w}_j^l на бесконечности ведет себя как $O(\rho_j^{-3\pi/\omega})$,

$$\begin{aligned} & \int_{G(\varepsilon)} (r_j^2 + \varepsilon^2)^\gamma |[\Delta, \Theta] \mathbf{w}_j^l(\varepsilon^{-1} x_j, \varepsilon^{-1} y_j)|^2 dx_j dy_j \\ & \leq c \int_{K_j} (r_j^2 + \varepsilon^2)^\gamma |[\Delta, \Theta](\varepsilon^{-1} r_j)^{-3\pi/\omega} \Phi_2(\varphi_j)|^2 dx_j dy_j \leq c \varepsilon^{2(3\pi/\omega - \sigma_1)}, \end{aligned}$$

где $\sigma_1 = 2\sigma(3\pi/\omega - \gamma + 1)$. Справедливо аналогичное неравенство с заменой \mathbf{w}_j^l на \mathbf{w}_j^r . Принимая во внимание (3.45)–(3.46), приходим к оценкам

$$\|[\Delta, \Theta] w_{jp}; V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\| \leq c \varepsilon^{4\pi/\omega - \sigma_1}.$$

Наконец, снова используя (3.45)–(3.46), учитывая оценку

$$\begin{aligned} & \int_{G(\varepsilon)} (r_j^2 + \varepsilon^2)^\gamma |\Theta(\varepsilon^{-2\sigma} r_j) \mathbf{w}_j^l(\varepsilon^{-1} x_j, \varepsilon^{-1} y_j)|^2 dx_j dy_j \\ & = \varepsilon^{2\gamma + 2} \int_{\Omega} (\rho_j^2 + 1)^\gamma |\Theta(\varepsilon^{1-2\sigma} \rho_j) \mathbf{w}_j^l(\xi_j, \eta_j)|^2 d\xi_j d\eta_j \leq c \varepsilon^{2\gamma + 2} \end{aligned}$$

и аналогичную оценку для \mathbf{w}_j^r , получаем

$$\|(x, y) \mapsto \Theta(\varepsilon^{-2\sigma} r_j) w_{jp}(\varepsilon^{-1} x_j, \varepsilon^{-1} y_j); V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\| \leq c \varepsilon^{\pi/\omega + \gamma + 1}.$$

Сопоставляя полученные оценки, приходим к (3.48).

Шаг С. Эта часть содержит несколько модифицированные рассуждения из доказательства теоремы 5.5.1 [37]. Перепишем правую часть задачи (3.42) в следующем

виде:

$$f(x,y) = f_1(x,y;\varepsilon) + f_0(x,y;\varepsilon) + f_2(x,y;\varepsilon) \\ + \varepsilon^{-\gamma-1}F_1(\varepsilon^{-1}x_1,\varepsilon^{-1}y_1;\varepsilon_1) + \varepsilon^{-\gamma-1}F_2(\varepsilon^{-1}x_2,\varepsilon^{-1}y_2;\varepsilon),$$

где

$$f_l(x,y;\varepsilon) = \chi_{l,\varepsilon^\sigma}(x,y)f(x,y), \\ F_j(\xi_j,\eta_j;\varepsilon) = \varepsilon^{\gamma+1}\Theta(\varepsilon^{1-\sigma}\rho_j)f(x_{O_j} + \varepsilon\xi_j,y_{O_j} + \varepsilon\eta_j);$$

(x,y) — произвольные декартовы координаты; (x_{O_j},y_{O_j}) обозначают координаты точки O_j в системе (x,y) ; (x_j,y_j) — координаты точки (x,y) в декартовой системе с началом, сдвинутым в O_j . Из определений норм следует, что

$$\|f_1; V_{\gamma,\delta}^0(G_1)\| + \|f_0; V_\gamma^0(G_0)\| + \|f_2; V_{\gamma,\delta}^0(G_2)\| + \|F_j; V_\gamma^0(\Omega_j)\| \leq \|f; V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))\|. \quad (3.49)$$

Рассмотрим решения v_l и w_j предельных задач

$$\Delta v + k^2v = f_l \text{ в } G_l, \quad v = 0 \text{ на } \partial G_l, \\ \Delta w = F_j \text{ в } \Omega_j, \quad w = 0 \text{ на } \partial\Omega_j,$$

соответственно; кроме того v_l при $l = 1,2$ удовлетворяют естественным условиям излучения на бесконечности, а v_0 — условию $(v_0, v_e)_{G_0} = 0$. Согласно предложениям 3.2.1, 3.2.2 и 3.2.3, задачи в G_l и Ω_j однозначно разрешимы и

$$\|v_0; V_\gamma^2(G_0)\| \leq c_0\|f_0; V_\gamma^0(G_0)\|, \\ \|v_l; V_{\gamma,\delta,-}^2(G_l)\| \leq c_l\|f_l; V_{\gamma,\delta}^0(G_l)\|, \quad l = 1,2, \\ \|w_j; V_\gamma^2(\Omega_j)\| \leq C_j\|F_j; V_\gamma^0(\Omega_j)\|, \quad j = 1,2, \quad (3.50)$$

где c_l и C_j не зависят от ε . Положим

$$U(x,y;\varepsilon) = \chi_{1,\varepsilon}(x,y)v_1(x,y;\varepsilon) + \varepsilon^{-\gamma+1}\Theta(r_1)w_1(\varepsilon^{-1}x_1,\varepsilon^{-1}y_1;\varepsilon) \\ + \chi_{0,\varepsilon}(x,y)v_0(x,y;\varepsilon) + \varepsilon^{-\gamma+1}\Theta(r_2)w_2(\varepsilon^{-1}x_2,\varepsilon^{-1}y_2;\varepsilon) + \chi_{2,\varepsilon}(x,y)v_2(x,y;\varepsilon).$$

Оценки (3.49) и (3.50) приводят к

$$\|U; V_{\gamma,\delta,-}^2(G(\varepsilon))\| \leq c\|f; V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))\|$$

с постоянной c , не зависящей от ε . Обозначим оператор $f \mapsto U$ через R_ε . Рассуждая, как в доказательстве [37, теорема 5.5.1], получаем $(\Delta + k^2)R_\varepsilon = I + S_\varepsilon$, где S_ε — оператор с малой нормой в $V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))$.

Шаг D. Напомним, что оператор S_ε определен на подпространстве $V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon))$. Нам нужно, чтобы образ оператора S_ε тоже содержался в $V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon))$. Для этого заменим оператор R_ε на $\tilde{R}_\varepsilon : f \mapsto U(f) + a(f)u_p$, где u_p построена на шаге **A**, $a(f)$ — некоторая постоянная. Тогда $(\Delta + k^2)\tilde{R}_\varepsilon = I + \tilde{S}_\varepsilon$ при $\tilde{S}_\varepsilon = S_\varepsilon + a(\cdot)(\Delta + k^2)u_p$. Условие $(\chi_{0,\varepsilon^\sigma}\tilde{S}_\varepsilon f, v_e)_{G_0} = 0$ при $k = k_e$ дает $a(f) = -(\chi_{0,\varepsilon^\sigma}S_\varepsilon f, v_e)_{G_0}/(\chi_{0,\varepsilon^\sigma}(\Delta + k_e^2)u_p, v_e)_{G_0}$. Покажем, что $\|\tilde{S}_\varepsilon\| \leq c\|S_\varepsilon\|$, где c не зависит от ε, k . Имеем

$$\|\tilde{S}_\varepsilon f\| \leq \|S_\varepsilon f\| + |a(f)| \|(\Delta + k^2)u_p\|.$$

Оценка (3.48) (при $\gamma > \pi/\omega - 2$ и $2\pi/\omega > \sigma_1$), формула для k_p и условие $k^2 - k_e^2 = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$ приводят к неравенству

$$\|(\Delta + k^2)u_p; V_{\gamma,\delta}^0\| \leq |k^2 - k_p^2| \|u_p; V_{\gamma,\delta}^0\| + \|(\Delta + k_p^2)u_p; V_{\gamma,\delta}^0\| \leq c\varepsilon^{2\pi/\omega}.$$

Так как носители функций $(\Delta + k_p^2)u_p$ и $\chi_{0,\varepsilon^\sigma}$ не пересекаются, то

$$|(\chi_{0,\varepsilon^\sigma}(\Delta + k_e^2)u_p, v_e)_{G_0}| = |(k_e^2 - k_p^2)(u_p, v_e)_{G_0}| \geq c\varepsilon^{2\pi/\omega}.$$

Далее, $\gamma - 1 < \pi/\omega$, поэтому

$$|(\chi_{0,\varepsilon^\sigma}S_\varepsilon f, v_e)_{G_0}| \leq \|S_\varepsilon f; V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))\| \|v_e; V_{-\gamma}^0(G_0)\| \leq c\|S_\varepsilon f; V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))\|.$$

Значит,

$$|a(f)| \leq c\varepsilon^{-2\pi/\omega} \|S_\varepsilon f; V_{\gamma,\delta}^0(G(\varepsilon))\|$$

и $\|\tilde{S}_\varepsilon f\| \leq c\|S_\varepsilon f\|$. Таким образом, оператор $I + \tilde{S}_\varepsilon$ в $V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon))$ обратим, то же самое верно и для оператора задачи (3.42):

$$A_\varepsilon : u \mapsto \Delta u + k^2 u : \mathring{V}_{\gamma,\delta,-}^{2,\perp}(G(\varepsilon)) \mapsto V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon));$$

здесь $\mathring{V}_{\gamma,\delta,-}^{2,\perp}(G(\varepsilon))$ обозначает пространство функций из $V_{\gamma,\delta,-}^2(G(\varepsilon))$, которые обращаются в ноль на $\partial G(\varepsilon)$ и переводятся оператором $\Delta + k^2$ в $V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}$. Обратный оператор $A_\varepsilon^{-1} = \tilde{R}_\varepsilon(I + \tilde{S}_\varepsilon)^{-1}$ ограничен равномерно относительно ε, k . Следовательно, неравенство (3.43) справедливо с постоянной c , не зависящей от ε, k . \square

Рассмотрим решение u_1 однородной задачи (3.1), определенное соотношением

$$u_1(x, y) = \begin{cases} U_1^+(x, y) + S_{11} U_1^-(x, y) + O(\exp(\delta x)), & x \rightarrow -\infty, \\ S_{12} U_2^-(x, y) + O(\exp(-\delta x)), & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Пусть S_{11} и S_{12} — элементы матрицы рассеяния, определенные этим решением. Обозначим через $\tilde{u}_{1,\sigma}$ функцию, заданную формулой (3.21) с заменой $\Theta(r_j)$ на $\Theta(\varepsilon_j^{-2\sigma} r_j)$ и с отбрасыванием остатка R ; \tilde{S}_{11} , \tilde{S}_{12} обозначают величины, определенные в (3.37)–(3.38).

Теорема 3.5.2. *Пусть выполнены предположения предложения 3.5.1. Тогда справедливо неравенство*

$$|S_{11} - \tilde{S}_{11}| + |S_{12} - \tilde{S}_{12}| \leq c |\tilde{S}_{12}| \varepsilon^{2-\delta}$$

с постоянной c , не зависящей от ε и k ; δ — произвольно малое положительное число.

Доказательство. Разность $R = u_1 - \tilde{u}_{1,\sigma}$ принадлежит пространству $V_{\gamma,\delta,-}^2(G(\varepsilon))$, а $f_1 := (\Delta + k^2)(u_1 - \tilde{u}_{1,\sigma})$ — пространству $V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon))$. По предложению 3.5.1,

$$\|R; V_{\gamma,\delta,-}^2(G(\varepsilon))\| \leq c \|f_1; V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon))\|. \quad (3.51)$$

Покажем, что

$$\|f_1; V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon))\| \leq c |\tilde{S}_{12}| (\varepsilon^{\gamma-\pi/\omega+1} + \varepsilon^{2\pi/\omega-\sigma_1}), \quad (3.52)$$

где $\sigma_1 = 2\sigma(3\pi/\omega - \gamma + 1)$. Тогда требуемая оценка вытекает из последних двух неравенств при $\gamma = \pi/\omega + 1 - \delta$ и $\sigma_1 = \delta$.

Рассуждая, как на шаге В доказательства предыдущего утверждения, получаем оценку

$$\begin{aligned} \|f_1; V_{\gamma,\delta}^{0,\perp}(G(\varepsilon))\| &\leq c(\varepsilon^{\gamma+1} + \varepsilon^{3\pi/\omega-\sigma_1}) \\ &\times \min_{j=1,2} (|a_j^-(\varepsilon)|\varepsilon^{-\pi/\omega} + |a_j^+(\varepsilon)|\varepsilon^{\pi/\omega} + |b_j^-(\varepsilon)|\varepsilon^{-\pi/\omega} + |b_j^+(\varepsilon)|\varepsilon^{\pi/\omega}). \end{aligned}$$

Из (3.31) следует, что

$$(|a_j^-(\varepsilon)|\varepsilon^{-\pi/\omega} + |a_j^+(\varepsilon)|\varepsilon^{\pi/\omega}) \leq c(|b_j^-(\varepsilon)|\varepsilon^{-\pi/\omega} + |b_j^+(\varepsilon)|\varepsilon^{\pi/\omega}).$$

Используя формулы (3.28) и (3.30) для b_j^\pm и соотношения (3.36), (3.34), получаем

$$|b_j^-(\varepsilon)|\varepsilon^{-\pi/\omega} + |b_j^+(\varepsilon)|\varepsilon^{\pi/\omega} \leq c\varepsilon^{-\pi/\omega}|\tilde{S}_{12}(\varepsilon)|.$$

Сопоставляя полученные оценки, приходим к (3.52). \square

Из теоремы 3.5.2 и формул (3.40)–(3.41) вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.5.3. *При $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$ справедливы асимптотические разложения*

$$\begin{aligned} T(k, \varepsilon) &= \frac{1}{1 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon^{2\pi/\omega}} \right)^2} (1 + O(\varepsilon^{2-\delta})), \\ k_r^2(\varepsilon) &= k_e^2 + 2b_1^2 \beta \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega + 2 - \delta}), \\ \Upsilon(\varepsilon) &= \left| \frac{1}{P} \right| \varepsilon^{4\pi/\omega} (1 + O(\varepsilon^{2-\delta})), \end{aligned}$$

где $\Upsilon(\varepsilon)$ — ширина резонансного пика на половине высоты (т. е. $\Upsilon(\varepsilon)^{-1}$ — добротность резонатора), δ — произвольно малое положительное число.

3.6 Асимптотика резонансного туннелирования электронов высокой энергии

В этом параграфе предполагается, что энергия электронов может быть достаточно большой, так что в полосе вдали от сужений существует произвольное (конечное) число волн. Кроме того, собственное число резонатора считается вырожденным.

3.6.1 Постановка задачи

Пусть $G(\varepsilon)$ — та же область, что и в предыдущих параграфах (см. Рис. 3.2). В области $G(\varepsilon)$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta - k^2)u(x, y; \varepsilon) &= 0, & (x, y) \in G(\varepsilon); \\ u(x, y; \varepsilon) &= 0, & (x, y) \in \partial G(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Пусть волновое число k^2 удовлетворяет условию $(M\pi/L)^2 < k^2 < ((M+1)\pi/L)^2$. Тогда в каждом выходе на бесконечность волновода $G(\varepsilon)$ может распространяться M волн $U_m(x, y) = e^{i\nu_m x} \Psi_m(y)$, идущих слева направо, и M волн $U_{M+m}(x, y) =$

$e^{-i\nu_m x} \Psi_m(y)$, идущих справа налево, где

$$\nu_m = \sqrt{k^2 - (m\pi/L)^2}, \quad \Psi_m(y) = (L\nu_m)^{-1/2} \cos(m\pi y/L), \quad m = 1, \dots, M.$$

В приложении доказано, что базис в пространстве ограниченных решений задачи (3.53) составляют функции u_p , $p = 1, \dots, 2M$, удовлетворяющие условиям излучения

$$u_m(y,t) = \begin{cases} U_m(y,t) + \sum_{q=1}^M S_{mq} U_q(y,t) + O(e^{\delta t}), & t \rightarrow -\infty, \\ \sum_{q=1}^M S_{m,M+q} U_{M+q}(y,t) + O(e^{-\delta t}), & t \rightarrow +\infty; \end{cases}$$

$$u_{M+m}(y,t) = \begin{cases} \sum_{q=1}^M S_{M+m,q} U_q(y,t) + O(e^{\delta t}), & t \rightarrow -\infty, \\ U_{M+m}(y,t) + \sum_{q=1}^M S_{M+m,M+q} U_{M+q}(y,t) + O(e^{-\delta t}), & t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

где $m = 1, \dots, M$. Напомним, что величина

$$R_m = \sum_{q=1}^M |S_{mq}|^2, \quad m = 1, \dots, M,$$

называется коэффициентом отражения для волны U_m , приходящей в $G(\varepsilon)$ из $-\infty$, а коэффициент прохождения для этой волны определяется равенством

$$T_m = \sum_{q=1}^M |S_{m,M+q}|^2.$$

Из унитарности матрицы рассеяния следует, что $T_m + R_m = 1$. Аналогичные определения можно ввести для волны U_{M+m} , приходящей из $+\infty$.

Цель — получить асимптотику "резонансных" значений $k_r = k_r(\varepsilon)$ параметра k , при которых коэффициент прохождения принимает максимальное значение. Кроме того, мы изучаем поведение $T_m(k; \varepsilon)$ вблизи $k = k_r$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.6.2 Предельные задачи

В этом пункте мы введем специальные решения предельных задач, которые затем используются для построения асимптотики волновой функции. Существование и свойства упомянутых специальных решений доказаны в [11, глава 5]; здесь мы приводим требуемые сведения без доказательства, так как они практически повторяют рассуждения, которые проводились выше в аналогичной ситуации. Ис-

ключение составляет предельная задача в "резонаторе", для которой проводится дополнительное исследование.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ область $G(\varepsilon)$ распадается на две неограниченные области G_1, G_2 и ограниченный резонатор G_0 . Напомним, что задачи вида

$$\begin{aligned} (-\Delta - k^2)v(x,y) &= 0, & (x,y) \in G_j; \\ v(x,y) &= 0, & (x,y) \in \partial G_j; \end{aligned} \quad (3.54)$$

где $j = 0,1,2$, называются предельными задачами первого рода.

В области G_1 введем решения $V_m, m = 1, \dots, M$, и \mathbf{v}_1 , для которых справедливы разложения

$$V_m(x,y) = \begin{cases} U_m(x,y) + \sum_{q=1}^M S_{mq}^0 U_{M+q}(x,y) + O(e^{\delta x}), & x \rightarrow -\infty; \\ s_{1m} \tilde{J}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_1) \Phi(\pi - \varphi_1) + O(r_1^{2\pi/\omega}), & r_1 \rightarrow 0; \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{v}_1(x,y) = \begin{cases} \sum_{q=1}^M A_{1q} U_{M+q}(x,y) + O(e^{\delta x}), & x \rightarrow -\infty; \\ (\tilde{N}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_1) + a_1 \tilde{J}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_1)) \Phi(\pi - \varphi_1) + O(r_1^{2\pi/\omega}), & r_1 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Здесь (r_1, φ_1) — полярные координаты с центром в O_1 , φ_1 отсчитывается от положительного направления оси x ;

$$\Phi(\varphi) = \pi^{-1/2} \cos(\pi\varphi/\omega);$$

\tilde{J}_μ и \tilde{N}_μ — функции Бесселя и Неймана, нормированные так, чтобы

$$\tilde{J}_\mu(kr) = r^\mu + o(r^\mu), \quad \tilde{N}_\mu(kr) = r^{-\mu} + o(r^{-\mu});$$

δ — достаточно малое положительное число. Аналогичным образом в области G_2 введем функции $V_{M+m}, m = 1, \dots, M$, и \mathbf{v}_2 , такие, что

$$V_{M+m}(x,y) = \begin{cases} U_{M+m}(x,y) + \sum_{q=1}^M S_{M+m, M+q}^0 U_q(x,y) + O(e^{-\delta x}), & x \rightarrow +\infty; \\ s_{2m} \tilde{J}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_2) \Phi(\varphi_2) + O(r_2^{2\pi/\omega}), & r_2 \rightarrow 0; \end{cases} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{v}_2(x,y) = \begin{cases} \sum_{q=0}^M A_{2q} U_q(x,y) + O(e^{-\delta x}), & x \rightarrow +\infty; \\ (\tilde{N}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_2) + a_2 \tilde{J}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_2)) \Phi(\varphi_2) + O(r_2^{2\pi/\omega}), & r_2 \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.58)$$

где (r_2, φ_2) — полярные координаты с центром в O_2 ; $\tilde{J}_\mu, \tilde{N}_\mu, \Phi, \delta$ — те же, что в (3.55)–(3.56). Матрицы

$$S_1^0 = \|S_{mq}^0\|_{m,q=1}^M, \quad S_2^0 = \|S_{M+m, M+q}^0\|_{m,q=1}^M$$

суть матрицы рассеяния в областях G_1 и G_2 , соответственно. Введем матрицы s_1, s_2 размера $M \times 1$ и матрицы A_1, A_2 размера $1 \times M$,

$$s_1 = \|s_{m1}\|_{m=1}^M, \quad s_2 = \|s_{M+m,2}\|_{m=1}^M, \quad A_1 = \|A_{1m}\|_{m=1}^M, \quad A_2 = \|A_{2, M+m}\|_{m=1}^M.$$

Справедливы соотношения

$$A_j A_j^* = 2 \operatorname{Im} a_j, \quad A_j = i s_j^* S_j^0 \quad (3.59)$$

(лемма 10.2.1 [11], доказательство аналогично рассуждениям из леммы 3.3.1). Наконец, из соображений симметрии имеем

$$a_1 = a_2.$$

Обратимся к задаче в резонаторе. Пусть k_e^2 — собственное число оператора $-\Delta$ в области G_0 и $v_{e,1}, \dots, v_{e,z}$ — ортонормированный базис в собственном подпространстве, отвечающем числу k_e^2 . Справедливы разложения

$$v_{e,l}(x) = \begin{cases} b_{1l} \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1) \Phi(\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \rightarrow 0; \\ b_{2l} \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2) \Phi(\pi - \varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.60)$$

Положим

$$\psi_1(r, \varphi) = \tilde{N}_{\pi/\omega}(kr) \Phi(\varphi), \quad \psi_2(r, \varphi) = \tilde{N}_{\pi/\omega}(kr) \Phi(\pi - \varphi).$$

Для k^2 из некоторой проколотой окрестности числа k_e^2 , отделенной от других собственных чисел резонатора, введем решения $\mathbf{v}_{0j}, j = 1, 2$, однородной задачи (3.54) в G_0 ,

$$\mathbf{v}_{0j}(x) = \Theta(r_j) \psi(r_j, \varphi_j) + \tilde{v}_{0j}(x), \quad (3.61)$$

где $t \mapsto \Theta(t)$ — срезка, равная единице при $t \leq t_0$ и нулю при $t \geq 2t_0$, здесь $t_0 > 0$ — достаточно малое фиксированное число; \tilde{v}_{0j} — ограниченное решение задачи

$$(-\Delta - k^2)v = [\Delta, \Theta] \psi_j \quad \text{в } G_0, \quad v = 0 \quad \text{на } \partial G_0.$$

Справедливы следующие разложения:

$$\mathbf{v}_{01}(x, y) \sim \begin{cases} (\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + c_{11}\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1))\Phi(\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \rightarrow 0, \\ c_{12}(k)\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)\Phi(\pi - \varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{v}_{02}(x, y) \sim \begin{cases} c_{21}(k)\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)\Phi(\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \rightarrow 0, \\ (\tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_2) + c_{22}(k)\tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2))\Phi(\pi - \varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

Верно равенство $c_{12} = c_{21}$. Для доказательства достаточно применить к функциям \mathbf{v}_{01} и \mathbf{v}_{02} формулу Грина в области G_δ , полученной из G_0 отбрасыванием кругов радиуса δ с центрами в точках O_j , подобно тому, как это было сделано в доказательстве леммы 3.3.1, а затем устремить $\delta \rightarrow 0$. Из следующей леммы и разложений (3.60) следует, что

$$c_{pq}(k) = -(k^2 - k_e^2)^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} b_{pl}b_{ql} + \hat{c}_{pq}(k), \quad (3.64)$$

где \hat{c}_{pq} аналитичны по k^2 в некоторой окрестности числа k_e^2 .

Лемма 3.6.1. *В любой окрестности $V \subset \mathbb{C}$ числа k_e^2 , не содержащей собственных чисел задачи (3.54) в G_0 , отличных от k_e^2 , имеют место соотношения*

$$\mathbf{v}_{0j}(x) = -(k^2 - k_e^2)^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} b_{jl}v_{e,l}(x) + \hat{v}_{0j}(x),$$

где постоянные b_{jl} определены разложениями (3.60), а функции \hat{v}_{0j} аналитически зависят от $k^2 \in V$.

Доказательство. Сначала проверим, что $(\mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_0} = -b_{jl}/(k^2 - k_e^2)$. Имеем

$$(\Delta \mathbf{v}_{0j} + k^2 \mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_\delta} - (\mathbf{v}_{0j}, \Delta v_{e,l} + k^2 v_{e,l})_{G_\delta} = -(k^2 - k_e^2)(\mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_\delta}$$

в области G_δ , полученной из G_0 отбрасыванием кругов радиуса δ с центрами в O_1 и O_2 . Применяя формулу Грина и подставляя на $\partial G_\delta \setminus \partial G_0$ асимптотику (3.60) вместо $v_{e,l}$ и (3.61) вместо \mathbf{v}_{0j} , получаем

$$-(k^2 - k_e^2)(\mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_\delta} = (\partial_n \mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{\partial G_\delta} - (\mathbf{v}_{0j}, \partial_n v_{e,l})_{\partial G_\delta} = b_{jl} + o(1).$$

Остается лишь устремить δ к нулю.

Далее, имеем

$$\tilde{v}_{0j}(x) = (k^2 - k_e^2)^{-1} \sum_{q=1}^{\infty} B_{jq}(k^2) v_{e,q}(x) + \hat{v}_j(x), \quad (3.65)$$

где $B_{jl}(k^2)$ не зависят от x , а \hat{v}_j аналитичны по k^2 вблизи $k^2 = k_e^2$. Умножая (3.61) на $v_{e,l}$ и учитывая равенство (3.65), доказанную выше формулу для $(\mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_0}$ и ортонормированность собственных функций $v_{e,q}$, получаем $B_{jl}(k^2) = -b_{jl} + (k^2 - k_e^2) \tilde{B}_{jl}(k^2)$, где функция \tilde{B}_{jl} аналитическая. Вместе с (3.61) и (3.65) это равенство приводит к требуемому утверждению. \square

Предельные задачи второго рода и их специальные решения введены в п. 3.2.2. Условия (3.31) из леммы 3.4.1 удобно переписать в матричной форме:

$$(a^-, b^-) = (a^+, b^+) \Lambda_0 \varepsilon^{2\pi/\omega}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

3.6.3 Асимптотика волновых функций

Рассмотрим волновую функцию u_m в $G(\varepsilon)$, подчиненную условиям излучения

$$u_m(x, y; k, \varepsilon) \sim \begin{cases} U_m(x, y; k) + \sum_{q=1}^M S_{mq}(k, \varepsilon) U_q(x, y; k), & x \rightarrow -\infty, \\ \sum_{q=1}^M S_{m, M+q}(k, \varepsilon) U_{M+q}(x, y; k), & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

В областях G_j , $j = 0, 1, 2$, приближением для u_m служат такие решения v_j задач (3.54), что

$$v_1 = V_m + C_{m1} \mathbf{v}_1, \quad v_0 = C_{m2} \mathbf{v}_{01} + C_{m3} \mathbf{v}_{02}, \quad v_2 = C_{m4} \mathbf{v}_2, \quad (3.67)$$

где V_m , \mathbf{v}_j , \mathbf{v}_{0j} определены в пункте 3.6.2. Постоянные C_{mj} зависят от ε и k . В силу (3.55)–(3.58) при $r_j \rightarrow 0$ и (3.62)–(3.63) имеем

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= (a_1^- \tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + a_1^+ \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)) \Phi(\pi - \varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), \quad r_1 \rightarrow 0; \\ v_0(x, y) &= \begin{cases} (b_1^- \tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + b_1^+ \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)) \Phi(\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \rightarrow 0; \\ (b_2^- \tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_2) + b_2^+ \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)) \Phi(\pi - \varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \rightarrow 0; \end{cases} \\ v_2(x, y) &= (a_2^- \tilde{N}_{\pi/\omega}(kr_2) + a_2^+ \tilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)) \Phi(\varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), \quad r_2 \rightarrow 0; \end{aligned}$$

где

$$a_1^- = C_{m1}, \quad a_1^+ = s_{m1} + C_{m1}a_1, \quad b_1^- = C_{m2}, \quad b_1^+ = C_{m2}c_{11} + C_{m3}c_{21}, \quad (3.68)$$

$$a_2^- = C_{m4}, \quad a_2^+ = C_{m4}a_2, \quad b_2^- = C_{m3}, \quad b_2^+ = C_{m2}c_{12} + C_{m3}c_{22}. \quad (3.69)$$

Введем срезки

$$\begin{aligned} \chi_{1,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_1/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_1}(x,y), & \chi_{2,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_2/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_2}(x,y), \\ \chi_{0,\varepsilon}(x,y) &= (1 - \Theta(r_1/\varepsilon) - \Theta(r_2/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_0}(x,y), \end{aligned}$$

где Θ — та же функция, что и в (3.61), $\mathbf{1}_{G_j}$ — характеристическая функция множества G_j . При подстановке в задачу (3.53) сумма

$$\chi_{1,\varepsilon}(x,y)v_1(x,y;\varepsilon) + \chi_{0,\varepsilon}(x,y)v_0(x,y;\varepsilon) + \chi_{2,\varepsilon}(x,y)v_2(x,y;\varepsilon) \quad (3.70)$$

дает невязку

$$\begin{aligned} & -[\Delta, \chi_{1,\varepsilon}]v_1(x,y;\varepsilon) - [\Delta, \chi_{0,\varepsilon}]v_0(x,y;\varepsilon) - [\Delta, \chi_{2,\varepsilon}]v_2(x,y;\varepsilon) = \\ & = [\Delta, \zeta^-(r_1/\varepsilon)]v_1(x;\varepsilon) + [\Delta, \zeta^+(r_1/\varepsilon)]v_0(x;\varepsilon) \\ & + [\Delta, \zeta^-(r_2/\varepsilon)]v_0(x;\varepsilon) + [\Delta, \zeta^+(r_2/\varepsilon)]v_2(x;\varepsilon); \end{aligned}$$

срезки ζ^\pm определены в пункте 3.6.2. Невязка отлична от нуля лишь в малой окрестности сужений, где функции v_j можно заменить их асимптотикой. Пользуясь формулами

$$\tilde{N}_\mu(kr) = r^{-\mu} + o(r^{-\mu}), \quad \tilde{J}_\mu(kr) = r^\mu + o(r^\mu)$$

при $r \rightarrow 0$, выделим главную часть невязки и преобразуем ее, подставив $\rho_j = r_j/\varepsilon$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2[\Delta, \zeta^-(\rho_1)] \left(a_1^- \varepsilon_1^{-\pi/\omega} \rho_1^{-\pi/\omega} + a_1^+ \varepsilon_1^{\pi/\omega} \rho_1^{\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi_1) \\ & + \varepsilon^2[\Delta, \zeta^+(\rho_1)] \left(b_1^- \varepsilon_1^{-\pi/\omega} \rho_1^{-\pi/\omega} + b_1^+ \varepsilon_1^{\pi/\omega} \rho_1^{\pi/\omega} \right) \Phi(\varphi_1) \\ & + \varepsilon^2[\Delta, \zeta^-(\rho_2)] \left(a_2^- \varepsilon_2^{-\pi/\omega} \rho_2^{-\pi/\omega} + a_2^+ \varepsilon_2^{\pi/\omega} \rho_2^{\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi_2) \\ & + \varepsilon^2[\Delta, \zeta^+(\rho_2)] \left(b_2^- \varepsilon_2^{-\pi/\omega} \rho_2^{-\pi/\omega} + b_2^+ \varepsilon_2^{\pi/\omega} \rho_2^{\pi/\omega} \right) \Phi(\varphi_2); \end{aligned}$$

здесь постоянные a_j^\pm, b_j^\pm определены равенствами (3.68)–(3.69). Примем функции

$$F_j(\xi, \eta) = [\Delta, \zeta^-(\rho)] \left(a_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho^{-\pi/\omega} + a_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho^{\pi/\omega} \right) \Phi(\pi - \varphi) \\ + [\Delta, \zeta^+(\rho)] \left(b_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho^{-\pi/\omega} + b_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho^{\pi/\omega} \right) \Phi(\varphi), \quad (3.71)$$

$j = 1, 2$, в качестве правой части задачи (3.7). Потребуем, чтобы a_j^\pm, b_j^\pm подчинялись условиям вида (3.66),

$$(a_j^-, b_j^-) = (a_j^+, b_j^+) \Lambda_0 \varepsilon^{2\pi/\omega}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

и обозначим соответствующие решения задачи (3.7) через w_j . Компенсируем выписанные выше старшие члены невязки, добавляя

$$\varepsilon^2 \Theta(r_1) w_1(\varepsilon^{-1} x_1, \varepsilon^{-1} y_1; \varepsilon) + \varepsilon^2 \Theta(r_2) w_2(\varepsilon^{-1} x_2, \varepsilon^{-1} y_2; \varepsilon)$$

к сумме (3.70).

Таким образом, первое приближение для волновой функции u_m имеет вид

$$\tilde{u}_m(x, y; \varepsilon) = \chi_{1,\varepsilon}(x, y) v_1(x, y; \varepsilon) + \chi_{0,\varepsilon}(x, y) v_0(x, y; \varepsilon) + \chi_{2,\varepsilon}(x, y) v_2(x, y; \varepsilon) \\ + \varepsilon^2 \Theta(r_1) w_1(\varepsilon^{-1} x, \varepsilon^{-1} y; \varepsilon) + \varepsilon^2 \Theta(r_2) w_2(\varepsilon^{-1} x, \varepsilon^{-1} y; \varepsilon), \quad (3.73)$$

где v_j — решения однородных предельных задач первого рода (3.54), заданные (3.67), а w_j — решения предельных задач второго рода (3.7) с правой частью (3.71). Чтобы найти постоянные C_{ml} , входящие в (3.67), выпишем условия (3.72) с учетом (3.68)–(3.69):

$$(C_{m1}, C_{m2}) = (s_{m1} + C_{m1} a_1, C_{m2} c_{11} + C_{m3} c_{21}) \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}, \quad (3.74)$$

$$(C_{m3}, C_{m4}) = (C_{m2} c_{12} + C_{m3} c_{22}, C_{m4} a_2) \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}. \quad (3.75)$$

В следующем пункте мы выведем отсюда формулы для C_{ml} .

Аналогично строится асимптотика волновой функции u_{M+m} , удовлетворяющей условиям

$$u_{M+m}(x, y; k, \varepsilon) \sim \\ \sim \begin{cases} \sum_{p=1}^M S_{M+m,p}(k, \varepsilon) U_p^-(x, y; k), & x \rightarrow -\infty, \\ U_{M+m}^+(x, y; k) + \sum_{p=1}^M S_{M+m, M+p}(k, \varepsilon) U_{M+p}^-(x, y; k), & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Старший член асимптотики имеет вид (3.73), где

$$v_1 = C_{M+m,1} \mathbf{v}_1, \quad v_0 = C_{M+m,2} \mathbf{v}_{01} + C_{M+m,3} \mathbf{v}_{02}, \quad v_2 = V_{M+m} + C_{M+m,4} \mathbf{v}_2, \quad (3.76)$$

постоянные $C_{M+m,l}$ связаны соотношениями

$$(C_{M+m,1}, C_{M+m,2}) = (C_{M+m,1} a_1, C_{M+m,2} c_{11} + C_{M+m,3} c_{21}) \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}, \quad (3.77)$$

$$(C_{M+m,3}, C_{M+m,4}) = (C_{M+m,2} c_{12} + C_{M+m,3} c_{22}, s_{M+m,2} + C_{M+m,4} a_2) \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}. \quad (3.78)$$

3.6.4 Формулы для постоянных C_{ml}

В этом пункте мы выводим формулы для постоянных C_{m1}, \dots, C_{m4} и тем самым завершаем построение старшего члена асимптотики волновых функций. Введем матрицы $\Lambda = \text{diag} \{ \Lambda_0, \Lambda_0 \}$ и

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

Тогда соотношения (3.74)–(3.75) можно записать в виде

$$(C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}, C_{m4}) = (s_{m1}, 0, 0, 0) \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} + (C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}) a \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega},$$

откуда

$$(C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}, C_{m4})(I - a \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}) = (s_{m1}, 0, 0, 0) \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}. \quad (3.80)$$

В силу (3.64)

$$a(k) = -(k^2 - k_e^2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{b}_1\|^2 & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle & \|\mathbf{b}_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \hat{a}(k), \quad (3.81)$$

где $\mathbf{b}_j = (b_{j1}, \dots, b_{jz})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{C}^z , а матрица \hat{a} аналитическая вблизи $k = k_e$ и определяется равенством (3.79) с заменой c_{pq} на \hat{c}_{pq} . Пусть ψ — угол между векторами \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 в \mathbb{C}^z . Положим

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = (0, \|\mathbf{b}_1\|, \|\mathbf{b}_2\| \cos \psi, 0), \quad \tilde{\mathbf{b}}_2 = (0, 0, \|\mathbf{b}_2\| \sin \psi, 0) \quad (3.82)$$

и перепишем $a(k)$ в более удобном виде:

$$a(k) = -\frac{\tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2}{k^2 - k_e^2} + \hat{a}(k).$$

Лемма 3.6.2. При достаточно малом ε справедливо равенство

$$\Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} (I - a \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1} = D - \frac{G(k^2 - k_e^2) + H}{(k^2 - k_e^2)^2 + p(k^2 - k_e^2) + q},$$

где

$$D = \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} (I - \hat{a} \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1}, \quad G = D \tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 D + D \tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \quad (3.83)$$

$$H = D \tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 D \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle + D \tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2 D \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle - D \tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_1 D \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle - D \tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_2 D \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle, \quad (3.84)$$

$$p = \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle, \quad q = \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle - \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle. \quad (3.85)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} I - a \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} &= I - \hat{a} \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} + \tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2 \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}}{k^2 - k_e^2} \\ &= \left(I + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 D + \tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2 D}{k^2 - k_e^2} \right) (I - \hat{a} \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}), \end{aligned}$$

где $D = \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} (I - \hat{a} \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1}$; обратная матрица здесь, очевидно, существует при достаточно малом ε . Прямая проверка показывает, что

$$\left(I + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{c}}_1}{k^2 - k_e^2} \right)^{-1} = I - \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{c}}_1}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} \quad (3.86)$$

при $\tilde{\mathbf{c}}_1 = \tilde{\mathbf{b}}_1 D$. Следовательно,

$$I - a \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} = \left(I + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2 E}{k^2 - k_e^2} \right) \left(I + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 D}{k^2 - k_e^2} \right) (I - \hat{a} \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}),$$

где

$$E = D \left(I + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 D}{k^2 - k_e^2} \right)^{-1} = D - \frac{D \tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 D}{k^2 - k_e^2 + \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle}. \quad (3.87)$$

Еще раз применяя (3.86) с заменой $\tilde{\mathbf{b}}_1$ на $\tilde{\mathbf{b}}_2$ и $\tilde{\mathbf{c}}_1$ — на $\tilde{\mathbf{b}}_2 E$, получаем

$$\begin{aligned} & \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} (I - a \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1} \\ &= \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} (I - \hat{a} \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1} \left(I + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1^* \tilde{\mathbf{b}}_1 D}{k^2 - k_e^2} \right)^{-1} \left(I + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2 E}{k^2 - k_e^2} \right)^{-1} \\ &= E \left(I + \frac{\tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2 E}{k^2 - k_e^2} \right)^{-1} = E - \frac{E \tilde{\mathbf{b}}_2^* \tilde{\mathbf{b}}_2 E}{k^2 - k_e^2 + \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 E, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle}. \end{aligned}$$

Осталось подставить сюда (3.87); элементарные выкладки опускаем. \square

Таким образом, (3.80) принимает вид

$$(C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}, C_{m4}) = (s_{m1}, 0, 0, 0) \left(D - \frac{G(k^2 - k_e^2) + H}{(k^2 - k_e^2)^2 + p(k^2 - k_e^2) + q} \right).$$

Тем же путем соотношения (3.77)–(3.78) приводят к формулам

$$\begin{aligned} & (C_{M+m,1}, C_{M+m,2}, C_{M+m,3}, C_{M+m,4}) \\ &= (0, 0, 0, s_{M+m,2}) \left(D - \frac{G(k^2 - k_e^2) + H}{(k^2 - k_e^2)^2 + p(k^2 - k_e^2) + q} \right). \end{aligned}$$

3.6.5 Асимптотика матрицы рассеяния

Чтобы получить приближение \tilde{S}_{ij} для элементов матрицы рассеяния $S = (S_{ij})_{i,j=1}^{2M}$, рассмотрим асимптотику на бесконечности функции (3.73). Обозначим через \tilde{S}_{kl} , $k, l = 1, 2$, матрицы размера $M \times M$, такие, что

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{pmatrix}.$$

В силу (3.67), (3.55)–(3.56) и (3.58),

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= U_m^+(x, y) + \sum_{p=1}^M (S_{mp}^0 + C_{m1}(\varepsilon) A_{1p}) U_p^-(x, y) + O(\exp(\delta x)), \quad x \rightarrow -\infty, \\ v_2(x, y) &= C_{m4}(\varepsilon) \sum_{p=1}^M A_{2, M+p} U_{M+p}^-(x, y) + O(\exp(-\delta x)), \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

значит,

$$(\tilde{S}_{11}, \tilde{S}_{12}) = (S_1^0 + \mathbf{C}_1 A_1, \mathbf{C}_4 A_2), \quad (3.88)$$

где

$$\mathbf{C}_j = (C_{1j}, \dots, C_{Mj})^T, \quad A_1 = (A_{11}, \dots, A_{1M}), \quad A_2 = (A_{2,M+1}, \dots, A_{2,2M}),$$

матрица S_1^0 введена в пункте 3.6.2. Аналогично, из (3.76) и (3.56)–(3.58) находим

$$(\tilde{S}_{21}, \tilde{S}_{22}) = (\mathbf{C}_1 A_1, S_2^0 + \mathbf{C}_4 A_2). \quad (3.89)$$

Положим

$$S^0 = \text{diag}(S_1^0, S_2^0), \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{1 \times M} \\ 0_{1 \times M} & 0_{1 \times M} \\ 0_{1 \times M} & 0_{1 \times M} \\ 0_{1 \times M} & A_2 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 & 0_{M \times 1} & 0_{M \times 1} & 0_{M \times 1} \\ 0_{M \times 1} & 0_{M \times 1} & 0_{M \times 1} & s_2 \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

тогда из (3.59) следует равенство $A = is^* S^0$. Объединяя (3.88)–(3.89), подставляя формулы для постоянных C_{ml} из предыдущего пункта и учитывая, что $A = is^* S^0$, получаем

$$\tilde{S} = S^0 + (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4)A = S^0 + is \left(D - \frac{G(k^2 - k_e^2) + H}{(k^2 - k_e^2)^2 + p(k^2 - k_e^2) + q} \right) s^* S^0.$$

Можно проверить, что матрица \tilde{S} унитарна, но нам это не понадобится.

3.6.6 Асимптотика полюсов матрицы рассеяния

Корни k_1^2 и k_2^2 уравнения $(k^2 - k_e^2)^2 + p(k^2 - k_e^2) + q = 0$ (см. лемму 3.6.2) служат приближением для полюсов матрицы рассеяния. Нас интересует асимптотика вещественных и мнимых частей чисел k_1^2 и k_2^2 . Разрешим это уравнение относительно $k^2 - k_e^2$,

$$k^2 - k_e^2 = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q},$$

и выпишем главный член асимптотики правой части. Так как

$$D = \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \quad (3.91)$$

то, учитывая (3.82), находим

$$\begin{aligned} p &= \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle = \alpha(\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2)\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \\ q &= \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle - \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \\ &= \alpha^2 \|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 (\sin^2 \psi) \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Значит,

$$k_{1,2}^2 = k_e^2 - \alpha \Lambda_{1,2} \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \quad (3.93)$$

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}}, \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2)^2 - 4\|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 (\sin^2 \psi) \\ &= (\|\mathbf{b}_1\|^2 - \|\mathbf{b}_2\|^2)^2 + 4\|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 (\cos^2 \psi). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ясно, что $\mathcal{D} \geq 0$ и $\operatorname{Re}(k_{1,2}^2 - k_e^2) \leq 0$.

Чтобы найти асимптотику мнимых частей $\operatorname{Im} k_{1,2}^2$, выразим их через $\operatorname{Re} k_{1,2}^2$ и через коэффициенты p и q . С этой целью перепишем рассматриваемое уравнение в виде

$$(k_r^2 - k_e^2 + ik_i^2)^2 + (p_r + ip_i)(k_r^2 - k_e^2 + ik_i^2) + (q_r + iq_i) = 0,$$

где $k_r^2 := \operatorname{Re} k_{1,2}^2$, $k_i^2 := \operatorname{Im} k_{1,2}^2$ и т. п. Выделяя слева мнимую часть, получим

$$2(k_r^2 - k_e^2)k_i^2 + p_r k_i^2 + p_i(k_r^2 - k_e^2) + q_i = 0,$$

откуда

$$k_i^2 = -\frac{p_i(k_r^2 - k_e^2) + q_i}{2(k_r^2 - k_e^2) + p_r} = -\frac{p_i}{2} + \frac{p_i p_r - 2q_i}{4(k_r^2 - k_e^2) + 2p_r}. \quad (3.96)$$

Вычислим старшие члены асимптотики $p_i := \operatorname{Im} p$ и $q_i := \operatorname{Im} q$. Так как $D = \Lambda + \Lambda \hat{a} \Lambda + O(\varepsilon^{6\pi/\omega})$, то $\operatorname{Im} D = \Lambda(\operatorname{Im} \hat{a})\Lambda + O(\varepsilon^{6\pi/\omega})$. Согласно (3.81) и (3.59)

$$\operatorname{Im} \hat{a} = \operatorname{Im} a = \frac{1}{2} \operatorname{diag}(\|s_1\|^2, 0, 0, \|s_2\|^2),$$

где $\|s_1\|^2 = \sum_{m=1}^M |s_{m1}|^2$ и в силу симметрии $\|s_2\|^2 = \|s_1\|^2$. Следовательно,

$$\operatorname{Im} D = \frac{1}{2} \|s_1\|^2 \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha^2 \end{pmatrix} \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}),$$

поэтому

$$\begin{aligned}
p_i &= \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 \operatorname{Im} D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 \operatorname{Im} D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \\
&= \frac{1}{2} (\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2) \beta^2 \|s_1\|^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}), \\
q_i &= \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 \operatorname{Im} D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 \operatorname{Re} D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle - \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 \operatorname{Im} D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 \operatorname{Re} D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \\
&\quad + \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 \operatorname{Re} D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 \operatorname{Im} D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle - \langle \tilde{\mathbf{b}}_1 \operatorname{Re} D, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \langle \tilde{\mathbf{b}}_2 \operatorname{Im} D, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \\
&= \alpha \beta^2 \|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 \|s_1\|^2 (\sin^2 \psi) \varepsilon^{6\pi/\omega} + O(\varepsilon^{8\pi/\omega}).
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Отсюда получаем, что

$$p_i p_r - 2q_i = \frac{1}{2} \alpha \beta^2 \|s_1\|^2 \mathcal{D} \varepsilon^{6\pi/\omega} + O(\varepsilon^{8\pi/\omega}),$$

где \mathcal{D} определено равенством (3.95). Из (3.92) и (3.93)–(3.94) следует, что

$$2(k_r^2 - k_e^2) + p_r = \mp \alpha \sqrt{\mathcal{D}} \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}).$$

Подставим в (3.96) последние два соотношения и формулу (3.97) и найдем асимптотику мнимой части полюсов k_1^2 и k_2^2 (напомним, что в (3.96) $k_i^2 := \operatorname{Im} k_{1,2}^2$):

$$\operatorname{Im} k_{1,2}^2 = -\frac{1}{2} \beta^2 \Lambda_{1,2} \|s_1\|^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega});$$

постоянные $\Lambda_{1,2}$ определены равенством (3.94).

3.6.7 Асимптотика резонансного туннелирования

Напомним, что

$$\tilde{S} = S^0 + i s D s^* S^0 - i s \frac{G(k^2 - k_e^2) + H}{(k^2 - k_e^2)^2 + p(k^2 - k_e^2) + q} s^* S^0,$$

где D, G, H, p, q определены соотношениями (3.83)–(3.85), а S^0 и s — равенством (3.90). Учитывая (3.91) и (3.82), имеем

$$\begin{aligned} sDs^*S^0 &= \begin{pmatrix} s_1s_1^*S_1^0 & 0_{M \times M} \\ 0_{M \times M} & s_2s_2^*S_2^0 \end{pmatrix} \alpha \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \\ sGs^*S^0 &= \begin{pmatrix} \|\mathbf{b}_1\|^2 s_1s_1^*S_1^0 & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle s_1s_2^*S_2^0 \\ \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle s_2s_1^*S_1^0 & \|\mathbf{b}_2\|^2 s_2s_2^*S_2^0 \end{pmatrix} \beta^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}), \\ sHs^*S^0 &= \begin{pmatrix} s_1s_1^*S_1^0 & 0 \\ 0 & s_2s_2^*S_2^0 \end{pmatrix} \alpha \beta^2 \|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 (\sin \psi)^2 \varepsilon^{6\pi/\omega} + O(\varepsilon^{8\pi/\omega}). \end{aligned}$$

Таким образом, блок \tilde{S}_{12} можно представить в виде

$$\tilde{S}_{12} = -i \frac{\beta^2 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle (k^2 - k_e^2)}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)} s_1s_2^*S_2^0 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \quad (3.98)$$

откуда получается требуемая асимптотика коэффициента прохождения:

$$T_m = \sum_{p=1}^M |\tilde{S}_{m, M+p}|^2 = \frac{\beta^4 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle^2 (k^2 - k_e^2)^2}{|k^2 - k_1^2|^2 |k^2 - k_2^2|^2} |s_{m1}|^2 \|s_2\|^2 \varepsilon^{8\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}).$$

В силу симметрии столбцы s_1 и s_2 совпадают, поэтому $\tilde{S}_{12} = \tilde{S}_{21}$ и, следовательно, $T_{M+m} = T_m$.

Исследуя старший член асимптотики коэффициента T_m , нетрудно установить, что он имеет локальные максимумы при $k^2 = k_{res,1}^2$ и $k^2 = k_{res,2}^2$, причем

$$k_{res,j}^2 = \operatorname{Re} k_j^2 + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}) = k_e^2 - \alpha \Lambda_j \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}).$$

Высота резонансных пиков равна

$$H_j = \frac{|s_{m1}|^2 4 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle^2}{\|s_1\|^2 \mathcal{D}} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega}) = \frac{|s_{m1}|^2}{\|s_1\|^2} \left(1 + \frac{(\|\mathbf{b}_1\|^2 - \|\mathbf{b}_2\|^2)^2}{4 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle^2} \right)^{-1} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega}),$$

где \mathcal{D} определено равенством (3.95). Ширина пика с номером j на половине его высоты вычисляется по формуле

$$\Upsilon_j = \operatorname{Im} k_j^2 + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}) = -\frac{1}{2} \beta^2 \Lambda_j \|s_1\|^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}).$$

Между резонансными пиками в точке $k^2 = (k_{res,1}^2 + k_{res,2}^2)/2 + O(\varepsilon^{4\pi/\omega})$ имеется локальный минимум, где $T_m = O(\varepsilon^{4\pi/\omega})$.

В заключение отметим, что в частном случае при $\mathbf{b}_1 = \pm \mathbf{b}_2$ в равенстве из леммы 3.6.2 имеем $H = 0$ и $p = 0$. Поэтому вместо (3.98) получаем

$$\tilde{S}_{12} = -i \frac{\beta^2 \|\mathbf{b}_1\|^2}{k^2 - k_e^2 + p} s_1 s_2^* S_2^0 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}),$$

то есть матрица рассеяния имеет один полюс, а график коэффициента прохождения — один пик. Резонансная энергия определяется равенством $k_{res}^2 = k_e^2 - \operatorname{Re} p = k_e^2 - 2\alpha \|\mathbf{b}_1\|^2 \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega})$ (учли (3.92)). Высота резонансного пика равна $|s_{m1}|^2 / \|s_1\|^2$, а его ширина на половине высоты есть $2\operatorname{Im} p = 2\|\mathbf{b}_1\|^2 \beta^2 \|s_1\|^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega})$ (см. (3.97)). Эти формулы применимы и в случае простого собственного числа резонатора, при этом они совпадают с формулами, полученными в предыдущих параграфах (теорема 3.5.3).

Глава 4

Асимптотическая теория резонансного туннелирования в трехмерных квантовых волноводах

4.1 Туннелирование электронов малой энергии в трехмерном несимметричном волноводе

В этом параграфе рассматривается резонансное туннелирование электронов в трехмерном волноводе с двумя цилиндрическими выходами на бесконечность и двумя сужениями малых диаметров ε_1 и ε_2 . Граница волновода считается гладкой. Движение электрона описывается уравнением Гельмгольца. Энергия электрона принадлежит интервалу между первым и вторым порогами. Мы обобщаем подход, развитый в главе 3. Основной результат содержится в теореме 4.3.5.

4.1.1 Постановка задачи

Введем три области G , Ω_1 и Ω_2 в \mathbb{R}^3 , не зависящие от параметров ε_1 и ε_2 . Пусть G — область в \mathbb{R}^3 , которая вне большого шара совпадает с объединением двух непересекающихся полуцилиндров C_1 и C_2 с гладкими сечениями D_1 и D_2 , соответственно. Граница ∂G области G гладкая, а ∂D_1 и ∂D_2 — простые контуры. Рассмотрим область Ω_1 . Обозначим через K_1 и L_1 открытые конусы в \mathbb{R}^3 , симметричные друг другу относительно их общей вершины, то есть $K_1 \cup L_1$ — двойной конус. Конус K_1 (соотв., L_1) вырезает на единичной сфере с центром в вершине область $S(K_1)$ (соотв., $S(L_1)$), ограниченную гладким контуром. Предположим, что Ω_1 содержит оба конуса K_1 и L_1 вместе с некоторой окрестностью их верши-

ны. Кроме того, вне большого шара Ω_1 совпадает с $K_1 \cup L_1$, граница области Ω_1 гладкая. Область Ω_2 описывается аналогично Ω_1 с помощью конусов K_2 и L_2 .

Теперь введем волновод $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (Рис. 4.1). Временно предположим, что O_1 и O_2 — произвольные (внутренние) точки области G , расположенные в полуцилиндрах \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 , соответственно. Рассмотрим прямоугольные координаты $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$ с центром в O_j и осью x_1^j , параллельной оси полуцилиндра \mathcal{C}_j , $j = 1, 2$, причем положительная полуось x_1^j лежит в \mathcal{C}_j . Область Ω_j расположена так, что вершина конусов K_j и L_j совпадает с O_j , а положительная полуось x_1^j лежит внутри K_j . Начиная с этого места, предполагаем, что точки O_1 и O_2 расположены достаточно далеко от “нецилиндрической” части области G , так чтобы связная компонента множества $\partial G \cap \partial L_j$, ближайшая к O_j , совпадала с $\partial \mathcal{C}_j \cap \partial L_j$. Обозначим через $\Omega_j(\varepsilon_j)$ область, полученную из Ω_j сжатием с центром в O_j и коэффициентом $\varepsilon_j > 0$. Другими словами, $x^j \in \Omega_j(\varepsilon_j)$, если и только если $(x^j/\varepsilon_j) \in \Omega_j$. Пусть $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — область, полученная из G заменой \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 на $\mathcal{C}_1 \cap \Omega_1(\varepsilon_1)$ и $\mathcal{C}_2 \cap \Omega_2(\varepsilon_2)$, соответственно.

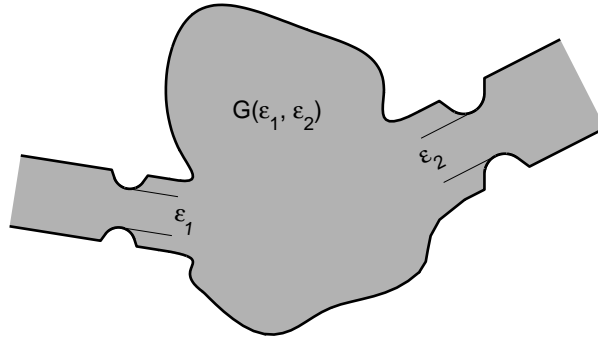


Рисунок 4.1: Волновод с двумя сужениями.

Волновая функция свободного электрона с энергией $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ удовлетворяет краевой задаче

$$-\Delta u - k^2 u = 0 \text{ в } G(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad u = 0 \text{ на } \partial G(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (4.1)$$

Рассмотрим задачу на сечении D_j полуцилиндра \mathcal{C}_j , $j = 1, 2$:

$$-\Delta v - \lambda^2 v = 0 \text{ в } D_j, \quad v = 0 \text{ на } \partial D_j. \quad (4.2)$$

Собственные числа λ_{jm}^2 этой задачи, где $m = 1, 2, \dots$, (то есть пороги) образуют возрастающую последовательность положительных чисел, стремящуюся к $+\infty$. Обозначим через Ψ_{jm} собственную функцию задачи (4.2), отвечающую числу λ_{jm}^2

и нормированную условием

$$2\nu_{jm} \int_{D_j} |\Psi_{jm}(x_2, x_3)|^2 dx_2 dx_3 = 1 \quad (4.3)$$

при $\nu_{jm} = \sqrt{k^2 - \lambda_{jm}^2}$. В этой главе мы обсуждаем только ситуацию, когда k^2 лежит между первым и вторым порогами или, говоря точнее, в интервале $(\lambda_{11}^2, \lambda_{12}^2) \cap (\lambda_{21}^2, \lambda_{22}^2)$ (который предполагается непустым). Функция U_1^+ , определенная в полуцилиндре \mathcal{C}_1 равенством $U_1^+(x^1) = \exp(-i\nu_{11}x_1^1)\Psi_{11}(x_2^1, x_3^1)$, является волной, приходящей в \mathcal{C}_1 из бесконечности (напомним, что положительная полуось x_1^1 лежит в \mathcal{C}_1). Функция $U_2^+(x^2) = \exp(-i\nu_{22}x_1^2)\Psi_{21}(x_2^2, x_3^2)$ — это волна, приходящая из бесконечности в \mathcal{C}_2 . Уходящие волны $U_m^-, m = 1, 2$, получаются из приходящих комплексным сопряжением: $U_m^- = \overline{U_m^+}$.

Существуют (гладкие) решения $u_m, m = 1, 2$, задачи (4.1), удовлетворяющие условиям излучения

$$u_1(x) = \begin{cases} U_1^+(x^1) + S_{11} U_1^-(x^1) + O(\exp(-\delta x_1^1)), & x_1^1 \rightarrow +\infty, \\ S_{12} U_2^-(x^2) + O(\exp(-\delta x_1^2)), & x_1^2 \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$u_2(x) = \begin{cases} S_{21} U_1^-(x^1) + O(\exp(-\delta x_1^1)), & x_1^1 \rightarrow +\infty, \\ U_2^+(x^2) + S_{22} U_2^-(x^2) + O(\exp(-\delta x_1^2)), & x_1^2 \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.5)$$

при достаточно малом положительном δ (см. приложение).

Мы рассматриваем рассеяние волны, приходящей из \mathcal{C}_1 , и ищем резонансные значения $k_r = k_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ параметра k , при которых коэффициент прохождения $T_1 = T_1(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = |S_{12}|^2$ достигает своего наибольшего значения. Кроме того, мы изучаем поведение $k_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $T_1(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ коэффициента отражения $R_1 = R_1(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = |S_{11}|^2$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$.

4.1.2 Предельные задачи первого рода

Предельная область $G(0, 0)$ состоит из двух неограниченных частей G_1, G_2 и ограниченного резонатора G_0 . Задачи

$$-\Delta v(x) - k^2 v(x) = f, \quad x \in G_j; \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial G_j, \quad (4.6)$$

называются предельными задачами первого рода, здесь $j = 0, 1, 2$.

Введем функциональные пространства для задачи (4.6) в области G_0 . Пусть ϕ_1 и ϕ_2 — гладкие вещественные функции на замыкании $\overline{G_0}$ области G_0 , такие, что

$\phi_j = 1$ в окрестности точки O_j , $j = 1, 2$, причем $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$. Для $l = 0, 1, \dots$ и $\gamma_j \in \mathbb{R}$ определим пространство $V_{\gamma_1, \gamma_2}^l(G_0)$ как пополнение по норме

$$\|v; V_{\gamma_1, \gamma_2}^l(G_0)\| = \left(\int_{G_0} \sum_{|\alpha|=0}^l \sum_{j=1}^2 \phi_j^2(x) r_j(x)^{2(\gamma_j - l + |\alpha|)} |\partial^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

множества гладких функций на $\overline{G_0}$, исчезающих вблизи точек O_1 и O_2 ; здесь $r_j(x) = \text{dist}(x, O_j)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — мультииндекс и $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}$. Пусть $S(L_j)$ — область, вырезаемая конусом L_j на единичной сфере с центром в O_j , и пусть $0 < \mu_{j1} < \mu_{j2} < \dots$ — последовательность чисел, таких, что $\mu_{jm}(\mu_{jm} + 1)$ являются собственными числами оператора Лапласа-Бельтрами в $S(L_j)$, ($m = 1, 2, \dots$). Предложение 4.1.1 вытекает из хорошо известных общих результатов; см., например, [40, главы 2 и 4, §§1–3] или [37, т. 1, глава 1].

Предложение 4.1.1. (i). *Предположим, что $|\gamma_j - 1| < \mu_{j1} + 1/2$. Тогда при любой правой части $f \in V_{\gamma_1, \gamma_2}^0(G_0)$ и при любом k^2 , за исключением возрастающей последовательности $\{k_p^2\}_{p=1}^\infty$ собственных чисел, $k_p^2 \rightarrow \infty$, существует единственное решение $v \in V_{\gamma_1, \gamma_2}^2(G_0)$ задачи (4.6) в G_0 . Справедлива оценка*

$$\|v; V_{\gamma_1, \gamma_2}^2(G_0)\| \leq c \|f; V_{\gamma_1, \gamma_2}^0(G_0)\| \quad (4.7)$$

с постоянной c , не зависящей от f .

(ii). *Пусть f — гладкая функция в $\overline{G_0}$, исчезающая вблизи точек O_1 и O_2 , и пусть v — решение из пространства $V_{\gamma_1, \gamma_2}^2(G_0)$ задачи (4.6). Тогда v является гладким в $\overline{G_0}$, за исключением точек O_1 и O_2 , и допускает асимптотические представления*

$$v(x) = b_j \frac{1}{\sqrt{r_j}} \tilde{J}_{\mu_{j1}+1/2}(kr_j) \Phi_{j1}^L(\varphi_j) + O(r_j^{\mu_{j2}}), \quad r_j \rightarrow 0, \quad j = 1, 2$$

вблизи O_1 и O_2 , где (ρ_j, φ_j) — полярные координаты с центром в O_j , b_j — некоторые постоянные коэффициенты, а \tilde{J}_μ — функция Бесселя, домноженная на такую постоянную, что $r^{-1/2} \tilde{J}_{\mu_{j1}+1/2}(kr) = r^{\mu_{j1}} + o(r^{\mu_{j1}})$; Φ_{j1}^L — собственная функция оператора Бельтрами, отвечающая числу $\mu_{j1}(\mu_{j1} + 1)$ и нормированная условием

$$(2\mu_{j1} + 1) \int_{S(L_j)} |\Phi_{j1}^L(\varphi)|^2 d\varphi = 1.$$

(iii). *Предположим, что $k^2 = k_e^2$ — собственное число задачи (4.6). Тогда задача (4.6) в G_0 разрешима тогда и только тогда, когда $(f, v_e)_{G_0} = 0$ для любой*

собственной функции v_e , отвечающей числу k_e^2 . При таком условии задача (4.6) имеет единственное решение v , ортогональное всем собственным функциям; оно допускает оценку (4.7) (т. е., выполняется альтернатива Фредгольма).

Обратимся к задачам (4.6) при $j = 1, 2$. Пусть $\chi_{0,j}$ и $\chi_{\infty,j}$ — гладкие вещественные функции в замыкании $\overline{G_j}$ области G_j , такие, что $\chi_{0,j} = 1$ в окрестности O_j , $\chi_{0,j}$ имеет компактный носитель и $\chi_{0,j}^2 + \chi_{\infty,j}^2 = 1$. Предположим еще, что носитель $\text{supp}\chi_{\infty,j}$ сосредоточен в цилиндрической части C_j области G_j . Для $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и $l = 0, 1, \dots$ пространство $V_{\gamma,\delta}^l(G_j)$ является пополнением по норме

$$\|v; V_{\gamma,\delta}^l(G_j)\| = \left(\int_{G_j} \sum_{|\alpha|=0}^l (\chi_{0,j}^2 r_j^{2(\gamma-l+|\alpha|)} + \chi_{\infty,j}^2 \exp(2\delta x_1^j)) |\partial^\alpha v|^2 dx^j \right)^{1/2}$$

множества функций, гладких в $\overline{G_j}$, исчезающих вблизи O_j и имеющих компактный носитель.

Пусть $S(K_j)$ — область, вырезаемая конусом K_j на единичной сфере с центром в вершине O_j . Так как области $S(K_j)$ и $S(L_j)$ симметричны друг другу, то собственные числа задачи Дирихле для оператора Бельтрами в $S(K_j)$ совпадают с $\mu_{jm}(\mu_{jm} + 1)$, $m = 1, 2, \dots$. Напомним, что по предположению k^2 лежит между первым и вторым порогами, поэтому в G_j может распространяться только одна уходящая волна U_j^- . Следующее предложение вытекает, например, из [40, теорема 5.3.5].

Предложение 4.1.2. *Предположим, что $|\gamma - 1| < \mu_{j1} + 1/2$ и, кроме того, однородная задача (4.6) (при $f = 0$) не имеет нетривиальных решений в пространстве $V_{\gamma,\delta}^2(G_j)$ при произвольно малом положительном δ . Тогда для любой правой части $f \in V_{\gamma,\delta}^0(G_j)$ существует единственное решение v задачи (4.6), допускающее представление*

$$v = u + A_j \chi_{\infty,j} U_j^-,$$

где $A_j = \text{const}$, $u \in V_{\gamma,\delta}^2(G_j)$ при достаточно малом положительном δ , и справедлива оценка

$$\|u; V_{\gamma,\delta}^2(G_j)\| + |A_j| \leq c \|f; V_{\gamma,\delta}^0(G_j)\| \quad (4.8)$$

с постоянной c , не зависящей от f . Если к тому же f гладкая и равна нулю вблизи O_j , то решение v допускает разложение

$$v(x^j) = a_j \frac{1}{\sqrt{r_j}} \tilde{J}_{\mu_{j1}+1/2}(kr_j) \Phi_{j1}^K(\varphi_j) + O(r_j^{\mu_{j2}}), \quad r_j \rightarrow 0,$$

где a_j — постоянная, а Φ_{j1}^K обозначает собственную функцию оператора Бельтрами, отвечающую числу $\mu_{j1}(\mu_{j1} + 1)$ и нормированную условием

$$(2\mu_{j1} + 1) \int_{S(K_j)} |\Phi_{j1}^K(\varphi)|^2 d\varphi = 1.$$

4.1.3 Предельные задачи второго рода

В областях Ω_j , $j = 1, 2$, (см. п. 4.1.1) рассмотрим краевые задачи

$$\Delta w(\xi^j) = F(\xi^j) \text{ в } \Omega_j, \quad w(\xi^j) = 0 \text{ на } \partial\Omega_j, \quad (4.9)$$

которые называются предельными задачами второго рода; $\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j)$ — декартовы координаты с началом в O_j .

Пусть $\rho_j(\xi^j) = \text{dist}(\xi^j, O_j)$ и пусть $\psi_{0,j}, \psi_{\infty,j}$ — гладкие вещественные функции $\bar{\Omega}_j$, такие, что $\psi_{0,j}$ равна единице при $\rho_j < N/2$, исчезает при $\rho_j > N$ и $\psi_{0,j}^2 + \psi_{\infty,j}^2 = 1$, N — достаточно большое положительное число. Для всех $\gamma \in \mathbb{R}$ и $l = 0, 1, \dots$ пространство $V_\gamma^l(\Omega_j)$ получается пополнением по норме

$$\|v; V_\gamma^l(\Omega_j)\| = \left(\int_{\Omega_j} \sum_{|\alpha|=0}^l (\psi_{0,j}(\xi^j)^2 + \psi_{\infty,j}(\xi^j)^2 \rho_j(\xi^j)^{2(\gamma-l+|\alpha|)}) |\partial^\alpha v(\xi^j)|^2 d\xi^j \right)^{1/2}$$

множества $C_c^\infty(\bar{\Omega}_j)$ гладких функций с компактным носителем в $\bar{\Omega}_j$. Следующее предложение вытекает из [40, теорема 4.3.6].

Предложение 4.1.3. Пусть $|\gamma - 1| < \mu_{j1} + 1/2$. Тогда для любого $F \in V_\gamma^0(\Omega_j)$ существует единственное решение $w \in V_\gamma^2(\Omega_j)$ задачи (4.9), причем

$$\|w; V_\gamma^2(\Omega_j)\| \leq c \|F; V_\gamma^0(\Omega_j)\|$$

с постоянной c , не зависящей от F . При $F \in C_c^\infty(\bar{\Omega}_j)$ решение w является гладким в $\bar{\Omega}_j$ и допускает представление

$$w(\xi^j) = d_j^K \rho_j^{-\mu_{j1}-1} \Phi_{j1}^K(\varphi_j) + O(\rho_j^{-\mu_{j2}-1}), \quad \rho_j \rightarrow \infty$$

в конусе K_j ; здесь (ρ_j, φ_j) — полярные координаты в Ω_j с началом в O_j , μ_{jp} и Φ_{j1}^K — те же, что и в предложении 4.1.2, и d_j^K — постоянный коэффициент. В конусе L_j справедливо аналогичное разложение с d_j^L и Φ_{j1}^L вместо d_j^K и Φ_{j1}^K . Константы

d_j^K и d_j^L вычисляются по формулам

$$d_j^K = -(F, w_j^K)_{\Omega_j}, \quad d_j^L = -(F, w_j^L)_{\Omega_j},$$

где w_j^K и w_j^L — единственные решения однородной задачи (4.9), удовлетворяющие при $\rho_j \rightarrow \infty$ разложениям

$$w_j^K = \begin{cases} (\rho_j^{\mu_{j1}} + \alpha_j \rho_j^{-\mu_{j1}-1}) \Phi_{j1}^K(\varphi_j) + O(\rho_j^{-\mu_{j2}-1}) & \text{в } K_j, \\ \beta_j \rho_j^{-\mu_{j1}-1} \Phi_{j1}^L(\varphi_j) + O(\rho_j^{-\mu_{j2}-1}) & \text{в } L_j, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$w_j^L = \begin{cases} \beta_j \rho_j^{-\mu_{j1}-1} \Phi_{j1}^K(\varphi_j) + O(\rho_j^{-\mu_{j2}-1}) & \text{в } K_j, \\ (\rho_j^{\mu_{j1}} + \alpha_j \rho_j^{-\mu_{j1}-1}) \Phi_{j1}^L(\varphi_j) + O(\rho_j^{-\mu_{j2}-1}) & \text{в } L_j, \end{cases} \quad (4.11)$$

α_j, β_j — постоянные коэффициенты.

4.2 Туннелирование в волноводе с одним сужением

Цель этого пункта — провести предварительные построения, необходимые в дальнейшем, но не связанные с явлением резонанса. Тем самым мы облегчаем изложение и еще раз демонстрируем метод составных разложений в более простой ситуации. Мы рассматриваем движение электронов в волноводе $G(\varepsilon)$ с одним сужением. Пусть $G = D \times \mathbb{R}$, где D — ограниченная область в \mathbb{R}^2 , а ∂D — простой гладкий контур. Двойной конус $K \cup L$ с вершиной $O \in G$, области Ω и $\Omega(\varepsilon)$ определяются аналогично тому, как были введены $K_1 \cup L_1$, Ω_1 и $\Omega_1(\varepsilon)$ в п. 4.1.1. Положим $G(\varepsilon) = G \cap \Omega(\varepsilon)$. Предельная область $G(0)$ состоит из двух частей, каждая из которых имеет одну коническую точку и один цилиндрический выход на бесконечность. Обозначим эти части через G_1 и G_2 .

4.2.1 Частные решения предельных задач первого рода

В области G_1 существует ограниченное решение V_1 , удовлетворяющее условиям излучения

$$V_1(x) = U_1^+(x) + S_{11}^0 U_1^-(x) + O(\exp(-\delta x_1)), \quad x_1 \rightarrow +\infty, \quad (4.12)$$

при произвольно малом положительном δ . Матрица рассеяния в области G_1 состоит из единственного элемента S_{11}^0 , $|S_{11}^0| = 1$. Решение V_1 служит первым приближением для волновой функции u_1 , определенной условиями излучения (4.4). В

окрестности точки O справедлива асимптотика

$$V_1(x) = s_1 \frac{1}{\sqrt{r}} \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr) \Phi_1^K(\varphi) + O(r^{\mu_2}), \quad r \rightarrow 0. \quad (4.13)$$

Рассмотрим аналогичное решение в G_2 , допускающее разложения

$$V_2(x) = \begin{cases} U_2^-(x) + S_{22}^0 U_2^-(x) + O(e^{\delta x_1}), & x_1 \rightarrow -\infty, \\ s_2 \frac{1}{\sqrt{r}} \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr) \Phi_1^L(\varphi) + O(r^{\mu_2}), & r \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Мы считаем, что однородные задачи (4.6) (при $f = 0$) в областях G_1 и G_2 не имеют нетривиальных ограниченных решений, экспоненциально затухающих на бесконечности. В дальнейшем мы используем для построения асимптотики волновой функции специальные решения этой задачи, неограниченные в точке O .

Рассмотрим задачу

$$-\Delta u - k^2 u = 0 \text{ в } K, \quad u = 0 \text{ на } \partial K. \quad (4.15)$$

Функция

$$v_1^K(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) \Phi_1^K(\varphi) \quad (4.16)$$

удовлетворяет (4.15); \tilde{N}_μ обозначает функцию Неймана, умноженную на такую постоянную, что

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) = r^{-\mu_1-1} + o(r^{-\mu_1-1}),$$

μ_1 и Φ_1^K — те же, что в предложении 4.1.2. Пусть $t \mapsto \Theta(t)$ — срезающая функция на \mathbb{R} , равная 1 при $t < \delta/2$ и равная 0 при $t > \delta$, где δ — малое положительное число. Введем решение

$$\mathbf{v}_1(x) = \Theta(r) v_1^K(x) + \tilde{v}_1(x) \quad (4.17)$$

однородной задачи (4.6) в G_1 , где \tilde{v}_1 — решение задачи (4.6) с правой частью $f = [\Delta, \Theta] v_1^K$, существование которого обеспечивается предложением 4.1.2. Тогда

$$\mathbf{v}_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}} (\tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) + a_1 \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr)) \Phi_1^K(\varphi) + O(r^{\mu_2}), & r \rightarrow 0, \\ A_1 U_1^-(x) + O(e^{-\delta x_1}), & x_1 \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.18)$$

где \tilde{J}_μ — та же функция, что и в предложениях 4.1.1 и 4.1.2. Аналогичное решение \mathbf{v}_2 в G_2 допускает разложения

$$\mathbf{v}_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}} (\tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) + a_2 \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr)) \Phi_1^L(\varphi) + O(r^{\mu_2}), & r \rightarrow 0, \\ A_2 U_2^-(x) + O(e^{\delta x_1}), & x_1 \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Лемма 4.2.1. *Справедливы равенства $|A_j|^2 = 2 \operatorname{Im} a_j$, $A_j = i \bar{s}_j S_{jj}^0$.*

Доказательство. Докажем лемму для $j = 1$; случай $j = 2$ рассматривается аналогично. Пусть $(u, v)_Q$ обозначает интеграл $\int_Q u(x) \overline{v(x)} dx$ и пусть $G_{N, \delta}$ — область $G_1 \cap \{x_1 < N\} \cap \{r > \delta\}$. По формуле Грина

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta \mathbf{v}_1 + k^2 \mathbf{v}_1)_{G_{N, \delta}} - (\mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}_1 + k^2 \mathbf{v}_1)_{G_{N, \delta}} \\ &= (\partial \mathbf{v}_1 / \partial n, \mathbf{v}_1)_{\partial G_{N, \delta}} - (\mathbf{v}_1, \partial \mathbf{v}_1 / \partial n)_{\partial G_{N, \delta}} = 2i \operatorname{Im} (\partial \mathbf{v}_1 / \partial n, \mathbf{v}_1)_E, \end{aligned}$$

где $E = (\partial G_{N, \delta} \cap \{x_1 = N\}) \cup (\partial G_{N, \delta} \cap \{r = \delta\})$. Учитывая (4.18) при $x_1 \rightarrow +\infty$ и нормировку (4.3), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} (\partial \mathbf{v}_1 / \partial n, \mathbf{v}_1)_{\partial G_{N, \delta} \cap \{x_1 = N\}} &= \operatorname{Im} \int_{D_1} A_1 \frac{\partial U_1^-}{\partial x_1}(x) \overline{A_1 U_1^-(x)} \Big|_{x_1=N} dx_2 dx_3 + o(1) \\ &= |A_1|^2 \nu_1 \int_{D_1} |\Psi_1(x_2, x_3)|^2 dx_2 dx_3 + o(1) = |A_1|^2 / 2 + o(1). \end{aligned}$$

Воспользуемся (4.18) при $r \rightarrow 0$ и нормировкой функции Φ_1^K (см. предложение 4.1.2) и получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} (\partial \mathbf{v}_1 / \partial n, \mathbf{v}_1)_{\partial G_{N, \delta} \cap \{r = \delta\}} &= \operatorname{Im} \int_{S(K)} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r}} (\tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) + a_1 \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr)) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{r}} (\tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) + \bar{a}_1 \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr)) |\Phi_1^K(\varphi)|^2 r^2 \Big|_{r=\delta} d\varphi + o(1) \\ &= -(\operatorname{Im} a_1)(2\mu_1 + 1) \int_{G_{N, \delta}} |\Phi_1^K(\varphi)|^2 d\varphi + o(1) = -\operatorname{Im} a_1 + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, $|A_1|^2 / 2 - \operatorname{Im} a_1 + o(1) = 0$ при $N \rightarrow \infty$ и $\delta \rightarrow 0$, откуда следует первое равенство леммы. Для того, чтобы получить второе, применим формулу Грина в области $G_{N, \delta}$ к функциям \mathbf{v}_1 и V_1 и придем к соотношению $i A_1 \overline{S_{11}^0} + \bar{s}_1 + o(1) = 0$ при $N \rightarrow \infty$ и $\delta \rightarrow 0$. Остается учесть, что $\overline{S_{11}^0} = 1/S_{11}^0$. \square

4.2.2 Переход через сужение

Пусть v_1 и v_2 удовлетворяют предельным задачам первого рода в областях G_1 и G_2 , соответственно, и пусть

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(a_1^- \tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) + a_1^+ \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr) \right) \Phi_1^K(\varphi) + O(r^{\mu_2}), \quad r \rightarrow 0, \quad (4.19)$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(a_2^- \tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) + a_2^+ \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr) \right) \Phi_1^L(\varphi) + O(r^{\mu_2}), \quad r \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

Предположим, что приближением для волновой функции вдали от сужения волновода $G(\varepsilon)$ служит решение v_1 в области G_1 и решение v_2 — в G_2 . Для того, чтобы установить связь между коэффициентами a_1^\pm и a_2^\pm , мы построим старший член асимптотики волновой функции при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для этой цели мы используем метод составных асимптотических разложений. Введем срезку $\chi_{\varepsilon,1}(x) = (1 - \Theta(\varepsilon^{-1}r)) \mathbf{1}_{G_1}(x)$, где Θ — та же, что в (4.17), а $\mathbf{1}_{G_1}$ — характеристическая функция множества G_1 (равна единице в G_1 и нулю вне G_1). Продолжим $\chi_{\varepsilon,1}v_1$ нулем на всю область $G(\varepsilon)$ и подставим в задачу (4.1) с заменой $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ на $G(\varepsilon)$. В уравнении возникает невязка

$$-(\Delta + k^2)\chi_{\varepsilon,1}v_1 = -[\Delta, \chi_{\varepsilon,1}]v_1 - \chi_{\varepsilon,1}(\Delta + k^2)v_1 = -[\Delta, 1 - \Theta(\varepsilon^{-1}r)]v_1,$$

причем краевое условие выполнено. Эта невязка отлична от нуля только вблизи сужения, где v_1 можно заменить на его асимптотику. Тогда при $\rho = \varepsilon^{-1}r$ имеем

$$\begin{aligned} -(\Delta + k^2)\chi_{\varepsilon,1}v_1 &\sim -[\Delta, 1 - \Theta(\varepsilon^{-1}r)] \left(a_1^- r^{-\mu_1-1} + a_1^+ r^{\mu_1} \right) \Phi_1^K(\varphi) \\ &= -\varepsilon^{-2}[\Delta_{(\rho, \varphi)}, \zeta^K(\rho)] \left(a_1^- \varepsilon^{-\mu_1-1} \rho^{-\mu_1-1} + a_1^+ \varepsilon^{\mu_1} \rho^{\mu_1} \right) \Phi_1^K(\varphi); \end{aligned}$$

ζ^K обозначает функцию $1 - \Theta$, суженную на конус K и затем продолженную нулем на всю Ω . Аналогичным образом введем срезку $\chi_{\varepsilon,2}(x) = (1 - \Theta(\varepsilon^{-1}r)) \mathbf{1}_{G_2}(x)$ и продолжим $\chi_{\varepsilon,2}v_2$ нулем на $G(\varepsilon)$. Тогда, ввиду (4.20),

$$-(\Delta + k^2)\chi_{\varepsilon,2}v_2 \sim -\varepsilon^{-2}[\Delta_{(\rho, \varphi)}, \zeta^L(\rho)] \left(a_2^- \varepsilon^{-\mu_1-1} \rho^{-\mu_1-1} + a_2^+ \varepsilon^{\mu_1} \rho^{\mu_1} \right) \Phi_2^L(\varphi),$$

где $\zeta^L = 1 - \Theta - \zeta^K$. Введем еще решение w задачи (4.9) в Ω с правой частью

$$\begin{aligned} F(\rho, \varphi) &= -[\Delta, \zeta^K] \left(a_1^- \varepsilon^{-\mu_1-1} \rho_1^{-\mu_1-1} + a_1^+ \varepsilon^{\mu_1} \rho_1^{\mu_1} \right) \Phi_1^K(\varphi) \\ &\quad - [\Delta, \zeta^L] \left(a_2^- \varepsilon^{-\mu_1-1} \rho_1^{-\mu_1-1} + a_2^+ \varepsilon^{\mu_1} \rho_1^{\mu_1} \right) \Phi_1^L(\varphi) \end{aligned} \quad (4.21)$$

и подставим $\chi_{\varepsilon,1}(x)v_1(x) + \Theta(r)w(\varepsilon^{-1}x) + \chi_{\varepsilon,2}(x)v_2(x)$ в задачу (4.1) (в волноводе $G(\varepsilon)$):

$$\begin{aligned} & (\Delta + k^2) (\chi_{\varepsilon,2}(x)v_2(x) + \Theta(r)w(\varepsilon^{-1}x) + \chi_{\varepsilon,2}(x)v_2(x)) \\ &= [\Delta, \chi_{\varepsilon,1}(x)] (v_1(x) - (a_1^- r^{-\mu_1-1} + a_1^+ r^{\mu_1}) \Phi_1^K(\varphi)) \\ &+ [\Delta, \Theta(r)]w(\varepsilon^{-1}x) + k^2\Theta(r)w(\varepsilon^{-1}x) \\ &+ [\Delta, \chi_{\varepsilon,2}(x)] (v_2(x) - (a_2^- r^{-\mu_1-1} + a_2^+ r^{\mu_1}) \Phi_1^L(\varphi)). \end{aligned}$$

Таким образом, старшие члены невязок, возникших от слагаемых $\chi_{\varepsilon,j}v_j$, скомпенсированы. В доказательстве теоремы 4.2.6 будет показано, что слагаемое $k^2\Theta w$ мало. Чтобы слагаемое $[\Delta, \Theta(r)]w$ также было малым, необходимо, чтобы w убывало на бесконечности достаточно быстро. Предложение 4.1.3 гарантирует, что w допускает оценку $w = O(\rho^{-\mu_1-1})$ при $\rho \rightarrow +\infty$. Однако в этом случае $[\Delta, \Theta(r)]w$ имеет тот же порядок, что и только что скомпенсированные слагаемые. Поэтому мы требуем, чтобы $w = O(\rho^{-\mu_2-1})$ при $\rho \rightarrow +\infty$.

Лемма 4.2.2. Пусть решение w задачи (4.9) с правой частью

$$\begin{aligned} F(\xi) &= - [\Delta, \zeta^K] \left(a_1^- \varepsilon^{-\mu_1-1} \rho_j^{-\mu_1-1} + a_1^+ \varepsilon^{\mu_1} \rho^{\mu_1} \right) \Phi_1^K(\varphi) \\ &\quad - [\Delta, \zeta^L] \left(a_2^- \varepsilon^{-\mu_1-1} \rho^{-\mu_1-1} + a_2^+ \varepsilon^{\mu_1} \rho^{\mu_1} \right) \Phi_1^L(\varphi) \end{aligned}$$

допускает оценку $O(\rho^{-\mu_2-1})$ при $\rho \rightarrow \infty$. Тогда

$$a_1^- \varepsilon^{-\mu_1-1} - \alpha a_1^+ \varepsilon^{\mu_1} - \beta a_2^+ \varepsilon^{\mu_1} = 0, \quad a_2^- \varepsilon^{-\mu_1-1} - \alpha a_2^+ \varepsilon^{\mu_1} - \beta a_1^+ \varepsilon^{\mu_1} = 0, \quad (4.22)$$

где α и β — коэффициенты в разложениях (4.10) и (4.11).

Доказательство. По предложению 4.1.3 оценка $w = O(\rho^{-\mu_2-1})$ при $\rho \rightarrow \infty$ верна, если и только если правая часть задачи (4.9) удовлетворяет условиям

$$(F, w^K)_\Omega = 0, \quad (F, w^L)_\Omega = 0, \quad (4.23)$$

где w^K и w^L — решения однородной задачи (4.9), определенные разложениями (4.10) и (4.11). Введем следующие функции в Ω :

$$f_\pm^K(\rho, \varphi) = \rho^{\pm(\mu_1+1/2)-1/2} \Phi_1^K(\varphi), \quad f_\pm^L(\rho, \varphi) = \rho^{\pm(\mu_1+1/2)-1/2} \Phi_1^L(\varphi).$$

Для того, чтобы вывести (4.22) из (4.23), достаточно проверить, что

$$\begin{aligned}([\Delta, \zeta^K] f_-^K, w^K)_\Omega &= ([\Delta, \zeta^L] f_-^L, w^L)_\Omega = -1, \\([\Delta, \zeta^K] f_+^K, w^K)_\Omega &= ([\Delta, \zeta^L] f_+^L, w^L)_\Omega = \alpha, \\([\Delta, \zeta^L] f_-^L, w^K)_\Omega &= ([\Delta, \zeta^K] f_-^K, w^L)_\Omega = 0, \\([\Delta, \zeta^L] f_+^L, w^K)_\Omega &= ([\Delta, \zeta^K] f_+^K, w^L)_\Omega = \beta.\end{aligned}$$

Проверим первое из этих равенств, остальные рассматриваются аналогично. Носитель функции $[\Delta, \zeta^K] f_-^K$ компактен, поэтому при вычислении $([\Delta, \zeta^K] f_-^K, w^K)_\Omega$ можно заменить Ω на $\Omega^R = \Omega \cap \{\rho < R\}$ при достаточно большом R . Обозначим через E множество $\partial\Omega^R \cap \{\rho = R\} \cap K$. По формуле Грина

$$\begin{aligned}([\Delta, \zeta^K] f_-^K, w^K)_\Omega &= (\Delta \zeta^K f_-^K, w^K)_{\Omega^R} - (\zeta^K f_-^K, \Delta w^K)_{\Omega^R} \\ &= (\partial f_-^K / \partial n, w^K)_E - (f_-^K, \partial w^K / \partial n)_E.\end{aligned}$$

Учитывая (4.10) в K и определение Φ_1^K в предложении 4.1.2, получаем

$$\begin{aligned}([\Delta, \zeta^K] f_-^K, w^K)_\Omega &= \left[\frac{\partial \rho^{-\mu_1-1}}{\partial \rho} (\rho^{\mu_1} + \alpha \rho^{-\mu_1-1}) - \rho^{-\mu_1-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{\mu_1} + \alpha \rho^{-\mu_1-1}) \right] \rho^2 \Big|_{\rho=R} \\ &\times \int_{S(K)} \Phi_1^K(\varphi)^2 d\varphi + o(1) = -(2\mu_1 + 1) \int_{S(K)} \Phi_1^K(\varphi)^2 d\varphi + o(1) = -1 + o(1).\end{aligned}$$

Остается устремить $R \rightarrow \infty$. \square

Замечание 4.2.3. Решение w , упомянутое в лемме 4.2.2, можно представить в виде линейной комбинации некоторых модельных функций, не зависящих от ε . Мы приводим соответствующее выражение, так как оно понадобится в дальнейшем при оценке остатков в асимптотических формулах. Пусть w^K и w^L — решения задачи (4.9), заданные разложениями (4.10) и (4.11), и пусть ζ^K, ζ^L — те же срезки, что в (4.21). Положим

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^K &= w^K - \zeta^K (\rho^{\mu_1} + \alpha \rho^{-\mu_1-1}) \Phi_1^K(\varphi) - \zeta^L \beta \rho^{-\mu_1-1} \Phi_1^L(\varphi), \\ \mathbf{w}^L &= w^L - \zeta^K \beta \rho^{-\mu_1-1} \Phi_1^K(\varphi) - \zeta^L (\rho^{\mu_1} + \alpha \rho^{-\mu_1-1}) \Phi_1^L(\varphi).\end{aligned}$$

Прямая проверка показывает, что

$$w = a_1^+ \varepsilon^{\mu_1} \mathbf{w}^K + a_2^+ \varepsilon^{\mu_1} \mathbf{w}^L. \quad \square \tag{4.24}$$

Удобно переписать (4.22) в матричной форме

$$(a_1^-, a_2^-) = (a_1^+, a_2^+) \Lambda \varepsilon^{2\mu_1+1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

4.2.3 Асимптотические формулы

Пусть волновая функция u_1 (см. (4.4)) приближается в G_1 решением $v_1 = V_1 + C_{11}\mathbf{v}_1$, а в G_2 — решением $v_2 = C_{12}\mathbf{v}_2$ однородных предельных задач. Специальные решения V_1, \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 определены в п. 4.2.1. Постоянные C_{11} и C_{12} пока неизвестны, мы найдем их позднее. Согласно (4.13) и (4.18), при $r \rightarrow 0$ мы имеем

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{r}} (C_{11} \tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) + (s_1 + C_{11}a_1) \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr)) \Phi_1^K(\varphi) + O(r^{\mu_2}), \quad r \rightarrow 0,$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{r}} (C_{12} \tilde{N}_{\mu_1+1/2}(kr) + C_{12} a_2 \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr)) \Phi_1^L(\varphi) + O(r^{\mu_2}), \quad r \rightarrow 0,$$

то есть v_1 и v_2 допускают разложения вида (4.19) и (4.20) с постоянными

$$(a_1^-, a_2^-) = (C_{11}, C_{12}), \quad (a_1^+, a_2^+) = (s_1 + C_{11}a_1, C_{12}a_2). \quad (4.26)$$

Как показано в п. 4.2.2, эти постоянны должны подчиняться соотношениям

$$(C_{11}, C_{12}) = (s_1 + C_{11}a_1, C_{12}a_2) \Lambda \varepsilon^{2\mu_1+1}.$$

Введем матрицу $a = \text{diag}(a_1, a_2)$ и, учитывая, что $\Lambda(I - A\Lambda)^{-1} = (I - \Lambda A)^{-1}\Lambda$ при $A = a \varepsilon^{2\mu_1+1}$, получим

$$(C_{11}(\varepsilon), C_{12}(\varepsilon)) = (s_1, 0)(I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1} \Lambda \varepsilon^{2\mu_1+1}. \quad (4.27)$$

В силу (4.12) и (4.18) при $x_1^1 \rightarrow +\infty$,

$$v_1(x^1) = U_1^+(x^1) + (S_{11}^0 + C_{11}(\varepsilon)A_1)U_1^-(x^1) + O(\exp(-\delta x_1^1)), \quad x_1^1 \rightarrow +\infty,$$

$$v_2(x^2) = C_{12}(\varepsilon)A_2U_2^-(x^2) + O(\exp(-\delta x_1^2)), \quad x_1^2 \rightarrow +\infty.$$

Отсюда находим приближение $(\tilde{S}_{11}, \tilde{S}_{12})$ для первой строки матрицы рассеяния:

$$(\tilde{S}_{11}(\varepsilon), \tilde{S}_{12}(\varepsilon)) = (S_{11}^0 + C_{11}(\varepsilon)A_1, C_{12}(\varepsilon)A_2) = (S_{11}^0, 0) + (C_{11}(\varepsilon), C_{12}(\varepsilon))A,$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2)$. Положим $s = \text{diag}(s_1, s_2)$ и $S^0 = \text{diag}(S_{11}^0, S_{22}^0)$, тогда по лемме 4.2.1

$$A = i s^* S^0. \quad (4.28)$$

Ввиду (4.27) и (4.28) получаем

$$(\tilde{S}_{11}(\varepsilon), \tilde{S}_{12}(\varepsilon)) = (S_{11}^0, 0) + i(s_1, 0)(I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1} \Lambda s^* S^0 \varepsilon^{2\mu_1+1}. \quad (4.29)$$

Приближение для волновой функции имеет вид

$$\tilde{u}_1(x; \varepsilon) = \chi_{\varepsilon,1}(x)v_1(x; \varepsilon) + \Theta(r)w(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon) + \chi_{\varepsilon,2}(x)v_2(x; \varepsilon), \quad (4.30)$$

где, согласно (4.24),

$$\begin{aligned} v_1(x; \varepsilon) &= V_1(x) + C_{11}(\varepsilon)\mathbf{v}_1(x), \\ w(\xi; \varepsilon) &= a_1^+(\varepsilon)\varepsilon^{\mu_1}\mathbf{w}^K(\xi) + a_2^+(\varepsilon)\varepsilon^{\mu_1}\mathbf{w}^L(\xi), \\ v_2(x; \varepsilon) &= C_{12}(\varepsilon)\mathbf{v}_2(x). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Из (4.26) и (4.27) следует, что

$$(a_1^+(\varepsilon), a_2^+(\varepsilon)) = (s_1, 0) + (s_1, 0)(I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1} \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1}. \quad (4.32)$$

Принимая во внимание равенство $I + (I - B)^{-1}B = (I - B)^{-1}$ при $B = a \Lambda \varepsilon^{2\mu_1+1}$, имеем

$$(a_1^+(\varepsilon), a_2^+(\varepsilon)) = (s_1, 0) (I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1}.$$

Приближение \tilde{u}_2 для волновой функции (4.5) выводится тем же путем. Оно имеет вид (4.30), где

$$\begin{aligned} v_1(x; \varepsilon) &= C_{21}(\varepsilon)\mathbf{v}_1(x), \\ w(\xi; \varepsilon) &= a_1^+(\varepsilon)\varepsilon^{\mu_1}\mathbf{w}^K(\xi) + a_2^+(\varepsilon)\varepsilon^{\mu_1}\mathbf{w}^L(\xi), \\ v_2(x; \varepsilon) &= V_2(x) + C_{22}(\varepsilon)\mathbf{v}_2(x). \end{aligned}$$

Функции v_1 и v_2 допускают вблизи точки O разложения вида (4.19) и (4.20) с постоянными

$$(a_1^-, a_2^-) = (C_{21}, C_{22}), \quad (a_1^+, a_2^+) = (C_{21}a_1, s_2 + C_{22}a_2),$$

связанными равенством

$$(C_{21}, C_{22}) = (C_{21}a_1, s_2 + C_{22}a_2) \Lambda \varepsilon^{2\mu_1+1}$$

(см. (4.25)). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}(C_{21}(\varepsilon), C_{22}(\varepsilon)) &= (0, s_2)(I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1} \Lambda \varepsilon^{2\mu_1+1}, \\ (a_1^+(\varepsilon), a_2^+(\varepsilon)) &= (0, s_2)(I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1}.\end{aligned}$$

Используя разложения (4.12) и (4.18) при $x_1^1 \rightarrow +\infty$ и формулы для C_{21} и C_{22} , мы получаем приближение для второй строки матрицы рассеяния:

$$(\tilde{S}_{21}(\varepsilon), \tilde{S}_{22}(\varepsilon)) = (0, S_{22}^0) + i(0, s_2)(I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1} \Lambda s^* S^0 \varepsilon^{2\mu_1+1}. \quad (4.33)$$

Положим $\tilde{S} = \|\tilde{S}_{pq}\|_{p,q=1,2}$ и объединим (4.29) и (4.33) в матричное равенство

$$\tilde{S}(\varepsilon) = S^0 + is(I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1} \Lambda s^* S^0 \varepsilon^{2\mu_1+1}. \quad (4.34)$$

Лемма 4.2.4. Матрица $\tilde{S}(\varepsilon)$ унитарная.

Доказательство. Временно обозначим матрицу $(I - a \Lambda \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1} \Lambda$ через B . Так как $(S^0)^* S^0 = I$, то

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\varepsilon) \tilde{S}(\varepsilon)^* &= \tilde{S}(\varepsilon)(S^0)^* S^0 \tilde{S}(\varepsilon)^* = (I + isBs^* \varepsilon^{2\mu_1+1})(I - isB^* s^* \varepsilon^{2\mu_1+1}) \\ &= I + is(B - B^* - iBs^* sB^* \varepsilon^{2\mu_1+1})s^* \varepsilon^{2\mu_1+1}.\end{aligned}$$

Нам нужно проверить, что $B - B^* - iBs^* sB^* \varepsilon^{2\mu_1+1} = 0$. По лемме 4.2.1,

$$a - a^* = iAA^* = i(is^* S^0)(is^* S^0)^* = is^* s$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}B - B^* - iBs^* sB^* \varepsilon^{2\mu_1+1} &= B - B^* - B(a - a^*)B^* \varepsilon^{2\mu_1+1} \\ &= B(I + a^* B^* \varepsilon^{2\mu_1+1}) - (I + Ba \varepsilon^{2\mu_1+1})B^*.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}I + Ba \varepsilon^{2\mu_1+1} &= I + (I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1} \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1} = (I - \Lambda a \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1}, \\ I + a^* B^* \varepsilon^{2\mu_1+1} &= (I + Ba \varepsilon^{2\mu_1+1})^* = (I - a^* \Lambda \varepsilon^{2\mu_1+1})^{-1},\end{aligned}$$

откуда $B(I + a^* B^* \varepsilon^{2\mu_1+1}) - (I + Ba \varepsilon^{2\mu_1+1})B^* = 0$. \square

Положим $\tilde{T}_1(\varepsilon) = |\tilde{S}_{12}(\varepsilon)|^2$ и $\tilde{T}_2(\varepsilon) = |\tilde{S}_{21}(\varepsilon)|^2$. Согласно (4.34),

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\varepsilon) &= S^0 + is\Lambda s^* S^0 \varepsilon^{2\mu_1+1} + O(\varepsilon^{4\mu_1+2}) \\ &= \begin{pmatrix} S_{11}^0 & 0 \\ 0 & S_{22}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |s_1|^2 \alpha S_{11}^0 & s_1 \bar{s}_2 \beta S_{22}^0 \\ s_2 \bar{s}_1 \beta S_{11}^0 & |s_2|^2 \alpha S_{22}^0 \end{pmatrix} \varepsilon^{2\mu_1+1} + O(\varepsilon^{4\mu_1+2}).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\tilde{T}_1(\varepsilon) = \tilde{T}_2(\varepsilon) = |s_1|^2 |s_2|^2 \beta^2 \varepsilon^{4\mu_1+2} + O(\varepsilon^{6\mu_1+3}). \quad (4.35)$$

По лемме 4.2.4, $\tilde{R}_p(\varepsilon) + \tilde{T}_p(\varepsilon) = 1$, где $\tilde{R}_p(\varepsilon) = |\tilde{S}_{pp}^0(\varepsilon)|^2$, $p = 1, 2$, и

$$\tilde{R}_1(\varepsilon) = \tilde{R}_2(\varepsilon) = 1 - |s_1|^2 |s_2|^2 \beta^2 \varepsilon^{4\mu_1+2} + O(\varepsilon^{6\mu_1+3}).$$

Подчеркнем, что остатки в полученных формулах обозначают лишь отброшенные слагаемые в точных формулах и не отражают разницу между оставшимися членами и истинными значениями интересующих нас величин. Эта разница будет оценена в следующем пункте (см. теорему 4.2.7).

4.2.4 Оценки остатков

Введем функциональные пространства для задачи

$$-\Delta u - k^2 u = f \text{ в } G(\varepsilon), \quad u = 0 \text{ на } \partial G(\varepsilon). \quad (4.36)$$

Пусть Θ — та же срезка, что была определена перед (4.17), и пусть срезки η_j , $j = 1, 2$, сосредоточены в G_j и удовлетворяют равенству $\eta_1(x) + \Theta(r) + \eta_2(x) = 1$ in $G(\varepsilon)$. Для любых $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и $l = 0, 1, \dots$ определим пространство $V_{\gamma, \delta}^l(G(\varepsilon))$ как пополнение по норме

$$\|v; V_{\gamma, \delta}^l(G(\varepsilon))\| = \left(\int_{G(\varepsilon)} \sum_{|\alpha|=0}^l \left(\Theta^2 (r^2 + \varepsilon^2)^{\gamma-l+|\alpha|} + \sum_{j=1}^2 \eta_j^2 e^{2\delta x_1^j} \right) |\partial^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2}$$

множества гладких функций на $\overline{G(\varepsilon)}$ с компактным носителем. Следующее предложение можно получить, используя (несколько упрощенные) рассуждения из доказательства предложения 4.3.3 ниже (которое, в свою очередь, является модификацией доказательства теоремы 5.1.1 [37]).

Предложение 4.2.5. Пусть $|\gamma - 1| < \mu_1 + 1/2$, $f \in V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))$, и пусть u — решение задачи (4.36), допускающее представление

$$u = \tilde{u} + \eta_1 A_1^- U_1^- + \eta_2 A_2^- U_2^-,$$

где $A_j^- = \text{const}$ и $\tilde{u} \in V_{\gamma, \delta}^2(G(\varepsilon))$, δ — достаточно малое положительное число. Тогда

$$\|\tilde{u}; V_{\gamma, \delta}^2(G(\varepsilon))\| + |A_1^-| + |A_2^-| \leq c \|f; V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\| \quad (4.37)$$

с постоянной c , не зависящей от f и ε .

Теорема 4.2.6. В условиях предложения 4.1.2 справедливо неравенство

$$|S_{p1}(\varepsilon) - \tilde{S}_{p1}(\varepsilon)| + |S_{p2}(\varepsilon) - \tilde{S}_{p2}(\varepsilon)| \leq c(\varepsilon^{\mu_2+1} + \varepsilon^{\gamma+3/2})\varepsilon^{\mu_1},$$

где $p = 1, 2$, $\gamma > 0$, $|\gamma - 1| < \mu_1 + 1/2$, постоянная c не зависит от ε .

Доказательство. Проверим, например, неравенство при $p = 1$. Разность $u_1 - \tilde{u}_1$ удовлетворяет задаче (4.36), где, согласно (4.30),

$$\begin{aligned} f(x; \varepsilon) = & [\Delta, \chi_{\varepsilon, 1}] (v_1(x; \varepsilon) - (a_1^-(\varepsilon)r^{-\mu_1-1} + a_1^+(\varepsilon)r^{\mu_1})\Phi_1^K(\varphi)) \\ & + [\Delta, \chi_{\varepsilon, 2}] (v_2(x; \varepsilon) - (a_2^-(\varepsilon)r^{-\mu_1-1} + a_2^+(\varepsilon)r^{\mu_1})\Phi_1^L(\varphi)) \\ & + [\Delta, \Theta] w(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon) + k^2 \Theta(r) w(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon). \end{aligned}$$

Кроме того, асимптотика разности $u - \tilde{u}$ содержит только уходящие волны. Чтобы применить предложение 4.2.5, нам нужно оценить $\|f; V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\|$. Учитывая асимптотику v_1 при $r \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} \|x \mapsto & [\Delta, \chi_{\varepsilon, 1}] (v_1(x; \varepsilon) - (a_1^-(\varepsilon)r^{-\mu_1-1} + a_1^+(\varepsilon)r^{\mu_1})\Phi_1^K(\varphi)); V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\|^2 \\ & \leq c \int_{G(\varepsilon)} (r^2 + \varepsilon^2)^\gamma |[\Delta, \chi_{\varepsilon, 1}] (a_1^-(\varepsilon)r^{-\mu_1+1} + a_1^+(\varepsilon)r^{\mu_1+2})\Phi_1^K(\varphi)|^2 dx. \end{aligned}$$

Сделаем замену $\xi = \varepsilon^{-1}x$ и учтем (4.25), тогда

$$\begin{aligned} \|x \mapsto & [\Delta, \chi_{\varepsilon, 1}] (v_1(x; \varepsilon) - (a_1^-(\varepsilon)r^{-\mu_1-1} + a_1^+(\varepsilon)r^{\mu_1})\Phi_1^K(\varphi)); V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\| \\ & \leq c\varepsilon^{\gamma+3/2} (|a_1^-(\varepsilon)|\varepsilon^{-\mu_1-1} + |a_1^+(\varepsilon)|\varepsilon^{\mu_1}) \leq c|a_1^+(\varepsilon)|\varepsilon^{\gamma+\mu_1+3/2}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \|x \mapsto [\Delta, \chi_{\varepsilon, 2}] (v_2(x; \varepsilon) - (a_2^-(\varepsilon)r^{-\mu_1-1} + a_2^+(\varepsilon)r^{\mu_1})\Phi_1^L(\varphi)); V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\| \\ \leq c|a_2^+(\varepsilon)|\varepsilon^{\gamma+\mu_1+3/2}. \end{aligned}$$

Ввиду (4.31) и того обстоятельства, что \mathbf{w}^\pm ведет себя на бесконечности, как $O(\rho^{-\mu_2-1})$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{G(\varepsilon)} (r^2 + \varepsilon^2)^\gamma |[\Delta, \Theta]w(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon)|^2 dx &\leq c\varepsilon^{2\mu_1} (|a_1^+(\varepsilon)| + |a_2^+(\varepsilon)|)^2 \\ &\times \left(\int_K (r^2 + \varepsilon^2)^\gamma |[\Delta, \Theta](\varepsilon^{-1}r)^{-\mu_2-1}\Phi_2^K(\varphi)|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_L (r^2 + \varepsilon^2)^\gamma |[\Delta, \Theta](\varepsilon^{-1}r)^{-\mu_2-1}\Phi_2^L(\varphi)|^2 dx \right) \\ &\leq c (|a_1^+(\varepsilon)| + |a_2^+(\varepsilon)|)^2 \varepsilon^{2\mu_1+2\mu_2+2}. \end{aligned}$$

Наконец, снова учитывая (4.31), видим, что

$$\begin{aligned} \int_{G(\varepsilon)} (r^2 + \varepsilon^2)^\gamma |\Theta(r)w(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon)|^2 dx &= \varepsilon^{2\gamma+3} \int_\Omega (\rho^2 + 1)^\gamma |\Theta(\varepsilon\rho)w(\xi; \varepsilon)|^2 d\xi \\ &\leq c (|a_1^+(\varepsilon)| + |a_2^+(\varepsilon)|)^2 \varepsilon^{2\mu_1+2\gamma+3}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные оценки, мы приходим к

$$\|f; V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\| \leq c(|a_1^+(\varepsilon)| + |a_2^+(\varepsilon)|) (\varepsilon^{\mu_2+1} + \varepsilon^{\gamma+3/2}) \varepsilon^{\mu_1}. \quad (4.38)$$

Теперь применим предложение 4.2.5 к функции $u_1 - \tilde{u}_1$. В (4.37) нужно заменить u и A_j^- на $u_1 - \tilde{u}_1$ и $S_{1j} - \tilde{S}_{1j}$. Из (4.38) и оценок $a_1^+ = O(\varepsilon^{2\mu_1+1})$, $a_2^+ = O(1)$ (см. (4.32)) получаем

$$|S_{11}(\varepsilon) - \tilde{S}_{11}(\varepsilon)| + |S_{12}(\varepsilon) - \tilde{S}_{12}(\varepsilon)| \leq \|u - \tilde{u}; V_{\gamma, \delta, -}^2(G(\varepsilon))\| \leq c(\varepsilon^{\mu_2+1} + \varepsilon^{\gamma+3/2}) \varepsilon^{\mu_1}. \quad \square$$

Теорема 4.2.7. *Асимптотические формулы*

$$\begin{aligned} T_p(\varepsilon) &= |s_1|^2 |s_2|^2 \beta^2 \varepsilon^{4\mu_1+2} + O(\varepsilon^{4\mu_1+2+\tau}), \\ R_p(\varepsilon) &= 1 - |s_1|^2 |s_2|^2 \beta^2 \varepsilon^{4\mu_1+2} + O(\varepsilon^{4\mu_1+2+\tau}) \end{aligned}$$

справедливы при $p = 1, 2$ и $\tau = \min\{\mu_2 - \mu_1, 2 - \sigma\}$, где σ — малое положительное число.

Доказательство. теорема 4.2.6 приводит к оценке $|S_{p2} - \tilde{S}_{p2}| \leq c\varepsilon^{2\mu_1+1+\tau}$ при $\tau = \min\{\mu_2 - \mu_1, 2 - \sigma\}$ и $\sigma = \mu_1 + 3/2 - \gamma$. Поэтому

$$|T_p - \tilde{T}_p| \leq c|\tilde{S}_{p2}||S_{p2} - \tilde{S}_{p2}| \leq c\varepsilon^{4\mu_1+2+\tau}.$$

Чтобы получить формулу для T_p , нужно лишь учесть (4.35). Разложение для R_p следует из равенства $R_p + T_p = 1$. \square

4.3 Туннелирование в волноводе с двумя сужениями

Обратимся к волноводу $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с двумя сужениями. Предельная область $G(0,0)$ состоит из бесконечных областей G_1, G_2 и ограниченного резонатора G_0 . Предполагаем, что k^2 меняется в окрестности собственного числа k_e^2 предельной задачи (4.6) в G_0 . Для простоты считаем, что собственное число невырожденное.

4.3.1 Специальные решения задачи в резонаторе

Пусть k_e^2 — простое собственное число оператора $-\Delta$ с краевым условием Дирихле в области G_0 и пусть v_e — собственная функция, отвечающая числу k_e^2 и нормированная условием $\int_{G_0} |v_e|^2 dx = 1$. По предложению 4.1.1,

$$v_e(x) \sim \begin{cases} b_1 r_1^{-1/2} \tilde{J}_{\mu_{11}+1/2}(k_e r_1) \Phi_{11}^L(\varphi_1) & \text{near } O_1, \\ b_2 r_2^{-1/2} \tilde{J}_{\mu_{21}+1/2}(k_e r_2) \Phi_{21}^L(\varphi_2) & \text{near } O_2, \end{cases} \quad (4.39)$$

где (r_j, φ_j) — полярные координаты с началом в O_j , $\mu_{j1}(\mu_{j1} + 1)$ и Φ_{j1}^L — первое собственное число и отвечающая ему собственная функция оператора Лапласа-Бельтрами на образующей конуса L_j , причем $(2\mu_{j1} + 1) \int |\Phi_{j1}^L|^2 d\varphi = 1$. Для всех k^2 из проколотой окрестности числа k_e^2 , отделенной от других собственных чисел задачи в резонаторе, введем решения \mathbf{v}_{0j} однородной задачи (4.6) в G_0 ,

$$\mathbf{v}_{0j}(x) = \Theta(r_j) v_{j1}^L(r_j, \varphi_j) + \tilde{v}_{0j}(x), \quad j = 1, 2, \quad (4.40)$$

где $t \mapsto \Theta(t)$ — срезка на \mathbb{R} , равная 1 при $t < \delta/2$ и 0 при $t > \delta$, δ — малое положительное число, v_{j1}^L определены соотношением (4.16) с L_j вместо K_j и \tilde{v}_{0j} — ограниченное решение задачи (4.6) в G_0 с правой частью $f = [\Delta, \Theta] v_{j1}^L$.

Лемма 4.3.1. В любой окрестности $V \subset \mathbb{C}$ числа k_e^2 , отделенной от других собственных чисел задачи (4.6) в G_0 , справедливы соотношения $\mathbf{v}_{0j}(x) = -b_j(k^2 -$

$k_e^2)^{-1}v_e(x) + \widehat{v}_{0j}(x)$, где b_j определены в (4.39), а функции \widehat{v}_{0j} аналитически зависят от $k^2 \in V$.

Доказательство. Сначала установим соотношение $(\mathbf{v}_{0j}, v_e)_{G_0} = -b_j/(k^2 - k_e^2)$, где \mathbf{v}_{0j} определена равенством (4.40). Пусть область G_δ получена из G_0 вырезанием шаров радиуса δ с центрами в точках O_1 и O_2 . Имеем

$$(\Delta \mathbf{v}_{0j} + k^2 \mathbf{v}_{0j}, v_e)_{G_\delta} - (\mathbf{v}_{0j}, \Delta v_e + k^2 v_e)_{G_\delta} = -(k^2 - k_e^2)(\mathbf{v}_{0j}, v_e)_{G_\delta}.$$

Применяя формулу Грина, как в доказательстве леммы 4.2.1, приходим к равенству $-(k^2 - k_e^2)(\mathbf{v}_{0j}, v_e)_{G_\delta} = b_j + o(1)$. Остается лишь устремить δ к нулю.

Так как k_e^2 — простое собственное число, то

$$\widetilde{v}_{0j}(x) = \frac{B_j(k^2)}{k^2 - k_e^2} v_e(x) + \widehat{v}_j(x), \quad (4.41)$$

где $B_j(k^2)$ не зависит от x , а \widehat{v}_j — некоторые функции, аналитичные по k^2 вблизи $k^2 = k_e^2$. Домножая (4.40) скалярно на v_e и учитывая (4.41), только что доказанную формулу для $(\mathbf{v}_{0j}, v_e)_{G_0}$ и условие нормировки $(v_e, v_e)_{G_0} = 1$, мы приходим к равенству $B_j(k^2) = -b_j + (k^2 - k_e^2)\widetilde{B}_j(k^2)$, где \widetilde{B}_j — аналитическая функция. Вместе с (4.41) оно приводит нас к утверждению леммы. \square

По предложению 4.1.1,

$$\mathbf{v}_{01}(x) \sim \begin{cases} r_1^{-1/2} (\widetilde{N}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1) + c_{11}(k)\widetilde{J}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1))\Phi_{11}^L(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ c_{12}(k)r_2^{-1/2}\widetilde{J}_{\mu_{21}+1/2}(kr_2)\Phi_{21}^L(\varphi_2), & r_2 \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{v}_{02}(x) \sim \begin{cases} r_1^{-1/2} c_{21}(k)\widetilde{J}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1)\Phi_{11}^L(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ r_2^{-1/2} (\widetilde{N}_{\mu_{21}+1/2}(kr_2) + c_{22}(k)\widetilde{J}_{\mu_{21}+1/2}(kr_2))\Phi_{21}^L(\varphi_2), & r_2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

В силу леммы 4.3.1 и формулы (4.39) получаем

$$c_{pq}(k) = -\frac{b_p b_q}{k^2 - k_e^2} + \widehat{c}_{pq}(k), \quad (4.44)$$

где \widehat{c}_{pq} аналитически зависит от k^2 вблизи k_e^2 .

Лемма 4.3.2. Если функции \mathbf{v}_{01} и \mathbf{v}_{02} из (4.42) и (4.43) определены при данном k , то $c_{12}(k) = c_{21}(k)$.

Доказательство. Достаточно применить формулу Грина к функциям \mathbf{v}_{01} и \mathbf{v}_{02} в той же области G_δ , что и в доказательстве леммы 4.3.1, воспользоваться асимптотиками (4.42) и (4.43) и устремить δ к 0. \square

4.3.2 Асимптотические формулы

Рассмотрим волновую функцию u_1 в $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, удовлетворяющую условиям излучения

$$u_1(x; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \sim \begin{cases} U_1^+(x^1; k) + S_{11}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) U_1^-(x^1; k), & x_1^1 \rightarrow +\infty, \\ S_{12}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) U_2^-(x^2; k), & x_1^2 \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

В каждой из областей G_j , $j = 0, 1, 2$, u_1 приближается решением v_j задачи (4.6),

$$v_1 = V_1 + C_{11}\mathbf{v}_1, \quad v_0 = C_{12}\mathbf{v}_{01} + C_{13}\mathbf{v}_{02}, \quad v_2 = C_{14}\mathbf{v}_2, \quad (4.45)$$

где V_1 и \mathbf{v}_1 определены в п. 4.2.1, \mathbf{v}_{0j} определена в п. 4.3.1, а \mathbf{v}_2 — аналог для G_2 функции \mathbf{v}_1 . Постоянные C_{1j} зависят от ε_1 , ε_2 и k . Согласно (4.13), (4.42), (4.43) и (4.18) при $r \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} v_1 &\sim \frac{1}{\sqrt{r_1}} (C_{11} \tilde{N}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1) + (s_1 + C_{11}a_1) \tilde{J}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1)) \Phi_{11}^K(\varphi), \quad r_1 \rightarrow 0, \\ v_0 &\sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r_1}} (C_{12} \tilde{N}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1) + (C_{12}c_{11} + C_{13}c_{21}) \tilde{J}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1)) \Phi_{11}^L(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\sqrt{r_2}} (C_{13} \tilde{N}_{\mu_{21}+1/2}(kr_2) + (C_{12}c_{12} + C_{13}c_{22}) \tilde{J}_{\mu_{21}+1/2}(kr_2)) \Phi_{21}^L(\varphi_2), & r_2 \rightarrow 0. \end{cases} \\ v_2 &\sim \frac{1}{\sqrt{r_2}} (C_{14} \tilde{N}_{\mu_{11}+1/2}(kr_2) + C_{14} a_2 \tilde{J}_{\mu_{11}+1/2}(kr_2)) \Phi_{21}^L(\varphi), \quad r_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для каждого сужения введем матрицу Λ_j (аналогичную матрице Λ в (4.25)). Применяя лемму 4.2.2, получим

$$(C_{11}, C_{12}) = (s_1 + C_{11}a_1, C_{12}c_{11} + C_{13}c_{21}) \Lambda_1 \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}$$

для первого сужения и

$$(C_{13}, C_{14}) = (C_{12}c_{12} + C_{13}c_{22}, C_{14} a_2) \Lambda_2 \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}$$

для второго сужения. Соответствующие решения предельных задач второго рода имеют вид (см. (4.24))

$$w_1(\xi^1) = (s_1 + C_{11}a_1) \varepsilon_1^{\mu_{11}} \mathbf{w}_1^K(\xi^1) + (C_{12}c_{11} + C_{13}c_{21}) \varepsilon_1^{\mu_{11}} \mathbf{w}_1^L(\xi^1), \quad (4.46)$$

$$w_2(\xi^2) = C_{14}a_2 \varepsilon_2^{\mu_{21}} \mathbf{w}_2^K(\xi^2) + (C_{12}c_{12} + C_{13}c_{22}) \varepsilon_2^{\mu_{21}} \mathbf{w}_2^L(\xi^2), \quad (4.47)$$

аналогичные функциям из замечания 4.2.3. Положим $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$, $\mathcal{E} = \text{diag}\{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}, \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}, \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}, \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}\}$,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

и перепишем полученные соотношения для C_{1j} в виде

$$(C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}) = (s_1, 0, 0, 0) \Lambda \mathcal{E} + (C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}) a \Lambda \mathcal{E}.$$

Таким образом,

$$(C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14})(I - a \Lambda \mathcal{E}) = (s_1, 0, 0, 0) \Lambda \mathcal{E}. \quad (4.49)$$

Вычислим матрицу, обратную к $I - a \Lambda \mathcal{E}$, предполагая, что ε_1 и ε_2 достаточно малы. Из (4.44) следует, что

$$a(k) = -\frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b}}{k^2 - k_e^2} + \hat{a}(k),$$

где $\mathbf{b} = (0, b_1, b_2, 0)$, матрица \hat{a} аналитична вблизи $k = k_e$ и определена равенством (4.48) с заменой c_{pq} на \hat{c}_{pq} . Имеем

$$I - a \Lambda \mathcal{E} = I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E} + \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E}}{k^2 - k_e^2} = \left(I + \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E} (I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E})^{-1}}{k^2 - k_e^2} \right) (I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E});$$

очевидно, что $(I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E})^{-1}$ существует при малых ε_1 и ε_2 . Непосредственное вычисление показывает, что

$$\left(I + \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{c}}{k^2 - k_e^2} \right)^{-1} = I - \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{c}}{k^2 - k_e^2 - \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle}$$

при $\mathbf{c} = \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E} (I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E})^{-1}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{C}^4 . Итак,

$$(I - a \Lambda \mathcal{E})^{-1} = (I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E})^{-1} \left(I - \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E} (I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E})^{-1}}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E} (I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E})^{-1}, \mathbf{b} \rangle} \right).$$

Используя это равенство и (4.49), находим постоянные C_{1j} :

$$\begin{aligned} (C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}) &= (s_1, 0, 0, 0) \Lambda \mathcal{E}(I - a \Lambda \mathcal{E})^{-1} \\ &= (s_1, 0, 0, 0) \left(D - \frac{D \mathbf{b}^* \mathbf{b} D}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $D = \Lambda \mathcal{E}(I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E})^{-1}$; тем самым мы заканчиваем построение приближения для функции u_1 . Однако, прежде чем выписать это приближение, мы преобразуем решение v_0 предельной задачи в резонаторе и решения w_j предельных задач второго рода, чтобы показать, что эти решения не имеют полюса в точке $k^2 = k_e^2$. В силу леммы 4.3.1,

$$v_0(x) = C_{12} \mathbf{v}_{01}(x) + C_{13} \mathbf{v}_{02}(x) = C_{12} \hat{\mathbf{v}}_{01}(x) + C_{13} \hat{\mathbf{v}}_{02}(x) - \frac{C_{12} b_1 + C_{13} b_2}{k^2 - k_e^2} v_e(x).$$

Ввиду (4.50),

$$C_{12} b_1 + C_{13} b_2 = (C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}) \mathbf{b}^* = (s_1, 0, 0, 0) \left(D \mathbf{b}^* - \frac{D \mathbf{b}^* \mathbf{b} D \mathbf{b}^*}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \right).$$

Так как $D \mathbf{b}^* \mathbf{b} D \mathbf{b}^* = D \mathbf{b}^* \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle$, то

$$C_{12} b_1 + C_{13} b_2 = (s_1, 0, 0, 0) D \mathbf{b}^* \frac{k^2 - k_e^2}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \quad (4.51)$$

и

$$v_0(x) = C_{12} \hat{\mathbf{v}}_{01}(x) + C_{13} \hat{\mathbf{v}}_{02}(x) - \frac{(s_1, 0, 0, 0) D \mathbf{b}^*}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} v_e(x). \quad (4.52)$$

Преобразуем формулы (4.46) и (4.47) для w_j . Принимая во внимание (4.44) и (4.51), получаем

$$\begin{aligned} C_{12} c_{1j} + C_{13} c_{2j} &= C_{12} \hat{c}_{1j} + C_{13} \hat{c}_{2j} - \frac{b_j (C_{12} b_1 + C_{13} b_2)}{k^2 - k_e^2} \\ &= C_{12} \hat{c}_{1j} + C_{13} \hat{c}_{2j} - \frac{b_j (s_1, 0, 0, 0) D \mathbf{b}^*}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

откуда

$$w_1(\xi^1) = (s_1 + C_{11}a_1)\varepsilon_1^{\mu_{11}}\mathbf{w}_1^K(\xi^1) + \left(C_{12}\widehat{c}_{11} + C_{13}\widehat{c}_{21} - \frac{b_1(s_1,0,0,0)D\mathbf{b}^*}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D, \mathbf{b} \rangle} \right) \varepsilon_1^{\mu_{11}}\mathbf{w}_1^L(\xi^1), \quad (4.54)$$

$$w_2(\xi^2) = C_{14}a_2\varepsilon_2^{\mu_{21}}\mathbf{w}_2^K(\xi^2) + \left(C_{12}\widehat{c}_{12} + C_{13}\widehat{c}_{22} - \frac{b_2(s_1,0,0,0)D\mathbf{b}^*}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D, \mathbf{b} \rangle} \right) \varepsilon_2^{\mu_{21}}\mathbf{w}_2^L(\xi^2). \quad (4.55)$$

Наконец, выпишем асимптотику волновой функции. Пусть срезки $t \mapsto \Theta(t)$ и $x^j \mapsto \chi_{\varepsilon_j, j}(x^j)$, $j = 1, 2$, те же, что и в п.п. 4.2.1 и 4.2.2. Введем еще срезку $x \mapsto \chi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x) = \mathbf{1}_{G_0}(x) (1 - \Theta(r_1/\varepsilon_1)) (1 - \Theta(r_2/\varepsilon_2))$, где $\mathbf{1}_{G_0}$ — характеристическая функция множества G_0 . Сташий член \tilde{u}_1 асимптотики волновой функции u_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \chi_{1, \varepsilon_1}(x^1)v_1(x^1; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \Theta(r_1)w_1(\varepsilon_1^{-1}x^1; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &+ \chi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x)v_0(x; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \Theta(r_2)w_2(\varepsilon_2^{-1}x^2; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \chi_{2, \varepsilon_2}(x^2)v_2(x^2; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (4.56)$$

где решения v_1 и v_2 предельных задач первого рода определены соотношениями (4.45), v_0 задано равенством (4.52), решения w_1 и w_2 предельных задач второго рода определены в (4.54) и (4.55).

Теперь найдем приближение \tilde{S}_{ij} для элементов матрицы рассеяния $S = (S_{ij})_{i,j=1}^2$. В силу (4.12) и (4.18) при $x_1^1 \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} v_1(x^1) &= U_1^+(x^1) + (S_{11}^0 + C_{11}(\varepsilon)A_1)U_1^-(x^1) + O(\exp(-\delta x_1^1)), \quad x_1^1 \rightarrow +\infty, \\ v_2(x^2) &= C_{14}(\varepsilon)A_2U_2^-(x^2) + O(\exp(-\delta x_1^2)), \quad x_1^2 \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

откуда

$$(\tilde{S}_{11}, \tilde{S}_{12}) = (S_{11}^0 + C_{11}A_1, C_{14}A_2). \quad (4.57)$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix};$$

как и ранее, пусть $S^0 = \text{diag}(S_{11}^0, S_{22}^0)$; тогда по лемме 4.2.1 равенство (4.28) остается справедливым. Учитывая (4.57), (4.50) и (4.28), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_{11}, \tilde{S}_{12}) &= (S_{11}^0, 0) + (C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14})A \\ &= (S_{11}^0, 0) + i(s_1, 0, 0, 0) \left(D - \frac{D \mathbf{b}^* \mathbf{b} D}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \right) s^* S^0, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где $D = \Lambda \mathcal{E}(I - \hat{a} \Lambda \mathcal{E})^{-1}$. Приближение

$$(\tilde{S}_{21}, \tilde{S}_{22}) = (0, S_{22}^0) + i(0, 0, 0, s_2) \left(D - \frac{D \mathbf{b}^* \mathbf{b} D}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \right) s^* S^0 \quad (4.59)$$

для второй строки матрицы рассеяния S выводится из асимптотики волновой функции u_2 ,

$$u_2(x; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \sim \begin{cases} S_{21}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) U_1^-(x^1; k), & x_1^1 \rightarrow +\infty, \\ U_2^+(x^1; k) + S_{22}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) U_2^-(x^2; k), & x_1^2 \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Старший член \tilde{u}_2 асимптотики принимает вид (4.56), где

$$\begin{aligned} v_1(x^1) &= C_{21} \mathbf{v}_1(x^1), \\ w_1(\xi^1) &= C_{21} a_1 \varepsilon_1^{\mu_{11}} \mathbf{w}_1^K(\xi^1) + \left(C_{12} \hat{c}_{11} + C_{13} \hat{c}_{21} - \frac{b_1(s_1, 0, 0, 0) D \mathbf{b}^*}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \right) \varepsilon_1^{\mu_{11}} \mathbf{w}_1^L(\xi^1), \\ v_0(x) &= C_{22} \hat{\mathbf{v}}_{01}(x) + C_{23} \hat{\mathbf{v}}_{02}(x) - \frac{(0, 0, 0, s_2) D \mathbf{b}^*}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} v_e(x), \\ w_2(\xi^2) &= (s_2 + C_{24} a_2) \varepsilon_2^{\mu_{21}} \mathbf{w}_2^K(\xi^2) \\ &\quad + \left(C_{12} \hat{c}_{12} + C_{13} \hat{c}_{22} - \frac{b_2(s_1, 0, 0, 0) D \mathbf{b}^*}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \right) \varepsilon_2^{\mu_{21}} \mathbf{w}_2^L(\xi^2), \\ v_2(x^2) &= V_2(x^2) + C_{24} \mathbf{v}_2(x^2), \end{aligned}$$

постоянные C_{2j} заданы равенством

$$(C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}) = (0, 0, 0, s_2) \left(D - \frac{D \mathbf{b}^* \mathbf{b} D}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \right).$$

Объединяя соотношения (4.58) и (4.59), получаем приближение $\tilde{S} = \|\tilde{S}_{pq}\|_{p,q=1}^2$ для матрицы рассеяния S :

$$\tilde{S}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = S^0(k) + is(k) \left(D - \frac{D \mathbf{b}^* \mathbf{b} D}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b} D, \mathbf{b} \rangle} \right) s^*(k) S^0(k), \quad (4.60)$$

где $D = D(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \Lambda \mathcal{E}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(I - \widehat{a}(k) \Lambda \mathcal{E}(\varepsilon_1, \varepsilon_2))^{-1}$; k_e^2 и \mathbf{b} не зависят от k , ε_1 , ε_2 . Рассуждая, как в доказательстве леммы 4.2.4, и учитывая, что $(\Lambda \mathcal{E})^* = \Lambda \mathcal{E}$ и $a^* - a = is^*s$ (лемма 4.2.1), можно убедиться, что матрица \widetilde{S} унитарная.

Обозначим через k_p полюс матрицы \widetilde{S} , то есть k_p удовлетворяет уравнению $k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D, \mathbf{b} \rangle = 0$. Подставим сюда выражение для D и получим

$$k^2 - k_e^2 = \langle \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E} (I - \widehat{a}(k) \Lambda \mathcal{E})^{-1}, \mathbf{b} \rangle, \quad (4.61)$$

где $\mathcal{E} = \text{diag}(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}, \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}, \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}, \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$ и $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ при

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Так как ε_1 и ε_2 малы, то решение уравнения (4.61) можно найти методом последовательных приближений. Имеем $k_p^2 = k_r^2 - ik_i^2$, где

$$\begin{aligned} k_r^2 &= k_e^2 - \langle \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E}, \mathbf{b} \rangle + O\left(\varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2}\right) \\ &= k_e^2 - \alpha_1 b_1^2 \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} - \alpha_2 b_2^2 \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} + O\left(\varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2}\right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} k_i^2 &= \text{Im} \langle \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E} \widehat{a}(k_e) \Lambda \mathcal{E}, \mathbf{b} \rangle + O\left(\varepsilon_1^{6\mu_{11}+3} + \varepsilon_2^{6\mu_{21}+3}\right) \\ &= \frac{1}{2} |s_1(k_e)|^2 b_1^2 \beta_1^2 \varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \frac{1}{2} |s_2(k_e)|^2 b_2^2 \beta_2^2 \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2} + O\left(\varepsilon_1^{6\mu_{11}+3} + \varepsilon_2^{6\mu_{21}+3}\right); \end{aligned} \quad (4.63)$$

в последнем равенстве мы использовали соотношение $\text{Im} a_j = |s_j|^2/2$, $j = 1, 2$, вытекающее из леммы 4.2.1. Мы предполагаем, что постоянные b_j и s_j отличны от нуля. Тогда, ввиду (4.63), $|k^2 - k_p^2| \geq c(\varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2})$ при всех вещественных k .

Найдем старший член разложения для матрицы \widetilde{S} . Для этого убедимся, что

$$\frac{1}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D(k), \mathbf{b} \rangle} = \frac{1 + O(\varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2})}{k^2 - k_p^2} \quad (4.64)$$

равномерно относительно k на любом интервале, расположенном между первым и вторым порогами и не содержащем собственных значений резонатора, кроме k_e .

Действительно, так как $k_p^2 - k_e^2 = \langle \mathbf{b}D(k_p), \mathbf{b} \rangle$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D(k), \mathbf{b} \rangle} - \frac{1}{k^2 - k_p^2} &= \frac{k_e^2 - \langle \mathbf{b}D(k), \mathbf{b} \rangle - k_p^2}{(k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D(k), \mathbf{b} \rangle)(k^2 - k_p^2)} \\ &= -\frac{\langle \mathbf{b}(D(k) - D(k_p)), \mathbf{b} \rangle}{(k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D(k), \mathbf{b} \rangle)(k^2 - k_p^2)}. \end{aligned}$$

Применяя тождество Гильберта

$$(I - A)^{-1} - (I - B)^{-1} = (I - A)^{-1}(A - B)(I - B)^{-1}$$

при $A = \widehat{a}(k) \Lambda \mathcal{E}$ и $B = \widehat{a}(k_p) \Lambda \mathcal{E}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{D(k) - D(k_p)}{k^2 - k_p^2} &= \Lambda \mathcal{E} \frac{(I - \widehat{a}(k) \Lambda \mathcal{E})^{-1} - (I - \widehat{a}(k_p) \Lambda \mathcal{E})^{-1}}{k^2 - k_p^2} \\ &= \frac{\Lambda \mathcal{E} (I - \widehat{a}(k) \Lambda \mathcal{E})^{-1} (\widehat{a}(k) - \widehat{a}(k_p)) \Lambda \mathcal{E} (I - \widehat{a}(k_p) \Lambda \mathcal{E})^{-1}}{k^2 - k_p^2} \\ &= D(k) \frac{\widehat{a}(k) - \widehat{a}(k_p)}{k^2 - k_p^2} D(k_p). \end{aligned}$$

Из последних двух равенств и оценки $D = O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$ следует, что

$$\frac{1}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D(k), \mathbf{b} \rangle} - \frac{1}{k^2 - k_p^2} = \frac{O(\varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2})}{k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D(k), \mathbf{b} \rangle},$$

что приводит нас к (4.64). Подставим (4.64) в (4.60) и учтем, что $D = \Lambda \mathcal{E} + O(\varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2})$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &\sim S^0(k) + i s(k) \Lambda \mathcal{E} s^*(k) S^0(k) - i \frac{s(k) \Lambda \mathcal{E} \mathbf{b}^* \mathbf{b} \Lambda \mathcal{E} s^*(k) S^0(k)}{k^2 - k_p^2} \\ &= \begin{pmatrix} S_{11}^0(k) & 0 \\ 0 & S_{22}^0(k) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} |s_1(k)|^2 \alpha_1 S_{11}^0(k) \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} & 0 \\ 0 & |s_2(k)|^2 \alpha_2 S_{22}^0(k) \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{i}{k^2 - k_p^2} \begin{pmatrix} |\gamma_1|^2 S_{11}^0(k) & \gamma_1 \overline{\gamma_2} S_{22}^0(k) \\ \gamma_2 \overline{\gamma_1} S_{11}^0(k) & |\gamma_2|^2 S_{22}^0(k) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\gamma_j = s_j(k) b_j \beta_j \varepsilon_j^{2\mu_{j1}+1}$, причем опущены слагаемые, допускающие оценку $O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$, равномерную относительно k . При $(k^2 - k_p^2)^{-1} = O(1)$, третьим слагаемым также можно пренебречь; однако при малых $k^2 - k_p^2$ его необходимо учитывать.

Выберем более узкий интервал значений k^2 , полагая $k^2 - k_r^2 = O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$. Используя соотношения (4.62), (4.63), $S_{jj}^0(k) = S_{jj}^0(k_e) + O(k^2 - k_e^2)$ и $s_j(k) = s_j(k_e) + O(k^2 - k_e^2)$, получаем

$$\tilde{S}_{12}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{i \frac{s_1(k_e) \overline{s_2(k_e)}}{|s_1(k_e)| |s_2(k_e)|}}{\frac{i}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + P \frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}}} (1 + O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})), \quad (4.65)$$

$$\tilde{S}_{21}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{i \frac{s_2(k_e) \overline{s_1(k_e)}}{|s_2(k_e)| |s_1(k_e)|}}{\frac{i}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + P \frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}}} (1 + O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})), \quad (4.66)$$

где

$$z = \frac{b_1 \beta_1 |s_1(k_e)| \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}}{b_2 \beta_2 |s_2(k_e)| \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}}, \quad P = \frac{1}{b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 |s_1(k_e)| |s_2(k_e)|}.$$

Теперь найдем приближение для коэффициентов прохождения и отражения:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_j(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{\frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}} \right)^2} (1 + O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})), \\ \tilde{R}_j(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{\frac{1}{4} \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}} \right)^2}{\frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}} \right)^2} (1 + O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что \tilde{T}_j имеет пик при $k^2 = k_r^2$, ширина которого на половине высоты равна

$$\tilde{\Upsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = |(z + z^{-1})/P| \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}. \quad (4.67)$$

4.3.3 Оценки остатков

Введем функциональные пространства для задачи

$$-\Delta u - k^2 u = f \quad \text{в } G(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad u = 0 \quad \text{на } \partial G(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (4.68)$$

Пусть Θ — та же, что в (4.17), и пусть η_j , $j = 0, 1, 2$, сосредоточены в G_j , причем $\eta_1(x) + \Theta(r_1) + \eta_0(x) + \Theta(r_2) + \eta_2(x) = 1$ в $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. При всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и

$l = 0, 1, \dots$ пространство $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^l(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ является пополнением по норме

$$\begin{aligned} & \|u; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^l(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \\ &= \left(\int_{G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \sum_{|\alpha|=0}^l \left(\sum_{j=1}^2 \Theta^2(r_j) (r_j^2 + \varepsilon_j^2)^{\gamma_j - l + |\alpha|} + \sum_{j=1}^2 \eta_j^2 e^{2\delta x_j^1} + \eta_0^2 \right) |\partial^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

множества гладких функций с компактными носителями в $\overline{G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$. Обозначим через $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^{0, \perp}$ пространство функций f , которые аналитичны по k^2 , принимают значения в $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$, и при $k^2 = k_e^2$ удовлетворяют условию $(\chi_{\varepsilon_1^\sigma, \varepsilon_2^\sigma} f, v_e)_{G_0} = 0$ при некотором малом $\sigma > 0$.

Предложение 4.3.3. Пусть k_r^2 — резонанс, $k_r^2 \rightarrow k_e^2$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ и пусть $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$. Предположим, что γ_1, γ_2 подчиняются неравенствам $\mu_{j1} - 3/2 < \gamma_j - 1 < \mu_{j1} + 1/2$, $f \in V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^{0, \perp}(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$, а u — решение задачи (4.68), допускающее представление

$$u = \tilde{u} + \eta_1 A_1^- U_1^- + \eta_2 A_2^- U_2^-;$$

здесь $A_j^- = \text{const}$ и $\tilde{u} \in V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^2(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ при малом $\delta > 0$. Тогда

$$\|\tilde{u}; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^2(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| + |A_1^-| + |A_2^-| \leq c \|f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|, \quad (4.69)$$

где c — константа, не зависящая от f и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Доказательство. Шаг А. Сначала мы построим вспомогательную функцию u_p . Решения предельных задач первого рода, входящие в (4.56) имеют смысл и при комплексных k^2 . Умножим все решения предельных задач, участвующие в формуле для \tilde{u}_1 , на $g := -(k^2 - k_e^2 + \langle \mathbf{b}D(k), \mathbf{b} \rangle) / \langle (s_1, 0, 0, 0)D, \mathbf{b} \rangle$, положим $k = k_p$ и переобозначим полученные таким образом функции, добавляя индекс p . Тогда

$$\begin{aligned} & g(C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14})|_{k=k_p} = \mathbf{b}D(k_p) \\ &= (b_1 \beta_1 \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}, b_1 \alpha_1 \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}, b_2 \alpha_2 \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}, b_2 \beta_2 \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}) + O(\varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2}) \end{aligned}$$

и, в силу (4.45) и (4.52)–(4.55),

$$\begin{aligned}
v_{jp}(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \varepsilon_j^{2\mu_{j1}+1} \left(b_j \beta_j + O\left(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}\right) \right) \mathbf{v}_j(x; k_p), \\
v_{0p}(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= v_e(x) + \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \left(b_1 \alpha_1 + O\left(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}\right) \right) \widehat{\mathbf{v}}_{01}(x; k_p) \\
&\quad + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} \left(b_2 \alpha_2 + O\left(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}\right) \right) \widehat{\mathbf{v}}_{02}(x; k_p), \\
w_{jp}(\xi^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= b_j \varepsilon_j^{\mu_{j1}} \left[\varepsilon_j^{2\mu_{j1}+1} \left(a_j(k_p) \beta_j + O\left(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}\right) \right) \mathbf{w}_j^K(\xi^j) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + O\left(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}\right) \right) \mathbf{w}_j^L(\xi^j) \right],
\end{aligned}$$

где $j = 1, 2$; зависимость k_p от $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ не указывается. Положим

$$\begin{aligned}
u_p(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \Xi(x) \left[\chi_{1, \varepsilon_1}(x^1) v_{1p}(x^1; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \Theta(\varepsilon_1^{-2\sigma} r_1) w_{1p}(\varepsilon_1^{-1} x^1; \varepsilon_1, \varepsilon_2) \right. \\
&\quad \left. + \chi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x) v_{0p}(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \Theta(\varepsilon_2^{-2\sigma} r_2) w_2(\varepsilon_2^{-1} x^2; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \chi_{2, \varepsilon_2}(x^2) v_2(x^2; k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \right],
\end{aligned}$$

где Ξ — срезка в $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, равная 1 на множестве $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cap \{|x| < R\}$ и равная 0 на $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cap \{|x| > R + 1\}$ при некотором достаточно большом $R > 0$. Наибольший вклад в норму u_p дает слагаемое $\chi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} v_{0p}$. Принимая во внимание определения функций v_{0p} и $\widehat{\mathbf{v}}_{0j}$ (см. п. 4.3.1), мы получаем $\|\chi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} v_{0p}\| = \|v_e\| + o(1)$. Заметим, что коммутатор $(\Delta + k_p^2)u_p$ отличен от нуля лишь в области $\{r_1 < c_1 \varepsilon_1^{2\sigma}\} \cup \{r_2 < c_2 \varepsilon_2^{2\sigma}\}$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4.2.6, получаем оценку

$$\|(\Delta + k_p^2)u_p; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \leq c \left(\varepsilon_1^{\mu_{11} + \kappa_1} + \varepsilon_2^{\mu_{21} + \kappa_2} \right), \quad (4.70)$$

где $\kappa_j = \min\{\mu_{j1} + 1, \mu_{j2} + 1 - \sigma_j, \gamma_j + 3/2\}$, $\sigma_j = 2\sigma(\mu_{j2} - \gamma_j + 3/2)$. Если $\mu_{j1} - 3/2 < \gamma_j - 1$ и σ настолько малое число, что $\mu_{j2} - \mu_{j1} > \sigma_j$, то $\kappa_j = \mu_{j1} + 1$.

Шаг В. Эта часть содержит несколько модифицированные рассуждения из теоремы 5.1.1 [37]. Пусть $\|v; V_{\gamma_j, \delta, -}^2(G_j)\|^2$ и $\|v; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta, -}^2(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|^2$ обозначают левые части неравенств (4.8) (при $\gamma = \gamma_j$) и (4.69). Перепишем правую часть задачи (4.68) в виде

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x; \varepsilon_1) + f_0(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + f_2(x; \varepsilon_2) \\
&\quad + \varepsilon_1^{-\gamma_1 - 3/2} F_1(\varepsilon_1^{-1} x^1; \varepsilon_1) + \varepsilon_2^{-\gamma_2 - 3/2} F_2(\varepsilon_2^{-1} x^2; \varepsilon_2),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_0(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \chi_{\varepsilon_1^\sigma, \varepsilon_2^\sigma}(x) f(x), & f_j(x; \varepsilon_j) &= \chi_{\varepsilon_j^\sigma, j}(x) f(x), \\
F_j(\xi^j; \varepsilon_j) &= \varepsilon_j^{\gamma_j + 3/2} \Theta(\varepsilon_j^{1-\sigma} \rho_j) f(x_{O_j} + \varepsilon_j \xi^j);
\end{aligned}$$

x — некоторая декартова система координат; x_{O_j} — координаты точки O_j в системе x ; x^j введены в параграфе 4.1.1. Из определения норм следует, что

$$\|f_0; V_{\gamma_1, \gamma_2}^0(G_0)\| + \|f_j; V_{\gamma_j, \delta}^0(G_j)\| + \|F_j; V_{\gamma_j}^0(\Omega_j)\| \leq c \|f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|. \quad (4.71)$$

Рассмотрим решения v_0 , v_j и w_j задач

$$\begin{aligned} -\Delta v_0 - k^2 v_0 &= f_0 \text{ в } G_0, & v_0 &= 0 \text{ на } \partial G_0, \\ -\Delta v_j - k^2 v_j &= f_j \text{ в } G_j, & v_j &= 0 \text{ на } \partial G_j, \\ \Delta w_j &= F_j \text{ в } \Omega_j, & w_j &= 0 \text{ на } \partial \Omega_j, \end{aligned}$$

соответственно; кроме того, v_j удовлетворяют естественным условиям излучения на бесконечности. Согласно предложениям 4.1.1, 4.1.2 и 4.1.3, задачи в G_0 , G_j и Ω_j , $j = 1, 2$ однозначно разрешимы (решение задачи в G_0 выбирается ортогональным собственной функции, отвечающей числу k_e^2), причем

$$\begin{aligned} \|v_0; V_{\gamma_1, \gamma_2}^2(G_0)\| &\leq \tilde{c}_0 \|f_0; V_{\gamma_1, \gamma_2}^0(G_0)\|, \\ \|v_j; V_{\gamma_j, \delta, -}^2(G_j)\| &\leq \tilde{c}_j \|f_j; V_{\gamma_j, \delta}^0(G_j)\|, \\ \|w_j; V_{\gamma_j}^2(\Omega_j)\| &\leq \tilde{C}_j \|F_j; V_{\gamma_j}^0(\Omega_j)\|, \end{aligned} \quad (4.72)$$

где \tilde{c}_0 , \tilde{c}_j и \tilde{C}_j не зависят от ε_1 , ε_2 . Положим

$$\begin{aligned} U(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \chi_{\varepsilon_1, 1}(x) v_1(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_1^{-\gamma_1 + 1/2} \Theta(r_1) w_1(\varepsilon_1^{-1} x^1; \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &+ \chi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x) v_0(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2^{-\gamma_2 + 1/2} \Theta(r_2) w_2(\varepsilon_2^{-1} x^2; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \chi_{\varepsilon_2, 2}(x) v_2(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Оценки (4.71) и (4.72) приводят к неравенству

$$\|U; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta, -}^2(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \leq c \|f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|$$

с постоянной c , не зависящей от ε_1 , ε_2 .

Покажем, что $-(\Delta + k^2)R_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = I + S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, где $S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ — оператор в $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ с малой нормой. Имеем

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)R_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f(x) &= (\Delta + k^2)U(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -f(x) \\ &+ [\Delta, \chi_{1, \varepsilon_1}] v_1(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + [\Delta, \chi_{0, \varepsilon_1, \varepsilon_2}] v_0(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + [\Delta, \chi_{2, \varepsilon_2}] v_2(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &+ \varepsilon_1^{-\gamma_1 + 1/2} [\Delta, \Theta] w_1(\varepsilon_1^{-1} x^1; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + k^2 \varepsilon_1^{-\gamma_1 + 1/2} \Theta(r_1) w_1(\varepsilon_1^{-1} x^1; \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &+ \varepsilon_2^{-\gamma_2 + 1/2} [\Delta, \Theta] w_2(\varepsilon_2^{-1} x^2; \varepsilon_1, \varepsilon_2) + k^2 \varepsilon_2^{-\gamma_2 + 1/2} \Theta(r_2) w_2(\varepsilon_2^{-1} x^2; \varepsilon_1, \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Пусть d — такое положительное число, что $\gamma_j - 1 > \mu_{j1} + 1/2 - d$. На носителе функции $[\Delta, \chi_{1,\varepsilon}]v_1$ справедлива оценка $r_1 = O(\varepsilon_1)$, поэтому

$$\begin{aligned} \|[\Delta, \chi_{1,\varepsilon}]v_1; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| &\leq c\varepsilon_1^d \|[\Delta, \chi_{1,\varepsilon}]v_1; V_{\gamma_1-d, \delta}^0(G_1)\| \\ &\leq c\varepsilon_1^d \|v_1; V_{\gamma_1-d, \delta}^2(G_1)\|. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.72) получаем

$$\|[\Delta, \chi_{1,\varepsilon}]v_1; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \leq c\varepsilon_1^d \|f_1; V_{\gamma_1-d, \delta}^0(G_1)\|.$$

Кроме того, $f_1 = 0$ вне зоны $c\varepsilon_1^\sigma \leq r_1 \leq C\varepsilon_1^\sigma$, значит,

$$\|f_1; V_{\gamma_1-d, \delta}^0(G_1)\| \leq c\varepsilon_1^{-d\sigma} \|f_1; V_{\gamma_1, \delta}^0(G_1)\|.$$

Последние две оценки вместе с (4.71) показывают, что

$$\|[\Delta, \chi_{1,\varepsilon}]v_1; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \leq c\varepsilon_1^{d(1-\sigma)} \|f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|. \quad (4.74)$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \|[\Delta, \chi_{0, \varepsilon_1, \varepsilon_2}]v_0; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \\ \leq c(\varepsilon_1^{d(1-\sigma)} + \varepsilon_2^{d(1-\sigma)}) \|f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|, \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\|[\Delta, \chi_{2, \varepsilon_2}]v_2; V_{\gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \leq c\varepsilon_2^{d(1-\sigma)} \|f; V_{\gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|. \quad (4.76)$$

Теперь предположим, что d удовлетворяет еще условию $-\mu_{j1} - 1/2 + d < \gamma_j - 1$. Так как носитель функции $[\Delta_{\xi^j}, \Theta(\varepsilon_j \rho_j)]w_j(\xi^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $j = 1, 2$, лежит в области $c\varepsilon_j^{-1} \leq \rho_j \leq C\varepsilon_j^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \|\xi^j \mapsto [\Delta_{\xi^j}, \Theta(\varepsilon_j \rho_j)]w_j(\xi^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2); V_{\gamma_j}^0(\Omega_j)\| \\ \leq c\varepsilon_j^d \|\xi^j \mapsto [\Delta_{\xi^j}, \Theta(\varepsilon_j \rho_j)]w_j(\xi^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2); V_{\gamma_j+d}^0(\Omega_j)\| \leq c\varepsilon_j^d \|w_j; V_{\gamma_j+d}^2(\Omega_j)\|. \end{aligned}$$

Учитывая (4.72), мы получаем

$$\varepsilon_j^{-\gamma_j+1/2} \|x^j \mapsto [\Delta, \Theta(r_j)]w_j(\varepsilon_j^{-1}x^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2); V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \leq c\varepsilon_j^d \|F_j; V_{\gamma_j+d}^0(\Omega_j)\|.$$

Так как $F_j = 0$ при $\rho_j > c\varepsilon_j^{-\sigma}$, то

$$\|F_j; V_{\gamma_j+d}^0(\Omega_j)\| \leq c\varepsilon_j^{-d\sigma} \|F_j; V_{\gamma_j}^0(\Omega_j)\|. \quad (4.77)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{-\gamma_j+1/2} \|x^j \mapsto [\Delta, \Theta(r_j)]w_j(\varepsilon_j^{-1}x^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2); V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \\ \leq c\varepsilon_j^{d(1-\sigma)} \|f; V_{\gamma_1, \gamma_j, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Осталось оценить вторые слагаемые в последних двух строчках соотношения (4.73). Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{-\gamma_j+1/2} \|x^j \mapsto \Theta(r_j)w_j(\varepsilon_j^{-1}x^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2); V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \\ = \varepsilon_j^2 \|\xi^j \mapsto \Theta(\varepsilon_j \rho_j)w_j(\xi^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2); V_{\gamma_j}^0(\Omega_j)\| \\ \leq \varepsilon_j^2 \|\xi^j \mapsto \Theta(\varepsilon_j \rho_j)w_j(\xi^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2); V_{\gamma_j+2}^2(\Omega_j)\| \leq c\varepsilon_j^d \|w_j; V_{\gamma_j+d}^2(\Omega_j)\|; \end{aligned}$$

в последнем неравенстве мы учли, что $\Theta(\varepsilon_j \rho_j)w_j(\xi^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ при $\rho_j \geq c\varepsilon_j^{-1}$; помимо этого, мы предположили, что $2 - d > 0$. Ввиду (4.72), (4.77) и (4.71), мы имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{-\gamma_j+1/2} \|x^j \mapsto \Theta(r_j)w_j(\varepsilon_j^{-1}x^j; \varepsilon_1, \varepsilon_2); V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \\ \leq c\varepsilon_j^{d(1-\sigma)} \|f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Таким образом, (4.73)–(4.76) и (4.78)–(4.79) приводят к неравенству

$$\begin{aligned} \| -(\Delta + k^2)R_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}f - f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \\ \leq c(\varepsilon_1^{d(1-\sigma)} + \varepsilon_2^{d(1-\sigma)}) \|f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|, \end{aligned}$$

которое означает, что $(\Delta + k^2)R_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = I + S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, причем норма оператора $S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ в пространстве $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ допускает оценку $\|S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\| \leq c(\varepsilon_1^{d(1-\sigma)} + \varepsilon_2^{d(1-\sigma)})$.

Шаг С. Напомним, что оператор $S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ определен на подпространстве $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^{0, \perp}(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Нам нужно, чтобы образ оператора $S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ также принадлежал $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^{0, \perp}(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Для этого заменим отображение $R_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ на $\tilde{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} : f \mapsto U(f) + a(f)u_p$, где u_p была построена на Шаге А, $a(f)$ — некоторая постоянная. Тогда $-(\Delta + k^2)\tilde{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = I + \tilde{S}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, при $\tilde{S}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - a(\cdot)(\Delta + k^2)u_p$. Условие $(\chi_{\varepsilon_1^\sigma, \varepsilon_2^\sigma} \tilde{S}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f, v_e)_{G_0} = 0$ при $k = k_e$ дает $a(f) = (\chi_{\varepsilon_1^\sigma, \varepsilon_2^\sigma} S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f, v_e)_{G_0} / (\chi_{\varepsilon_1^\sigma, \varepsilon_2^\sigma} (\Delta + k_e^2)u_p, v_e)_{G_0}$. Проверим, что $\|\tilde{S}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\| \leq c\|S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\|$, c не зависит от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, k$. Имеем

$$\|\tilde{S}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f\| \leq \|S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f\| + |a(f)| \|(\Delta + k^2)u_p\|.$$

Оценка (4.70) (при $\gamma_j > \mu_{j1} - 1/2$ и $\mu_{j2} - \mu_{j1} > \sigma_j$), формула для k_p и условие $k^2 - k_e^2 = O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$ влекут за собой

$$\begin{aligned} \|(\Delta + k^2)u_p; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0\| &\leq |k^2 - k_p^2| \|u_p; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0\| + \|(\Delta + k_p^2)u_p; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0\| \\ &\leq c(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}). \end{aligned}$$

Так как носители функций $(\Delta + k_p^2)u_p$ и $\chi_{\varepsilon_1^\sigma, \varepsilon_2^\sigma}$ не пересекаются, то

$$|(\chi_{\varepsilon_1^\sigma, \varepsilon_2^\sigma}(\Delta + k_e^2)u_p, v_e)_{G_0}| = |(k_e^2 - k_p^2)(u_p, v_e)_{G_0}| \geq c(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}).$$

Далее, $\gamma_j - 1 < \mu_{j1} + 1/2$, поэтому

$$\begin{aligned} |(\chi_{\varepsilon_1^\sigma, \varepsilon_2^\sigma} S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f, v_e)_{G_0}| &\leq \|S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \|v_e; V_{-\gamma_1, -\gamma_2}^0(G_0)\| \\ &\leq c \|S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|. \end{aligned}$$

Значит,

$$|a(f)| \leq c \|S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| / (\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$$

и $\|\tilde{S}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f\| \leq c \|S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} f\|$. Таким образом, оператор $I + \tilde{S}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ обратим в пространстве $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^{0, \perp}(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$, то же самое верно и для оператора задачи (4.68):

$$A_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} : u \mapsto -\Delta u - k^2 u : V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta, -}^{2, \perp}(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \mapsto V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^{0, \perp}(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2));$$

здесь $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta, -}^{2, \perp}(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ обозначает пространство элементов из $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta, -}^2(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$, которые исчезают на границе $\partial G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и оператором $-\Delta - k^2$ переводятся в $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^{0, \perp}$. Обратный оператор $A_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1} = \tilde{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} (I + \tilde{S}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^{-1}$ ограничен равномерно относительно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, k$. Следовательно, справедливо неравенство (4.69) с постоянной c , не зависящей от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, k$. \square

Рассмотрим решение u_1 однородной задачи (4.1), определенное условиями (4.4). Пусть S_{11} и S_{12} — элементы матрицы рассеяния, определяемые этим решением. Через $\tilde{u}_{1, \sigma}$ обозначим функцию, заданную формулой (4.56) с заменой $\Theta(r_j)$ на $\Theta(\varepsilon_j^{-2\sigma} r_j)$. Числа $\tilde{S}_{11}, \tilde{S}_{12}$ те же, что и в п. 4.3.2.

Теорема 4.3.4. Пусть выполнены условия предложений 4.1.2 и 4.3.3 и пусть коэффициенты s_j в (4.13), (4.14) и коэффициенты b_j в (4.39) отличны от нуля. Тогда

$$\begin{aligned} &|S_{p1} - \tilde{S}_{p1}| + |S_{p2} - \tilde{S}_{p2}| \\ &\leq c \frac{(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}) \varepsilon_1^{\mu_{11}} (\varepsilon_1^{\mu_{12}+1} + \varepsilon_1^{\gamma_1+3/2}) + \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{\mu_{21}} (\varepsilon_2^{\mu_{22}+1} + \varepsilon_2^{\gamma_2+3/2})}{|k^2 - k_r^2| + \varepsilon_1^{4\mu_{11}+2} + \varepsilon_2^{4\mu_{21}+2}}, \end{aligned}$$

где c не зависит от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, k$; $p = 1, 2$.

Доказательство. Пусть для определенности $p = 1$. разность $u_1 - \tilde{u}_{1,\sigma}$ принадлежит пространству $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta, -}^2(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$, а $f_1 := -(\Delta + k^2)(u_1 - \tilde{u}_{1,\sigma})$ — пространству $V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^{0, \perp}(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. По предложению 4.3.3

$$\begin{aligned} |S_{11}(\varepsilon) - \tilde{S}_{11}(\varepsilon)| + |S_{12}(\varepsilon) - \tilde{S}_{12}(\varepsilon)| &\leq \|u_1 - \tilde{u}_1; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta, -}^2(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| \\ &\leq c \|f_1; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\|. \end{aligned}$$

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 4.2.6 (см. (4.38)), получаем

$$\begin{aligned} \|f_1; V_{\gamma_1, \gamma_2, \delta}^0(G(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\| &\leq c \left((|a_1^+| + |b_1^+|) \varepsilon_1^{\mu_{11}} (\varepsilon_1^{\mu_{12}+1-\sigma_1} + \varepsilon_1^{\gamma_1+3/2}) \right. \\ &\quad \left. + (|a_2^+| + |b_2^+|) \varepsilon_2^{\mu_{21}} (\varepsilon_2^{\mu_{22}+1-\sigma_2} + \varepsilon_2^{\gamma_2+3/2}) \right), \end{aligned}$$

где $(a_1^+, b_1^+) = (s_1 + C_{11}a_1, C_{12}c_{11} + C_{13}c_{21})$ и $(b_2^+, a_2^+) = (C_{12}c_{12} + C_{13}c_{22}, C_{14}a_2)$. Из (4.50), (4.53), (4.64) в силу $(s_1, 0, 0, 0)D = O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1})$ следует, что

$$|C_{1j}| \leq c \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \left(1 + \frac{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}}{|k^2 - k_p^2|} \right), \quad |C_{12}c_{1j} + C_{13}c_{2j}| \leq c \frac{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}}{|k^2 - k_p^2|}$$

и

$$|a_1^+| + |b_1^+| \leq c \frac{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}}{|k^2 - k_p^2|}, \quad |a_2^+| + |b_2^+| \leq c \frac{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}}{|k^2 - k_p^2|}.$$

Сопоставляя эти неравенства, мы получаем требуемую оценку. \square

Обозначим через k_e^2 собственное число задачи (4.6) в резонаторе G_0 , а через $k_r^2(\varepsilon)$ — резонансную энергию, такую, что $k_r^2(\varepsilon) \rightarrow k_e^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, пусть b_j — постоянные в асимптотике (4.39) собственной функции, отвечающей числу k_e^2 , а $s_j(k)$ — постоянная в асимптотиках (4.13) и (4.14) специальных решений V_j при $r_j \rightarrow 0$, $j = 1, 2$. Наконец, постоянные α и β определены соотношениями (4.10) и (4.11). Положим $P = (b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 |s_1(k_e)| |s_2(k_e)|)^{-1}$ и $z = b_1 \beta_1 |s_1(k_e)| \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} / b_2 \beta_2 |s_2(k_e)| \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}$; это те же величины, что и в (4.65)–(4.67).

Теорема 4.3.5. При $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$ справедливы асимптотические разложения

$$T_p(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + P^2 \left(\frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}} \right)^2} (1 + O(\varepsilon_1^{\tau_1} + \varepsilon_2^{\tau_2})),$$

$$k_r^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = k_e^2 - \alpha_1 b_1^2 \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} - \alpha_2 b_2^2 \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} + O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1+\tau_1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1+\tau_2}),$$

$$\Upsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left| \frac{z + z^{-1}}{P} \right| \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} (1 + O(\varepsilon_1^{\tau_1} + \varepsilon_2^{\tau_2})),$$

где $\tau_j = \min\{\mu_{j2} - \mu_{j1}, 2 - \sigma_j\}$ и σ_j — малые положительные числа.

Доказательство. Из теоремы 4.3.4 и формулы (4.65) получаем

$$|T_1 - \tilde{T}_1| \leq c \left| \frac{S_{12} - \tilde{S}_{12}}{\tilde{S}_{12}} \right| \tilde{T}_1 \leq c \tilde{T}_1 (\varepsilon_1^{\tau_1} + \varepsilon_2^{\tau_2} + \varepsilon_2^{\tau_2+2\mu_{21}+1} / \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1})$$

при $\tau_j = \min\{\mu_{j2} - \mu_{j1}, 2 - \sigma_j\}$, $\sigma_j = \mu_{j1} + 3/2 - \gamma_j$, $j = 1, 2$. Если $\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \geq \varepsilon_2^{2\mu_{12}+1}$, то мы получаем требуемое разложение для T_1 . Пусть $\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \leq \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}$.

Аналогичным образом можно получить оценку

$$|T_2 - \tilde{T}_2| \leq c \tilde{T}_2 (\varepsilon_1^{\tau_1} + \varepsilon_2^{\tau_2} + \varepsilon_1^{\tau_1+2\mu_{11}+1} / \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1})$$

с тем же τ_j . Так как матрица рассеяния симметрична, то $S_{12} = S_{21}$ и, значит, $T_1 = T_2$. Также легко видеть, что $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$ (действительно, все характеристики обоих сужений входят в формулы для \tilde{T}_p симметрично). Это приводит к требуемому разложению для T_1 при $\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \leq \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}$. Формулы для k_r^2 и Υ вытекают из разложения для T_1 . \square

Из приведенных разложений следует, что в случае, когда диаметры сужений различны, резонансное значение коэффициента прохождения является бесконечно малым при стремлении диаметров сужений к нулю. То есть резонансное туннелирование практически не наблюдается. То же самое может случиться, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, но сужения имеют неодинаковую форму. Число μ_{j1} в действительности является наименьшим собственным числом оператора Лапласа-Бельтрами в области, вырезаемой на единичной сфере какой-либо частью двойного конуса K_j . Поэтому, если $\mu_{11} \neq \mu_{21}$, то величина $z + z^{-1}$ в разложении для T_p будет бесконечно большой. Пусть теперь сужения имеют одинаковую форму и один и тот же диаметр, тогда максимум коэффициента прохождения равен $4(Q + Q^{-1})^{-2}$ с точностью до малых поправок. Постоянная Q зависит от геометрии резонатора. Если резонатор несимметричен, то, вообще говоря, Q не равна единице. Отсюда следует, что мак-

симальное значение коэффициента прохождения не является малым, но может и не достигать единицы, если резонатор несимметричен. Таким образом, для практического использования наиболее интересны симметричные волноводы, имеющие два одинаковых сужения.

4.4 Влияние магнитного поля на резонансное туннелирование

4.4.1 Постановка задачи

Пусть область G — цилиндр

$$G = \mathbb{R} \times D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty); (y, z) \in D \subset \mathbb{R}^2\},$$

сечение D которого — ограниченная область с гладкой границей. Области Ω и $\Omega(\varepsilon)$ такие же, как в п. 4.1.1. Напомним их определение. Пусть K — двойной конус с вершиной в начале координат O , содержащий ось x и симметричный относительно начала. Множество $K \cap S^2$, где S^2 — единичная сфера с центром в начале, состоит из двух непересекающихся односвязных областей, симметричных друг другу относительно центра сферы. Предположим, что Ω содержит конус K вместе с некоторой окрестностью его вершины. Кроме того, Ω совпадает с K вне достаточно большого шара с центром в начале координат. Граница $\partial\Omega$ области Ω предполагается гладкой. Через $\Omega(\varepsilon)$ обозначается область, полученная из Ω преобразованием подобия с центром в O и коэффициентом ε . Другими словами, $(x, y, z) \in \Omega(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $(x/\varepsilon, y/\varepsilon, z/\varepsilon) \in \Omega$. Пусть K_j и $\Omega_j(\varepsilon)$ обозначают K и $\Omega(\varepsilon)$, сдвинутые на вектор $\mathbf{r}_j = (x_j^0, 0, 0)$, $j = 1, 2$. Мы предполагаем, что величина $|x_1^0 - x_2^0|$ достаточно большая, так что расстояние между $\partial K_1 \cap \partial K_2$ и G положительно. Положим

$$G(\varepsilon) = G \cap \Omega_1(\varepsilon) \cap \Omega_2(\varepsilon).$$

Волновая функция $\Psi = (\Psi_+, \Psi_-)^T$ электрона с энергией $E = k^2 \hbar^2 / 2m$ в магнитном поле \mathbf{H}_0 удовлетворяет уравнению Паули

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2 \Psi + (\hat{\sigma}, \mathbf{H}) \Psi = k^2 \Psi, \quad (4.80)$$

где $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули; $\mathbf{H} = -(e/c\hbar\mathbf{H}_0) = \text{rot } \mathbf{A}$. Если магнитное поле направлено вдоль оси z , то есть $\mathbf{H} = H\mathbf{k}$, где H — скалярная функция, то (4.80) распадается на два скалярных уравнения

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2\Psi_{\pm} \pm H\Psi_{\pm} = k^2\Psi_{\pm}. \quad (4.81)$$

Пусть функция H зависит только от $\rho = ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2}$, причем $H(\rho) = 0$ при $\rho > R$, где R — некоторое фиксированное положительное число. Такое поле создается бесконечным соленоидом радиуса R , ось которого параллельна оси z . Тогда $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_{\psi}$, где $\mathbf{e}_{\psi} = \rho^{-1}(-y + y_0, x - x_0, 0)$,

$$A(\rho) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \int_0^{\rho} tH(t) dt, & \rho < R; \\ \int_0^R tH(t) dt, & \rho > R. \end{cases}$$

Равенство $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$ определяет \mathbf{A} с точностью до слагаемого вида ∇f . Мы пренебрегаем проникновением электронов за стенки волновода и рассматриваем уравнения (4.81), дополненные однородным условием Дирихле

$$\Psi_{\pm} = 0 \quad \text{на } \partial G(\varepsilon).$$

Полученные краевые задачи самосопряжены относительно формул Грина

$$\begin{aligned} & ((-i\nabla + \mathbf{A})^2u \pm Hu - k^2u, v)_{G(\varepsilon)} - (u, (-i\nabla + \mathbf{A})^2v \pm Hv - k^2v)_{G(\varepsilon)} \\ & + (u, (-\partial_n - A_n)v)_{\partial G(\varepsilon)} - ((-\partial_n - A_n)u, v)_{\partial G(\varepsilon)} = 0, \end{aligned}$$

где A_n — проекция \mathbf{A} на внешнюю нормаль к $\partial G(\varepsilon)$; $u, v \in C_c^{\infty}(G(\varepsilon))$ (то есть u и v — гладкие функции, равные нулю вне некоторого ограниченного множества). Кроме того, Ψ_{\pm} должны удовлетворять на бесконечности некоторым условиям излучения. Чтобы сформулировать эти условия излучения, нам нужно определить входящие и уходящие волны. При наших ограничениях на магнитное поле и выборе вектор-потенциала коэффициенты уравнений (4.81) стабилизируются лишь со скоростью. Такая медленная стабилизация создает трудности для определения упомянутых волн. Поэтому мы изменим \mathbf{A} калибровочным преобразованием так, чтобы внутри волновода коэффициенты уравнений (4.81) стали постоянными при достаточно больших $|x|$.

Пусть (ρ, ψ) — полярные координаты в плоскости xy с центром в (x_0, y_0) , причем $\psi = 0$ на луче, сонаправленном с осью x . Введем функцию $f(x, y, z) = c\psi$, где $c = \int_0^R tH(t) dt$. Для определенности будем считать, что $-\pi/2 < \psi < 3\pi/2$. Функция f однозначно определена внутри волновода при $|x - x_0| > 0$, кроме того,

$\nabla f = \mathbf{A}$ при $|x - x_0| > R$. Пусть τ — срезка на \mathbb{R}_+ , равная 1 при $t > R + 2$ и 0 при $t < R + 1$. Положим $\mathbf{A}'(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) - \nabla(\tau(|x - x_0|)f(x, y, z))$. Тогда $\text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$ и $\mathbf{A}' = 0$ при $|x - x_0| > R + 2$. Волновые функции $\Psi'_\pm = \Psi_\pm \exp\{i\tau f\}$ удовлетворяют уравнениям (4.81) с заменой \mathbf{A} на \mathbf{A}' . При $|x - x_0| > R + 2$ коэффициенты уравнений (4.81) с новым вектор-потенциалом \mathbf{A}' совпадают с коэффициентами уравнения Гельмгольца

$$-\Delta \Psi'_\pm = k^2 \Psi'_\pm.$$

Чтобы сформулировать условия излучения, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta v(y, z) + \lambda^2 v(y, z) &= 0, & (y, z) \in D, \\ v(y, z) &= 0, & (y, z) \in \partial D. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Значения параметра λ , при которых существуют ненулевые решения этой задачи, образуют последовательность $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \dots$, где $\lambda_1^2 > 0$. Эти числа называются порогами. Предположим, что число k^2 в (4.81) не совпадает ни с одним из порогов и рассмотрим в (4.81) уравнение со знаком ”+”. При фиксированном $k^2 > \lambda_1^2$ существует конечное число ограниченных решений (волновых функций), линейно независимых по модулю $L_2(G(\varepsilon))$; другими словами, линейная комбинация таких решений принадлежит $L_2(G(\varepsilon))$, если и только если все коэффициенты равны нулю. Число волновых функций с такими свойствами остается постоянным при $k^2 \in (\lambda_q^2, \lambda_{q+1}^2)$, $q = 1, 2, \dots$, и скачкообразно возрастает на порогах (см. приложение).

В этом параграфе мы рассматриваем только тот случай, когда $k^2 \in (\lambda_1^2, \lambda_2^2)$. При этом существует всего две линейно независимых волновых функции. Базис в линейном пространстве, натянутом на эти функции, можно составить из волновых функций u_1^+ и u_2^+ , удовлетворяющих условиям излучения

$$\begin{aligned} u_1^+(x, y, z) &= \begin{cases} e^{i\nu_1 x} \Psi_1(y, z) + S_{11}^+(k) e^{-i\nu_1 x} \Psi_1(y, z) + O(e^{\delta x}), & x \rightarrow -\infty, \\ S_{12}^+(k) e^{i\nu_1 x} \Psi_1(y, z) + O(e^{-\delta x}), & x \rightarrow +\infty; \end{cases} \\ u_2^+(x, y, z) &= \begin{cases} S_{21}^+(k) e^{-i\nu_1 x} \Psi_1(y, z) + O(e^{\delta x}), & x \rightarrow -\infty, \\ e^{-i\nu_1 x} \Psi_1(y, z) + S_{22}^+(k) e^{i\nu_1 x} \Psi_1(y, z) + O(e^{-\delta x}), & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

здесь $\nu_1 = \sqrt{k^2 - \lambda_1^2}$, а через Ψ_1 обозначена собственная функция задачи (4.82), отвечающая числу λ_1^2 и нормированная условием

$$2\nu_1 \int_D |\Psi_1(y,z)|^2 dy dz = 1.$$

Функция $U_1(x,y,z) = e^{i\nu_1 x} \Psi_1(y,z)$ в полосе G является волной, приходящей из $-\infty$ и уходящей в $+\infty$, а $U_2(x,y,z) = e^{-i\nu_1 x} \Psi_1(y,z)$ есть волна, идущая из $+\infty$ в $-\infty$. Величины

$$R_1^+ := |S_{11}^+|^2, \quad T_1^+ := |S_{12}^+|^2$$

называются коэффициентом отражения и коэффициентом прохождения для волны U_1 , приходящей в $G(\varepsilon)$ из $-\infty$. (Аналогичные определения можно дать и для волны U_2 , приходящей из $+\infty$.) Тем же путем вводятся матрица рассеяния S^- и коэффициенты отражения и прохождения R_m^-, T_m^- для уравнения (4.81) со знаком "-".

Мы рассматриваем только рассеяние волны, идущей из $-\infty$, и обозначаем коэффициенты отражения и прохождения через

$$R^\pm = R^\pm(k, \varepsilon) = |S_{11}^\pm(k, \varepsilon)|^2, \quad T^\pm = T(k, \varepsilon) = |S_{12}^\pm(k, \varepsilon)|^2.$$

Наша цель — найти "резонансное" значение $k_r^\pm = k_r^\pm(\varepsilon)$ параметра k , при котором коэффициент прохождения достигает максимума, и описать поведение $T^\pm(k, \varepsilon)$ вблизи $k_r^\pm(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.4.2 Предельные задачи

Асимптотику волновой функции (то есть решения задачи (4.81)) при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы, как обычно, строим методом составных разложений. С этой целью вводятся "предельные" краевые задачи, не зависящие от параметра ε . Будем считать, что вектор-потенциал \mathbf{A}' и, в частности, магнитное поле H отличны от нуля только в резонаторе — части волновода между сужениями. Тогда вне резонатора и в окрестности сужений искомая волновая функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

Положим $G(0) = G \cap K_1 \cap K_2$; таким образом, $G(0)$ состоит из двух неограниченных частей G_1, G_2 и ограниченного резонатора G_0 . Краевые задачи

$$\begin{aligned} \Delta v(x,y,z) + k^2 v(x,y,z) &= 0, & (x,y,z) \in G_j, \\ v(x,y,z) &= 0, & (x,y,z) \in \partial G_j, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2$, и

$$\begin{aligned} (-i\nabla + \mathbf{A}'(x, y, z))^2 v(x, y, z) \pm H(\rho)v(x, y, z) &= k^2 v(x, y, z) && \text{в } G_0, \\ v(x, y, z) &= 0 && \text{на } \partial G_0, \end{aligned} \quad (4.83)$$

называются предельными задачами первого рода. В областях Ω_j , $j = 1, 2$, рассмотрим краевые задачи

$$\begin{aligned} \Delta w(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) &= F(\xi_j, \eta_j, \zeta_j), && (\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \in \Omega_j; \\ w(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) &= 0, && (\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \in \partial\Omega_j, \end{aligned}$$

которые называются предельными задачами второго рода; здесь (ξ_j, η_j, ζ_j) — декартовы координаты с центром в O_j .

Свойства предельных задач в областях G_j , Ω_j при $j = 1, 2$, а также специальные решения этих задач обсуждались в п.п. 4.1.2–4.2.1 и 4.3.1. Исследования требует только задача (4.83) в резонаторе.

Введем функциональные пространства для задачи (4.83) в G_0 . Пусть O_1 и O_2 — конические точки границы ∂G_0 , а ϕ_1 и ϕ_2 — гладкие вещественные функции на замыкании \bar{G}_0 области G_0 , такие что $\phi_j = 1$ в некоторой окрестности точки O_j , $j = 1, 2$, причем $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$. При $l = 0, 1, \dots$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ обозначим через $V_\gamma^l(G_0)$ пополнение по норме

$$\|v; V_\gamma^l(G_0)\| = \left(\int_{G_0} \sum_{|\alpha|=0}^l \sum_{j=1}^2 \phi_j^2(x, y, z) r_j^{2(\gamma-l+|\alpha|)} |\partial^\alpha v(x, y, z)|^2 dx dy dz \right)^{1/2}$$

множества функций, гладких на \bar{G}_0 и равных нулю вблизи O_1 и O_2 ; здесь r_j — расстояние от точки (x, y, z) до начала O_j , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — мультииндекс, $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}$.

Пусть K_j — касательный конус к ∂G_0 в точке O_j , а $S(K_j)$ — область, которую K_j вырезает на единичной сфере с центром в O_j . Обозначим через $\mu_1(\mu_1 + 1)$ и $\mu_2(\mu_2 + 1)$ первое и второе собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа-Бельтрами в $S(K_1)$, $0 < \mu_1(\mu_1 + 1) < \mu_2(\mu_2 + 1)$. Далее, пусть Φ_1 — собственная функция, отвечающая $\mu_1(\mu_1 + 1)$ и нормированная условием

$$(2\mu_1 + 1) \int_{S(K_1)} |\Phi_1(\varphi)|^2 d\varphi = 1.$$

Следующее предложение следует из известных общих результатов; см, например, [40, главы 2 и 4, §§1–3] или [37, т. 1, глава 1].

Предложение 4.4.1. *Предположим, что $|\gamma - 1| < \mu_1 + 1/2$. Тогда для $f \in V_\gamma^0(G_0)$ и произвольного k^2 , за исключением положительной возрастающей последовательности $\{k_p^2\}_{p=1}^\infty$ собственных чисел, $k_p^2 \rightarrow \infty$, существует единственное решение $v \in V_\gamma^2(G_0)$ задачи (4.83) в G_0 . Справедлива оценка*

$$\|v; V_\gamma^2(G_0)\| \leq c \|f; V_\gamma^0(G_0)\| \quad (4.84)$$

с постоянной c , не зависящей от f . Если f обращается в ноль в окрестности точек O_1 и O_2 , то v допускает асимптотическое разложение

$$v(x, y, z) = \begin{cases} b_1 r_1^{-1/2} \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr_1) \Phi_1(\varphi_1) + O(r_1^{\mu_2}), & r_1 \rightarrow 0; \\ b_2 r_2^{-1/2} \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(kr_2) \Phi_1(-\varphi_2) + O(r_2^{\mu_2}), & r_2 \rightarrow 0 \end{cases}$$

вблизи O_1 и O_2 , где (r_j, φ_j) — полярные координаты с центром в O_j , $r_j > 0$ и $\varphi_j \in S(K_j)$; b_j — постоянные коэффициенты; \tilde{J}_μ обозначает функцию Бесселя, умноженную на некоторую постоянную, такую что $\tilde{J}_\mu(kr) = r^\mu + o(r^\mu)$.

Пусть $k^2 = k_e^2$ — собственное число задачи (4.83), тогда задача (4.83) разрешима, если и только если $(f, v_e)_{G_0} = 0$ для любой собственной функции v_e , отвечающей числу k_e^2 . При выполнении данного условия существует единственное решение v задачи (4.83), ортогональное всем упомянутым собственным функциям и удовлетворяющее неравенству (4.84) (то есть справедлива альтернатива Фредгольма).

Пусть $k_{e,\pm}^2$ — простое собственное число задачи (4.83) в резонаторе G_0 и v_e^\pm — собственная функция, отвечающая $k_{e,\pm}^2$ и нормированная условием $\int_{G_0} |v_e^\pm|^2 dx dy dz = 1$. В силу предложения 3.2.1

$$v_e^\pm(x, y, z) \sim \begin{cases} b_1^\pm r_1^{-1/2} \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(k_{e,\pm} r_1) \Phi(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ b_2^\pm r_2^{-1/2} \tilde{J}_{\mu_1+1/2}(k_{e,\pm} r_2) \Phi(-\varphi_2), & r_2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.85)$$

Мы считаем, что $b_j^\pm \neq 0$. При $H = 0$ это верно, например, для собственной функции, отвечающей минимальному собственному числу резонатора. При ненулевом H это условие может нарушаться. Для k^2 из проколотой окрестности числа $k_{e,\pm}^2$, отделенной от других собственных чисел, введем решения v_{0j}^\pm однородной задачи (4.83) соотношениями

$$v_{0j}^\pm(x, y, z) = \Theta(r_j) v(r_j, \varphi_j) + \tilde{v}_{0j}^\pm(x, y, z), \quad j = 1, 2, \quad (4.86)$$

где v определено равенством (4.16), \tilde{v}_{0j}^\pm — ограниченное решение задачи (4.83) при $f_j(x, y, z) = -[\Delta, \Theta(r_j)]v(r_j, \varphi_j)$.

Лемма 4.4.2. В окрестности $V \subset \mathbb{C}$ числа $k_{e,\pm}^2$, не содержащей собственных чисел задачи (4.83) в G_0 , отличных от $k_{e,\pm}^2$, справедливы равенства $\tilde{v}_{0j}^\pm = -\overline{b_j^\pm}(k^2 - k_{e,\pm}^2)^{-1}v_e^\pm + \widehat{v}_{0j}^\pm$, где b_j^\pm — те же, что и в (4.85), а функции \widehat{v}_{0j}^\pm аналитичны при $k^2 \in V$.

Доказательство. Проверим сначала, что $(\mathbf{v}_{0j}^\pm, v_e^\pm)_{G_0} = -\overline{b_j^\pm}/(k^2 - k_{e,\pm}^2)$, где \mathbf{v}_{0j}^\pm определены соотношениями (4.86). Имеем

$$(\Delta \mathbf{v}_{0j}^\pm + k^2 \mathbf{v}_{0j}^\pm, v_e^\pm)_{G_\delta} - (\mathbf{v}_{0j}^\pm, \Delta v_e^\pm + k^2 v_e^\pm)_{G_\delta} = -(k^2 - k_{e,\pm}^2)(\mathbf{v}_{0j}^\pm, v_e^\pm)_{G_\delta};$$

область G_δ получена из G_0 отбрасыванием шаров радиуса δ с центрами в O_1 и O_2 . Применяя формулу Грина аналогично тому, как это делалось в доказательстве леммы 3.3.1, получаем $-(k^2 - k_{e,\pm}^2)(\mathbf{v}_{0j}^\pm, v_e^\pm)_{G_\delta} = \overline{b_j^\pm} + o(1)$. Остается устремить $\delta \rightarrow 0$.

Поскольку $k_{e,\pm}^2$ — простое собственное число, имеем

$$\tilde{v}_{0j}^\pm = \frac{B_j^\pm(k^2)}{k^2 - k_{0,\pm}^2} v_e^\pm + \widehat{v}_{0j}^\pm, \quad (4.87)$$

где $B_j^\pm(k^2)$ не зависит от (x, y, z) , а \widehat{v}_{0j}^\pm — некоторые функции, аналитические по k^2 вблизи $k^2 = k_{e,\pm}^2$. Умножая (4.86) на v_e^\pm и учитывая (4.87), полученное представление для $(\mathbf{v}_{0j}^\pm, v_e^\pm)_{G_0}$ и условие нормировки $(v_e^\pm, v_e^\pm)_{G_0} = 1$, приходим к $B_j^\pm(k^2) = -\overline{b_j^\pm} + (k^2 - k_{e,\pm}^2)\tilde{B}_j^\pm(k^2)$, \tilde{B}_j^\pm — некоторые аналитические функции. Вместе с (4.87) это завершает доказательство. \square Согласно предложению 4.4.1

$$\mathbf{v}_{01}^\pm(x) \sim \begin{cases} r_1^{-1/2}(\tilde{N}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1) + c_{11}^\pm(k)\tilde{J}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1))\Phi_{11}^L(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ c_{12}^\pm(k)r_2^{-1/2}\tilde{J}_{\mu_{21}+1/2}(kr_2)\Phi_{21}^L(\varphi_2), & r_2 \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4.88)$$

$$\mathbf{v}_{02}^\pm(x) \sim \begin{cases} r_1^{-1/2}c_{21}^\pm(k)\tilde{J}_{\mu_{11}+1/2}(kr_1)\Phi_{11}^L(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ r_2^{-1/2}(\tilde{N}_{\mu_{21}+1/2}(kr_2) + c_{22}^\pm(k)\tilde{J}_{\mu_{21}+1/2}(kr_2))\Phi_{21}^L(\varphi_2), & r_2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.89)$$

В силу леммы 4.3.1 и формулы (4.85) получаем

$$c_{pq}^\pm(k) = -\frac{\overline{b_p^\pm}b_q^\pm}{k^2 - k_{e,\pm}^2} + \widehat{c}_{pq}^\pm(k),$$

где \widehat{c}_{pq}^\pm аналитически зависит от k^2 вблизи $k_{e,\pm}^2$.

Лемма 4.4.3. Если функции \mathbf{v}_{01}^\pm и \mathbf{v}_{02}^\pm из (4.88) и (4.89) имеют смысл при данном k , то $c_{12}^\pm(k) = c_{21}^\pm(k)$.

4.4.3 Асимптотические формулы

В этом пункте мы приводим итоговый результат; вывод и обоснование асимптотических формул проводится по схеме, развитой в предыдущих параграфах.

Пусть $k_{e,\pm}^2$ — простое собственное число задачи (4.83) в резонаторе G_0 , а $k_{r,\pm}^2(\varepsilon)$ — резонансная энергия, такая, что $k_{r,\pm}^2(\varepsilon) \rightarrow k_e^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть еще v_e^\pm — собственная функция, отвечающая $k_{e,\pm}^2$ и нормированная условием $\int_{G_0} |v_e^\pm|^2 dx dy dz = 1$; постоянные b_j^\pm определяются ее асимптотикой (4.85). Кроме того, пусть $s_j(k)$ — постоянные в асимптотиках (4.13) и (4.14) специальных решений V_j при $r_j \rightarrow 0$, $j = 1, 2$, а постоянные α и β определены соотношениями (4.10) и (4.11). Положим $P_\pm = (|b_1^\pm| |b_2^\pm| \beta^2 |s_1(k_e)|^2)^{-1}$.

Теорема 4.4.4. При $|k^2 - k_{r,\pm}^2| = O(\varepsilon^{2\mu_1+1})$ справедливы асимптотические представления

$$T^\pm(k, \varepsilon) = \frac{1}{\frac{1}{4} \left(\frac{|b_1^\pm|}{|b_2^\pm|} + \frac{|b_2^\pm|}{|b_1^\pm|} \right)^2 + P_\pm^2 \left(\frac{k^2 - k_{r,\pm}^2}{\varepsilon^{4\mu_1+2}} \right)^2} (1 + O(\varepsilon^\tau)),$$

$$k_{r,\pm}^2 = k_{e,\pm}^2 - \alpha (|b_1^\pm|^2 + |b_2^\pm|^2) \varepsilon^{2\mu_1+1} + O(\varepsilon^{2\mu_1+1+\tau}),$$

$$\Upsilon^\pm(\varepsilon) = \left(\frac{|b_1^\pm|}{|b_2^\pm|} + \frac{|b_2^\pm|}{|b_1^\pm|} \right) P_\pm^{-1} \varepsilon^{4\mu_1+2} (1 + O(\varepsilon^\tau)),$$

где $\Upsilon^\pm(\varepsilon)$ — ширина резонансного пика на половине его высоты ($\Upsilon^\pm(\varepsilon)^{-1}$ — так называемая добротность резонатора), $\tau = \min\{2 - \delta, \mu_2 - \mu_1\}$, δ — произвольно малое положительное число.

Появление в резонаторе магнитного поля приводит не только к расщеплению резонансных пиков. Как показывают вычисления, постоянная z в асимптотике коэффициента прохождения не равна единице, даже если резонатор симметричен. Таким образом, в симметричном волноводе с двумя одинаковыми сужениями и в присутствии магнитного поля высота резонансных пиков не достигает единицы.

4.4.4 Асимптотические формулы в двумерном случае

Пусть $G(\varepsilon)$ — полоса на плоскости с двумя одинаковыми сужениями малого диаметра ε (см. п. 3.1). Рассмотрим в $G(\varepsilon)$ уравнения

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2 u \pm Hu = k^2 u, \quad (4.90)$$

которые являются двумерным аналогом уравнений (4.81). Здесь $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$; $H = \partial_x A_y - \partial_y A_x$. Пусть H зависит только от $\rho = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$, и пусть $H(\rho) = 0$ при $\rho > R$, где R — положительная постоянная. Тогда можно положить $\mathbf{A} = A(\rho)\mathbf{e}_\psi$, где $\mathbf{e}_\psi = \rho^{-1}(-y + y_0, x - x_0)$ и

$$A(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\min\{\rho, R\}} tH(t) dt.$$

Ясно, что равенство $\partial_x A_y - \partial_y A_x = H$ определяет \mathbf{A} с точностью до слагаемого вида ∇f .

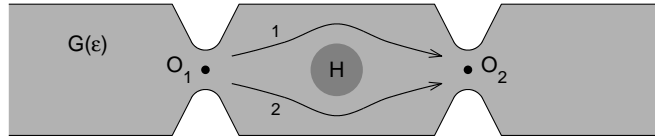


Рисунок 4.2: Волновод $G(\varepsilon)$ и расположение магнитного поля H в резонаторе.

Пусть (ρ, ψ) — полярные координаты на плоскости xy с центром в точке (x_0, y_0) , угол ψ отсчитывается от луча, параллельного оси x . Введем функцию $f(x, y) = c\psi$, где $c = \int_0^R tH(t) dt$. Предположим, что $-\pi/2 < \psi < 3\pi/2$. Функция f однозначно определена в волноводе при $|x - x_0| > 0$, кроме того, $\nabla f = \mathbf{A}$ при $|x - x_0| > R$. Пусть $\tau(t)$ — срезка на \mathbb{R}_+ , равная 1 при $t > R + 2\delta$ и равная 0 при $t < R + \delta$, δ — малое положительное число. Положим $\mathbf{A}'(x, y) = \mathbf{A}(x, y) - \nabla(\tau(|x - x_0|)f(x, y))$. Тогда $\partial_x A'_y - \partial_y A'_x = \partial_x A_y - \partial_y A_x = H$ и $\mathbf{A}' = 0$ при $|x - x_0| > R + 2\delta$. Волновая функция $u' = u \exp\{i\tau f\}$ удовлетворяет уравнениям (4.90) с заменой \mathbf{A} на \mathbf{A}' . При $|x - x_0| > R + 2\delta$ уравнение (4.90) с новым потенциалом \mathbf{A}' совпадает с уравнением Гельмгольца

$$-\Delta u' = k^2 u'.$$

Впоследствии мы опускаем штрихи в обозначениях. Мы ищем решения уравнений (4.90), подчиненные однородному условию Дирихле

$$u = 0 \quad \text{на } \partial G(\varepsilon). \quad (4.91)$$

Пусть k^2 находится между первым и вторым порогами, то есть $(\pi/l)^2 < k^2 < (2\pi/l)^2$, где l — ширина волновода вдали от сужений. Рассмотрим решение u_1^\pm задачи (4.90)–(4.91), удовлетворяющее на бесконечности условиям излучения

$$u_1^\pm(x, y) = \begin{cases} e^{i\nu_1 x} \Psi_1(y) + S_{11}^\pm(k) e^{-i\nu_1 x} \Psi_1(y) + O(e^{\delta x}), & x \rightarrow -\infty, \\ S_{12}^\pm(k) e^{i\nu_1 x} \Psi_1(y) + O(e^{-\delta x}), & x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

где $\nu_1 = \sqrt{k^2 - (\pi/l)^2}$, Ψ_1 — собственная функция задачи (3.2), отвечающая собственному числу $\lambda_1^2 = (\pi/l)^2$, то есть $\Psi_1(y) = \sqrt{2/l\nu_1} \cos \lambda_1 y$. Как обычно, $T_1^\pm(k, \varepsilon) = |S_{12}^\pm(k, \varepsilon)|^2$ — коэффициент прохождения.

Предельная область $G(0)$ состоит из двух бесконечных частей G_1 , G_2 и ограниченной области G_0 , называемой резонатором. Пусть $k_{e,\pm}^2$ — простое собственное число задачи

$$\begin{aligned} (-i\nabla + \mathbf{A}(x, y))^2 v(x, y) \pm H(\rho) v(x, y) &= k^2 v(x, y), & (x, y) \in G_0, \\ v(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial G_0, \end{aligned}$$

а v_e^\pm — собственная функция, отвечающая $k_{e,\pm}^2$ и нормированная условием $\int_{G_0} |v_e^\pm|^2 dx dy = 1$. Вблизи точек O_j справедливы разложения

$$v_e^\pm(x, y) \sim \begin{cases} b_1^\pm \tilde{J}_{\pi/\omega}(k_{e,\pm} r_1) \Phi(\varphi_1), & r_1 \rightarrow 0, \\ b_2^\pm r_2^{-1/2} \tilde{J}_{\pi/\omega}(k_{e,\pm} r_2) \Phi(\pi - \varphi_2), & r_2 \rightarrow 0; \end{cases}$$

(r_j, φ_j) , \tilde{J}_μ и Φ — те же, что и в предложении 3.2.1. Мы считаем, что $b_j^\pm \neq 0$. Кроме того, пусть $s_j(k)$ — постоянные в асимптотиках вида (3.55) и (3.57) (при $M = 1$) специальных решений V_j при $r_j \rightarrow 0$, $j = 1, 2$, а постоянные α и β определены соотношениями (3.9) и (3.10). Положим $P_\pm = (|b_1^\pm| |b_2^\pm| \beta^2 |s_1(k_{e,\pm})|^2)^{-1}$. Пусть $k_{r,\pm}^2$ — резонанс, такой, что $k_{r,\pm}^2 \rightarrow k_{e,\pm}^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 4.4.5. При $|k^2 - k_{r,\pm}^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$ справедливы асимптотические формулы

$$T^\pm(k, \varepsilon) = \frac{1}{\frac{1}{4} \left(\frac{|b_1^\pm|}{|b_2^\pm|} + \frac{|b_2^\pm|}{|b_1^\pm|} \right)^2 + P_\pm^2 \left(\frac{k^2 - k_{r,\pm}^2}{\varepsilon^{4\pi/\omega}} \right)^2} (1 + O(\varepsilon^{2-\delta})),$$

$$k_{r,\pm}^2 = k_{e,\pm}^2 - \alpha(|b_1^\pm|^2 + |b_2^\pm|^2) \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega+2-\delta}),$$

$$\Upsilon^\pm(\varepsilon) = \left(\frac{|b_1^\pm|}{|b_2^\pm|} + \frac{|b_2^\pm|}{|b_1^\pm|} \right) P_\pm^{-1} \varepsilon^{4\pi/\omega} (1 + O(\varepsilon^{2-\delta})),$$

где $\Upsilon^\pm(\varepsilon)$ — ширина резонансного пика на половине высоты, δ — произвольно малое положительное число.

Глава 5

Сравнение асимптотического и численного подходов

В этой главе сравниваются значения характеристик резонансного туннелирования, полученные, с одной стороны, путем непосредственного вычисления матрицы рассеяния методом, изложенным в главе 2, и, с другой стороны, найденные из асимптотических формул, выведенных в главах 3 и 4. Все рассуждения проводятся в двумерном симметричном волноводе, описанном в начале главы 3. Ширина волновода равна единице, раствор сужений $\omega = 0.8\pi$, расстояние между сужениями в п.п. 5.1–5.2 равно 2, а в п. 5.3 это расстояние равно 1.4.

Ясно, что численные результаты, полученные из асимптотики, могут быть надежны только при достаточно малых значениях диаметров сужений, а результаты, полученные непосредственным вычислением матрицы рассеяния — при достаточно больших значениях диаметров. Сравнение "асимптотических" и "численных" результатов показывает, что существует интервал диаметров сужений, в котором они совпадают с высокой степенью точности. Таким образом, асимптотические и численные методы дополняют друг друга и дают полную картину резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения.

5.1 Сравнение между первым и вторым порогами

Сравним асимптотику $k_{r,a}^2(\varepsilon)$ резонансной энергии $k_r^2(\varepsilon)$ (см. теорему 3.5.3) и приближенное значение $k_{r,n}^2(\varepsilon)$, полученное численным методом. Рис. 5.1 показывает хорошее согласие результатов в диапазоне $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.5$. Имеем

$$|k_{r,a}^2(\varepsilon) - k_{r,n}^2(\varepsilon)|/k_{r,a}^2(\varepsilon) \leq 10^{-3}$$

при $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.3$, и только при $\varepsilon = 0.5$ это отношение становится равным $2 \cdot 10^{-2}$. Для $\varepsilon < 0.1$ численный метод оказывается плохо обусловленным.

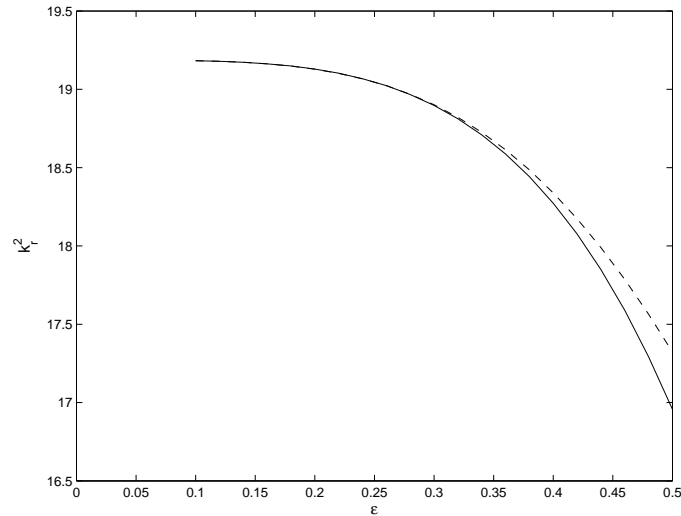


Рисунок 5.1: Асимптотика $k_{r,a}^2(\varepsilon)$ (сплошная линия) и результат приближенного вычисления $k_{r,n}^2(\varepsilon)$ (пунктирная линия) резонансной энергии $k_r^2(\varepsilon)$.

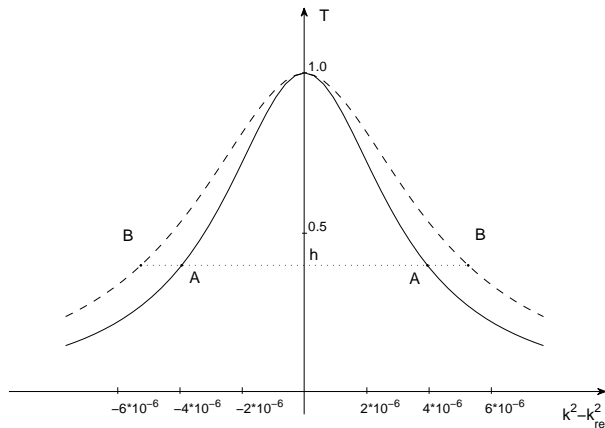


Рисунок 5.2: Форма резонансного пика при $\varepsilon = 0.2$: "асимптотическое" значение $T_a(k^2 - k_{res,a}^2)$ (сплошная линия) и "численное" значение $T_n(k^2 - k_{res,n}^2)$ (пунктирная линия) коэффициента прохождения $T(k^2 - k_{res}^2)$.

Различие между асимптотическими и численными результатами становится все более значительным при увеличении ε с выходом из указанного интервала; асимптотика становится ненадежной. Численный метод показывает, что для $\varepsilon \geq 0.5$ резонансный пик столь широк, что исчезает и сам эффект резонансного туннелирования. Формы "асимптотического" и "численного" резонансных пиков почти одинаковые (см. Рис. 5.2). Различие между пиками иллюстрирует Рис. 5.3. Оказывается, что отношение ширины $\Delta_n(h, \varepsilon)$ численного пика на высоте h к ширине $\Delta_a(h, \varepsilon)$ асимптотического пика не зависит от h . Это отношение как функция параметра ε показано на Рис. 5.4.

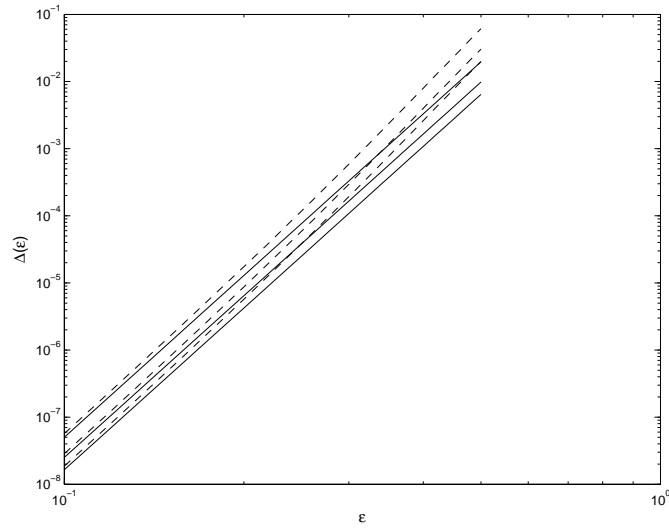


Рисунок 5.3: Зависимость ширины $\Delta(h, \epsilon)$ резонансного пика от ϵ на различных высотах h (пунктиром обозначена зависимость для "численного" пика, сплошной чертой — для "асимптотического"): верхние прямые отвечают случаю $h = 0.2$; средние — случаю $h = 0.5$; нижние — случаю $h = 0.7$.

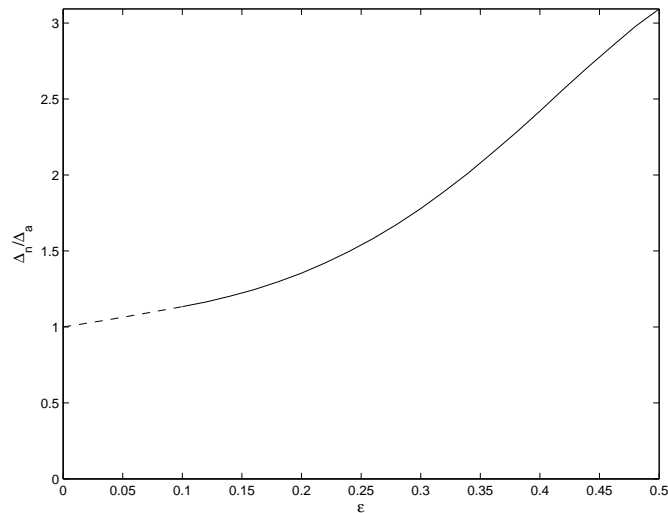


Рисунок 5.4: Зависимость отношения $\Delta_n(h, \epsilon)/\Delta_a(h, \epsilon)$ от ϵ . Это отношение не зависит от h в пределах погрешности проводимого анализа.

Отметим еще, что для $\varepsilon = 0.1$ (то есть на левом конце интервала, в котором численные и асимптотические результаты хорошо согласуются) расхождение результатов более значительно для ширины резонансных пиков, чем для резонансной энергии.

5.2 Сравнение выше второго порога

В симметричном волноводе проходящая волна, четная (соответственно, нечетная) относительно его оси, рассеивается только по четным (соответственно, по нечетным) волнам. Поэтому при увеличении диапазона энергий электронов до третьего порога дополнительные каналы рассеяния не появляются и асимптотические формулы, приведенные в теореме 3.5.3, не изменяются.

Сначала опишем результаты, полученные путем непосредственного вычисления матрицы рассеяния. Мы вычисляем коэффициент прохождения T_1 при $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$. Для $\varepsilon < 0.1$ теряется точность вычислений, а при $\varepsilon > 0.5$

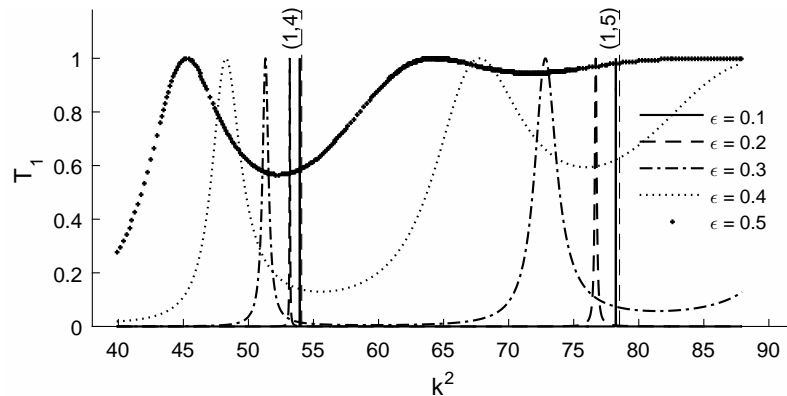
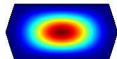
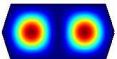
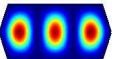
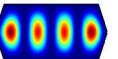
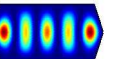
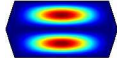
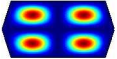
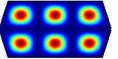
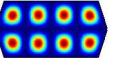


Рисунок 5.5: Коэффициент прохождения $T_1(k^2)$ при $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

исчезает само явление резонансного туннелирования. Исчезновение резонансного туннелирования можно объяснить тем обстоятельством, что при достаточно большом значении ε сужение перестает быть эффективным потенциальным барьером для продольного движения электронов и вероятность прохождения электронов сквозь сужение становится близкой к единице. При энергиях электронов выше второго порога предельное значение ε , до которого резонансное туннелирование еще наблюдается, равно приблизительно половине ширины волновода (вдали от сужений), выше третьего порога — трети ширины волновода и т. д.

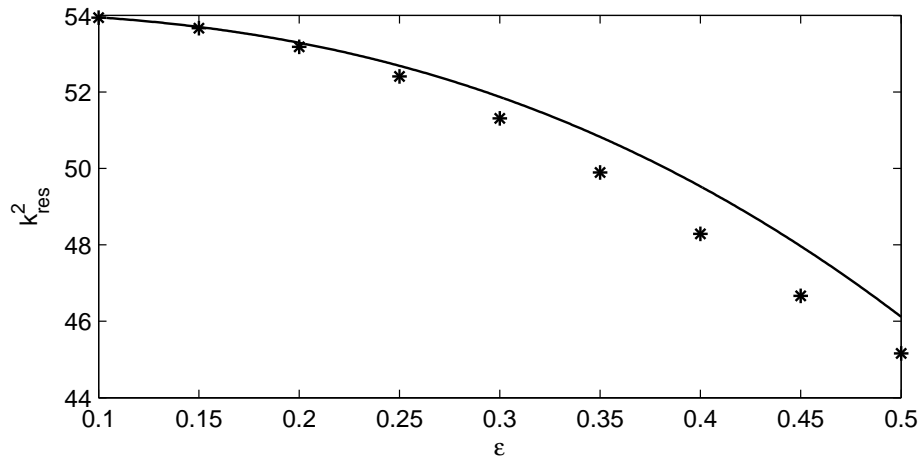
Между вторым и третьим порогами ($\lambda_2 := (2\pi/l)^2 = 39,48$ и $\lambda_3 := (3\pi/l)^2 = 88,83$) имеются два собственных числа закрытого резонатора $k_{e,1}^2 = 54,09$ и $k_{e,2}^2 = 78,52$, которым отвечают собственные функции, четные относительно оси волновода (см. Таблицу 5.1). На Рисунке 5.5 при $\varepsilon = 0.1$ присутствуют два острых

Таблица 5.1: Собственные значения и собственные функции задачи в резонаторе G_0 .

	1	2	3	4	5
1	$k_e^2 = 12.65$ 	$k_e^2 = 20.99$ 	$k_e^2 = 34.84$ 	$k_e^2 = 54.09$ 	$k_e^2 = 78.52$ 
2	$k_e^2 = 42.46$ 	$k_e^2 = 51.40$ 	$k_e^2 = 66.26$ 	$k_e^2 = 86.99$ 	$k_e^2 > \lambda_3^2$

пика в точках, практически совпадающих с собственными числами резонатора. При увеличении ε до значения 0.3 пики смещаются влево и остаются достаточно острыми. При $\varepsilon = 0.4$ ширина пиков значительно увеличена. При $\varepsilon = 0.5$ эффект резонансного туннелирования почти не наблюдается.

Кроме того, между λ_2 и λ_3 присутствуют собственные числа резонатора, которым отвечают собственные функции, нечетные относительно оси волновода (Таблица 5.1). Однако, эти собственные числа не влияют на рассеяние волны U_1 (четной относительно оси волновода). Асимптотические формулы в п. 3.4.3 обеспечивают резонансный пик вблизи собственного числа резонатора при условии, что в разложении (3.16) для собственной функции постоянные b_1 и b_2 отличны от нуля. Если же собственная функция нечетная относительно оси волновода, то обе такие постоянные аннулируются и резонансного пика нет.

Рисунок 5.6: Асимптотические (сплошная линия) и численные (звездочки) значения резонансной энергии k_{res}^2 .

Далее мы, главным образом, обсуждаем резонансный пик вблизи собственного числа $k_{e,1}^2 = 54,09$. Рисунок 5.6 демонстрирует хорошее согласование численного и асимптотического описаний резонансной энергии для этого случая. В интервале $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.5$ имеем

$$|k_{res,a}^2(\varepsilon) - k_{res,n}^2(\varepsilon)|/k_{res,a}^2(\varepsilon) < 0.05.$$

На рисунке 5.7 показана зависимость логарифма ширины резонансного пика от

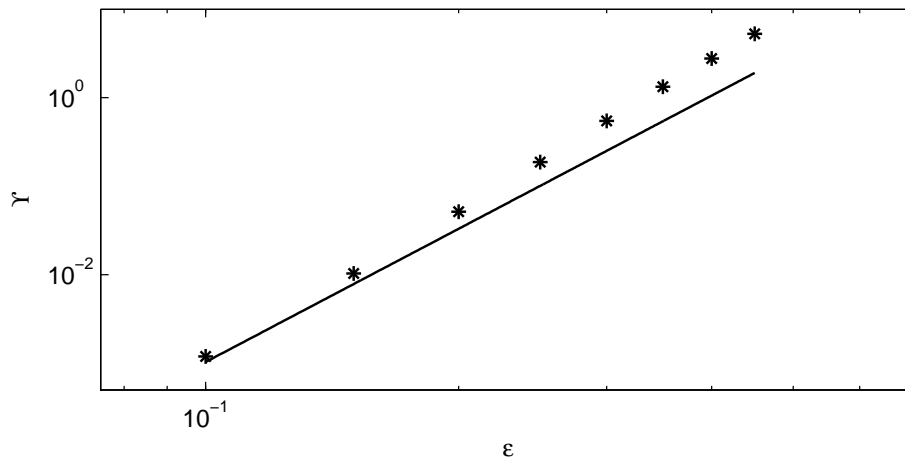


Рисунок 5.7: Асимптотические (сплошная линия) и численные (звездочки) значения ширины Γ резонансного пика.

$\ln \varepsilon$. Предсказываемая асимптотикой линейная зависимость имеет место и для численных результатов. При $\varepsilon = 0.1$ асимптотическое и численные значения ширины резонансного пика согласуются достаточно хорошо (см. Рис. 5.8). С ростом ε "численный" резонансный пик быстро расплывается по сравнению с асимптотическим (Рисунки 5.9–5.10). Для второго пика расплывание происходит еще быстрее.

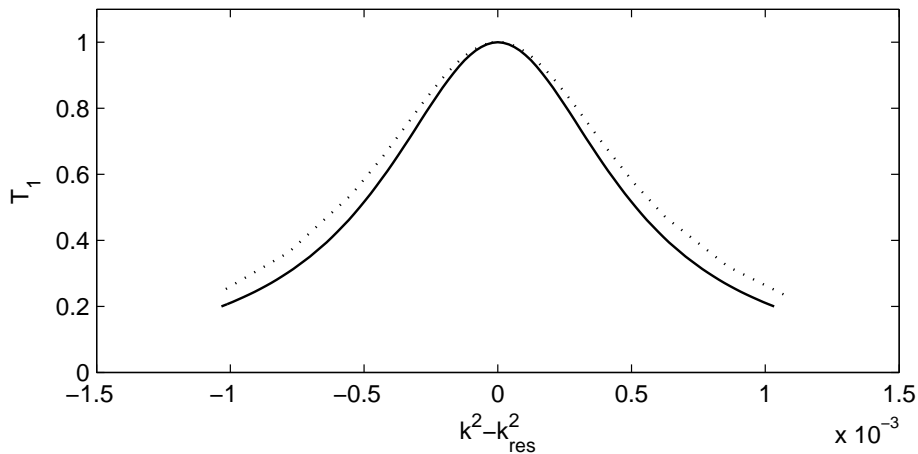


Рисунок 5.8: Форма резонансного пика, найденная с помощью асимптотики (сплошная линия) и численно (точки) при $\varepsilon = 0.1$.

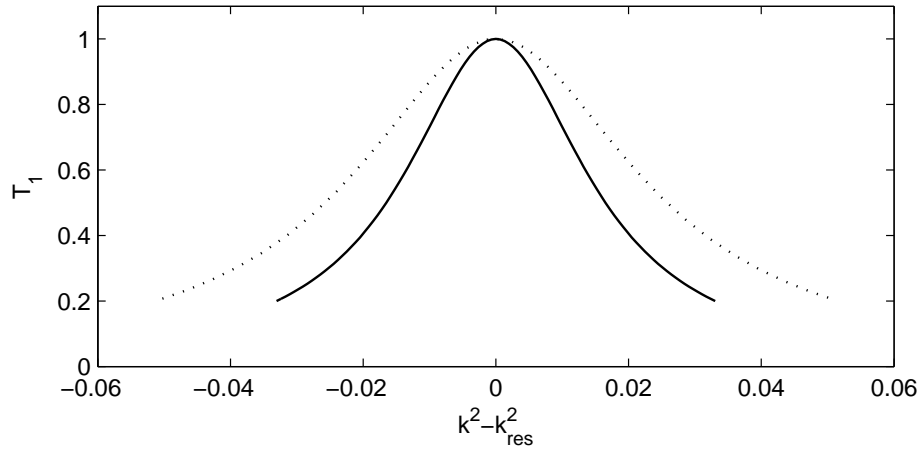


Рисунок 5.9: Форма резонансного пика, найденная с помощью асимптотики (сплошная линия) и численно (точки) при $\varepsilon = 0.2$.

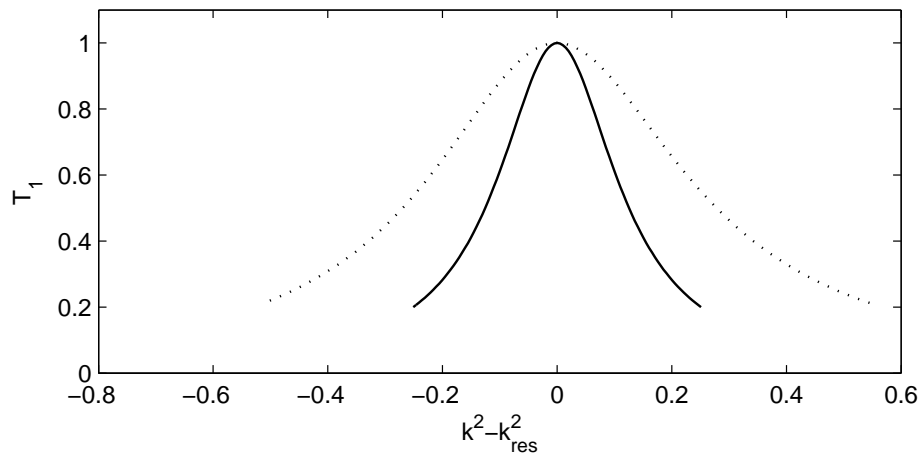


Рисунок 5.10: Форма резонансного пика, найденная с помощью асимптотики (сплошная линия) и численно (точки) при $\varepsilon = 0.3$.

5.3 Сравнение в присутствии магнитного поля

В этом пункте энергия электронов остается в интервале между первым и вторым порогами, мы интересуемся влиянием магнитного поля на резонансное туннелирование. При этом используются формулы из теоремы 4.4.5. Оказывается, что наличие магнитного поля не ухудшает согласование численного и асимптотического подходов.

Сравним асимптотическое значение $k_{r,a}^2(\varepsilon)$ резонансной энергии $k_{r,+}^2(\varepsilon)$ с численным значением $k_{r,n}^2(\varepsilon)$, полученным методом из главы 2.

"Численные" и "асимптотические" значения резонансной энергии показаны на Рис. 5.11. Расстояние между этими кривыми зависит от интенсивности магнитного поля H_0 и раствора сужений ω .

Форма "асимптотического" и "численного" резонансных пиков практически совпадает (см. Рис. 5.12). Разница между этими пиками показана на Рисунке 5.13 (отметим, что на осях отложена логарифмическая шкала).

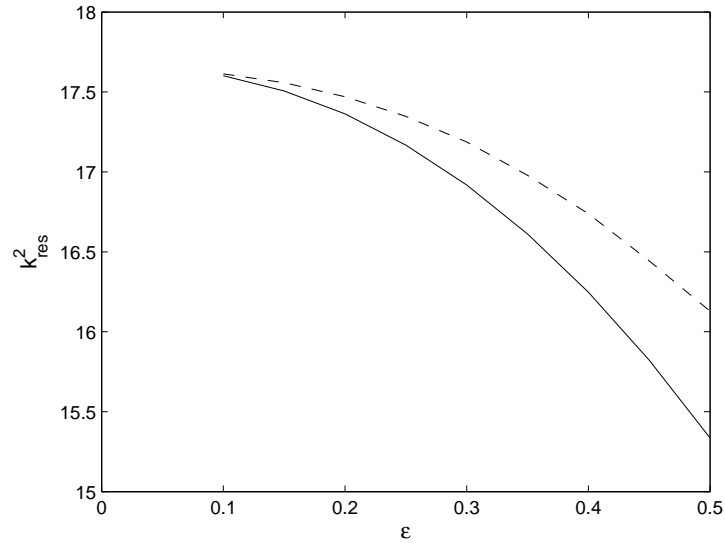


Рисунок 5.11: Асимптотическое $k_{r,a}^2(\varepsilon)$ (сплошная линия) и численное $k_{res,n}^2(\varepsilon)$ (пунктирная линия) приближения для резонансной энергии $k_{r,+}^2(\varepsilon)$.

Кроме того, оказывается, что отношение ширины $\Delta_n(h, \varepsilon)$ численного пика на высоте h к ширине $\Delta_a(h, \varepsilon)$ асимптотического пика не зависит от h . Зависимость этого отношения от ε показана на Рисунке 5.14.

Полученные данные демонстрируют, что асимптотический и численный подходы дают эквивалентные результаты в диапазоне $0.1 < \varepsilon < 0.5$ (см. Рисунки 5.11 и 5.13).

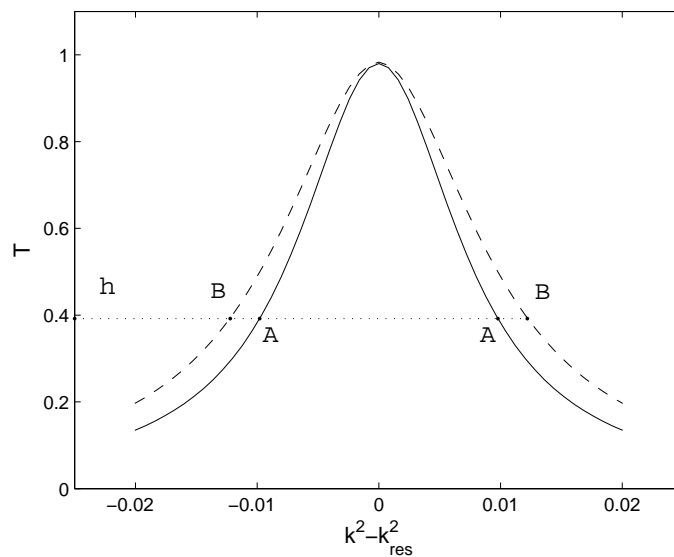


Рисунок 5.12: Форма резонансного пика при $\varepsilon = 0.2$: асимптотическое значение $T_a(k^2 - k_{res,a}^2)$ (сплошная линия) и численное значение $T_n(k^2 - k_{res,n}^2)$ (пунктирная линия) коэффициента прохождения $T(k^2 - k_{res}^2)$.

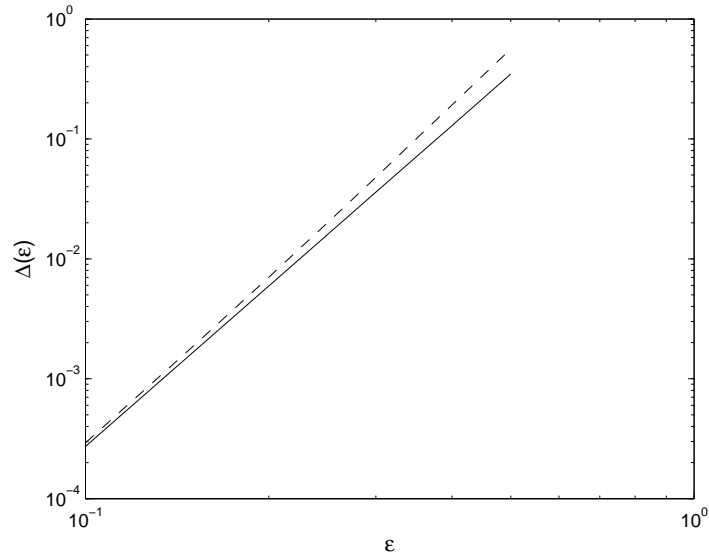


Рисунок 5.13: Зависимость ширины $\Upsilon(h, \varepsilon)$ резонансного пика от ε на половине высоты (пунктиром обозначена зависимость для "численного" пика, сплошной чертой — для "асимптотического").

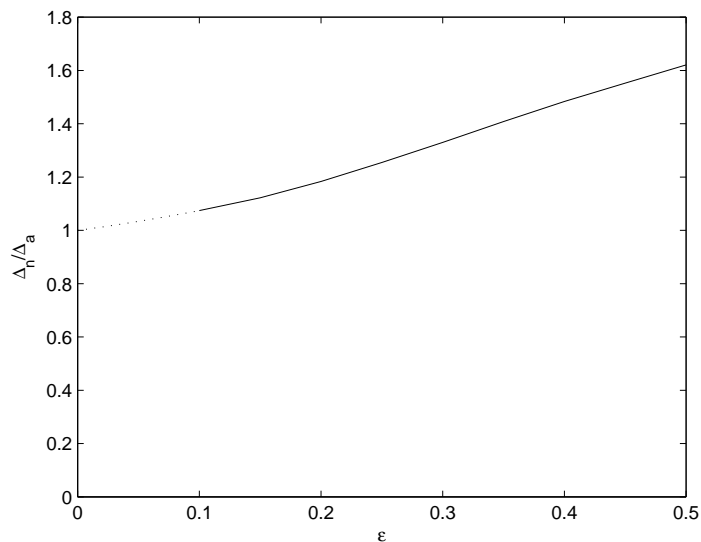


Рисунок 5.14: Отношение $\Delta_n(h, \varepsilon)/\Delta_a(h, \varepsilon)$ как функция от ε . Это отношение не зависит от h в пределах точности проводимых вычислений.

В предыдущих вычислениях этого пункта центр области, занятой магнитным полем, совпадал с центром симметрии резонатора. Рисунок 5.15 показывает зависимость величины максимального значения коэффициента прохождения $T(k_{r,+}^2)$ от интенсивности магнитного поля при четырех разных значениях сдвига области, занятой магнитным полем, в направлении, перпендикулярном оси волновода. Если центр этой области лежит на оси волновода, то $T(k_{r,+}^2)$ исчезает при некоторых значениях H . Пусть радиус области, занятой магнитным полем, равен 0.2.

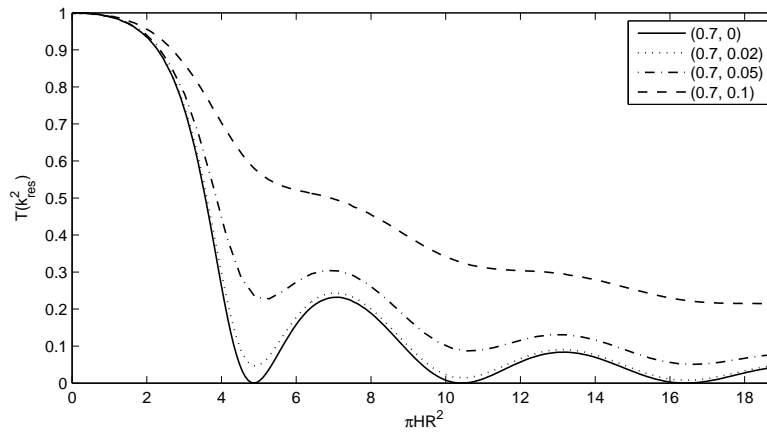


Рисунок 5.15: Зависимость $T(k_{res}^2)$ от H при сдвиге магнитного поля в направлении, ортогональном оси волновода. В отдельном окне указаны координаты центра области, занятой магнитным полем.

Тогда Рисунок 5.15 показывает, в частности, что при сдвиге магнитного поля от оси волновода на расстояние 0.1 этот эффект практически исчезает.

Приложение. Принцип излучения и матрица рассеяния вне порогов

Краевая задача в цилиндре

Постановка задачи. Операторный пучок

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндре $\Pi = \{(y, t) : y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega, t \in \mathbb{R}\}$ мы рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)u(y, t) &= f(y, t), & (y, t) \in \Pi, \\ u(y, t) &= 0 & (y, t) \in \partial\Pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\Delta = \Delta_y + \partial_t^2, \quad \Delta_y = \sum_{j=1}^n \partial_j^2, \quad \partial_j = \partial/\partial y_j.$$

Применяя к задаче (1) преобразование Фурье

$$\widehat{v}(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\lambda t)v(t) dt,$$

получим семейство краевых задач, зависящих от параметра λ :

$$\begin{aligned} (-\Delta_y + \lambda^2 - \mu)\widehat{u}(y, \lambda) &= \widehat{f}(y, \lambda), & y \in \Omega, \\ \widehat{u}(y, \lambda) &= 0, & y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Введем операторнозначную функцию $\mathfrak{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)$, определенную равенством

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu)v(y) = (-\Delta_y + \lambda^2 - \mu)v(y), \quad y \in \Omega, \quad (2)$$

на функциях v , гладких в $\overline{\Omega}$ и равных нулю на $\partial\Omega$; параметр μ временно предполагается зафиксированным. Функция $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$ называется операторным пучком. Число

$\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным числом пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$, если существует нетривиальное решение φ^0 (собственный вектор) уравнения $\mathfrak{A}(\lambda_0, \mu)v = 0$, то есть λ_0 и φ^0 удовлетворяют краевой задаче

$$\begin{aligned} (-\Delta_y + \lambda_0^2 - \mu)\varphi^0(y) &= 0, & y \in \Omega, \\ \varphi^0(y) &= 0, & y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta_y - \mu)v(y) &= 0, & y \in \Omega, \\ v(y) &= 0, & y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

со спектральным параметром μ . Собственные числа задачи (3) называются порогами задачи (1). Пороги образуют положительную последовательность $\tau_1 < \tau_2 < \dots$, строго возрастающую к бесконечности. Любое собственное число τ_l имеет конечную кратность, то есть существует лишь конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих τ_l . Введем неубывающую последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных чисел задачи (3), перенумерованных с учетом кратности. Вообще говоря, нумерации чисел τ_l и μ_k различны; любое число μ_k совпадает с одним из порогов τ_l .

Для любого μ собственные числа пучка $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)$ заданы равенством $\lambda_k^{\pm}(\mu) = \pm(\mu - \mu_k)^{1/2}$; говоря точнее, мы полагаем $\lambda_k^{\pm}(\mu) = \pm i(\mu_k - \mu)^{1/2}$ при $\mu_k > \mu$, где $(\mu_k - \mu)^{1/2} > 0$, и $\lambda_k^{\pm}(\mu) = \pm i(\mu - \mu_k)^{1/2}$ при $\mu_k < \mu$, где $(\mu - \mu_k)^{1/2} > 0$. Если $\mu = \mu_k$, то $\lambda_k^+(\mu) = \lambda_k^-(\mu) = 0$; в этом случае будем иногда писать $\lambda_k^0(\mu)$ вместо $\lambda_k^{\pm}(\mu)_k$. Кроме того, иногда будем писать λ_k^{\pm} вместо $\lambda_k^{\pm}(\mu)$. Если $\mu_{k-1} < \mu < \mu_k$, то числа $\lambda_k^{\pm}(\mu), \lambda_{k+1}^{\pm}(\mu), \dots$ чисто мнимые, а числа $\lambda_1^{\pm}(\mu), \dots, \lambda_{k-1}^{\pm}(\mu)$ вещественные. Собственным числам λ_k^{\pm} отвечает тот же собственный вектор φ_k , что и собственному числу μ_k задачи (3). Всякое собственное число пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$ совпадает с одним из собственных чисел, введенных в этом пункте.

Обозначим через $H^l(\Omega)$ пространство Соболева в Ω с нормой

$$\|u\|_l = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq l} |\partial_y^{\alpha} u(y)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где $l = 0, 1, \dots$; в частности, $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Кроме того, обозначим через $\dot{H}^2(\Omega)$ замыкание в $H^2(\Omega)$ множества функций, гладких в $\bar{\Omega}$ и исчезающих на $\partial\Omega$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta_y + \lambda^2 - \mu)v(y) &= f(y), & y \in \Omega, \\ v(y) &= 0, & y \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Предложение 1. (см., например, [16]) (i). *Предположим, что λ не является собственным числом пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$, где μ фиксировано. Тогда для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $v \in \dot{H}^2(\Omega)$ задачи (5), причем справедливо неравенство*

$$\sum_{j=0}^2 |\lambda|^{2j} \|v\|_{2-j}^2 \leq C \|f\|_0^2 \quad (6)$$

с постоянной C , не зависящей от f .

(ii). *Пусть F — замкнутое подмножество комплексной плоскости, лежащее в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < h < +\infty\}$ и свободное от собственных чисел пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$. Тогда для любого $\lambda \in F$ справедлива оценка (6) с постоянной $C = C(F)$, зависящей от F , но не зависящей от λ и f .*

Пусть λ_0 — собственное число пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$, а φ^0 — собственный вектор, отвечающий числу λ_0 . Гладкие функции $\varphi^1, \dots, \varphi^{m-1}$, заданные на $\bar{\Omega}$, равные нулю на границе $\partial\Omega$ и удовлетворяющие системе

$$\sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} \partial_\lambda^k \mathfrak{A}(\lambda_0, \mu) \varphi^{l-k} = 0, \quad l = 1, \dots, m-1, \quad (7)$$

называются присоединенными векторами. Упорядоченный набор $\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{m-1}$ называется жордановой цепочкой, отвечающей числу λ_0 . Ввиду (2), соотношения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\lambda_0, \mu) \varphi^0 &= 0, \\ \mathfrak{A}(\lambda_0, \mu) \varphi^1 + 2\lambda_0 \varphi^0 &= 0, \\ \mathfrak{A}(\lambda_0, \mu) \varphi^l + 2\lambda_0 \varphi^{l-1} + 2\varphi^{l-2} &= 0, \quad l = 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Числа $\lambda_k^\pm \neq 0$ не имеют присоединенных векторов. Действительно, если предположить, что, например, числу $\lambda_k^+ \neq 0$ отвечает жорданова цепочка φ_k^0, φ_k^1 , то мы получаем равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\lambda_k^+, \mu) \varphi_k^0 &= 0, \\ \mathfrak{A}(\lambda_k^+, \mu) \varphi_k^1 + 2\lambda_k^+ \varphi_k^0 &= 0, \end{aligned}$$

которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} (-\Delta_y - \mu_k)\varphi_k^0 &= 0, \\ (-\Delta_y - \mu_k)\varphi_k^1 + 2\lambda_k^+\varphi_k^0 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Краевая задача

$$(-\Delta_y - \mu_k)v(y) = f(y), \quad y \in \Omega; \quad v(y) = 0, \quad y \in \partial\Omega, \quad (10)$$

имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия $(f, \psi)_\Omega = 0$ для любого собственного вектора ψ этой задачи, отвечающего числу μ_k ; $(f, \psi)_\Omega$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Таким образом, не существует решения φ_k^1 уравнения (9) при $\lambda_k^+ \neq 0$. В случае $\mu = \mu_k$ имеем $\lambda_k^+ = \lambda_k^- = 0$ и существует жорданова цепочка φ_k^0, φ_k^1 . Оба эти вектора удовлетворяют однородной краевой задаче (10) при $f = 0$, решение φ_k^0 должно быть ненулевым, а φ_k^1 может равняться 0. Из уравнения (8) при $l = 0$ и $\lambda_0 = 0$ нетрудно вывести, что не существует присоединенного вектора φ_k^3 .

Оператор-функция $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow \dot{H}^2(\Omega)$ голоморфна всюду, кроме полюсов, совпадающих с собственными числами пучка $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)$. Чтобы описать поведение $\mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1}$ в окрестности полюсов, воспользуемся частным случаем теоремы Келдыша. Пусть τ — собственное число задачи (3) и пусть J — его геометрическая кратность. Введем базис $\varphi^{(0,1)}, \dots, \varphi^{(0,J)}$ в собственном подпространстве, отвечающем τ . При $\mu > \tau$ обозначим через $\lambda^\pm = \lambda^\pm(\mu)$ собственные числа $\pm(\mu - \tau)^{1/2}$ пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$. Кратность числа λ^\pm равна J , а собственное подпространство натянуто на векторы $\varphi^{(0,1)}, \dots, \varphi^{(0,J)}$. По теореме Келдыша, в некоторой окрестности числа λ^+ имеет место представление

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} = (\lambda - \lambda^+)^{-1} \sum_{j=1}^J (\cdot, \psi^{(0,j)})_\Omega \varphi^{(0,j)} + \Gamma(\lambda), \quad (11)$$

где $(u, v)_\Omega$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\Gamma(\lambda) : L_2(\Omega) \rightarrow \dot{H}^2(\Omega)$ — голоморфная функция, а $\psi^{(0,1)}, \dots, \psi^{(0,J)}$ — собственные векторы пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$, отвечающие числу λ^+ (и одновременно числу λ^-) и удовлетворяющие условиям

$$(\partial_\lambda \mathfrak{A}(\lambda^+, \mu) \varphi^{(0,j)}, \psi^{(0,k)})_\Omega = \delta_{jk}.$$

Поскольку $\partial_\lambda \mathfrak{A}(\lambda^+, \mu) = 2\lambda^+$, имеем $2\lambda^+(\varphi^{(0,j)}, \psi^{(0,k)})_\Omega = \delta_{jk}$, откуда, полагая $\|\varphi^{(0,j)}\|_0 = 1$, получаем $\psi^{(0,j)} = (2\lambda^+)^{-1} \varphi^{(0,j)}$. Следовательно, представление (11)

принимает вид

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} = (\lambda - \lambda^+)^{-1} \sum_{j=1}^J (2\lambda^+)^{-1} (\cdot, \varphi^{(0,j)})_{\Omega} \varphi^{(0,j)} + \Gamma(\lambda). \quad (12)$$

Чтобы получить представление для резольвенты $\mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1}$ в окрестности полюса λ^- , достаточно заменить в (12) λ^+ на λ^- .

При $\mu < \tau$ положим $\lambda^{\pm}(\mu) = i(\tau - \mu)^{1/2}$, где $(\tau - \mu)^{1/2} > 0$, а через $\varphi^{(0,1)}, \dots, \varphi^{(0,J)}$ обозначим ортонормированный базис в собственном подпространстве, отвечающем числу λ^{\pm} (напомним, что числам $\lambda^+(\mu)$ и $\lambda^-(\mu)$ соответствует одно и то же собственное подпространство). Мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 2. При любом вещественном $\mu \neq \tau$ оператор-функция $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1}$ допускает представление

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} = (\lambda - \lambda^{\pm})^{-1} \sum_{j=1}^J (2\lambda^{\pm})^{-1} (\cdot, \varphi^{(0,j)})_{\Omega} \varphi^{(0,j)} + \Gamma(\lambda)$$

в некоторой окрестности числа $\lambda^{\pm} = \lambda^{\pm}(\mu)$, где $\lambda \mapsto \Gamma(\lambda) : L_2(\Omega) \rightarrow \dot{H}^2(\Omega)$ — голоморфная функция.

Теперь предположим, что $\mu = \tau$. Тогда $\lambda^0 = 0$ является собственным числом пучка $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)$, его геометрическая кратность равна J . Пусть $\varphi^{(0,1)}, \dots, \varphi^{(0,J)}$ — базис в собственном подпространстве, отвечающем числу λ^0 , а $\varphi^{(0,j)}, \varphi^{(1,j)}$ — жорданова цепочка, где $j = 1, \dots, J$. По теореме Келдыша, в некоторой окрестности числа λ^0 справедливо представление

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^2 (\lambda - \lambda^0)^{-k} \sum_{q=0}^{2-k} (\cdot, \psi^{(q,j)})_{\Omega} \varphi^{(2-k-q,j)} + \Gamma(\lambda),$$

где $\psi^{(0,j)}, \psi^{(1,j)}, j = 1, \dots, J$ — набор жордановых цепочек пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$, отвечающих числу λ^0 и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p+q+r=2+\nu} \frac{1}{p!} (\partial_{\lambda}^p \mathfrak{A}(\lambda^0, \mu) \varphi^{(q,\sigma)}, \psi^{(r,\zeta)})_{\Omega} = \delta_{\sigma,\zeta} \delta_{0,\nu}, \quad (13)$$

при $\sigma, \zeta = 1, \dots, J$ и $\nu = 0, 1$; оператор-функция $\lambda \mapsto \Gamma(\lambda) : L_2(\Omega) \rightarrow \dot{H}^2(\Omega)$ голоморфна в некоторой окрестности числа λ^0 . Если базис $\varphi^{(0,1)}, \dots, \varphi^{(0,J)}$ ортонормирован и любой присоединенный вектор $\varphi^{(1,j)}$ равен нулю, то (13) сводится к

СООТНОШЕНИЯМ

$$(\varphi^{(0,\sigma)}, \psi^{(0,\zeta)})_{\Omega} = \delta_{\sigma,\zeta}, \quad (\varphi^{(0,\sigma)}, \psi^{(1,\zeta)})_{\Omega} + (\varphi^{(1,\sigma)}, \psi^{(0,\zeta)})_{\Omega} = 0.$$

Из равенств $(\varphi^{(0,\sigma)}, \psi^{(0,\zeta)})_{\Omega} = \delta_{\sigma,\zeta}$ следует, что $\psi^{(0,\sigma)} = \varphi^{(0,\sigma)}$ при $\sigma = 1, \dots, J$. Так как $\varphi^{(1,\sigma)} = 0$, то $(\varphi^{(0,\sigma)}, \psi^{(1,\zeta)})_{\Omega} = 0$, откуда $\psi^{(1,\zeta)} = 0$ при $\zeta = 1, \dots, J$.

Предложение 3. При $\mu = \tau$ оператор функция $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1}$ в некоторой окрестности числа $\lambda^0 = 0$ допускает представление

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} = (\lambda - \lambda^0)^{-2} \sum_{j=1}^J (\cdot, \varphi^{(0,j)})_{\Omega} \varphi^{(0,j)} + \Gamma(\lambda),$$

где функция $\lambda \mapsto \Gamma(\lambda) : L_2(\Omega) \rightarrow \dot{H}^2(\Omega)$ голоморфная.

Разрешимость задачи в цилиндре

Пусть $C_c^\infty(\bar{\Pi})$ обозначает множество гладких функций с компактными носителями в $\bar{\Pi}$; как и выше, $\Pi = \{y, t) : y \in \Omega, t \in \mathbb{R}\}$. Для всех $l = 0, 1, \dots$ и $\beta \in \mathbb{R}$ введем пространство $H_\beta^l(\Pi)$ как пополнение $C_c^\infty(\bar{\Pi})$ по норме

$$\|u; H_\beta^l(\Pi)\| = \left(\sum_{|\alpha|+k \leq l} \int_{\Pi} \exp(2\beta t) |\partial_t^k \partial_y^\alpha u(y, t)|^2 dy dt \right)^{1/2}.$$

Через $\dot{H}_\beta^2(\Pi)$ обозначим замыкание в пространстве $H_\beta^2(\Pi)$ множества функций, гладких в $\bar{\Pi}$, имеющих компактный носитель в $\bar{\Pi}$ и исчезающих на $\partial\Pi$. Оператор задачи (1) осуществляет непрерывное отображение

$$A_\beta(\mu) : \dot{H}_\beta^2(\Pi) \ni u \mapsto (-\Delta - \mu)u \in H_\beta^0(\Pi).$$

Нам понадобится комплексное преобразование Фурье

$$\hat{v}(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\lambda t) v(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R} + i\beta, \quad (14)$$

где $\mathbb{R} + i\beta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda = \beta\}$, формула обращения

$$v(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}+i\beta} \exp(i\lambda t) \hat{v}(\lambda) d\lambda,$$

и равенство Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(2\beta t) |v(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}+i\beta} |\widehat{v}(\lambda)|^2 d\lambda. \quad (15)$$

Теорема 4. Пусть прямая $\mathbb{R} + i\beta$ свободна от собственных чисел пучка $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)$. Тогда для любой правой части $f \in H_{\beta}^0(\overline{\Pi})$ существует единственное решение $u \in \dot{H}_{\beta}^2(\Pi)$ задачи (1). Справедлива оценка

$$\|u; H_{\beta}^2(\Pi)\| \leq C \|f; H_{\beta}^0(\Pi)\| \quad (16)$$

с постоянной C , не зависящей от f .

Доказательство. После преобразования Фурье (14) задача (1) сводится к семейству задач

$$\begin{aligned} (-\Delta_y + \lambda^2 - \mu)\widehat{u}(y, \lambda) &= \widehat{f}(y, \lambda), & y \in \Omega, \\ \widehat{u}(\lambda, y) &= 0, & y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (17)$$

с параметром $\lambda \in \mathbb{R} + i\beta$. Эта прямая не содержит собственных чисел пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$. Поэтому, в силу предложения 1, при любом $\lambda \in \mathbb{R} + i\beta$ существует единственное решение $\widehat{u}(\cdot, \lambda) := \mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} \widehat{f}(\cdot, \lambda)$ задачи (17), удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{j=0}^2 |\lambda|^{2j} \|\widehat{u}(\cdot, \lambda)\|_{2-j}^2 \leq C \|\widehat{f}(\cdot, \lambda)\|_0^2, \quad (18)$$

где постоянная C не зависит от λ и $\widehat{f}(\lambda, \cdot)$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}+i\beta} \sum_{j=0}^2 |\lambda|^{2j} \|\widehat{u}(\cdot, \lambda)\|_{2-j}^2 \lambda \leq C \int_{\mathbb{R}+i\beta} \|\widehat{f}(\cdot, \lambda)\|_0^2 d\lambda.$$

В силу (15), левая часть эквивалентна $\|u; H_{\beta}^2(\Pi)\|^2$, а правая часть равна $C \|f; H_{\beta}^0(\Pi)\|^2$. Таким образом, функция

$$u(\cdot, t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}+i\beta} \exp(i\lambda t) \mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} \widehat{f}(\cdot, \lambda) d\lambda \quad (19)$$

удовлетворяет задаче (1) и допускает оценку (16). \square

Асимптотика решений

Предположим, что f — гладкая функция с компактным носителем в $\bar{\Pi}$. Тогда функция $\lambda \mapsto \widehat{f}(\cdot, \lambda)$ аналитична на всей комплексной плоскости \mathbb{C} и быстро убывает в любой полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leq h < \infty\}$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Функция $\widehat{u}(\cdot, \lambda) = \mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} \widehat{f}(\cdot, \lambda)$ аналитична всюду, за исключением полюсов функции $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1}$. Кроме того, ввиду неравенства (18), функция $\widehat{u}(\cdot, \lambda)$ также быстро убывает в упомянутой полосе при $\lambda \rightarrow \infty$. Пусть β и γ — такие вещественные числа, что прямые $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda = \beta\}$ и $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda = \gamma\}$ не содержат $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)^{-1}$. Тогда в формуле вида (19) можно, пользуясь теоремой о вычетах, заменить β на γ .

Найдем вычеты функции

$$\lambda \mapsto F(\lambda) := (2\pi)^{-1/2} \exp(i\lambda t) \mathfrak{A}(\lambda, \mu)^{-1} \widehat{f}(\cdot, \lambda). \quad (20)$$

По предложению 2,

$$\operatorname{res} F(\lambda)|_{\lambda=\lambda^\pm} = (2\pi)^{-1/2} \exp(i\lambda^\pm t) \sum_{j=1}^J (2\lambda^\pm)^{-1} \int_{\Omega} \widehat{f}(y, \lambda^\pm) \overline{\varphi^{(0,j)}(y)} dy \varphi^{(0,j)};$$

как и выше, $\lambda^\pm = \lambda^\pm(\mu)$, где $\lambda^\pm(\mu) = \pm(\mu - \tau)^{1/2}$ при $\mu > \tau$ и $\lambda^\pm(\mu) = \pm i(\tau - \mu)^{1/2}$ при $\mu < \tau$. Для вещественных λ^\pm имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \widehat{f}(y, \lambda^\pm) \overline{\varphi^{(0,j)}(y)} dy &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \exp(-i\lambda^\pm s) f(y, s) \overline{\varphi^{(0,j)}(y)} dy ds \\ &= (2\pi)^{-1/2} (f, Z_j^\pm)_{\Pi}, \end{aligned}$$

где

$$Z_j^\pm(y, s) = \exp(i\lambda^\pm s) \varphi^{(0,j)}(y) \quad (21)$$

и $(\cdot, \cdot)_{\Pi}$ — скалярное произведение в $L_2(\Pi)$. Таким образом, если λ^\pm вещественно, то

$$\operatorname{res} F(\lambda)|_{\lambda=\lambda^\pm} = (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^J (2\lambda^\pm)^{-1} (f, Z_j^\pm)_{\Pi} Z_j^\pm.$$

Для мнимых λ^\pm получаем

$$\operatorname{res} F(\lambda)|_{\lambda=\lambda^\pm} = (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^J (2\lambda^\pm)^{-1} (f, Z_j^\mp)_{\Pi} Z_j^\pm,$$

где $Z_j^\pm(y, s)$ определены равенством (21). По предложению 3, для $\lambda^0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{res} F(\lambda)|_{\lambda=\lambda^0} &= (2\pi)^{-1/2} \sum_{j=1}^J \varphi^{(0,j)} \int_{\Omega} \left(it \widehat{f}(y, 0) + \partial_{\lambda} \widehat{f}(y, 0) \right) \overline{\varphi^{(0,j)}(y)} dy \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^J \varphi^{(0,j)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (it - is) f(y, s) \overline{\varphi^{(0,j)}(y)} dy ds \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^J \left((f, Z_j^0)_{\Pi} Z_j^1 + (f, Z_j^1)_{\Pi} Z_j^0 \right), \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$Z_j^0(y, t) = \varphi^{(0,j)}(y), \quad Z_j^1(y, t) = it \varphi^{(0,j)}(y). \quad (23)$$

Лемма 5. Пусть λ^\pm — собственное число пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$, $\operatorname{Im} \lambda^\pm \neq 0$ и $\beta < \operatorname{Im} \lambda^+ < \gamma$ ($\beta < \operatorname{Im} \lambda^- < \gamma$). Тогда для любого $Z = Z_j^-$ ($Z = Z_j^+$) из (21) и любого $f \in H_\beta^0(\Pi) \cap H_\gamma^0(\Pi)$ справедлива оценка

$$|(f, Z)_{\Pi}| \leq C (\|f; H_\beta^0(\Pi)\| + \|f; H_\gamma^0(\Pi)\|)$$

с постоянной C , не зависящей от f . Если $\beta < 0 < \gamma$ и λ^\pm — вещественное собственное число, то оценка остается справедливой при любых Z_j^\pm из (21), $Z = Z_j^0$ и $Z = Z_j^1$ из (23).

Доказательство. Выберем $\eta_1, \eta_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ так, чтобы $0 \leq \eta_2(t) \leq 1$, $\eta_2(t) = 1$ при $t \geq 1$, $\eta_2(t) = 0$ при $t \leq -1$ и $\eta_1 + \eta_2 = 1$. Предположим, например, что $\operatorname{Im} \lambda^+ \neq 0$ и $\beta < \operatorname{Im} \lambda^+ < \gamma$. Тогда для $Z = Z_j^-$ имеем

$$\begin{aligned} |(f, Z)_{\Pi}| &\leq C \int_{\Pi} |f(y, s)| \exp(-s \operatorname{Im} \lambda^-) dy ds \\ &\leq \int_{\Pi} \eta_1(s) |f(y, s)| \exp(\beta s) \exp(-s(\operatorname{Im} \lambda^- + \beta)) dy ds \\ &\quad + \int_{\Pi} \eta_2(s) |f(y, s)| \exp(\gamma s) \exp(-s(\operatorname{Im} \lambda^- + \gamma)) dy ds. \end{aligned}$$

Так как $\text{Im}\lambda^+ = -\text{Im}\lambda^-$, то $\text{Im}\lambda^- + \gamma > 0$ и $\text{Im}\lambda^- + \beta < 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} |(f, Z)_\Pi| &\leq C\|\eta_1 f; H_{\beta_1}^0(\Pi)\| \left(\int_{-\infty}^0 \exp(-2s(\text{Im}\lambda^- + \beta)) ds \right)^{1/2} \\ &\quad + C\|\eta_2 f; H_\gamma^0(\Pi)\| \left(\int_0^{+\infty} \exp(-2s(\text{Im}\lambda^- + \gamma)) ds \right)^{1/2} \\ &\leq C(\|f; H_\beta^0(\Pi)\| + \|f; H_\gamma^0(\Pi)\|). \quad \square \end{aligned}$$

Следующая теорема описывает асимптотику решения задачи (1) на бесконечности.

Теорема 6. Пусть прямые $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda = \beta\}$ и $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda = \gamma\}$ свободны от собственных чисел пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$ и $f \in H_\beta^0(\Pi) \cap H_\gamma^0(\Pi)$. Тогда

$$u_\beta = u_\gamma + 2\pi i \mathfrak{S}(\beta, \gamma), \quad (24)$$

где u_β и u_γ — решения задачи (1), принадлежащие пространствам $\dot{H}_\beta^2(\Pi)$ и $\dot{H}_\gamma^2(\Pi)$, соответственно, $\beta < \gamma$ и $\mathfrak{S}(\beta, \gamma)$ — сумма вычетов функции (20) в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \beta < \text{Im}\lambda < \gamma\}$. Все функции Z_j^\pm из (21), Z_j^0 и Z_j^1 из (23) удовлетворяют однородной задаче (1). Равенство (24) можно рассматривать как асимптотику решения $u_\beta(y, t)$ при $t \rightarrow +\infty$ и как асимптотику решения $u_\gamma(y, t)$ при $t \rightarrow -\infty$; при этом u_γ (u_β) играет роль остатка, когда t стремится к $+\infty$ ($-\infty$).

Доказательство. При $f \in C_c^\infty(\bar{\Pi})$ равенство (24) уже обсуждалось в начале этого пункта. По лемме 5 функционалы $f \mapsto (f, Z)_\Pi$ из $\mathfrak{S}(\beta, \gamma)$ непрерывны на пересечении $H_\beta^0(\Pi) \cap H_\gamma^0(\Pi)$. Поэтому мы можем получить формулу (24) при $f \in H_\beta^0(\Pi) \cap H_\gamma^0(\Pi)$, замыкая $C_c^\infty(\bar{\Pi})$ по норме $\|f\| := \|f; H_\beta^0(\Pi)\| + \|f; H_\gamma^0(\Pi)\|$ пространства $H_\beta^0(\Pi) \cap H_\gamma^0(\Pi)$.

В том, что функции Z_j^\pm , Z_j^0 и Z_j^1 удовлетворяют однородной задаче (1), можно убедиться прямым вычислением. \square

Перепишем равенство (24), используя более подробные обозначения. Пусть $\lambda_k^\pm = \lambda_k^\pm(\mu)$ — собственные числа, определенные перед формулой (4). Кроме того, предположим, что Z_k^\pm соответствует числу $\lambda_k^\pm(\mu)$, другими словами, $Z_k^\pm(y, t) = \exp(i\lambda_k^\pm(\mu)t)\varphi_k(y)$, где φ_k — собственный вектор, отвечающий числу $\lambda_k^\pm(\mu)$ и т. д., см. (21), (22) и (23). Тогда (24) принимает вид

$$\begin{aligned} u_\beta - u_\gamma &= \\ &= \sum_{\max\{0, \beta\} < \text{Im}\lambda_k^+ < \gamma} i(2\lambda_k^+)^{-1} (f, Z_k^-)_\Pi Z_k^+ + \sum_{0 > \text{Im}\lambda_k^- > \min\{0, \beta\}} i(2\lambda_k^-)^{-1} (f, Z_k^+)_\Pi Z_k^- \\ &+ \sum_{\lambda_k^\pm \in \mathbb{R}} i(2\lambda_k^\pm)^{-1} (f, Z_k^\pm)_\Pi Z_k^\pm + \sum_{\lambda_k^0=0} i((f, Z_k^0)_\Pi Z_k^1 + (f, Z_k^1)_\Pi Z_k^0), \quad (25) \end{aligned}$$

где последние две суммы (отвечающие вещественным собственным числам) отсутствуют, если $\beta\gamma \geq 0$.

Правая часть равенства (25) представляет собой линейную комбинацию решений Z_k^+ , Z_k^- и т. д. однородной задачи (1) (где $f=0$). Коэффициенты $i(2\lambda_k^+)^{-1}(f, Z_k^-)_{\Pi}$, $i(2\lambda_k^-)^{-1}(f, Z_k^+)_{\Pi}$ и т. д. этой линейной комбинации являются непрерывными функционалами на пространстве $H_{\beta}^0(\Pi) \cap H_{\gamma}^0(\Pi)$.

Если полоса $\beta < \text{Im}\lambda < \gamma$ содержит только вещественные числа пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$, то (25) упрощается:

$$u_{\beta} - u_{\gamma} = \sum_{\lambda_k^{\pm} \in \mathbb{R}} i(2\lambda_k^{\pm})^{-1}(f, Z_k^{\pm})_{\Pi} Z_k^{\pm} + \sum_{\lambda_k^0=0} i((f, Z_k^0)_{\Pi} Z_k^1 + (f, Z_k^1)_{\Pi} Z_k^0);$$

если к тому же μ не является порогом, то это равенство принимает вид

$$u_{\beta} - u_{\gamma} = \sum_{\lambda_k^{\pm} \in \mathbb{R}} i(2\lambda_k^{\pm})^{-1}(f, Z_k^{\pm})_{\Pi} Z_k^{\pm}.$$

Для рассуждений, проводимых в диссертации, это наиболее важный частный случай.

Задача в области G с цилиндрическими концами

Постановка задачи. Фредгольмовость

Пусть G — область в \mathbb{R}^{n+1} с гладкой границей ∂G , совпадающая вне большого шара с объединением $\Pi_+^1 \cup \dots \cup \Pi_+^T$ конечного числа непересекающихся полуцилиндров

$$\Pi_+^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r, t^r > 0\},$$

где (y^r, t^r) — локальные координаты в Π_+^r , а Ω^r — ограниченная область в \mathbb{R}^n . Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= f(x), \quad x \in G, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial G. \end{aligned} \tag{26}$$

Для целых $l \geq 0$ обозначим через $H^l(G)$ пространство Соболева с нормой

$$\|v; H^l(G)\| = \left(\sum_{j=0}^l \int_G \sum_{|\alpha|=j} |D_x^{\alpha} v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Предположим, что $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^T)$, где β^r вещественны, и обозначим через ρ_β гладкую и положительную на \overline{G} функцию, заданную на Π_+^r равенством $\rho_\beta(y^r, t^r) = \exp(\beta^r t^r)$. Введем еще пространство $H_\beta^l(G)$ с нормой $\|u; H_\beta^l(G)\| = \|\rho_\beta u; H^l(G)\|$. Пусть $\dot{H}_\beta^2(G)$ обозначает замыкание в $H_\beta^2(G)$ множества гладких на \overline{G} функций, имеющих компактный носитель в \overline{G} и обращающихся в ноль на границе ∂G . Оператор $u \mapsto (-\Delta - \mu)u$ задачи (26) осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{A}_\beta(\mu) : \dot{H}_\beta^2(G) \rightarrow H_\beta^0(G). \quad (27)$$

Обозначим через $\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$ ядро $\mathcal{A}_\beta(\mu)$, а через $\text{Im} \mathcal{A}_\beta(\mu)$ — образ оператора $\mathcal{A}_\beta(\mu)$,

$$\begin{aligned} \ker \mathcal{A}_\beta(\mu) &= \{u \in \dot{H}_\beta^2(G) : \mathcal{A}_\beta(\mu)u = 0\}, \\ \text{Im} \mathcal{A}_\beta(\mu) &= \{f \in H_\beta^0(G) : f = \mathcal{A}_\beta(\mu)u, u \in \dot{H}_\beta^2(G)\}. \end{aligned}$$

Напомним, что оператор $\mathcal{A}_\beta(\mu)$ называется фредгольмовым, если образ $\text{Im} \mathcal{A}_\beta(\mu)$ замкнут, а ядро $\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$ и коядро $\text{сокег} \mathcal{A}_\beta(\mu) := H_\beta^0(G)/\text{Im} \mathcal{A}_\beta(\mu)$ конечномерны. Введем операторный пучок $\lambda \rightarrow \mathfrak{A}^r(\lambda, \mu)$, определенный равенством (2) в области Ω^r , $r = 1, \dots, T$.

Теорема 7. (i). *Оператор (27) фредгольмов тогда и только тогда, когда прямая $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im} \lambda = \beta^r\}$ свободна от собственных чисел пучка $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$ для любого $r = 1, \dots, T$.*

$$(ii). \dim(H_\beta^0(G)/\text{Im} \mathcal{A}_\beta(\mu)) = \dim \ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu).$$

(iii). *$f \in \text{Im} \mathcal{A}_\beta(\mu)$ тогда и только тогда, когда $(f, v)_G = 0$ для всех $v \in \ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu)$; здесь $(\cdot, \cdot)_G$ обозначает непрерывное продолжение скалярного произведения в $L_2(G)$ на пару пространств $H_\beta^0(G), H_{-\beta}^0(G)$.*

Асимптотика решений

Теорема 8. *Пусть u — решение задачи (26), принадлежащее пространству $\dot{H}_\beta^2(G)$ при $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^T)$. Пусть для некоторого r справедливо включение $\eta_r f \in H_{\gamma^r}^0(\Pi_+^r \cap G)$, где $\beta^r < \gamma^r$, η_r обозначает гладкую функцию с носителем в $\overline{\Pi_+^r} \cap \overline{G}$, причем $\eta_r(y^r, t^r) = 1$ при $t^r > T$ и большом T . Предположим, что прямые $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im} \lambda = \beta^r\}$ и $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im} \lambda = \gamma^r\}$ свободны от собственных чисел пучка $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$.*

Тогда в Π_+^r при $t^r > T$ справедливо равенство

$$u = \sum_{\max\{0, \beta^r\} < \text{Im} \lambda_k^+ < \gamma^r} c_k^+ Z_k^+ + \sum_{0 > \text{Im} \lambda_k^- > \min\{0, \beta^r\}} c_k^- Z_k^- + \sum_{\lambda_k^\pm \in \mathbb{R}} c_k^\pm Z_k^\pm + \sum_{\lambda_k^0 = 0} (c_k^1 Z_k^1 + c_k^0 Z_k^0) + v, \quad (28)$$

где функции Z_k^+ , Z_k^- и т. д. определены в $\Pi := \Pi^r = \Omega^r \times \mathbb{R}$ аналогично функциям в (25), c_k^+ , c_k^- и т. д. — некоторые постоянные коэффициенты и $\eta_r v \in \dot{H}_{\gamma^r}^2(\Pi^r)$. (Последние две суммы отвечают вещественным собственным числам и потому отсутствуют, если $\beta^r \gamma^r \geq 0$.)

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)(\eta_r u)(x) &= g(x), & x \in \Pi^r, \\ (\eta_r u)(x) &= 0, & x \in \partial\Pi^r, \end{aligned}$$

где $g = \eta_r f - 2\nabla\eta_r \nabla u - u\Delta\eta_r$. Так как производные $\nabla\eta_r$ и $\Delta\eta_r$ имеют компактный носитель, то g принадлежит пространству $H_{\beta_1}^0(\Pi^r) \cap H_{\beta_2}^0(\Pi^r)$. Применяя теоремы 4 и 6, получаем (25) при $f = g$, $u_1 = \eta_r u$ и $v = u_1$. Отсюда следует равенство (28), где

$$c_k^+ = i(2\lambda_k^+)^{-1}(g, Z_k^-)_{\Pi^r}, \quad c_k^- = i(2\lambda_k^-)^{-1}(g, Z_k^+)_{\Pi^r}, \dots, \quad c_k^0 = i(g, Z_k^1)_{\Pi^r}. \quad \square \quad (29)$$

Отметим, что в доказательстве функция g зависит от f , u и η_r . Поэтому формулы (29) не дают явных выражений для коэффициентов в (28) как для функционалов, зависящих непосредственно от правой части f задачи (26). Такие выражения будут даны ниже (см. теорему 12).

Свойства индекса $\text{Ind} \mathcal{A}_\beta(\mu)$ и пространств $\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$ и $\text{coker} \mathcal{A}_\beta(\mu)$

Пусть оператор $\mathcal{A}_\beta(\mu)$ фредгольмов. Разность $\dim \ker \mathcal{A}_\beta(\mu) - \dim \text{coker} \mathcal{A}_\beta(\mu)$ называется индексом оператора $\mathcal{A}_\beta(\mu)$ и обозначается через $\text{Ind} \mathcal{A}_\beta(\mu)$. Предполагая, что оба оператора $\mathcal{A}_\beta(\mu)$ и $\mathcal{A}_\gamma(\mu)$ фредгольмовы, мы, в частности, выражаем разность $\text{Ind} \mathcal{A}_\beta(\mu) - \text{Ind} \mathcal{A}_\gamma(\mu)$ в терминах спектра пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$.

Напомним, что для ненулевого собственного числа λ_0 пучка $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$ не существует присоединенных векторов и, следовательно, полная кратность числа λ_0 равна его геометрической кратности, то есть его полная кратность совпадает с $\dim \ker \mathfrak{A}^r(\lambda_0, \mu)$. Если $\lambda_0 = 0$ оказывается собственным числом некоторого пучка $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, то для любого собственного вектора $\varphi^0 \in \ker \mathfrak{A}^r(\lambda_0, \mu)$ существует

присоединенный вектор и полная кратность числа λ_0 равна его удвоенной геометрической кратности.

Теорема 9. Пусть $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^{\mathcal{T}_1}, \beta^{\mathcal{T}_2}, \dots, \beta^{\mathcal{T}})$ и $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^{\mathcal{T}_1}, \beta^{\mathcal{T}_2}, \dots, \beta^{\mathcal{T}})$, где $\beta^r < \gamma^r$ при всех $r = 1, \dots, \mathcal{T}_1$, и пусть прямые $\mathbb{R} + i\beta^r$ и $\mathbb{R} + i\gamma^r$ свободны от собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Обозначим через \varkappa^r сумму полных кратностей всех собственных чисел пучка $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$ в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \beta^r < \text{Im}\lambda < \gamma^r\}$, где $r = 1, \dots, \mathcal{T}_1$, и положим $\varkappa = \varkappa^1 + \dots + \varkappa^{\mathcal{T}_1}$. Тогда

$$\dim(\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)/\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)) + \dim(\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)/\ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu)) = \varkappa, \quad (30)$$

$$\text{Ind} \mathcal{A}_\beta(\mu) = \text{Ind} \mathcal{A}_\gamma(\mu) + \varkappa. \quad (31)$$

Доказательство. Перенумеруем одним индексом все функции вида $\eta_r Z_k^\pm$, $\eta_r Z_k^0$ и $\eta_r Z_k^1$, отвечающие собственным числам пучка $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$ в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \beta^r < \text{Im}\lambda < \gamma^r\}$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}_1$, и получим набор Z_1, \dots, Z_\varkappa . Согласно теореме 8, любая функция u из ядра $\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$ допускает асимптотическое представление

$$u = c_1 Z_1 + \dots + c_\varkappa Z_\varkappa + v \quad (32)$$

с постоянными коэффициентами c_j и остатком v из $\dot{H}_\gamma^2(G)$. Поэтому существует не более, чем \varkappa векторов пространства $\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$, линейно независимых по модулю $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)$. Положим $d := \dim(\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)/\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu))$, тогда $0 \leq d \leq \varkappa$. Без потери общности можно считать, что в $\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$ существуют векторы U_j , такие, что

$$U_j = Z_j + \sum_{k=d+1}^{\varkappa} c_{jk} Z_k + v_j, \quad j = 1, \dots, d, \quad (33)$$

где $c_{jk} = \text{const}$ и $v_j \in \dot{H}_\gamma^2(G)$. Очевидно, что U_1, \dots, U_d линейно независимы по модулю пространства $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)$.

Пусть D обозначает $\dim(\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)/\ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu))$; мы покажем, что $D = \varkappa - d$.

Предположим сначала, что $D < \varkappa - d$, и обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_D$ набор векторов из пространства $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$, линейно независимых по модулю $\ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu)$. Тогда существует ненулевая линейная комбинация $Z = c_{d+1}^0 Z_{d+1} + \dots + c_\varkappa^0 Z_\varkappa$, такая, что $f := \mathcal{A}_\beta(\mu)Z \in H_\gamma^0(G)$ и, кроме того, $(f, \varphi_j)_G = 0$ при $j = 1, \dots, D$. Тогда по теореме 7 (iii) существует функция V , удовлетворяющая уравнению $\mathcal{A}_\gamma(\mu)V = f$. Поэтому мы имеем $U_0 := V - Z \in \ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$, причем векторы U_0, U_1, \dots, U_d линейно независимы по модулю пространства $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)$, что противоречит равенству $d = \dim(\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)/\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu))$. Таким образом, мы установили неравенство $D \geq \varkappa - d$.

Теперь предположим, что $D > \varkappa - d$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_D$ — набор элементов пространства $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$, линейно независимых по модулю $\ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu)$. Выберем в пространстве $H_\gamma^0(G)$ набор векторов Φ_1, \dots, Φ_D , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} (\Phi_j, \varphi_k)_G &= \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, D, \\ (\Phi_j, \psi)_G &= 0 \quad \text{при всех } \psi \in \ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu). \end{aligned}$$

Тогда существует вектор χ_j , удовлетворяющий уравнению $\mathcal{A}_\beta(\mu)\chi_j = \Phi_j$, где $j = 1, \dots, D$. Вычитая, если нужно, из χ_j линейную комбинацию элементов U_1, \dots, U_d базиса (33), можно обеспечить включение

$$\chi_j - \sum_{h=d+1}^{\varkappa} d_{jh} Z_h \in \dot{H}_\gamma^2(G), \quad j = 1, \dots, D. \quad (34)$$

Никакая нетривиальная линейная комбинация векторов χ_1, \dots, χ_D не может принадлежать пространству \dot{H}_γ^2 , иначе существовала бы линейная комбинация векторов $\mathcal{A}_\gamma(\mu)\chi_j = \Phi_j$, ортогональная всем $\varphi_1, \dots, \varphi_D$, что невозможно в силу выбора Φ_1, \dots, Φ_D . Отсюда и из (34) следует, что $D \leq \varkappa - d$. Таким образом, мы получаем равенство $D = \varkappa$, а значит, и равенство (30).

Проверим формулу (31). Согласно теореме 7 (ii), $\dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_\beta(\mu) = \dim \ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu)$, следовательно, справедливо равенство $\operatorname{Ind} \mathcal{A}_\beta(\mu) = \dim \ker \mathcal{A}_\beta(\mu) - \dim \ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu)$ и такое же равенство с заменой β на γ . Из (30) следует, что

$$\begin{aligned} \dim \ker \mathcal{A}_\beta(\mu) &= \dim \ker \mathcal{A}_\gamma(\mu) + d, \\ \dim \ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu) &= \dim \ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu) + d - \varkappa, \end{aligned}$$

и поэтому $\operatorname{Ind} \mathcal{A}_\beta(\mu) = \operatorname{Ind} \mathcal{A}_\gamma(\mu) + \varkappa$. \square

Вычисление коэффициентов в асимптотике

Теперь все готово для того, чтобы получить явные формулы для коэффициентов в (28). Мы будем использовать обозначение Z_j при $j = 1, \dots, \varkappa$, введенное в

начале доказательства теоремы 9, и дополнительно положим

$$\begin{aligned}
Z_j^* &:= (2\lambda_k^\pm)^{-1}\eta_r Z_k^\pm & \text{при } Z_j &= \eta_r Z_k^\mp & \text{и } \lambda_k^\pm &\notin \mathbb{R}; \\
Z_j^* &:= (2\lambda_k^\pm)^{-1}\eta_r Z_k^\pm & \text{при } Z_j &= \eta_r Z_k^\pm & \text{и } \lambda_k^\pm &\in \mathbb{R} \setminus 0; \\
Z_j^* &:= \eta_r Z_k^0 & \text{при } Z_j &= \eta_r Z_k^1 & \text{и } \lambda_k^0 &= 0; \\
Z_j^* &:= \eta_r Z_k^1 & \text{при } Z_j &= \eta_r Z_k^0 & \text{и } \lambda_k^0 &= 0;
\end{aligned} \tag{35}$$

причиной такой связи между Z_j и Z_j^* послужила формула (25).

Пусть выполнены условия теоремы 8 и асимптотика решения $u \in \dot{H}_\beta^2$ записана в виде (32).

Предложение 10. Пусть $V = Z_j^* + \eta_r v$, где Z_j^* — одна из функций (35) при некотором r , а для остатка справедливо включение $v \in \dot{H}_{-\beta}^2(G)$. Предположим, что V удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}
(-\Delta - \mu)V(x) &= 0, & x &= (y^r, t^r) \in \Pi_+^r, t^r > T, \\
V(x) &= 0, & x &\in \partial\Pi_+^r \cap \partial G, t^r > T.
\end{aligned}$$

Тогда для коэффициента c_j в формуле (32) справедливо равенство

$$c_j = i(\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_r u, V)_G. \tag{36}$$

Доказательство. Положим $\eta_{r,\varepsilon}(y^r, t^r) := \eta_r(y^r, \varepsilon t^r)$ при некотором положительном ε , тогда

$$(\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_r u, V)_G = (\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_{r,\varepsilon} u, V)_G + (\mathcal{A}_\beta(\mu)(\eta_r - \eta_{r,\varepsilon})u, V)_G.$$

Функция $(\eta_r - \eta_{r,\varepsilon})u$ исчезает на бесконечности, значит, можно интегрировать по частям во втором слагаемом в правой части:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_\beta(\mu)(\eta_r - \eta_{r,\varepsilon})u, V)_G &= ((-\Delta - \mu)(\eta_r - \eta_{r,\varepsilon})u, V)_{\Pi_+^r} \\
&= ((\eta_r - \eta_{r,\varepsilon})u, (-\Delta - \mu)V)_{\Pi_+^r} = 0.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_r u, V)_G &= (\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_{r,\varepsilon} u, V)_G \\
&= (\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_{r,\varepsilon} u, Z_j^*)_G + (\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_{r,\varepsilon} u, V - Z_j^*)_G.
\end{aligned} \tag{37}$$

Из доказательства теоремы 8 следует, что

$$c_j = i(\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_{r,\varepsilon}u, Z_j^*)_G. \quad (38)$$

Кроме того,

$$|(\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_{r,\varepsilon}u, V - Z_j^*)_G| \leq C\|\eta_{r,\varepsilon}u; H_\beta^2(G)\|\|v; H_{-\beta}^0\| \quad (39)$$

с постоянной C , не зависящей от ε . Так как $\|\eta_{r,\varepsilon}u; H_\beta^2(G)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то соотношения (37), (38) и (39) приводят к (36). \square

Предложение 11. Пусть выполнены условия теоремы 9 и пусть U_1, \dots, U_d — векторы из пространства $\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$, удовлетворяющие (33), где $d = \dim(\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)/\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu))$. Тогда существуют векторы $U_{d+1}^*, \dots, U_\varkappa^*$ из $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$, такие, что

$$U_k^* = Z_k^* - \sum_{j=1}^d \bar{c}_{jk} Z_j^* + v_k^*, \quad k = d+1, \dots, \varkappa, \quad (40)$$

и $v_k^* \in \dot{H}_{-\beta}^2(G)$.

Доказательство. В силу теоремы 9 существуют векторы $V_{d+1}, \dots, V_\varkappa$ из $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$, линейно независимые по модулю пространства $\ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu)$. Согласно теореме 8, V_k допускают представления

$$V_k = \sum_{j=1}^{\varkappa} b_{kj} Z_j^* + v_k, \quad v_k \in H_{-\beta}^2(G), \quad k = d+1, \dots, \varkappa. \quad (41)$$

Имеем

$$0 = (\mathcal{A}_\beta(\mu)U_h, V_k)_G = (\mathcal{A}_\beta(\mu) \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r Z_h, V_k)_G + (\mathcal{A}_\beta(\mu)(1 - \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r)Z_h, V_k)_G. \quad (42)$$

Функция $(1 - \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r)Z_h$ принадлежит $\dot{H}_\gamma^2(G)$, значит,

$$\mathcal{A}_\beta(\mu)(1 - \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r)Z_h = \mathcal{A}_\gamma(\mu)(1 - \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r)Z_h.$$

Принимая во внимание это равенство, соотношение $V_k \in \ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$ и теорему 7 (iii), получаем, что $\mathcal{A}_\gamma(\mu)(1 - \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r)Z_h = 0$ и

$$0 = (\mathcal{A}_\beta(\mu)U_h, V_k)_G = (\mathcal{A}_\beta(\mu) \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r Z_h, V_k)_G.$$

Для того, чтобы вычислить правую часть, воспользуемся предложением 10 и ввиду (33) получим

$$\bar{b}_{kh} + \sum_{j=d+1}^{\varkappa} c_{hj} \bar{b}_{kj} = 0, \quad h = 1, \dots, d, \quad k = d+1, \dots, \varkappa. \quad (43)$$

Поэтому первые d столбцов $(\varkappa - d) \times d$ -матрицы $b = \|b_{kp}\|$ являются линейными комбинациями остальных $\varkappa - d$ столбцов. Ранг матрицы b равен $\varkappa - d$, поскольку $V_{d+1}, \dots, V_\varkappa$ линейно независимы по модулю $\ker \mathcal{A}_{-\beta}(\mu)$. Значит, матрица $\|b_{kj}\|_{k,j=d+1}^{\varkappa}$ невырожденная. Это позволяет считать, что $b_{kj} = \delta_{kj}$ в (41) при $k, j = d+1, \dots, \varkappa$. Тогда, в силу (43), получаем

$$\bar{b}_{kh} = -c_{hk}, \quad h = 1, \dots, d, \quad k = d+1, \dots, \varkappa,$$

что и требовалось. \square

Мы переходим к основной теореме этого пункта. Как и выше, считаем, что $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^{\mathcal{T}_1}, \beta^{\mathcal{T}_2}, \dots, \beta^{\mathcal{T}})$ и $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^{\mathcal{T}_1}, \beta^{\mathcal{T}_2}, \dots, \beta^{\mathcal{T}})$, где $\beta^r < \gamma^r$ при всех $r = 1, \dots, \mathcal{T}_1$, и что прямые $\mathbb{R} + i\beta^r$ и $\mathbb{R} + i\gamma^r$ не содержат собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$ при $r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Обозначим через \varkappa^r сумму полных кратностей собственных чисел пучка $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, лежащих в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \beta^r < \text{Im} \lambda < \gamma^r\}$ при $r = 1, \dots, \mathcal{T}_1$, и положим $\varkappa = \varkappa^1 + \dots + \varkappa^{\mathcal{T}_1}$. Мы также сохраняем обозначение $d := \dim(\ker \mathcal{A}_\beta(\mu) / \ker \mathcal{A}_\gamma(\mu))$.

Теорема 12. Пусть $f \in H_\gamma^0(G)$, и пусть задача (26) разрешима в пространстве $\dot{H}_\beta^2(G)$. Тогда для любых постоянных c_1, \dots, c_d существует решение $u \in \dot{H}_\beta^2(G)$ задачи (26), такое, что

$$u = \sum_{j=1}^d c_j Z_j + \sum_{k=d+1}^{\varkappa} b_k Z_k + v,$$

где $v \in \dot{H}_\gamma^2(G)$ и Z_1, \dots, Z_\varkappa — те же, что и в (32). Постоянная b_k при $k = d+1, \dots, \varkappa$ вычисляется по формуле

$$b_k = i(f, U_k^*)_G + \sum_{h=1}^d c_h c_{hk},$$

где U_k^* принадлежит $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$ и удовлетворяет (40), $k = d+1, \dots, \varkappa$.

Доказательство. Пусть $w \in \dot{H}_\beta^2(G)$ — произвольное решение задачи (26), и пусть U_1, \dots, U_d — векторы из пространства $\ker \mathcal{A}_\beta(\mu)$, определенные соотношениями (33). Выберем линейную комбинацию \mathcal{L} векторов U_1, \dots, U_d , так чтобы для $v := w + \mathcal{L}$ было справедливо представление

$$v = \sum_{j=d+1}^{\varkappa} a_j Z_j + \rho, \quad \rho \in \dot{H}_\gamma^2(G)$$

с постоянными коэффициентами a_j . Вычислим a_k . Функция $v(1 - \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r)$ принадлежит пространству $\dot{H}_\gamma^2(G)$, откуда следует, что $(\mathcal{A}_\beta(\mu)v(1 - \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} \eta_r), U_k^*)_G = 0$ (ср. с доказательством предложения 11). Поэтому

$$i(f, U_k^*)_G = i(\mathcal{A}_\beta(\mu)v, U_k^*)_G = \sum_{r=1}^{\mathcal{T}_1} i(\mathcal{A}_\beta(\mu)\eta_r v, U_k^*)_G.$$

Из предложения 10 следует, что правая часть равна a_k . Требуемое решение u определяется теперь равенством $u = v + c_1 U_1 + \dots + c_d U_d$. \square

Волны и матрица рассеяния

Волны

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей. Рассмотрим в цилиндре $\Pi = \{(y, t) : y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega, t \in \mathbb{R}\}$ краевую задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)u(y, t) &= 0, & (y, t) \in \Pi, \\ u(y, t) &= 0, & (y, t) \in \partial\Pi, \end{aligned} \quad (44)$$

и связанный с нею операторный пучок

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu)v(y) = (-\Delta_y + \lambda^2 - \mu)v(y), \quad y \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность собственных чисел задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta_y - \mu)v(y) &= 0, & y \in \Omega, \\ v(y) &= 0, & y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (45)$$

перенумерованных с учетом кратности. Числа μ_k называются порогами. Зафиксируем вещественное число $\mu \neq \mu_k, k = 1, 2, \dots$, и введем функции

$$u_k^{\pm}(y, t; \mu) = (2|\lambda_k^{\mp}|)^{-1/2} \exp(i\lambda_k^{\mp} t) \varphi_k(y) \quad (46)$$

в цилиндре Π , где $\lambda_k^{\pm} = \pm(\mu - \mu_k)^{1/2}$ — вещественное число; эти функции удовлетворяют задаче (45). Будем называть u_k^+ (u_k^-) волной, приходящей из $+\infty$ (уходящей в $+\infty$). Количество волн равно удвоенному количеству собственных чисел μ_k (с учетом кратности), таких, что $\mu_k < \mu$. Число λ_k^{\pm} является собственным числом пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$ с той же собственной функцией φ_k , которая отвечала собственному числу μ_k задачи (45). Собственные функции ортогональны и нормированы условием

$$(\varphi_j, \varphi_k)_{\Omega} = \delta_{jk}.$$

Пусть G — область в \mathbb{R}^{n+1} с гладкой границей ∂G , совпадающая вне большого шара с объединением $\Pi_+^1 \cup \dots \cup \Pi_+^T$ конечного числа непересекающихся полуцилиндров

$$\Pi_+^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r, t^r > 0\},$$

где (y^r, t^r) — локальные координаты в Π_+^r , а Ω^r — ограниченная область в \mathbb{R}^n . Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= f(x), & x \in G, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial G. \end{aligned} \quad (47)$$

Каждому Π_+^r сопоставим задачу вида (44) в цилиндре $\Pi^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r, t^r \in \mathbb{R}\}$. Число τ называется порогом для задачи (47) если τ является порогом хотя бы для одной из задач в цилиндрах Π^r . В этом параграфе мы предполагаем, что число μ в (47) вещественно и не является порогом.

Пусть $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ — срезка, $\chi(t) = 0$ при $t < 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 1$. Домножим каждую волну в Π^r на функцию $t \mapsto \chi(t^r - t_0^r)$ с некоторым (достаточно большим) $t_0^r > 0$ и затем продолжим это произведение нулем на всю область G . Обозначим полученные функции через v_1, \dots, v_{2M} , где $2M$ — число всех собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^1(\cdot, \mu), \dots, \mathfrak{A}^T(\cdot, \mu)$ с учетом их (геометрической) кратности.

Для всех $l = 0, 1, \dots$ и $\delta \in \mathbb{R}$ введем пространство $H_\delta^l(G)$ с нормой $\|u; H_\delta^l(G)\| = \|\rho_\delta u; H^l(G)\|$, где ρ_δ обозначает гладкую, положительную на \bar{G} функцию, заданную на $\Pi_+^r \cap G$ равенством $\rho_\delta(y^r, t^r) = \exp(\delta t^r)$; весовой показатель δ выбираем одним и тем же для всех цилиндрических выходов. Пусть $\dot{H}_\delta^2(G)$ — замыкание в пространстве $H_\delta^2(G)$ множества гладких финитных функций на G . Теперь предположим, что δ положительно и настолько мало, что полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < \delta\}$ содержит только вещественные собственные числа пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$.

Обозначим через \mathfrak{M} линейное пространство, натянутое на функции v_1, \dots, v_{2M} , и введем фактор-пространство $\mathcal{W}(\mu, G) := (\mathfrak{M} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)) / \dot{H}_\delta^2(G)$. Элементы пространства $\mathcal{W}(\mu, G)$ называются волнами в G . Мы часто будем писать \mathcal{W} вместо $\mathcal{W}(\mu, G)$.

Предложение 13. *Билинейная форма*

$$q(u, v) := ((-\Delta - \mu)u, v)_G - (u, (-\Delta - \mu)v)_G \quad (48)$$

имеет смысл для любых u и v из $\mathfrak{M} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$. Кроме того, если один из элементов u и v принадлежит $\dot{H}_\delta^2(G)$, величина $q(u, v)$ равна нулю. Таким образом, форма $q(\cdot, \cdot)$ определена на $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$. Для любых двух волн U и V из \mathcal{W} справедливо равенство $q(U, V) = -\overline{q(V, U)}$.

Доказательство. Любая функция из пространства $\mathfrak{M} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$ допускает представление $c_1 v_1 + \dots + c_{2M} v_{2M} + w$, где c_1, \dots, c_{2M} — некоторые постоянные и $w \in \dot{H}_\delta^2(G)$. Функция $(-\Delta - \mu)v_j$ имеет компактный носитель, а $(-\Delta - \mu)w$ принадлежит $H_\delta^0(G)$, значит правая часть в (48) имеет смысл. Предположим, что u или v принадлежит $\dot{H}_\delta^2(G)$, тогда, интегрируя по частям, получаем равенство

$$((-\Delta - \mu)u, v)_G = (u, (-\Delta - \mu)v)_G.$$

Таким образом, можно положить

$$q(\tilde{u}, \tilde{v}) := q(u, v), \quad (49)$$

для любых u и v из $\mathfrak{M} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$, где через \tilde{u} и \tilde{v} классы в \mathcal{W} , содержащие, соответственно, u и v . Равенство $q(U, V) = -\overline{q(V, U)}$ немедленно следует из (48) и (49). \square

Число $q(U, U)$ чисто мнимое для любых $U \in \mathcal{W}$. Волна U называется уходящей (приходящей), если $i q(U, U)$ положительно (отрицательно). Пусть u^\pm — волна вида (46) в цилиндре Π_+^r . Продолжим функцию $(y^r, t^r) \mapsto \chi(t^r - t_0^r) u^\pm(y^r, t^r, \mu)$ нулем

на всю область G и обозначим ее класс в \mathcal{W} через U^\pm . Тем самым, мы определяем волны U_1^\pm, \dots, U_M^\pm ; как и выше, $2M = 2M(\mu)$ равно числу всех вещественных собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^1(\cdot, \mu), \dots, \mathfrak{A}^T(\cdot, \mu)$ с учетом кратности. Интегрируя по частям в выражении для формы $q(u, v)$, где u и v — представители волн U_j^\pm , получаем

Предложение 14. *Функции U_j^+ (U_j^-), $j = 1, \dots, M$, являются приходящими (уходящими) волнами. Набор $U_1^+, \dots, U_M^+, U_1^-, \dots, U_M^-$ образует базис в \mathcal{W} , подчиненный условиям ортогональности и нормировки*

$$\begin{aligned} q(U_j, U_k) &= 0 \quad \text{при } j \neq k, \\ iq(U_j^+, U_j^+) &= -1, \quad iq(U_j^-, U_j^-) = 1 \quad \text{при } j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (50)$$

Собственные функции непрерывного спектра. Матрица рассеяния

В этом пункте мы считаем, что параметр μ лежит в интервале $[\mu', \mu'']$, который не содержит порогов задачи (47), где $\mu' > \tau_1$ и τ_1 — первый порог. Тогда существует такое положительное число δ , что при всех $\mu \in [\mu', \mu'']$ полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < \delta\}$ содержит только вещественные собственные числа пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, T$.

Если $u \in \ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu_0)$ и $u \notin L_2(G)$, то u называется собственной функцией непрерывного спектра задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= 0, \quad x \in G, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial G, \end{aligned} \quad (51)$$

в точке μ_0 . Если $u \in \ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu_0)$, $u \neq 0$ и $u \in L_2(G)$, то u называется собственной функцией, а μ_0 — собственным числом задачи (51), погруженным в непрерывный спектр; в действительности всякая такая собственная функция принадлежит пространству $\ker \mathcal{A}_\delta(\mu_0)$. Известно, что собственные числа задачи (51) не могут сгущаться на конечном расстоянии. Поэтому интервал $[\mu', \mu'']$ содержит лишь конечное число собственных значений. Число $\dim(\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)/\ker \mathcal{A}_\delta(\mu))$ называется кратностью непрерывного спектра в точке μ . Равенство (30) при $\beta = -\delta$ и $\gamma = \delta$ принимает вид

$$\dim(\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)/\ker \mathcal{A}_\delta(\mu)) = M(\mu),$$

поскольку в этом случае $\varkappa = 2M(\mu)$. Интервал $[\mu', \mu'']$ не содержит порогов и поэтому на нем кратность непрерывного спектра постоянна.

Каждый элемент $v \in \ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ определяет некоторый класс \tilde{v} в пространстве волн \mathcal{W} ; пусть \mathfrak{K} обозначает образ пространства $\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ в \mathcal{W} ; \mathfrak{K} является подпространством в \mathcal{W} .

Теорема 15. Пусть $U_1^+(\mu), \dots, U_M^+(\mu), U_1^-(\mu), \dots, U_M^-(\mu)$ — тот же базис в пространстве $\mathcal{W}(\mu, G)$, что и в предложении 14. Тогда в $\mathfrak{K}(\mu)$ существуют такие базисы $\tilde{\zeta}_1(\mu), \dots, \tilde{\zeta}_M(\mu)$ и $\tilde{\eta}_1(\mu), \dots, \tilde{\eta}_M(\mu)$, что

$$\tilde{\zeta}_j(\mu) = U_j^+(\mu) + \sum_{k=1}^M S_{jk}(\mu) U_k^-(\mu), \quad (52)$$

$$\tilde{\eta}_j(\mu) = U_j^-(\mu) + \sum_{k=1}^M T_{jk}(\mu) U_k^+(\mu). \quad (53)$$

Матрица $S(\mu) = \|S_{jk}(\mu)\|$ унитарна и симметрична, причем $S(\mu)^{-1} = T(\mu) = \|T_{jk}(\mu)\|$.

Доказательство. Пусть v_1, \dots, v_M — линейно независимые элементы пространства $\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)/\ker \mathcal{A}_{\delta}(\mu)$, а $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_M$ — их классы в \mathcal{W} . Имеем

$$\tilde{v}_j = \sum_{k=1}^M m_{jk}^+ U_k^+ + \sum_{k=1}^M m_{jk}^- U_k^-, \quad j = 1, \dots, M.$$

Матрицы $\mathcal{M}^+ = \|m_{jk}^+\|$ и $\mathcal{M}^- = \|m_{jk}^-\|$ невырожденные. В самом деле, если, например, $\det \mathcal{M}^+ = 0$, то существует ненулевой класс $\tilde{v} \in \mathcal{W}$, содержащий элемент $v \in \ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$, для которого

$$v = \sum_{k=1}^M a_k u_k + w,$$

где a_k — постоянные коэффициенты, $\tilde{u}_k = U_k^-$ и $w \in \dot{H}_{\delta}^2(G)$. Из соотношения (48) следует, что $q(v, v) = 0$. С другой стороны,

$$q(v, v) = q\left(\sum_{k=1}^M a_k u_k, \sum_{k=1}^M a_k u_k\right) = \sum_{k=1}^M |a_k|^2 q(U_k, U_k) = i \sum_{k=1}^M |a_k|^2 \neq 0$$

и мы приходим к противоречию. Поэтому существуют линейные комбинации $\tilde{\zeta}_j$ и $\tilde{\eta}_j$ классов $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_M$, удовлетворяющие (52) и (53), соответственно.

Перейдем к проверке второго утверждения теоремы. В классах $\tilde{\zeta}_l$ и $\tilde{\eta}_m$ из (52) и (53) выберем представители ζ_l и η_m , принадлежащие пространству $\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$.

Тогда $q(\zeta_l, \eta_m) = 0$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} q(\zeta_l, \eta_m) &= q(U_l^+ + \sum_{j=1}^M S_{lj} U_j^-, U_m^- + \sum_{k=1}^M T_{mk} U_k^+) \\ &= q(\sum_{j=1}^M S_{lj} U_j^-, U_m^-) + q(U_l^+, \sum_{k=1}^M T_{mk} U_k^+) = iS_{lm} - i\overline{T_{ml}}, \end{aligned}$$

а значит, $S(\mu) = T^*(\mu)$. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\tilde{v} := \sum_{j=1}^M S_{lj} \tilde{\eta}_j = \sum_{j=1}^M S_{lj} U_j^- + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M S_{lj} T_{jk} U_k^+.$$

Коэффициенты при волнах U_j^- , $j = 1, \dots, M$ в разложениях для \tilde{v} и $\tilde{\zeta}_j$ совпадают. Поэтому совпадают и коэффициенты при U_k^+ , $k = 1, \dots, M$, иначе для разности $\tilde{v} - \tilde{\zeta}_j$ мы получим противоречие, действуя, как в первой части доказательства. Таким образом, имеем $S(\mu)^{-1} = T(\mu)$. Наконец, так как $\overline{U_j^\pm} = U_j^\mp$, то $\overline{\tilde{\zeta}_j(\mu)} = \tilde{\eta}_j(\mu)$, откуда $\overline{S} = T$. \square

Матрица $S(\mu) = \|S_{jk}(\mu)\|_{j,k=1}^M$ с элементами из (52) называется матрицей рассеяния.

Естественный принцип излучения

Пусть $U_1^+(\mu), \dots, U_M^+(\mu), U_1^-(\mu), \dots, U_M^-(\mu)$ — тот же базис пространства $\mathcal{W}(\mu, G)$, что и в предложении 14 и теореме 15. Выберем произвольные представители u_j^- из классов U_j^- , $j = 1, \dots, M$, и обозначим через \mathfrak{N} линейную оболочку элементов u_1^-, \dots, u_M^- . Определим норму функции $u = \sum c_j u_j^- + v \in \mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$ при $c_j \in \mathbb{C}$ и $v \in \dot{H}_\delta^2(G)$ равенством

$$\|u\| = \sum |c_j| + \|v; H_\delta^2(G)\|.$$

Пусть $\mathbf{A}(\mu)$ — сужение оператора $\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ на пространство $\mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G)$. Отображение

$$\mathbf{A}(\mu) : \mathfrak{N} \dot{+} \dot{H}_\delta^2(G) \rightarrow H_\delta^0(G)$$

непрерывно.

Наметим доказательство теоремы 1.2.1. Оператор $\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ фредгольмов. Поэтому условия ортогональности $(f, z_j)_G = 0$, $j = 1, \dots, d$, обеспечивают существование решения $u \in \dot{H}_{-\delta}^2(G)$ уравнения $\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)u = f$. Так как функции

$z_1, \dots, z_d, \eta_1, \dots, \eta_M$ образуют базис в пространстве $\ker \mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$, то общее решение имеет вид

$$u = u^0 + \sum_{j=1}^M a_j \eta_j + \sum_{k=1}^d b_k z_k,$$

где $u^0 \in \dot{H}_{-\delta}^2(G)$ — частное решение, а a_k и b_k — произвольные постоянные. Согласно теореме 15, имеем $\det \|T_{jk}\| \neq 0$. Поэтому, ввиду (53), можно добиться включения (1.25) подходящим выбором коэффициентов a_k . Равенство $c_j = i(f, \tilde{\eta}_j)_G$ теперь вытекает из теоремы 12 и соотношений $q(U_j^-, \eta_k) = -i\delta_{jk}$, $j, k = 1, \dots, M$. По поводу оценки (1.26) см. теоремы 5.3.5 и 5.1.4 [40]. \square

Заключение

Основные результаты, полученные в работе

1. В квантовом волноводе с конечным числом цилиндрических выходов на бесконечность установлен принцип излучения и определена матрица рассеяния на любом интервале непрерывного спектра, включая пороги. Показано, что матрица рассеяния как функция спектрального параметра имеет оба конечных односторонних предела на любом пороге и является на нем непрерывной справа.

2. Обоснован метод вычисления матрицы рассеяния как на интервале непрерывного спектра, отделенном от порогов, так и в окрестности порога. Предложенный метод нечувствителен к присутствию собственных чисел, погруженных в непрерывный спектр (так называемых ловушечных мод). Схема обоснования метода обобщена на волноводы, описываемые произвольной самосопряженной эллиптической системой.

3. В квантовом волноводе, занимающем на плоскости бесконечную полосу с двумя одинаковыми сужениями малого диаметра, получена асимптотика волновой функции, описывающей рассеяние электронов, приходящих в волновод через один из цилиндрических выходов. Из асимптотики волновой функции выведены асимптотические формулы для основных характеристик резонансного туннелирования.

4. В двумерном квантовом волноводе с двумя сужениями изучено, как меняются асимптотические формулы при повышении энергии электронов, при возникновении дополнительных каналов рассеяния и вырожденных собственных чисел резонатора.

5. Построена асимптотическая теория резонансного туннелирования в трехмерных квантовых волноводах с неодинаковыми сужениями. Описано расщепление резонансных пиков при наличии в квантовом волноводе магнитного поля.

6. Проведено сравнение асимптотического и численного описаний резонансного туннелирования для энергий между первым и вторым порогами. Найден интервал диаметров сужений, в котором работают оба подхода. Изучено, как влияет на согласованность двух подходов увеличение интервала энергий до третьего порога.

В диссертации развиты новые численные и асимптотические методы исследования волноводов, с их помощью построена полная картина резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения. Полученные результаты могут использоваться для анализа работы электронных приборов, основанных на явлении резонансного туннелирования. Кроме того, развитые методы допускают обобщение для исследования аналогичных явлений в упругих и электромагнитных волноводах.

Список литературы

1. *L. M. Baskin, P. Neittaanmäki, B. A. Plamenevskii, O. V. Sarafanov.* Asymptotic theory of resonant tunneling in 3D quantum waveguides of variable cross-section. // *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2009. — V. 70, — no 5. — P. 1542–1566.
2. *Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* О методе вычисления матриц рассеяния для волноводов. // *Алгебра и анализ*, 2011. — Т. 23, — №1. — С. 200–231.
3. *П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* Излучение и рассеяние в областях с периодическими волноводами при медленной стабилизации характеристик среды. // *Проблемы математического анализа*, 2012. — Т. 64. — С. 93–117.
4. *Л. М. Баскин, М. Кабардов, П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* Асимптотика и численное исследование резонансного туннелирования в двумерных квантовых волноводах переменного сечения. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2013. — Т. 53, — №11. — С. 1835–1855.
5. *Л. М. Баскин, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* Асимптотическая теория резонансного туннелирования в трехмерных волноводах переменного сечения в присутствии магнитного поля. // *Проблемы математического анализа*, 2013. — Т. 74. — С. 27–44.
6. *L. Baskin, M. Kabardov, P. Neittaanmäki, O. Sarafanov.* Asymptotic and numerical study of electron flow spin-polarization in 2D waveguides of variable cross-section in the presence of magnetic field. // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2013. — V. 37, — no. 7. — P. 1072–1092.
7. *Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* О методе вычисления волноводных матриц рассеяния в присутствии точечного спектра. // *Функциональный анализ и его приложения*, 2014. — Т. 48, — №1. — С. 61–72.

8. *Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов.* Метод вычисления волноводной матрицы рассеяния в окрестности порогов. // *Алгебра и анализ*, 2014. — Т. 26, — №1. — С. 128–164.
9. *М. Кабардов, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, Н. М. Шаркова.* Сравнение асимптотического и численного подходов к исследованию резонансного туннелирования в симметричном двумерном квантовом волноводе переменного сечения. // *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2017. — Т. 461. — С. 124–139.
10. *О. В. Сарафанов.* Асимптотика резонансного туннелирования электронов высокой энергии в двумерных квантовых волноводах переменного сечения. // *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2017. — Т. 461. — С. 260–278.
11. *L. Baskin, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii, O. Sarafanov.* Resonant Tunneling: Quantum Waveguides of Variable Cross-Sections, Asymptotics, Numerics, and Applications. *Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences*, Springer, 2015.
12. *B. Plamenevskii, O. Sarafanov.* A method for computing waveguide scattering matrices in the presence of point spectrum. // *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), e-Book Full Papers*. — P. 588–596.
13. *L. Baskin, P. Neittaanmäki, O. Sarafanov.* Asymptotics of electron flow spin-polarization in quantum waveguides of variable cross-section in presence of magnetic field. // *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), e-Book Full Papers*. — P. 253–262.
14. *L. Baskin, M. Kabardov, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii, O. Sarafanov.* Device for Detecting Magnetic Field, Patent FI 124670 B; granted 28.11.2014.
15. *Л. М. Баскин, М. М. Кабардов, П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* Устройство для обнаружения магнитного поля, Патент RU 2593637 С2; выдан 14.07.2016.
16. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. // *Успехи математических наук*, 1964. — Т. 19, — №3(117). — С. 53–161.
17. *А. А. Арсеньев.* Резонансное рассеяние в квантовых волноводах. // *Математический сборник*, 2003. — Т. 194, — №1. — С. 3–22.

18. *A. A. Арсеньев*. О связи между полюсом матрицы рассеяния и коэффициентами прохождения и отражения при рассеянии в квантовом волноводе. // Теоретическая и математическая физика, 2004. — Т. 140, — №2. — С. 303–309.
19. *L. Baskin, M. Kabardov, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii*. Semiconductor device and method to control the states of the semiconductor device and to manufacture the same. Patent US 20090250687, granted 08.10.2009.
20. *J. Behrndt, H. Neidhardt, E. R. Racec, P. N. Racec, U. Wulf*. On Eisenbud's and Wigner's R-matrix: A general approach. // Journal of Differential Equations, 2008. — V. 244. — P. 2545–2577.
21. *Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер*. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
22. *M. Costabel, M. Dauge*. Stable asymptotics for elliptic systems on plane domains with corners. // Communications in Partial Differential Equations, 1994. — V. 19, — no. 9–10. — P. 1677–1726.
23. *P. Exner, H. Kovařík*. Quantum waveguides. Mathematical and Theoretical Physics, Springer, 2015.
24. *V. Grikurov, E. Heikkola, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii*. On computation of scattering matrices and on surface waves for diffraction gratings. // Numerische Mathematik, 2003. — V. 94, — no. 2. — P. 269–288.
25. *I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek*. Classes of Linear Operators I. Operator Theory: Advances and Applications. Vol 49. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1990.
26. *И. Ц. Гохберг, Е. И. Сигал*. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше. // Математический сборник, 1971. — Т. 84. — С. 607–629.
27. *P. Grisvard*. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Pitman, Boston, 1985.
28. *M. M. Kabardov, B. A. Plamenevskii, N. M. Sharkova*. Computation of waveguide scattering matrix near thresholds. // Applicable Analysis, 2017. — V. 96, — no. 8. — P. 1295–1302.
29. *M. M. Kabardov, N. M. Sharkova*. Numerical simulations of electron transport in nanowires near thresholds. // Proc. of the International Conference Days on Diffraction 2015. — P. 150–153.

30. *И. В. Камоцкий, С. А. Назаров.* Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе I, II. // Математический сборник, 1999. — Т. 190, — №1, №2. — С. 43–70, 109–138.
31. *И. В. Камоцкий, С. А. Назаров.* Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области. // Записки научных семинаров ПОМИ, 2000. — Т. 264. — С. 66–82.
32. *В. А. Кондратьев.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. // Труды Московского математического общества, 1967. — Т. 16. — С. 219–292.
33. *V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, A. Movchan.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Clarendon Press, New York, 1999.
34. *V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann.* Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. Mathematical Surveys and Monographs 52, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.
35. *Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
36. *J. T. Londergan, J. P. Carini, D. P. Murdock.* Binding and Scattering in Two-Dimensional Systems: Application to Quantum Wires, Waveguides, and Photonic Crystals. Berlin: Springer, 1999.
37. *V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains, vol. 1–2. Birkhäuser, Basel, 2000.
38. *V. G. Maz'ya, J. Rossmann.* On a problem of Babushka (stable asymptotics of the solution to the Dirichlet problem for elliptic equations of second order in domains with angular points). // Mathematische Nachrichten, 1992. — V. 155. — P. 199–220.
39. *С. А. Назаров.* Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра. // Математический сборник, 2015. — Т. 206, — №6. — С. 43–70, 109–138.
40. *С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
41. *С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский.* Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы. // Алгебра и Анализ, 1992. — Т. 4, — №3. — С. 196–225.

42. *S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky*. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. De Gruyter exposition in mathematics 13. Berlin, New York, 1994.
43. *Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий*. О поведении волноводных матриц рассеяния в окрестности порогов. // *Алгебра и Анализ*, 2018. — Т. 30, — №2. — С. 188–237.
44. *Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов*. О вычислении волноводной матрицы рассеяния для системы Максвелла. // *Функциональный анализ и его приложения*, 2015. — Т. 49, — №1. — С. 93–96.
45. *P. N. Racec, T. Stoica, C. Popescu, M. Lepsa, and Th. G. van de Roer*. Physics of optimal resonant tunneling. // *Physical Review B*, 1997. — V. 56, — no. 7. — P. 3595–3597.
46. *E. R. Racec, U. Wulf*. Resonant quantum transport in semiconductor nanostructures. // *Physical Review B*, 2001. — V. 64. — 115318.
47. *E. R. Racec, P. N. Racec, U. Wulf*. Capacitance in open quantum structures. // *Physical Review B*, 2002. — V. 65. — 193314.
48. *U. Wulf, J. Kucera, P. N. Racec, and E. Sigmund*. Transport through quantum systems in the R-matrix formalism. // *Physical Review B*, 1998. — V. 58, — no. 24. — P. 16209–16220.