Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Платонова Мария Владимировна

Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувилля математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов

Специальность 01.01.03 —

Математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф. Смородина Н. В.

Санкт-Петербург

2017

Оглавление

Введение

Когда уравнения математической физики не могут быть решены явно, полезными оказываются интегральные представления решений, дающие возможность получить качественные свойства решения, а также оценить погрешность решений, полученных с помощью приближенных методов. В частности, в квантовой механике таким интегральным представлением является формула Фейнмана–Каца (см. [1], [8], [13], [32]). Эта формула для широкого класса операторов $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V$ (гамильтонианов) дает интегральное представление операторной экспоненты e^{-tH} (см. [1], стр. 60).

Обозначим через $\mathcal{K}_t^0(x, x')$ ядро интегрального оператора e^{-tH_0}, где гамильтониан H_0 соответствует случаю, когда потенциал $V = 0$. Заметим, что ядро $\mathcal{K}_t^0(x, x')$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Если задано начальное условие $u(0, x) = \varphi(x)$, то решение $u(t, x)$ соответствующей задачи Коши может быть представлено как свертка фундаментального решения (т.е. ядра $\mathcal{K}_t^0(x, x')$) с начальной функцией $\varphi(x)$

$$u(t, x) = e^{-tH_0}\varphi(x) = \int \mathcal{K}_t^0(x, x')\varphi(x')dx'. \tag{2}$$

Хорошо известно, что ядро e^{-tH_0} имеет вид

$$\mathcal{K}_t^0(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2t}}.$$

Свойства

$$\mathcal{K}_t^0(x, x') > 0 \tag{3}$$

и

$$\int \mathcal{K}_t^0(x, x')dx' = 1 \tag{4}$$

позволяют интерпретировать функцию $\mathcal{K}_t^0(x,\cdot)$ как плотность вероятностного распределения. Свойство

$$\mathcal{K}_{t+s}^0(x,x') = \int \mathcal{K}_t^0(x,y)\mathcal{K}_s^0(y,x')dy.$$

отвечает полугрупповому свойству $e^{-(t+s)H_0} = e^{-tH_0}e^{-sH_0}$.

Формула (2) может быть переписана в виде

$$u(t,x) = e^{-tH_0}\varphi(x) = \mathbf{E}\varphi(x - w(t)) = \int_\Omega \varphi(x - w(t,\omega))P(d\omega), \tag{5}$$

где $w(t) = w(t,\omega)$ – стандартный винеровский процесс. Для оператора $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{2dx^2} + V(x)$ формула Фейнмана–Каца имеет вид (см. [13], стр. 308)

$$\begin{aligned} e^{-tH}\varphi(x) &= \mathbf{E}\varphi(x - w(t)) \exp\Big(-\int\limits_0^t V(x - w(s))ds\Big) \\ &= \int_\Omega \varphi(x - w(t,\omega)) \exp\Big(-\int\limits_0^t V(x - w(s,\omega))ds\Big)P(d\omega). \end{aligned} \tag{6}$$

В качестве вероятностного пространства Ω в (5) и (6) можно взять пространство $C_0[0,T]$ непрерывных функций $x(t)$, таких что $x(0) = 0$, с винеровской мерой P. Для любых моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T$ и любого борелевского множества $I \subset \mathbf{R}^n$ мера $P(U_{t_1,t_2,\ldots,t_n,I})$ цилиндрического множества

$$U_{t_1,t_2,\ldots,t_n,I} = \{x(t) \in C_0[0,T] : (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)) \in I\} \tag{7}$$

равна

$$\begin{aligned} &\int\limits_I dx_1 dx_2 \ldots dx_n \mathcal{K}_{t_1}^0(x,x_1)\mathcal{K}_{t_2-t_1}^0(x_1,x_2)\ldots\mathcal{K}_{t-t_n}^0(x_{n-1},x_n) \\ &\qquad = \int\limits_I dx_1 dx_2 \ldots dx_n \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} e^{-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $t_0 \equiv 0$, $x_0 \equiv x$.

Отметим, что мера Винера P счетно-аддитивна на цилиндрических подмножествах пространства $C_0[0,T]$ и имеет единственное продолжение на σ-алгебру борелевских подмножеств $C_0[0,T]$.

Как видно из (6), понятие интеграла по траекториям (интеграла Фейнмана–Каца) возникает при построении представления решения задачи Коши уравнения теплопроводности (с ненулевым потенциалом V) (см. [20], [40]).

Аналогичный подход может быть использован не только для уравнения теплопроводности, но и для эволюционного уравнения

$$\tfrac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \mathcal{D}^\alpha_\pm u, \quad \alpha \notin \mathbf{N}, \tag{9}$$

содержащего дробную производную $\mathcal{D}^\alpha_\pm$ порядка $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ (см. [26], [30], [34], [42]). По определению оператор дробного дифференцирования действует на функцию f при $0 < \alpha < 1$ как

$$(\mathcal{D}^\alpha_\pm f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x \mp t) - f(x)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

а при $1 < \alpha < 2$ как

$$(\mathcal{D}^\alpha_\pm f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x \mp t) - f(x) - f'(x)(\mp t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Решение задачи Коши

$$u(0,x) = \varphi(x) \tag{10}$$

для уравнения (9) может быть представлено в виде (см. [23], [25], [34])

$$u(t,x) = \mathbf{E}\varphi(x - \eta^\pm_\alpha(t)), \tag{11}$$

где $\eta^\pm_\alpha(t)$ – устойчивые процессы Леви (устойчивые процессы с независимыми однородными приращениями) со спектральной мерой Леви $\Lambda^+(dx) = \frac{C_\alpha dx}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, сосредоточенной на положительной полуоси (для решения задачи Коши с оператором $\mathcal{D}^\alpha_+$ со знаком "плюс"), и $\Lambda^-(dx) = \frac{C_\alpha dx}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)$, сосредоточенной на отрицательной полуоси (для решения задачи Коши с оператором $\mathcal{D}^\alpha_-$ со знаком "минус"). Формула (11) аналогична формуле (5). Аналогом ядра $\mathcal{K}^0_t(x,x')$ является плотность одномерного распределения соответствующего устойчивого процесса.

Целью настоящей диссертации является построение вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для эволюционного уравнения (9) с оператором дробного дифференцирования $\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha}$ порядка $\alpha > 2$, где $\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha}$ действует на функцию f как

$$(\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x \mp t) - \sum\limits_{j=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(\mp t)^j}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{12}$$

Операторы $\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha}$ называют еще операторами Римана–Лиувилля (подробнее об операторах дробного дифференцирования см. [14], стр. 85). Уравнения вида (9) (дробные кинетические уравнения) возникают для описания гамильтоновой динамики некоторых хаотических систем [49], для изучения термодиффузии во фрактальных и пористых средах [44] и теории турбулентности [47], [49].

Другой целью диссертации является построение вероятностной аппроксимации для решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad u(0, x) = \varphi(x), \tag{13}$$

где

$$c_m = \begin{cases} \pm 1, & m = 2k+1, \\ (-1)^{k+1}, & m = 2k. \end{cases}$$

Уравнение (13) при $m = 3$ используется как линейная аппроксимация нелинейного уравнения Кортевега–де–Фриза, а также в задачах химической кинетики для описания тримолекулярных химических реакций [29].

Еще одной целью настоящей диссертации является построение вероятностных аппроксимаций решений задачи Коши некоторых эволюционных уравнений, возникающих в современной физике. Эти уравнения содержат в правой части оператор дифференцирования порядка больше двух с постоянными коэффициентами. Мы рассматриваем следующие уравнения:

1) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_5 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}, \tag{14}$$

возникающее при изучении нелинейных магнитогидродинамических волн (см. [33]);

2) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \tag{15}$$

описывающее динамику дефектов (канавок) на поверхности реального кристалла, возникающих при нагревании кристалла [2], [43]. Слагаемое с оператором дифференцирования второго порядка отвечает за испарение с поверхности кристалла, а слагаемое с оператором дифференцирования четвертого порядка отвечает поверхностной диффузии;

3) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \beta_3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = 0, \tag{16}$$

которое можно рассматривать как линейную аппроксимацию более общего нелинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \beta_3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = 0,$$

возникающего при описании процессов турбулентности (см. [11]).

Поставленные задачи не сводятся к замене винеровского и устойчивых процессов в формулах (5) и (11) на некоторый другой случайный процесс. Устойчивые процессы Леви существуют только для показателей $\alpha \in (0,2)$. Случаю $\alpha = 2$ соответствует винеровский процесс. Заменить в формуле (11) устойчивый процесс на какой-то другой однородный процесс с независимыми приращениями также невозможно. Действительно, нетрудно показать, что если для решения эволюционного уравнения справедливо представление (5), (11) с некоторым случайным процессом, то генератор $\mathcal{A}$ соответствующей полугруппы должен удовлетворять принципу максимума. То есть, если функция φ достигает в точке x_0 абсолютного максимума, то необходимо $\mathcal{A}\varphi(x_0) \leqslant 0$. Операторы дифференцирования (обычного и дробного) порядка больше двух этому условию очевидным образом не удовлетворяют. Более того, не существует прямого аналога формул (5), (11), даже если мы заменим операцию вычисления математического ожидания на вычисление интеграла по некоторой невероятностной мере в пространстве траекторий. Действительно, в этом случае роль ядра $\mathcal{K}_t^0(x,x')$ в формуле (8) играет фундаментальное решение уравнения (9) или (13). Это фундаментальное решение обладает свойством (4), но не обладает свойством (3). Это приводит к тому, что мера, которая на цилиндрических множествах вида (7) задается формулой

$$\int\limits_I dx_1 dx_2 \dots dx_n \mathcal{K}^0_{t_1}(x, x_1) \mathcal{K}^0_{t_2-t_1}(x_1, x_2) \dots \mathcal{K}^0_{t-t_n}(x_{n-1}, x_n), \qquad (17)$$

уже не может быть продолжена на σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами (см. [5]).

В литературе рассматривался вопрос обобщения представления (11) на случай $\alpha > 2$ (см. [17], [21], [22], [27], [28], [41], [45] и другие). В частности, в работе [45] построено представление решения (в рамках теории псевдопроцессов) на основе так называемой "обобщенной" устойчивой случайной величины, введенной в [36]. Теория псевдопроцессов является формальным обобщением теории стохастических процессов. Каждый псевдопроцесс определяется некоторым псевдодифференциальным оператором $\mathcal{A}$. Псевдопроцесс задает конечно-аддитивную меру на алгебре цилиндрических множеств (7) по формуле (17), где ядро $\mathcal{K}^0_t(x, x')$ является фундаментальным решением эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A} u. \qquad (18)$$

Как уже было отмечено, во всех интересующих нас случаях эта мера не продолжается на σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами. Аналогом представления (11) в теории псевдопроцессов является следующее представление

$$u(t, x) = \int \varphi(x - \eta(t)) d\mu(\eta(\cdot)),$$

где мера μ задается формулой (17) и является только конечно-аддитивной.

Частный случай этой конструкции содержится в работах [31] и [35], в которых рассматривалась задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \;\; u(0, x) = \varphi(x).$$

Представление решения этой задачи строилось на основе знакопеременной меры, которая на цилиндрических множествах $U_{t_1, t_2, \dots, t_n, I}$ определяется

$$P_{2m}(U_{t_1, t_2, \dots, t_n, I}) = \int_I \prod_{l=1}^{n} \mathcal{K}^0_{t_l - t_{l-1}}(x_{l-1}, x_l) dx_1 \dots dx_n,$$

где $\mathcal{K}_t^0(x,x')$ – это фундаментальное решение соответствующего уравнения, которое может быть записано в виде

$$\mathcal{K}_t^0(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{-ip(x-x')}e^{-tp^{2m}}\,dp.$$

В работе [21] был построен аналог формулы Фейнмана–Каца для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{m+1}\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}} + Vu.$$

Решение строилось как предел конечномерных аппроксимаций, то есть

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\sum_{l=1}^n V(x_{l-1})(t_l-t_{l-1})}\cdot\prod_{l=1}^n \mathcal{K}^0_{t_l-t_{l-1}}(x_{l-1},x_l)\varphi(x_n)dx_1\dots dx_n.$$

Далее, для случаев операторов $\mathcal{A}$, являющихся дифференциальными операторами порядка $m > 2$, в литературе строились вероятностные представления решения задачи Коши для уравнения (18), использующие комплекснозначные процессы (см. [28], [41]). В частности, в работе Функаки [28] было построено вероятностное представление решения задачи Коши с оператором дифференцирования четвёртого порядка ($m = 4$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{19}$$

и некоторыми условиями аналитичности на начальную функцию φ. Заметим, что уравнение (19) не совпадает со случаем $m = 4$ в (13). Переходя в (19) к преобразованию Фурье по x, нетрудно понять, что соответствующая задача Коши разрешима только для целых функций φ.

Основной идеей работы [28] является построение процесса, для которого верно

$$(dX(t))^4 = dt.$$

Вместо винеровского процесса использовался комплексный стохастический процесс $X(t), t \geqslant 0$, определяемый как

$$X(t) := \begin{cases} B(w(t)),\ w(t)\geqslant 0,\\ iB(-w(t)),\ w(t) < 0,\end{cases} \tag{20}$$

где $B(t)$ и $w(t)$ – это независимые стандартные винеровские процессы. Заметим, что этот подход легко распространяется на оператор дифференцирования порядка 2^n (см. [46]).

В работе [41] был предложен способ, который позволяет обобщить метод Фунаки для построения вероятностного представления решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{a}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \;\; u(t,0) = \varphi(x),$$

где a – комплексная константа, а от начальной функции φ требуется аналитичность. Как и в [28], решение основано на построении комплекснозначного стохастического процесса, аналогичного $X(t), t \geqslant 0$.

Далее, в работах [16], [48] был предложен другой, уже вероятностный, подход к определению понятия симметричного устойчивого распределения с показателем устойчивости $\alpha > 2$. Данный подход основывался на использовании теории обобщенных функций. Симметричное устойчивое распределение определялось как обобщенная функция l (над некоторым классом основных функций), которая на основную функцию φ действует как

$$(l,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}\, \varphi * \omega_\varepsilon(\xi_\varepsilon), \tag{21}$$

где ω_ε – специальным образом подобранное семейство быстро осциллирующих функций, $\xi_\varepsilon = \int_{|x|>\varepsilon} x\nu(dx)$, а ν – пуассоновская случайная мера на $\mathbf{R}$ с интенсивностью $\frac{C_\alpha dx}{|x|^{1+\alpha}}$. Если $\alpha \in (0,2)$, то в формуле (21) свертка не нужна (можно считать, что ω_ε – это δ-мера), и в этом случае обобщенная функция l есть регулярный функционал вида

$$(l,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p_\alpha(x)dx,$$

где $p_\alpha(x)$ – плотность симметричного устойчивого распределения с показателем α. Для всех прочих α обобщенная функция l является регулярным функционалом со знакопеременной (и, соответственно, невероятностной) плотностью.

Отметим, что данный подход хорошо работает, если $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+2)$, в этом случае преобразование Фурье $\widehat{g}_\alpha$ устойчивого распределения (определяемого формулой (21)) имеет такой же вид, как и в случае $\alpha \in (0,2)$, именно $\widehat{g}_\alpha(p) = \exp(-c|p|^\alpha)$, где c – положительная постоянная. Для $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k)$ предложенный в работах [16], [48] метод давал другой, существенно менее естественный ответ, именно, преобразование Фурье для таких α имело вид

$$\widehat{g}_\alpha(p) = \exp(c_0|p|^\alpha - c_1 p^{4k}),$$

где c_0, c_1 – положительные константы.

В настоящей диссертации мы частично используем методы, предложенные в работах [16], [48], но будем рассматривать не одномерные случайные величины, а аналоги однородных устойчивых процессов с независимыми приращениями. При этом, если в случае $\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$ мы будем пользоваться только методами работ [16], [48], то в случае $\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k)$ нами предложен новый метод, основанный на использовании аппарата комплексного анализа, в частности, на теории пространств Харди. Вместо одного вещественного процесса мы будем рассматривать два комплексных процесса. Использование методов теории обобщенных функций позволило распространить оба подхода и на случай целых значений α. Поясним основные идеи.

Рассмотрим однородный процесс с независимыми приращениями (другое название таких процессов – процессы Леви) $\eta(t)$ с мерой Леви $\Lambda(dx)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathbf{R}} \min(|x|, 1)\Lambda(dx) < \infty. \tag{22}$$

Пусть сначала гауссовская компонента этого процесса равна нулю. Определим обобщенную функцию l, которая на основную функцию φ действует как

$$(l, \varphi) = \int_{\mathbf{R}} \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big)\Lambda(dx).$$

Тогда логарифм характеристической функции процесса $\eta(t)$ имеет вид

$$\log f_{\eta(t)}(p) = t\,(l_x, e^{ipx}) = t\int_{\mathbf{R}} \big(e^{ipx} - 1\big)\Lambda(dx). \tag{23}$$

(Запись l_x обозначает, что обобщенная функция l действует по переменной x).

Если мера Леви $\Lambda(dx)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbf{R}} \min(x^2, 1)\Lambda(dx) < \infty, \tag{24}$$

то обобщенная функция l в формуле (23) задается

$$\log f_{\eta(t)}(p) = t\,(l_x, e^{ipx}) = t\int_{\mathbf{R}} \big(e^{ipx} - 1 - ipx\cdot \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\big)\Lambda(dx). \tag{25}$$

Формулы (23) и (25) показывают, что на меру Леви $\Lambda(dx)$ удобнее смотреть не как на меру, а как на обобщенную функцию, задаваемую равенством

$$(l, \varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\Lambda(dx). \tag{26}$$

Эта формула работает для функций φ, обращающихся в 0 в окрестности нуля, поэтому в формулах (23) и (25) фактически используются стандартные регуляризации этой обобщенной функции (см. [3], стр. 22 и 63).

Более того, если смотреть на меру Леви как на обобщенную функцию, то в случае, когда гауссовская компонента не равна 0, мы можем рассмотреть обобщенную функцию

$$\widetilde{l} = l + a\delta^{(1)} + \frac{b^2}{2}\delta^{(2)}.$$

Тогда для логарифма характеристической функции уже произвольного процесса Леви $\eta(t)$ справедливо представление

$$\log f_{\eta(t)}(p) = t\,(\widetilde{l}_x, e^{ipx}).$$

С любым процессом Леви $\eta(t)$ связана полугруппа операторов P^t, которая определяется формулой

$$P^t\varphi(x) = \mathbf{E}\varphi(x - \eta(t)). \tag{27}$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим генератор полугруппы P^t. Тогда функция $u(t,x) = P^t\varphi(x)$ решает задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u,\ \ u(0,x) = \varphi(x). \tag{28}$$

Генератор $\mathcal{A}$ полугруппы P^t, определенной формулой (27), имеет вид свертки с обобщенной функцией $\widetilde{l}$

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \big(\varphi * \widetilde{l}\big)(x), \tag{29}$$

при этом в формуле (29) мы используем стандартную регуляризацию обобщенной функции $\widetilde{l}$, то есть, если мера Леви $\Lambda(dx)$ удовлетворяет условию (22), то

$$\mathcal{A}\varphi(x) = a\varphi^{'}(x) + \frac{1}{2}b^2\varphi^{''}(x) + \int_{\mathbf{R}} \big(\varphi(x-y) - \varphi(x)\big)\Lambda(dy), \tag{30}$$

а если мера Леви удовлетворяет (24), то

$$\mathcal{A}\varphi(x) = a\varphi^{'}(x) + \frac{1}{2}b^2\varphi^{''}(x) + \int_{\mathbf{R}} \big(\varphi(x-y) - \varphi(x) + \varphi^{'}(x)y\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)\big)\Lambda(dy). \tag{31}$$

Для построения случайного процесса, определяющего полугруппу P^t с генератором вида (29), удобно использовать теорию точечных процессов. Именно, рассмотрим пуассоновскую случайную меру $\nu(dt,dx)$ на $[0,T]\times\mathbf{R}$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\nu(dt,dx)=dt\,\Lambda(dx).$$

Для $\varepsilon>0$ через $\xi_\varepsilon(t)$, $t\in[0,T]$ обозначим случайный процесс (интеграл по пуассоновской случайной мере)

$$\xi_\varepsilon(t)=\iint\limits_{[0,t]\times(\mathbf{R}\setminus(-\varepsilon,+\varepsilon))} x\nu(ds,dx). \tag{32}$$

Хорошо известно (см. [15]), что если мера Леви удовлетворяет (22), то однородный процесс Леви с логарифмом характеристической функции вида (23) может быть представлен как предел при $\varepsilon\to 0$ интеграла по пуассоновской случайной мере. Именно,

$$\xi(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_\varepsilon(t).$$

Если выполнено только условие (24), то предела $\xi_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon\to 0$ не существует, но существует предел при правильном центрировании

$$\xi(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\xi_\varepsilon(t)-t\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} x\Lambda(dx)\Big). \tag{33}$$

Пусть $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, не зависящий от пуассоновской случайной меры, тогда решение задачи Коши (28) задается формулой

$$u(t,x)=\mathbf{E}\varphi\big(x+at-bw(t)-\xi(t)\big). \tag{34}$$

Формула (34) обобщает формулу (5) и дает вероятностное представление решения задачи Коши (28) с генератором $\mathcal{A}$, определенным формулой (30) (или (31)).

Нас будет интересовать случай, когда мера Λ сосредоточена на положительной полуоси и имеет вид

$$\Lambda(dx)=\frac{dx}{x^{1+\alpha}},\ \ \alpha>2.$$

Заметим, что такая мера Λ не удовлетворяет условию (24), соответственно, она не является мерой Леви никакого устойчивого распределения.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha\notin\mathbf{N}$. Определим процесс $\xi_\varepsilon(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon(t)=\iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,+\infty)} x\nu(ds,dx)$$

(аналогично формуле (32)). В этом случае уже не существует предела (33) при $\varepsilon \to 0$ даже при правильном центрировании. Заметим, что для такой Λ вместо индикатора $\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ в формуле (25) можно рассматривать индикатор $\mathbf{1}_{(-\infty,+\infty)}(x)$, при этом мы изменим только константу сдвига a.

Если рассматривать Λ как обобщенную функцию l, то, как и в случае (24), надо использовать стандартную регуляризацию обобщенной функции l, то есть формула (26) понимается, как

$$(l,\varphi) = \int\limits_0^\infty \Big(\varphi(x) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(j)}(0)x^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}.$$

Тогда формулы (23) и (25) соответствуют формуле

$$(l_x, e^{ipx}) = \int\limits_0^\infty \Big(e^{ipx} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(ipx)^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}. \tag{35}$$

Заметим, что функция $\exp\Big(t(l_x, e^{ipx})\Big)$ по переменной p является ограниченной только при $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$. При $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k)$ функция $\exp\Big(t(l_x, e^{ipx})\Big)$ сверхэкспоненциально возрастает, и, соответственно, для нее, вообще говоря, не определено обратное преобразование Фурье. Поэтому эти случаи существенно отличаются друг от друга.

Покажем сначала, как мы будем строить вероятностное представление решения задачи Коши (9), (10) при $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$.

Для $\varepsilon>0$ определим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\big[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t))\big],$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ задается своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{[\alpha]} \frac{(ipx)^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big). \tag{36}$$

В параграфе 1.1 первой главы мы покажем, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то построенная функция $u_\varepsilon(t,\cdot)$

по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение $u(t,\cdot)$ задачи Коши (9), (10), также будет оценена скорость сходимости. Представление решения $u(t,x)$ задачи Коши (9), (10)

$$u(t,x) = (W_2^l)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\big[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x-\xi_\varepsilon(t))\big]$$

мы и будем называть вероятностным представлением (или вероятностной аппроксимацией) решения задачи Коши.

Заметим, что введенное семейство функций $u_\varepsilon(t,x)$ при каждом фиксированном ε также порождает полугруппу

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\big[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x-\xi_\varepsilon(t))\big]$$

с генератором $\mathcal{A}_\varepsilon$, который определяется как свертка с обобщенной функцией

$$(l_\varepsilon,\varphi) = \int\limits_\varepsilon^\infty \Big(\varphi(x) - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{\varphi^{(j)}(0)x^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}. \tag{37}$$

Для каждой гладкой функции φ справедливо соотношение

$$(l,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}(l_\varepsilon,\varphi), \tag{38}$$

что означает сходимость $l_\varepsilon \to l$ при $\varepsilon \to 0$ в смысле обобщенных функций. Доказательство теоремы в значительной степени основано на использовании известной формулы теории возмущений (см. [7], гл. IX, §2, п.1, стр. 614)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)}Be^{(t-\tau)A}d\tau,$$

где A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t\geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA},$$

а оператор B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена.

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2,4k-1)\cup(4k-1,4k)$. В данном случае предложенный выше метод не работает, так как для таких значений α функция (36) сверхэкспоненциально возрастает на бесконечности и, соответственно, для нее не определено обратное преобразование Фурье. В данном случае для построения вероятностного представления решения задачи Коши мы привлечем некоторые идеи комплексного анализа. Введем несколько обозначений. Через P_+ обозначим проектор Рисса, действующий из $L_2(\mathbf{R})$ на пространство Харди H^2_+, а через P_- обозначим проектор Рисса, действующий из $L_2(\mathbf{R})$ на пространство Харди H^2_-. Хорошо известно (см. [12]), что носитель преобразования Фурье граничного значения функции из H^2_- лежит на положительной полуоси, а носитель преобразования Фурье граничного значения функции из H^2_+ содержится на отрицательной полуоси. Далее, для $M>0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций ψ, таких что носитель преобразования Фурье $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M,M]$, именно, $\widehat{P_M\psi}=\widehat{\psi}\cdot\mathbf{1}_{[-M,M]}$.

Возьмем два комплексных числа $\sigma_+=\exp(\frac{i\pi}{\alpha})$ и $\sigma_-=\exp(-\frac{i\pi}{\alpha})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^\alpha=\sigma_-^\alpha=-1$. Вместо одного случайного процесса $\xi_\varepsilon(t)$ мы теперь рассмотрим два комплексных процесса $\sigma_+\xi_\varepsilon(t)$ и $\sigma_-\xi_\varepsilon(t)$. Далее, сначала мы по начальному данному φ построим новую функцию φ_M, полагая $\varphi_M=P_M\varphi$. Функция φ_M уже будет целой аналитической функцией экспоненциального типа. Число M мы будем выбирать в зависимости от ε, именно $M=M(\varepsilon)=\varepsilon^{\delta-1}$, где $0<\delta\leqslant\frac{\alpha}{1+[\alpha]}$. Далее, используя проекторы Рисса, представим функцию φ_M в виде суммы двух функций – одна имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а вторая – в нижнюю. Соответственно, для одной из них будем пользоваться одним комплексным процессом, для другой – другим.

В настоящей работе показано, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ для некоторого $l\geqslant 0$, то функция

$$u_\varepsilon(t,x)=\mathbf{E}\big[(P_-\varphi_M*\omega_\varepsilon^t)(x-\sigma_+\xi_\varepsilon(t))+(P_+\varphi_M*\omega_\varepsilon^t)(x-\sigma_-\xi_\varepsilon(t))\big],$$

где

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_+ px)^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_- px)^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p < 0, \end{cases} \tag{39}$$

по норме $W_2^l(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (9), (10).

Далее, в теоремах 1.2 и 1.4 мы покажем, что процесс $\xi_\varepsilon(t)$ может быть заменен на процесс, построенный по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин со степенной асимптотикой хвостового распределения. Эти утверждения являются невероятностными аналогами предельных теорем о сходимости к устойчивым распределениям.

Пусть теперь $\alpha = m > 2$ – натуральное число. При построении вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (13), мы будем пользоваться практически теми же методами, что и при нецелых α. Заметим, что генератор полугруппы $P^t = \exp\big(t\frac{c_m}{m!}\frac{d^m}{dx^m}\big)$ – это свертка с обобщенной функцией $c_m\frac{\delta^{(m)}}{m!}$. Так же как в (37), (38) обобщенная функция $l = (-1)^m\frac{\delta^{(m)}}{m!}$ может быть получена как предел $l_\varepsilon \to l$ при $\varepsilon \to 0$, где

$$(l_\varepsilon, \varphi) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\big(\varphi(y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(j)}(0)y^j}{j!}\big)\frac{dy}{y^{1+m}}.$$

В последней формуле e – это основание натурального логарифма. Промежуток интегрирования $[\varepsilon, e\varepsilon]$ выбирается из условия

$$\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} y^m\frac{dy}{y^{1+m}} = 1.$$

Как и в случае нецелого показателя α, здесь возникают два существенно различных случая: случай $m = 4k+1$, $m = 4k+2$ и случай $m = 4k-1$, $m = 4k$.

Покажем, как построить вероятностное представление полугруппы с генератором $\mathcal{A}_\varepsilon$, определяемым по формуле

$$\mathcal{A}_\varepsilon\varphi(x) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\big(\varphi(x-y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(j)}(x)(-y)^j}{j!}\big)\frac{dy}{y^{1+m}},$$

в случае, когда $m = 4k+2$ (этот случай наиболее близок к уравнению теплопроводности).

Определим процесс $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ формулой

$$\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,e\varepsilon]} x\nu(ds,dx).$$

Мы покажем, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big],$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(ipy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}\Big),$$

приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (13) по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$.

Случай $m = 4k+1$ рассматривается аналогично, а для случаев $m = 4k$ и $m = 4k-1$, так же как и для нецелых α, приходится привлекать идеи из комплексного анализа. Построим вероятностное представление решения задачи Коши (13) для $m = 4k$. Выберем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$. Заметим, что, как и раньше, σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^m = \sigma_-^m = -1$. Вместо одного случайного процесса $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ мы теперь рассмотрим два комплексных процесса $\sigma_+\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ и $\sigma_-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$. Далее, сначала мы по начальному данному φ построим новую функцию φ_M, полагая $\varphi_M = P_M\varphi$. Функция φ_M уже будет целой аналитической функцией экспоненциального типа. Число M мы будем выбирать в зависимости от ε, именно $M = M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$. Далее, используя проекторы Рисса, представим функцию φ_M в виде суммы двух функций – одна имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а вторая – в нижнюю. Соответственно, для одной из них будем пользоваться одним комплексным процессом, для другой – другим.

Мы покажем, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big],$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{(ip\sigma_+ y)^j}{j!} \Big) \frac{dy}{y^{m+1}} \Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{(ip\sigma_- y)^j}{j!} \Big) \frac{dy}{y^{m+1}} \Big), & p < 0, \end{cases}$$

приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (13) по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$.

Далее, в теоремах 2.2, 2.4, 2.6 и 2.8 мы покажем, что процесс $\xi_\varepsilon(t)$ может быть заменен на процесс, построенный по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным моментом порядка $m+1$. Эти утверждения являются невероятностными аналогами центральной предельной теоремы.

Результаты диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

В первой главе мы построим вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана-Лиувилля порядка α больше двух.

В первом параграфе мы построим вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши (9), (10). При этом, если в случае $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$ мы будем пользоваться только методами работ [16], [48], то в случае $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k)$ предложен новый метод, основанный на использовании аппарата комплексного анализа, в частности, на теории пространств Харди. Фактически, вместо одного вещественного процесса мы рассматриваем два комплексных процесса.

Основные результаты первого параграфа первой главы содержатся в теоремах 1.1–1.4.

Во втором параграфе мы строим вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши (1.37), (1.38). Мы покажем, что, если использовать подход, основанный на идеях комплексного анализа, для построения одномерных симметричных распределений (как в [16], [48]), то построенный объект будет иметь ”правильный” (такой же, как в случае $\alpha \in (0,2)$) вид преобразования Фурье. При этом вместо двух комплексных процессов будут использоваться уже четыре комплексных процесса.

Основные результаты второго параграфа первой главы содержатся в теоремах 1.5–1.8.

Во второй главе мы построим вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка (13). Основные результаты второй главы содержатся в теоремах 2.1–2.8.

В третьей главе мы построим вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши для уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка больше двух с постоянными коэффициентами. Частными случаями этих уравнений являются уравнения (14), (15) и (16). Основные результаты третьей главы содержатся в теоремах 3.1, 3.2.

Четвертая глава посвящена обобщению аналога устойчивых случайных величин на случай безгранично делимых распределений с "мерой Леви" Λ, удовлетворяющей условию $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^2 \wedge 1)d\Lambda(x) = \infty$. Соответствующее распределение (аналог безгранично делимого распределения) является знакопеременным и, соответственно, невероятностным. Тем не менее, в последней части работы мы покажем, что предельная теорема о сходимости к такому распределению имеет простой вероятностный смысл, а именно, из него следует утверждение об асимптотике больших уклонений для сумм независимых случайных величин при некоторых предположениях об асимптотике хвостового распределения отдельного слагаемого. Основные результаты четвертой главы содержатся в теоремах 4.4, 4.5.

Результаты диссертации докладывались автором на международной конференции «XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (Батилиман, 17–29 сентября, 2015 г.), на семинаре отдела математической физики МИАН (Москва, январь 2017 г.), на Санкт-Петербургском Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистики под руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (Санкт-Петербург, октябрь 2015 г., май 2016 г.), на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики СПбГУ (Санкт-Петербург, март 2016 г.), традиционной зимней сессии МИАН–ПОМИ (Санкт-Петербург, 13–15 декабря 2016 г.), на международной конференции "Yu. V. Linnik Centennial Conference, Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics” (Saint Petersburg, September 14–18, 2015), на международной конференции ”2nd Russian-Indian Joint Conference in Statistics and Probability” (Saint Petersburg, May 30 — June 3, 2016), на летней школе ”A trilateral German-Russian-Ukrainian summer school Spectral Theory, Differential Equations and Probability” (Mainz, September 4–15, 2016).

Эти результаты содержатся в четырех работах [50]– [53], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм.

Общий объем диссертации составляет 132 страниц. Список литературы содержит 53 наименования.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Наталии Васильевне Смородиной, за постановку интересных задач, постоянное внимание и поддержку, полезные обсуждения и ценные советы, замечания и комментарии. Также автор благодарен коллективам кафедры Высшей математики и математической физики и математической лаборатории им. П. Л. Чебышева Санкт–Петербургского государственного университета за поддержку и создание рабочей атмосферы для работы и для написания диссертации.

Основные обозначения и определения

Константы мы всегда обозначаем буквой C, причем одна и та же буква C может обозначать разные константы, даже в пределах одной выкладки.

Прямое преобразование Фурье определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{ipx} dx, \tag{40}$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx} dp.$$

Для любого $M > 0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций, таких что носитель функции $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M, M]$. Именно, для $\psi \in L_2(\mathbf{R})$ имеем

$$P_M \psi(x) = \psi * D_M(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-M}^{M} \widehat{\psi}(p) e^{-ipx} dp, \tag{41}$$

где $\widehat{\psi}$ – прямое преобразование Фурье функции ψ, а D_M – это ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Mx}{x}.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно (см. [18], стр. 146). В пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ выберем норму (эквивалентную стандартной (см. [18], стр. 190))

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k}) |\widehat{\psi}(p)|^2 dp.$$

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Через $C_b^\infty(\mathbf{R})$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными любого порядка.

Через H_+^2 и H_-^2 обозначим классы Харди в верхней и нижней полуплоскости комплексной плоскости соответственно.

Для $\alpha > 0$ через $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ будем обозначать соответственно целую и дробную часть числа α.

Оператор дробной производной определяется формулой (см. [14], Теорема 5.8, стр. 99)

$$(\mathcal{D}_\pm^\alpha f)(x) = \frac{1}{\mathit{\Gamma}(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x \mp t) - \sum\limits_{j=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(\mp t)^j}{t^{1+\alpha}} dt, \tag{42}$$

где $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$.

Оператор дробного дифференцирования является псевдодифференциальным оператором. Легко показать, что для преобразования Фурье дробной производной справедливо

$$\widehat{(\mathcal{D}_\pm^\alpha \varphi)}(p) = (\mp ip)^\alpha \widehat{\varphi}(p), \tag{43}$$

где $(\mp ip)^\alpha = |p|^\alpha \exp(\mp \frac{\alpha\pi i}{2} \mathrm{sign}\,(p))$, то есть оператор $\widehat{\mathcal{D}_\pm^\alpha}$ действует как оператор умножения на $(\mp ip)^\alpha$.

Определим оператор

$$\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha, \tag{44}$$

именно, при $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^\infty (4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k)$

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{f(x-t) - \sum\limits_{j=0}^{2k-1} \frac{f^{(2j)}(x)}{(2j)!} t^{2j}}{|t|^{1+\alpha}}\, dt,$$

а при $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$

$$(\mathcal{D}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t) - \sum\limits_{j=0}^{2k} \frac{f^{(2j)}(x)}{(2j)!} t^{2j}}{|t|^{1+\alpha}} \, dt.$$

Заметим, что оператор $\mathcal{D}^{\alpha}$ также является псевдодифференциальным оператором, а $\widehat{\mathcal{D}^{\alpha}}$ есть оператор умножения на функцию $2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})|p|^{\alpha}$.

Через $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ обозначим множество $\mathbf{R}_{\varepsilon} = \mathbf{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Через $\nu(dt, dx)$ мы обозначим пуассоновскую случайную меру на $\mathbf{R} \times [0, T]$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\nu(dt, dx) = dt\, \Lambda(dx) = \frac{dt\, dx}{|x|^{1+\alpha}},\ \alpha > 2. \tag{45}$$

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_{\varepsilon}^{\pm}(t)$, $\xi_{\varepsilon}(t)$ и $\xi_{\varepsilon}^{e\varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$ обозначим случайные процессы (интегралы по пуассоновской случайной мере)

$$\xi_{\varepsilon}^{+}(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,+\infty)} x\nu(ds, dx), \tag{46}$$

$$\xi_{\varepsilon}^{-}(t) = \iint\limits_{[0,t]\times(-\infty,\varepsilon]} x\nu(ds, dx), \tag{47}$$

$$\xi_{\varepsilon}(t) = \iint\limits_{[0,t]\times\mathbf{R}_{\varepsilon}} x\nu(ds, dx) \tag{48}$$

и

$$\xi_{\varepsilon}^{e\varepsilon}(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,e\varepsilon]} x\nu(ds, dx), \tag{49}$$

где e – основание натурального логарифма. Заметим, что такой выбор интервала интегрирования обеспечивает нам выполнение соотношения

$$\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} x^m \frac{dx}{x^{1+m}} = 1.$$

Глава 1

Задача Коши для эволюционных уравнений, содержащих оператор Римана–Лиувилля порядка больше двух

В этой главе мы построим вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши с оператором Римана–Лиувилля порядка больше двух. В параграфе 1.1 мы рассмотрим задачу Коши с оператором $\mathcal{D}_+^\alpha$, заданным формулой (42) (несимметричный случай). В параграфе 1.2 мы рассмотрим задачу Коши с оператором $\mathcal{D}^\alpha$, заданным формулой (44) (симметричный случай).

1.1 Несимметричный случай

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \Gamma(-\alpha) \mathcal{D}_+^\alpha u, \tag{1.1}$$

где оператор $\mathcal{D}_+^\alpha$ – оператор дробного дифференцирования (42), а константа $c_\alpha = (-1)^{[\frac{\alpha}{2}]}$. Для уравнения (1.1) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

где функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R})$.

Сначала, мы рассмотрим случай, когда

$$\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2). \tag{1.3}$$

Отметим, что случай

$$\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k). \tag{1.4}$$

является технически более сложным и будет рассмотрен в параграфе 1.1.2.

Также отметим, что для оператора $\mathcal{D}_{-}^{\alpha}$ все полученные результаты обобщаются с некоторыми очевидными изменениями, поэтому далее будем рассматривать только уравнение с оператором $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}$.

1.1.1 Случай $\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0, T]\times\mathbf{R}$ с интенсивностью (45). Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_{\varepsilon}^{+}(t)$, $t \in [0, T]$ мы обозначаем случайный процесс, определенный формулой (46).

Отметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi_{\varepsilon}^{+}(t)$ является сложными пуассоновским процессом, но при таком выборе α и $t > 0$ у семейства случайных величин $\xi_{\varepsilon}^{+}(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$. Тем не менее процесс $\xi_{\varepsilon}^{+}(t)$ может быть использованы для представления решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Из представления Леви-Хинчина характеристическая функция $f_{\xi_{\varepsilon}^{+}(t)}$ случайной величины $\xi_{\varepsilon}^{+}(t)$ для любого t равна

$$f_{\xi_{\varepsilon}^{+}(t)}(p) = \exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}(e^{ipy}-1)d\Lambda(y)\Big).$$

Определим функцию двух переменных $u_{\varepsilon}(t, x)$

$$u_{\varepsilon}(t, x) = \mathbf{E}[(\varphi * \omega_{\varepsilon}^{t})(x - \xi_{\varepsilon}^{+}(t))],$$

где функция $\omega_{\varepsilon}^{t}(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_{\varepsilon}^{t}(p) = \exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{[\alpha]}\frac{i^j p^j y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big). \tag{1.5}$$

Отметим, что при таких α это быстро убывающая функция. Действительно, при $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1)$ коэффициент при старшей степени p в показателе экспоненты отрицателен. При $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k+1, 4k+2)$ коэффициент при старшей степени p чисто мнимый, но зато предыдущий коэффициент (при p^{4m}) - отрицательный.

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (1.1), (1.2), *а число* α *удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$, *такая что*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}\varepsilon^{1-\{\alpha\}},$$

где $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [7], гл. IX, §2, п.1, стр. 614)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)}Be^{(t-\tau)A}d\tau. \tag{1.6}$$

Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha - A_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ как

$$A_\varepsilon\psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \Big(\psi(x-y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{\psi^{(j)}(x)(-y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

В этих обозначениях

$$A + B = \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha.$$

Заметим, что для любого положительного k и $t > 0$ справедливы неравенства для операторных норм

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1, \tag{1.7}$$

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{1.8}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$.

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(x)$

$$\begin{aligned}\widehat{B\varphi}(p) &= \int\limits_{\mathbf{R}} dx\exp(ipx)\Big[\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\varphi(x-y)-\sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{\varphi^{(j)}(x)(-y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big]\\ &= \widehat{\varphi}(p)\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\exp(ipy)-\sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{i^jp^jy^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\ &= \widehat{\varphi}(p)|p|^{\alpha}\int\limits_0^{\varepsilon|p|}\Big(\exp(i\cdot\mathrm{sign}(p)y)-\sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(i\cdot\mathrm{sign}(p)y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.\end{aligned}$$

Если $|p|<\frac{1}{\varepsilon}$, то, оценивая в последней формуле остаточный член в разложении Тейлора, получаем

$$|p|^{\alpha}\Big|\int\limits_0^{\varepsilon|p|}\Big(\exp(i\cdot\mathrm{sign}(p)y)-\sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(i\cdot\mathrm{sign}(p)y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big| \leqslant C|p|^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{B\varphi}\right\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{\mathbf{R}} dp\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{B\varphi}(p)|^2\\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} dp\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2([\alpha]+1)}\\ &\qquad + C\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} dp\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{B\varphi}\right\|^2_{W_2^l} &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} dp(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)})|\widehat{\varphi}(p)|^2\\ &\quad + C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2\alpha+2(1-\{\alpha\})}\\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (1.7), (1.8) и (1.9). □

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (1.1), (1.2). Таким образом, для решения задачи Коши (1.1), (1.2) мы получаем представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t))].$$

Далее, в вероятностном представлении решения задачи Коши заменим невероятностный аналог устойчивого процесс его аппроксимацией случайным блужданием.

Пусть $\{\xi_j^+\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}^+$ распределение случайной величины ξ_1^+. Предположим, что распределение случайной величины ξ_1^+ при $x > 1$ удовлетворяет условию

$$P(\xi_1^+ > x) = \frac{1}{\alpha x^\alpha}(1 + h(x)), \tag{1.10}$$

причем функция $|h(x)| \leqslant \frac{C}{x^\beta}$, где

$$\beta > 1 - \{\alpha\}. \tag{1.11}$$

Для $k < \alpha$ через $\mu_k^+ = \mathbf{E}{\xi_1^+}^k$ обозначим момент порядка k случайной величины ξ_1^+.

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ – независимый от последовательности $\{\xi_j^+\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n^+(t)$, $t \in [0,T]$, полагая

$$\zeta_n^+(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j^+. \tag{1.12}$$

Заметим, что процесс ζ_n^+ не имеет слабого предела при $n \to \infty$. Нас интересует случай $\alpha > 2$, а в этом случае распределение $\mathcal{P}^+$ принадлежит области притяжения нормального закона, что означает, что слабый предел будет (после центрирования) в другой, более сильной нормировке.

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M мы обозначаем проектор в $L_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле (41). Далее число M будем выбирать в зависимости от n, то есть $M = M(n)$. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M \varphi$.

Для натуральных n определим функцию двух переменных

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}[(\varphi_M * \varkappa_n^t)(x - \zeta_n^+(t))],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_1^+ ip}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2^+(ip)^2}{2n^{2/\alpha}} + \ldots + \frac{\mu_{[\alpha]}^+(ip)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Big)\Big).$$

Также как и в (1.5), функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p)$ – это быстро убывающая функция.

Теорема 1.2. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(n) = n^{1/\alpha}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (1.1), (1.2), *а число* α *удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда существует* $C = C(\alpha) > 0$, *такое что*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\Big(t + \frac{1}{n}\Big)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Доказательство. Введем обозначения для некоторых операторов. Именно, обозначим $A = A_n$, $B = \varGamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha - A_n$, где оператор A_n действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ как

$$A_n\psi(x) = n\int_0^{+\infty}\Big(\psi\Big(x - \frac{y}{n^{1/\alpha}}\Big) - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{\psi^{(j)}(x)(-y)^j}{n^{j/\alpha}j!}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Тогда

$$A + B = \varGamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha.$$

Представим

$$e^{tA}\varphi_M(x) - e^{t(A+B)}\varphi(x) = (e^{tA} - e^{t(A+B)})\varphi_M(x) - e^{t(A+B)}(I - P_M)\varphi(x) = V_1 + V_2.$$

Оценим норму слагаемого V_2

$$\begin{aligned}\|V_2\|_{W_2^l}^2 &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\Big(Ce^{-2bM^\alpha t}\int_{|p|>M}\Big(1 + |p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p)|^2dp\Big)\\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\int_{|p|>M}(1 + |p|^{2(l+[\alpha]+1)})|\widehat{\varphi}(p)|^2dp\\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}}^2 = \frac{C}{n^{2([\alpha]+1)/\alpha}}\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}}^2, \quad (1.13)\end{aligned}$$

где константа $b = \mathrm{Re}\big(-\Gamma(-\alpha)\exp(\frac{-\alpha\pi i}{2}\mathrm{sign}(p))\big)$ не зависит от p и положительна.

Для оценки нормы слагаемого V_1 воспользуемся формулой (1.6).

Заметим, прежде всего, что для любого положительного k и $t > 0$ справедливы неравенства

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1, \tag{1.14}$$

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{1.15}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1} \to W_2^l}$. Обозначим

$$S(y) = e^{iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{i^j y^j}{j!}.$$

Имеем

$$\widehat{B\varphi_M}(p) = \int_{-M}^{M} dx \exp(ipx)$$

$$\cdot \Big[\int_0^{+\infty} \Big(\varphi(x-y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(j)}(x)(-y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} - n\int_0^{+\infty} \Big(\varphi\Big(x - \frac{y}{n^{1/\alpha}}\Big) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(j)}(x)(-y)^j}{n^{j/\alpha} j!}\Big) d\mathcal{P}(y)\Big]$$

$$= -\widehat{\varphi_M}(p)\Big[c_2(p)|p|^\alpha + n\int_0^{+\infty} S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big) d\mathcal{P}(y)\Big]. \tag{1.16}$$

Заметим, что интегрирование ведется по множеству $|p| \leqslant M$, значит в области интегрирования справедливо неравенство

$$\frac{|p|}{n^{1/\alpha}} \leqslant \frac{M}{n^{1/\alpha}} \leqslant 1. \tag{1.17}$$

Представим выражение в квадратных скобках (1.16) в виде

$$n\int_0^1 S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big) d\mathcal{P}(y) + n\int_1^{+\infty} S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big) d\mathcal{P}(y) + c_2(p)|p|^\alpha.$$

В силу (1.17) и условия $|y| \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\Big|S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big| \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1} y^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}.$$

Тогда

$$\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}} \int_0^1 y^{[\alpha]+1} d\mathcal{P}(y) \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Из условия (1.11) следует, что существует $C>0$, такая что

$$\Big|\int\limits_1^\infty S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big(d\mathcal{P}(y)-\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\Big|\leqslant C\int\limits_1^\infty \max\Big(\frac{|p|^{[\alpha]}y^{[\alpha]-1}}{n^{[\alpha]/\alpha}},\frac{|p|^{[\alpha]+1}y^{[\alpha]}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}\Big)\frac{dy}{y^{\alpha+\beta}}$$
$$\leqslant\frac{C|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \quad (1.18)$$

Воспользовавшись простым неравенством

$$|p|^{[\alpha]+1}+|p|^\alpha\leqslant 2(1+|p|^{[\alpha]+1}),$$

получим

$$\|\widehat{B\varphi_M}\|^2_{W_2^l}=\int\limits_{|p|<M}dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2$$
$$\leqslant\frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}}\int\limits_{\mathbf{R}}dp(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)})|\widehat{\varphi}(p)|^2\leqslant\frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \quad (1.19)$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (1.13)–(1.15) и (1.19).

□

1.1.2 Случай $\alpha\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2,4k-1)\cup(4k-1,4k)$

Как и раньше, $\nu(dt,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T]\times\mathbf{R}$ с интенсивностью (45). Для $\varepsilon>0$ через $\xi^+_\varepsilon(t)$, $t\in[0,T]$ мы обозначаем случайный процесс, определенный формулой (46).

В отличие от предыдущего случая, будем рассматривать $\sigma\xi^+_\varepsilon(t)$, где σ – уже комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [9])

$$\mathbf{E}\exp(ip\sigma\xi^+_\varepsilon(t))=\exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}(e^{i\sigma px}-1)d\Lambda(x)\Big).$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p\geqslant0$ и $\operatorname{Im}\sigma\geqslant0$ или $p\leqslant0$ и $\operatorname{Im}\sigma\leqslant0$.

Рассмотрим проекторы Рисса $P_\pm$, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2_\pm$. Любую функцию $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ можно представить в виде

$$\varphi(x)=P_+\varphi(x)+P_-\varphi(x)=\varphi_+(x)+\varphi_-(x),$$

где носитель преобразования Фурье функции φ_+ сосредоточен на отрицательной полуоси, а носитель преобразования Фурье φ_- – на положительной полуоси. Заметим, что $P_+\varphi$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, а $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней.

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M мы обозначаем проектор в $L_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле (41). Далее число M будем выбирать в зависимости от ε, то есть $M = M(\varepsilon)$, поэтому в обозначениях не будем указывать зависимость от M. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M\varphi$.

Положим $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{\alpha})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{\alpha})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- – в нижней, и верно

$$\sigma_+^\alpha = \sigma_-^\alpha = -1.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t,x)$

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^+(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^+(t))\Big], \tag{1.20}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{i^j\sigma_+^j p^j x^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{i^j\sigma_-^j p^j x^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p < 0. \end{cases}$$

Так как $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таких α и таком выборе $\sigma_\pm$ функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, *число* α *удовлетворяет условию* (1.4), $M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{[\alpha]+1}$. *Пусть* $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (1.1), (1.2), *а функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется* (1.20). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\big(t + \varepsilon^{\alpha-\delta(1+[\alpha])}\big)\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm \psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \Big(\psi^\pm(x - \sigma_\mp y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(\psi^\pm)^{(j)}(x) \cdot (-\sigma_\mp y)^j}{j!}\Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^\pm = A_\varepsilon^\pm,\ B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha P_\pm - A_\varepsilon^\pm.$$

Тогда

$$A^\pm + B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha P_\pm.$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A^\pm + B^\pm)} P_\pm\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{1.21}$$

Далее

$$e^{tA^\pm} P_M \varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm+B^\pm)}\varphi^\pm(x) = (e^{tA^\pm} - e^{t(A^\pm+B^\pm)}) P_M \varphi^\pm(x)$$
$$- e^{t(A^\pm+B^\pm)}(I - P_M)\varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Для оценки норм слагаемых $V_1^\pm$ воспользуемся формулой Дюамеля (1.6) для операторов $A^\pm$ и $B^\pm$.

Рассмотрим

$$\widehat{e^{tA^\pm} P_M \varphi^\pm}(p) = \widehat{\varphi_M^\pm}(p) I^\pm(p), \tag{1.22}$$

где

$$I^+(p) = \exp\Big(-t|p|^\alpha \int\limits_{|p|\varepsilon\sigma_-}^{+\sigma_-\infty} \Big(e^{-iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(-iy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big),$$

$$I^-(p) = \exp\Big(-t|p|^\alpha \int\limits_{|p|\varepsilon\sigma_+}^{+\sigma_+\infty} \Big(e^{iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(iy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big).$$

Обозначим, как и раньше,

$$S(y) = e^{iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{i^j y^j}{j!}.$$

Рассмотрим замкнутые контуры (рис. 1.1)

$$\begin{aligned}\Gamma_\pm &= \{z\in\mathbf{C} : |z|\in[\,|p|\,\varepsilon, R],\ \arg z=\pm\,\pi/\alpha\}\\ &\cup\ \{z\in\mathbf{C} : |z|=R,\ \arg z\in[\pm\,\pi/\alpha,0]\}\\ &\cup\ \{z\in\mathbf{C} : |z|\in[R,|p|\,\varepsilon],\ \arg z=0\}\\ &\cup\ \{z\in\mathbf{C} : |z|=|p|\,\varepsilon, \arg z\in(0,\pm\,\pi/\alpha)\}\end{aligned}$$

и рассмотрим интегралы по замкнутым контурам

$$J^\pm=\int\limits_{\Gamma_\pm} S(\pm y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

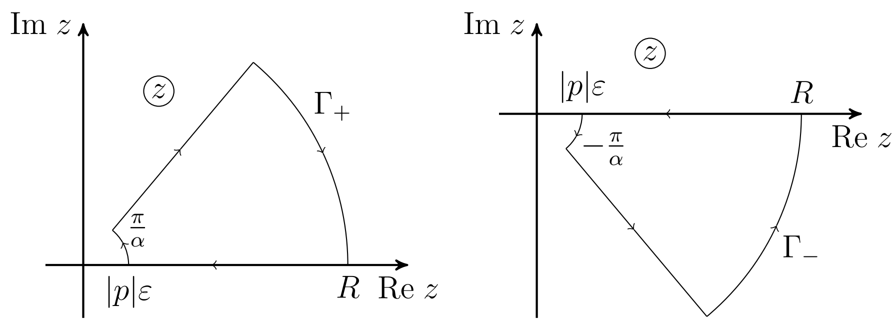

Рис. 1.1: Контуры интегрирования $\Gamma_\pm$.

Заметим, что интеграл по большой дуге при $R\to\infty$ стремится к нулю, а внутри контура особых точек нет, так что интеграл по контуру $\Gamma_\pm$ равен нулю. Далее будем рассматривать интеграл только по Γ_+ (для интеграла по контуру Γ_- аналогично). Таким образом, имеем

$$\widehat{e^{tA^-}\varphi_M^-}(p)=\widehat{\varphi_M^-}(p)\exp\Big(-t|p|^\alpha\int\limits_{p\varepsilon}^{+\infty}S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\cdot\exp\Big(t|p|^\alpha\int\limits_{\gamma_+}S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big),$$

где контур

$$\gamma_+=\{z\in\mathbf{C} : |z|=p\,\varepsilon, \arg z\in(0,{}^{\pi}\!/\!_{\alpha})\}.$$

В интеграле по контуру γ_+ сделаем замену переменной $y=p\varepsilon e^{i\varphi}$, где $\varphi\in(0,\frac{\pi}{\alpha})$. Заметим, что функция $S(z)$ является целой функцией и в окрестности нуля допускает оценку $|S(z)| \leqslant C|z|^{1+[\alpha]}$. Используя неравенство $0 < p < M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, получаем

$$\Big|\exp\Big(t|p|^{\alpha}\int\limits_{\gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\Big| \leqslant \exp\Big(Ctp^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}\Big) = \exp\Big(Ct(p\varepsilon)^{[\alpha]+1-\alpha}p^{\alpha}\Big). \tag{1.23}$$

Выбирая ε достаточно малым, получаем

$$\Big\|\widehat{e^{tA^-}\varphi_M^-}\Big\|^2_{W_2^k} \leqslant \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2|p|^{2k}\exp\Big(2Ctp^{\alpha}\varepsilon^{\delta(1-\{\alpha\})}\Big)$$

$$\cdot\exp\Big(-2tp^{\alpha}\int\limits_1^{+\infty} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)dp \leqslant \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2|p|^{2k}dp \leqslant \|P_M\varphi^-\|^2_{W_2^k}.$$

Аналогичная оценка получается для оператора $e^{tA^+}P_MP_+$. Таким образом, имеем

$$\|e^{tA^{\pm}}P_MP_{\pm}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{1.24}$$

Осталось оценить $\|B^{\pm}P_MP_{\pm}\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\widehat{B^{\pm}\varphi_M^{\pm}}(p) = \int\limits_{\mathbf{R}} dx\exp(ipx)$$

$$\cdot\Big[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\Big(\varphi_M^{\pm}(x-\sigma_{\mp}y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(\varphi_M^{\pm})^{(j)}(x)(-\sigma_{\mp}y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\Big(\varphi_M^{\pm}(x-y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(\varphi_M^{\pm})^{(j)}(x)(-y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big]$$

$$= \widehat{\varphi_M^{\pm}}(p)\Big(-|p|^{\alpha}\int\limits_{\varepsilon|p|\sigma_{\mp}}^{+\sigma_{\mp}\infty} S(\mathrm{sign}\,(p)\cdot y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + |p|^{\alpha}c_0(p)\Big).$$

Повторяя рассуждения о повороте контура, получаем

$$\widehat{B^-\varphi_M^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p)|p|^{\alpha}\Big(\int\limits_{\gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + \int\limits_0^{|p|\varepsilon} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big).$$

Используя неравенство

$$\Big|\int\limits_0^{\varepsilon|p|} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big| \leqslant C(|p|\varepsilon)^{1-\{\alpha\}},$$

аналогично (1.23), получаем

$$|\widehat{B^{\pm}\varphi_{\pm}}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)||p|^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|B^{\pm}\widehat{P_M\varphi}^{\pm}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B^{\pm}\varphi^{\pm}}(p)|^2 \\ \leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int\limits_{|p|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2([\alpha]+1)} \\ \leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \quad (1.25)\end{aligned}$$

Оценим норму $\|V_2^{\pm}\|_{W_2^l}$

$$\begin{aligned}\|V_2^{\pm}\|^2_{W_2^l} \leqslant \sup_{t\in[0,T]}(e^{-2bM^{\alpha}t}\int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2dp) \\ \leqslant \frac{1}{M^{2([\alpha]+1)}}\int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)})|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2dp \\ \leqslant \frac{1}{M^{2([\alpha]+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}} \leqslant \varepsilon^{2(1+[\alpha])(1-\delta)}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}, \quad (1.26)\end{aligned}$$

где $b = \mathrm{Re}\big(\Gamma(-\alpha)\exp(\frac{-\alpha\pi i}{2}\mathrm{sign}(p))\big)$ не зависит от p и положительна.

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (1.21), (1.24)–(1.26).

□

Мы показали, что если начальное данное φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ для некоторого $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$, определенная (1.20), по норме $W_2^l(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (1.1), (1.2). Таким образом, для $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1)\cup(4k-1,4k)$ для решения задачи Коши мы получаем представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\Big[(P_-\varphi_M * \omega_\varepsilon^t)(x-\sigma_+\xi_\varepsilon^+(t)) + (P_+\varphi_M * \omega_\varepsilon^t)(x-\sigma_-\xi_\varepsilon^+(t))\Big].$$

Напомним, что через $\{\xi_j^+\}_{j=1}^{\infty}$ мы обозначаем последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Как и выше, рассмотрим случайный процесс $\zeta_n^+(t)$, $t \in [0,T]$, определенный (1.12). Предположим, что распределение случайной величины ξ_1^+ при $x > 1$ удовлетворяет условию (1.10).

Мы будем рассматривать $\sigma\zeta_n^+(t)$, где σ – уже комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [9]) имеем

$$\mathbf{E}e^{ip\sigma\zeta_n^+(t)} = \exp\Big(nt\int\limits_0^{+\infty}\Big(e^{i\sigma pyn^{-1/\alpha}}-1\Big)d\mathcal{P}(y)\Big).$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$.

Положим $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{\alpha})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{\alpha})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- – в нижней.

Для натуральных n определим функцию $u_n(t,x)$

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}[(\varphi_M^- * \varkappa_n^t)(x-\sigma_+\zeta_n^+(t)) + (\varphi_M^+ * \varkappa_n^t)(x-\sigma_-\zeta_n^+(t))],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_1^+ ip\sigma_+}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2^+(ip\sigma_+)^2}{2n^{2/\alpha}} + \ldots + \frac{\mu_{[\alpha]}^+(ip\sigma_+)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Big)\Big), & p \geqslant 0,\\ \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_1^+ ip\sigma_-}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2^+(ip\sigma_-)^2}{2n^{2/\alpha}} + \ldots + \frac{\mu_{[\alpha]}^+(ip\sigma_-)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Big)\Big), & p < 0.\end{cases}$$

Так как $P_-\varphi$ аналитическая функция в нижней полуплоскости, а $P_+\varphi$ – в верхней полуплоскости, то функция $u_n(t,x)$ корректно определена. При таких α и таком выборе $\sigma_\pm$ функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p)$ является убывающей функцией.

Теорема 1.4. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, число α удовлетворяет условию* (1.4), $M(n) = n^{\frac{1-\delta}{\alpha}}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{[\alpha]+1}$. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи Коши* (1.1), (1.2). *Тогда существует положительная константа $C = C(\alpha)$, такая что справедливо неравенство*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\Big(t + \frac{1}{n^{\delta([\alpha]+1)/\alpha}}\Big)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_n^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_n^\pm\psi^\pm(x) = n\int\limits_0^{+\infty}\Big(\psi^\pm(x-\sigma_\mp\frac{y}{n^{1/\alpha}}) - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(\psi^\pm)^{(j)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^j}{j!\,n^{j/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Введем обозначения для операторов. Именно, обозначим

$$A^\pm = A_n^\pm,\ B^\pm = -\mathit{\Gamma}(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha P_\pm - A_n^\pm.$$

Тогда
$$A^{\pm} + B^{\pm} = -\Gamma(-\alpha)\mathcal{D}_{+}^{\alpha} P_{\pm}.$$

Заметим, что справедливо неравенство
$$\|e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}P_{\pm}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{1.27}$$

Представим
$$\begin{aligned} e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}(x) - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}\varphi^{\pm}(x) = (e^{tA^{\pm}} - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})})P_M\varphi^{\pm}(x) \\ - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}(I - P_M)\varphi^{\pm}(x) = V_1^{\pm} + V_2^{\pm}. \end{aligned}$$

Оценим соболевскую норму $\|V_2^{\pm}\|_{W_2^l}$
$$\begin{aligned} \|V_2^{\pm}\|^2_{W_2^l} \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \Big(Ce^{-2bM^{\alpha}t} \int\limits_{|p|>M} \Big(1 + |p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2 dp\Big) \\ \leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}} \int\limits_{|p|>M} (1 + |p|^{2(l+[\alpha]+1)})|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2 dp \\ \leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}} \leqslant \frac{C}{n^{2(1-\delta)([\alpha]+1)/\alpha}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Для оценки норм слагаемых $V_1^{\pm}$ воспользуемся формулой (1.6) для операторов $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$.

Как и раньше, обозначим $S(y) = e^{iy} - \sum\limits_{j=0}^{[\alpha]} \frac{i^j y^j}{j!}$. Рассмотрим
$$\widehat{e^{tA^{\pm}}P_M}\varphi^{\pm}(p) = \widehat{\varphi^{\pm}_M}(p) I^{\pm}(p),$$

где
$$I^{+}(p) = \exp\Big(nt\int\limits_0^{+\infty} S\Big(\frac{py\sigma_{-}}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big), \tag{1.29}$$
$$I^{-}(p) = \exp\Big(nt\int\limits_0^{+\infty} S\Big(\frac{py\sigma_{+}}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big). \tag{1.30}$$

Преобразуем выражение (1.30)

$$I^-(p) = \exp\Big(nt\int\limits_0^1 S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y) + nt\int\limits_1^{+\infty} S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big)$$

$$= \exp\Big(nt\int\limits_0^1 S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y) - tp^\alpha \int\limits_{\frac{p\sigma_+}{n^{1/\alpha}}}^{+\sigma_+\infty} S(y)\frac{dy}{y^{\alpha+1}}$$

$$+ nt\int\limits_1^{+\infty} S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\Big(\frac{h(y)}{\alpha y^\alpha}\Big)\Big). \quad (1.31)$$

Заметим, что $|p| \leqslant M = n^{\frac{1-\delta}{\alpha}}$, и, значит,

$$\Big|S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big| \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}y^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \quad (1.32)$$

Тогда первый интеграл в (1.31) оценивается как

$$\Big|\int\limits_0^1 S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big| \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}\int\limits_0^1 y^{[\alpha]+1}d\mathcal{P}(y) \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}.$$

Для оценки второго интеграла в (1.31) введем замкнутый контур

$$\begin{aligned}\Gamma_+ \;=\; & \{z \in \mathbf{C} : |z| \in [\,|p|\,n^{-1/\alpha}, R\,],\ \arg z = \pi/\alpha\}\\ \cup\; & \{z \in \mathbf{C} : |z| = R,\ \arg z \in [\pi/\alpha, 0]\}\\ \cup\; & \{z \in \mathbf{C} : |z| \in [R, |p|\,n^{-1/\alpha}],\ \arg z = 0\}\\ \cup\; & \{z \in \mathbf{C} : |z| = |p|\,n^{-1/\alpha},\ \arg z \in (0, \pi/\alpha)\},\end{aligned}$$

(этот контур представлен на рис. 1.2), и рассмотрим интеграл

$$J_+ = \int\limits_{\Gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \quad (1.33)$$

Заметим, что интеграл по большой дуге при $R \to \infty$ стремится к нулю, а внутри контура Γ_+ особых точек нет, так что интеграл по этому контуру равен нулю.

Воспользуемся неравенством $0 < p < M(n) = n^{(1-\delta)/\alpha}$ в интеграле по дуге малой окружности сделаем замену переменных $y = pn^{-1/\alpha}e^{i\vartheta}$, где $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{\alpha})$. Имеем

$$\Big|\exp\Big(t\,p^\alpha\int\limits_{\gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\Big| \leqslant \exp\Big(C\,\frac{tp^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}\Big),$$

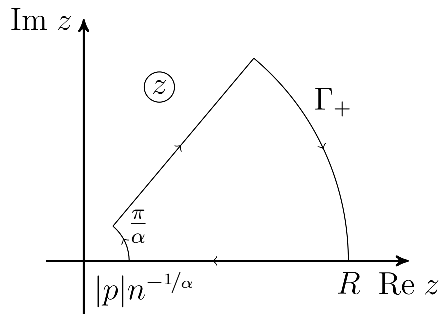

Рис. 1.2: Контур интегрирования Γ_+.

где через γ_+ обозначен контур

$$\gamma_+ = \{z \in \mathbf{C} : |z| = pn^{-1/\alpha},\ \arg z \in (0, \frac{\pi}{\alpha})\}.$$

Из условия (1.11) следует, что существует $C > 0$, такая что

$$\Big| \exp\Big(\int\limits_1^\infty S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big) d\Big(\frac{h(y)}{\alpha y^\alpha}\Big)\Big)\Big| \leqslant C \int\limits_1^\infty \max\Big(\frac{|p|^{[\alpha]} y^{[\alpha]-1}}{n^{[\alpha]/\alpha}}, \frac{|p|^{[\alpha]+1} y^{[\alpha]}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}\Big) \frac{dy}{y^{\alpha+\beta}} \leqslant \frac{C|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \quad (1.34)$$

Выбирая n достаточно большим, получаем

$$\|\widehat{e^{tA^-}\varphi_M^-}\|^2_{W_2^k} \leqslant \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2 |p|^{2k} \exp\Big(2Ctp^\alpha n^{\delta(\{\alpha\}-1)/\alpha}\Big) \cdot \exp\Big(-2tp^\alpha \int\limits_1^{+\infty} S(y) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big) dp \leqslant \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2 |p|^{2k} dp \leqslant \|P_M \varphi^-\|^2_{W_2^k}.$$

Аналогичная оценка получается для оператора $e^{tA^+} P_M P_+$. Таким образом, имеем

$$\|e^{tA^\pm} P_M P^\pm\|_{W_2^l \to W_2^l} \leqslant 1. \quad (1.35)$$

Нам осталось оценить $\|B^\pm P_M P^\pm\|_{W_2^{l+[\alpha]+1} \to W_2^l}$.

Имеем

$$
\begin{aligned}
\widehat{B^{\pm}P_M\varphi}^{\pm}(p) = \int\limits_{\mathbf{R}} dx \exp(ipx) \\
\cdot \Big[n \int\limits_0^{+\infty} \Big(\varphi_M^{\pm}\Big(x - \sigma_{\mp}\frac{y}{n^{1/\alpha}}\Big) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(\varphi_M^{\pm})^{(j)}(x)(-\sigma_{\mp}y)^j}{n^{j/\alpha}j!}\Big) d\mathcal{P}(y) \\
+ \int\limits_0^{+\infty} \Big(\varphi_M^{\pm}(x-y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(\varphi_M^{\pm})^{(j)}(x)(-y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big] \\
= \widehat{\varphi_M^{\pm}}(p)\Big(nt \int\limits_0^{+\infty} S\Big(\frac{\sigma_{\mp}py}{n^{1/\alpha}}\Big) d\mathcal{P}(y) + |p|^{\alpha}c_0(p)\Big).
\end{aligned}
$$

Повторяя рассуждения о повороте контура и пользуясь оценками, аналогичными (1.32), (1.34), получаем

$$
\Big|\widehat{B^{\pm}P_M\varphi}^{\pm}(p)\Big| \leqslant C\Big|\widehat{\varphi_M^{\pm}}(p)\Big|\Big(|p|^{\alpha} + |p|^{1+[\alpha]}\Big).
$$

Наконец, пользуясь простым неравенством

$$
|p|^{[\alpha]+1} + |p|^{\alpha} \leqslant 2(1 + |p|^{[\alpha]+1}),
$$

получаем

$$
\|\widehat{B^{\pm}\varphi_M^{\pm}}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B^{\pm}\varphi^{\pm}}(p)|^2 \leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \tag{1.36}
$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (1.27), (1.28), (1.35) и (1.36).

□

1.2 Симметричный случай

В этом разделе мы рассмотрим уравнение

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = c_{\alpha}\Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^{\alpha}u, \tag{1.37}
$$

где оператор $\mathcal{D}^{\alpha}$ определен формулой (44), а константа c_{α} определяется, как и раньше, по формуле $c_{\alpha} = (-1)^{[\frac{\alpha}{2}]}$. Для уравнения (1.37) рассмотрим задачу Коши

$$
u(0,x) = \varphi(x). \tag{1.38}
$$

1.2.1 Случай $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$

Как и раньше, $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью (45). Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0,T]$ мы обозначаем случайный процесс, определенный формулой (48). Отметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ и является сложным пуассоновским процессом, но при таком выборе α и $t > 0$ у семейства случайных величин $\xi_\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$. Тем не менее процесс $\xi_\varepsilon(t)$ может быть использован для вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (1.37), (1.38).

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t))],$$

где

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(- t \int\limits_{\mathbf{R}_\varepsilon} \Big(\sum_{j=1}^{2k} \frac{i^{2j} p^{2j} x^{2j}}{(2j)!} \Big) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} \Big).$$

Отметим, что при таких α функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t$ является быстро убывающей.

Теорема 1.5. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (1.37), (1.38)*. Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$*, такая что*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\, t \|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})} \varepsilon^{4k+2-\alpha}.$$

Доказательство. Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^\alpha - \mathrm{A}_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ как

$$\mathrm{A}_\varepsilon \psi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}_\varepsilon} \Big(\psi(x-y) - \psi(x) - \frac{\psi^2(x)}{2!} y^2 - \ldots - \frac{\psi^{(4k)}(x)}{(4k)!} y^{4k} \Big) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}.$$

В этих обозначениях

$$A + B = \Gamma(-\alpha)\, \mathcal{D}^\alpha.$$

Для любого положительного k и $t > 0$ справедливы неравенства

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1, \tag{1.39}$$

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{1.40}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+4k+2}\to W_2^l}$. Имеем

$$\widehat{B\varphi}(p) = 2\,\widehat{\varphi}(p)\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\cos(py) - 1 + \frac{p^2y^2}{2} - \ldots - \frac{p^{4k}y^{4k}}{(4k)!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$
$$= 2\,\widehat{\varphi}(p)|p|^{\alpha}\int\limits_0^{\varepsilon|p|}\Big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \ldots - \frac{y^{4k}}{(4k)!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Если $|p| < \frac{1}{\varepsilon}$, то

$$|p|^{\alpha}\Big|\int\limits_0^{\varepsilon|p|}(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \ldots - \frac{y^{4k}}{(4k)!})\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big| \leqslant C|p|^{4k+2}\varepsilon^{4k+2-\alpha}.$$

Если $|p| > \frac{1}{\varepsilon}$, то

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{\alpha}.$$

Тогда

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})\,|\widehat{B\varphi}(p)|^2$$
$$\leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\alpha)}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} dp\,(1+|p|^{2l})\,|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2(4k+2)}$$
$$+ C\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} dp\,(1+|p|^{2l})\,|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2\alpha}.$$

Для $\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l}$ справедлива оценка

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} \leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\alpha)}\int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2(l+4k+2)})\,|\widehat{\varphi}(p)|^2$$
$$+ C\varepsilon^{2(4k+2-\alpha)}\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} dp\,(1+|p|^{2l})\,|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2(4k+2)}$$
$$\leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\alpha)}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k+2}}. \quad (1.41)$$

Заметим, что утверждение теоремы следует из (1.39)–(1.41).

$\square$

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+4m+2}(\mathbf{R})$ при некотором $l > 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение задачи Коши (1.37), (1.38). Таким образом, мы получаем вероятностное представление решения задачи Коши (1.37), (1.38)

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t))].$$

1.2.2 Случай $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k)$

Как и раньше, $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью (45). Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon^\pm(t)$, $t \in [0,T]$ мы обозначаем случайные процессы, определенные формулами (46) и (47).

Мы будем рассматривать процессы $\sigma\xi_\varepsilon^\pm(t)$, где σ – комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [9])

$$\mathbf{E}\exp(i\,p\,\sigma\,\xi_\varepsilon^+) = \exp(t\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}(e^{i\sigma px} - 1)d\Lambda(x)), \tag{1.42}$$

$$\mathbf{E}\exp(i\,p\,\sigma\,\xi_\varepsilon^-) = \exp(t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}(e^{i\sigma px} - 1)d\Lambda(x)). \tag{1.43}$$

Заметим, что интеграл в (1.42) сходится, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$, а интеграл в (1.43) сходится, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$.

Как и раньше, через P_+ мы обозначаем проектор Рисса, действующий из $L_2(\mathbf{R})$ на пространство Харди $H_+^2(\{\operatorname{Im} z > 0\})$, а через P_- – проектор Рисса, действующий из $L_2(\mathbf{R})$ на $H_-^2(\{\operatorname{Im} z < 0\})$.

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M мы обозначаем проектор в $L_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле (41). Далее число M будем выбирать в зависимости от ε, то есть $M = M(\varepsilon)$, поэтому в обозначениях не будем указывать зависимость от M. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M\varphi$.

Положим $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{\alpha})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{\alpha})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- – в нижней.

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\left[(\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^+(t)) - \sigma_+\xi_\varepsilon^-(t)) \right.$$
$$\left. + (\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^+(t) - \sigma_-\xi_\varepsilon^-(t))\right], \quad (1.44)$$

где

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_+ px)^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big)\exp\Big(-t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_- px)^j}{j!}\Big)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\Big), \text{если } p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_- px)^j}{j!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big)\exp\Big(-t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_+ px)^j}{j!}\Big)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\Big), \text{если } p < 0. \end{cases}$$

Так как $P_+\varphi$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, а функция $P_-\varphi$ – аналитична в нижней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таких α и таком выборе $\sigma_\pm$ функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ *для некоторого* $l \geqslant 0$, $M = M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{1+[\alpha]}$. *Пусть* $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (1.37), (1.38). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$, *такая что*

$$\|u_\varepsilon(t,\,\cdot\,) - u(t,\,\cdot\,)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C(t + \varepsilon^{\alpha-\delta(1+[\alpha])})\,\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}\,\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm\psi^\pm(x) = \int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\psi^\pm(x - \sigma_\mp y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(\psi^\pm)^{(j)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\Big(\psi^\pm(x - \sigma_\pm y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(\psi^\pm)^{(j)}(x)\cdot(-\sigma_\pm y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}.$$

Положим $A^\pm = \mathrm{A}_\varepsilon^\pm$, $B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^\alpha P_\pm - \mathrm{A}_\varepsilon^\pm$.

В этих обозначениях

$$A^\pm + B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^\alpha P_\pm.$$

Далее, представим

$$e^{tA^\pm}P_M\varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm+B^\pm)}\varphi^\pm(x) = (e^{tA^\pm} - e^{t(A^\pm+B^\pm)})P_M\varphi^\pm(x)$$
$$- e^{t(A^\pm+B^\pm)}(I - P_M)\varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Для оценки норм слагаемых $V_1^{\pm}$ воспользуемся формулой Дюамеля (1.6) для операторов $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$.

Для любого положительного k и $t > 0$ справедливо неравенство

$$\|e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}P_{\pm}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{1.45}$$

Рассмотрим

$$\widehat{e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}}(p) = \widehat{\varphi_M^{\pm}}(p)I_1^{\pm}(p)I_2^{\pm}(p),$$

где функции $I_{1,2}^{+}(p)$ определены на отрицательной полуоси формулами

$$I_1^{+}(p) = \exp\Big(-t|p|^{\alpha}\int\limits_{|p|\varepsilon\sigma_-}^{+\sigma_-\infty}\Big(e^{-iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(-iy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big),$$

$$I_2^{+}(p) = \exp\Big(-t|p|^{\alpha}\int\limits_{|p|\varepsilon\sigma_+}^{+\sigma_+\infty}\Big(e^{iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(iy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big),$$

а функции $I_{1,2}^{-}(p)$ заданы на положительной полуоси формулами

$$I_1^{-}(p) = \exp\Big(-t|p|^{\alpha}\int\limits_{p\varepsilon\sigma_+}^{+\sigma_+\infty}\Big(e^{iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{i^j y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big),$$

$$I_2^{-}(p) = \exp\Big(-t|p|^{\alpha}\int\limits_{|p|\varepsilon\sigma_-}^{+\sigma_-\infty}\Big(e^{-iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(-iy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big).$$

Как и раньше, обозначим

$$S(y) = e^{iy} - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{i^j y^j}{j!}.$$

Рассмотрим замкнутые контуры (см. рис. 1)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pm} \;=\; & \{z \in \mathbf{C} : |z| \in [\,|p|\,\varepsilon, R],\ \arg z = \pm\,\pi/\alpha\} \\
\cup\; & \{z \in \mathbf{C} : |z| = R,\ \arg z \in [\pm\,\pi/\alpha, 0]\} \\
\cup\; & \{z \in \mathbf{C} : |z| \in [R, |p|\,\varepsilon],\ \arg z = 0\} \\
\cup\; & \{z \in \mathbf{C} : |z| = |p|\,\varepsilon,\ \arg z \in (0, \pm\,\pi/\alpha)\}
\end{aligned}$$

и рассмотрим интегралы по замкнутым контурам

$$J^{\pm} = \int\limits_{\Gamma_{\pm}} S(\pm y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Заметим, что интегралы по большой дуге при $R \to \infty$ стремятся к нулю, а внутри контуров $\Gamma_{\pm}$ особых точек нет, так что интегралы по этим контурам равны нулю. Таким образом, имеем

$$\widehat{e^{tA^-}P_M\varphi^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p)\,\exp\Big(-t|p|^{\alpha}\int\limits_{p\varepsilon}^{+\infty} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)$$

$$\cdot\exp\Big(t|p|^{\alpha}\int\limits_{\gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\exp\Big(-t|p|^{\alpha}\int\limits_{p\varepsilon}^{+\infty} S(-y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)$$

$$\cdot\exp\Big(t|p|^{\alpha}\int\limits_{\gamma_-} S(-y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big),$$

где контуры

$$\gamma_+ = \{z \in \mathbf{C} : |z| = p\,\varepsilon,\ \arg z \in (0, \pi/\alpha)\}$$

и

$$\gamma_- = \{z \in \mathbf{C} : |z| = p\,\varepsilon,\ \arg z \in (0, -\pi/\alpha)\}.$$

С учетом $p < M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$ в интеграле по дуге γ_+ сделаем замену переменных $y = p\,\varepsilon\,e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0, \pi/\alpha)$, тогда при $p > 0$

$$\Big|\exp\Big(t|p|^{\alpha}\int\limits_{\gamma_+} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\Big| \leqslant \sup_{t\in[0,T]}\exp(C\,t\,p^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}). \tag{1.46}$$

В интеграле по дуге γ_- сделаем замену переменных $y = p\,\varepsilon\,e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0, -\pi/\alpha)$, тогда при $p > 0$

$$\Big|\exp\Big(t|p|^{\alpha}\int\limits_{\gamma_-} S(-y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\Big| \leqslant \sup_{t\in[0,T]}\exp(C\,t\,p^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}).$$

Выбирая ε достаточно малым, для любого положительного k и $t > 0$ имеем

$$\left\|\widehat{e^{tA^-} P_M}\varphi^-(p)\right\|_{W_2^k} \leqslant \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2 |p|^{2k} \exp(2\,C\,t\,p^\alpha \varepsilon^{\delta(1-\{\alpha\})})$$

$$\cdot \exp\Big(-2\,t\,p^\alpha \int\limits_1^{+\infty} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\,\exp\Big(-2\,t\,p^\alpha \int\limits_1^{+\infty} S(-y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)dp$$

$$\leqslant C \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2 |p|^{2k} dp \leqslant C\|P_M \varphi^-(x)\|_{W_2^k}.$$

Аналогичная оценка получается для оператора $e^{tA^+} P_M P_+$. Таким образом, имеем

$$\|e^{tA^\pm} P_M P_\pm\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant C. \tag{1.47}$$

Осталось оценить $\|B^\pm P_M P_\pm\|_{W_2^{l+[\alpha]+1} \to W_2^l}$. Имеем

$$\widehat{B^\pm \varphi_M^\pm}(p) = \int\limits_{\mathbf{R}} dx\, \exp(i\,p\,x)$$

$$\cdot \Big[\int\limits_\varepsilon^{+\infty} \Big(\psi_M^\pm(x - \sigma_\mp y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(\psi_M^\pm)^{(j)}(x) \cdot (-\sigma_\mp y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \Big(\psi_M^\pm(x - \sigma_\pm y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(\psi_M^\pm)^{(j)}(x) \cdot (-\sigma_\pm y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\varphi_M^\pm(x - y) - \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{(\psi_M^\pm)^{(2j)}(x) y^{2j}}{(2j)!}\Big)\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}\Big].$$

Рассмотрим

$$\widehat{B^- \varphi_M^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p)\Big[-|p|^\alpha \int\limits_{\varepsilon p \sigma_+}^{+\sigma_+\infty} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}} - |p|^\alpha \int\limits_{\varepsilon p \sigma_-}^{+\sigma_-\infty} S(-y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + |p|^\alpha c_0\Big].$$

Повторяя рассуждения о повороте контура, получим

$$\widehat{B^- \varphi_M^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p)|p|^\alpha \Big[\int\limits_{\gamma_+} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$+ \int\limits_{\gamma_-} S(-y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + 2\int\limits_0^{|p|\varepsilon} \Big(\cos y - 1 - \frac{y^2}{2!} - \ldots - \frac{y^{4k-2}}{(4k-2)!}\Big)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big].$$

Аналогично (1.46), с учетом неравенства

$$\left| 2 \int\limits_0^{\varepsilon|p|} \Big(\cos y - 1 - \frac{y^2}{2!} - \ldots - \frac{y^{4k-2}}{(4k-2)!} \Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right| \leqslant C(|p|\varepsilon)^{4k-\alpha},$$

получаем

$$\left| \widehat{B^{\pm}\varphi_{\pm}}(p) \right| \leqslant C|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)||p|^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| B^{\pm}\widehat{P_M\varphi}_{\pm} \right\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{|p|<M} dp \left(1+|p|^{2l}\right) \left| \widehat{B^{\pm}\varphi_{\pm}}(p) \right|^2 \\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})} \int\limits_{|p|<M} dp \left(1+|p|^{2l}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2 |p|^{2([\alpha]+1)} \\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Для нормы слагаемого V_2 имеем

$$\begin{aligned} \|V_2^{\pm}\|^2_{W_2^l} &\leqslant \sup_{t\in[0,T]} \left(Ce^{-2c_0M^{\alpha}t} \int\limits_{|p|>M} \left(1+|p|^{2l}\right) \left| \widehat{\varphi^{\pm}}(p) \right|^2 dp \right) \\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}} \int\limits_{|p|>M} \left(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\right) \left| \widehat{\varphi^{\pm}}(p) \right|^2 dp \\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}} \leqslant C\varepsilon^{2([\alpha]+1)(1-\delta)} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}, \end{aligned} \tag{1.49}$$

где константа $c_0 = 2\Gamma(-\alpha)\cos(\frac{\alpha\pi}{2})$ положительна.

Заметим, что утверждение теоремы следует из (1.45), (1.47)–(1.49).

□

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l > 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение задачи Коши (1.37), (1.38). Таким образом, мы получаем вероятностное представление решения задачи Коши (1.37), (1.38)

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E} \left[(\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^+(t) - \sigma_+\xi_\varepsilon^-(t)) + (\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^+(t) - \sigma_-\xi_\varepsilon^-(t)) \right].$$

Заметим, что, как и в параграфе 1.1, процессы $\xi_\varepsilon(t)$, $\xi_\varepsilon^{\pm}(t)$ могут быть заменены на процессы, построенные по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин со степенной асимптотикой хвостового распределения. Мы сформулируем соответствующие утверждения в симметричном случае без доказательств, так как основные идеи доказательств те же, что и в несимметричном случае.

Как и раньше, сначала рассмотрим случай $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Предположим, что распределение $\mathcal{P}$ случайной величины ξ_1 удовлетворяет условию при $x > 1$

$$P(\xi_1 > x) = \frac{1}{\alpha |x|^{\alpha}}(1 + h(x)), \tag{1.50}$$

где $|h(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{\beta}}$ и $\beta > 4k + 2 - \alpha$.

Для $j < \alpha$ через $\mu_j = \mathbf{E}{\xi_1}^j$ обозначим момент порядка j случайной величины ξ_1.

Как и раньше, через $\eta(t), t \in [0, \infty)$ обозначим независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0, T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \tag{1.51}$$

Заметим, что процесс ζ_n не имеет слабого предела при $n \to \infty$. Нас интересует случай $\alpha > 2$, а в этом случае распределение $\mathcal{P}$ принадлежит области притяжения нормального закона, что означает, что слабый предел будет (после центрирования) в другой, более сильной нормировке.

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M мы обозначаем проектор в $L_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле (41). Далее число M будем выбирать в зависимости от n, то есть $M = M(n)$. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M \varphi$.

Для натуральных n определим функцию двух переменных

$$u_n(t, x) = \mathbf{E}[(\varphi_M * \varkappa_n^t)(x - \zeta_n(t))],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_2 (ip)^2}{2n^{2/\alpha}} + \ldots + \frac{\mu_{4k}(ip)^{4k}}{(4k)! n^{4k/\alpha}}\Big)\Big).$$

Также как и в (1.5), функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p)$ – это быстро убывающая функция.

Теорема 1.7. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(n) = n^{1/\alpha}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (1.37), (1.38). *Тогда существует* $C = C(\alpha) > 0$, *такое что*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\Big(t + \frac{1}{n}\Big)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})}}{n^{(4k+2-\alpha)/\alpha}}.$$

Далее, рассмотрим случай $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k)$.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{\xi_j^+\}_{j=1}^{\infty}$ и последовательность независимых одинаково распределенных неположительных случайных величин $\{\xi_j^-\}_{j=1}^{\infty}$.

Предположим, что распределения $\mathcal{P}^{\pm}$ случайных величин $\xi_1^{\pm}$ удовлетворяют условиям при $|x| > 1$

$$P(\xi_1^{\pm} > |x|) = \frac{1}{\alpha|x|^{\alpha}}(1 + h^{\pm}(x)),$$

где $|h^{\pm}(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{\beta}}$ и $\beta > 1 - \{\alpha\}$.

Для $k < \alpha$ через $\mu_k^{\pm} = \mathbf{E}\xi_1^{\pm k}$ обозначим момент порядка k случайной величины $\xi_1^{\pm}$.

Как и раньше, через $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ обозначим независимый от последовательностей $\{\xi_j^{\pm}\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайные процессы $\zeta_n^{\pm}(t)$, $t \in [0,T]$, полагая

$$\zeta_n^{\pm}(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j^{\pm}.$$

Заметим, что процессы $\zeta_n^{\pm}$ не имеет слабого предела при $n \to \infty$.

Для любого натурального n определим функцию

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}[(\varphi_M^- * \varkappa_n^t)(x - \sigma_+\zeta_n^+(t) - \sigma_-\zeta_n^-(t)) + (\varphi_M^+ * \varkappa_n^t)(x - \sigma_-\zeta_n^+(t) - \sigma_+\zeta_n^-(t))],$$

где

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \begin{cases} \exp\Bigg(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{\mu_j^+(i\sigma_+p)^j}{j!}\Big)\Bigg)\exp\Bigg(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{\mu_j^-(i\sigma_-p)^j}{j!}\Big)\Bigg), & \text{если } p \geqslant 0,\\ \exp\Bigg(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{\mu_j^+(i\sigma_-p)^j}{j!}\Big)\Bigg)\exp\Bigg(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{\mu_j^-(i\sigma_+p)^j}{j!}\Big)\Bigg), & \text{если } p < 0.\end{cases}$$

Теорема 1.8. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ *для некоторого* $l \geqslant 0$, $M = M(n) = n^{(1-\delta)/\alpha}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{1+[\alpha]}$. *Пусть* $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (1.37), (1.38). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$, *такая что*

$$\|u_n(t,\,\cdot\,) - u(t,\,\cdot\,)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C(t + n^{(\delta(1+[\alpha])-\alpha)/\alpha}) \frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Глава 2

Задача Коши для эволюционных уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка больше двух

В этой главе мы построим вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования порядка $m > 2$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad u(t,0) = \varphi(x), \tag{2.1}$$

где

$$c_m = \begin{cases} \pm 1, & m = 2k+1, \\ (-1)^{k+1}, & m = 2k. \end{cases}$$

Как и в случае эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования, заметим, что для различных значений m применяемые методы могут существенно отличаться. Именно, мы выделяем четыре класса: $m = 4k-1$, $m = 4k$, $m = 4k+1$, $m = 4k+2$. Внутри одного класса применяемые методы совершенно аналогичны. Случай, наиболее близкий к уравнению теплопроводности, отвечает $m = 4k+2$. Именно с этого случая мы и начнем.

2.1 Оператор дифференцирования порядка $m = 4k+2$

Как и раньше, $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T]\times\mathbf{R}$ с интенсивностью (45).

Для $\varepsilon>0$ через $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$, $t\in[0,T]$ мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν формулой (49).

Отметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ является сложным пуассоновским процессом, но при таком выборе m и $t > 0$ у семейства случайных величин $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ не существует предела при $\varepsilon\to 0$. Тем не менее процесс $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ может быть использован для представления решения задачи Коши (2.1).

Представление Леви-Хинчина характеристической функции случайной величины $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ для любого t имеет вид

$$\mathbf{E}\exp(ip\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) = \exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}(e^{ipy}-1)\frac{dy}{y^{1+m}}\Big).$$

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t,x)$

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big], \tag{2.2}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(ipy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}\Big). \tag{2.3}$$

Заметим, что функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi\in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l\geqslant 0$, $u(t,x)$ – решение задачи Коши* (2.1), *а функция $u_\varepsilon(t,x)$ определяется формулой* (2.2). *Тогда существует положительная константа $C = C(m)$, такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})}\leqslant Ct\,\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}\,\varepsilon.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения, мы воспользуемся формулой (1.6).

Определим оператор A_ε, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon\psi(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\psi(x-y) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\psi^{(j)}(x)\cdot(-y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}.$$

Положим теперь в (1.6)

$$A = A_\varepsilon,\ B = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m} - A_\varepsilon.$$

Тогда

$$A + B = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}.$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.4}$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi$. Получим

$$\widehat{B\varphi}(p) = \frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi}(p) - \widehat{\varphi}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\exp(ipy) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ipy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}$$
$$= -\widehat{\varphi}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\exp(ipy) - \sum_{j=0}^{m} \frac{(ipy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}.$$

При $|p| \leqslant \frac{1}{e\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C\varepsilon|\widehat{\varphi}(p)||p|^{m+1}, \tag{2.5}$$

а при $|p| > \frac{1}{e\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^m. \tag{2.6}$$

С учетом (2.5) и (2.6) имеем

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|p|^{2l})\big|\widehat{B\varphi}(p)\big|^2 dp$$
$$\leqslant \int\limits_{|p|\leqslant\frac{1}{e\varepsilon}} C\varepsilon^2(1+|p|^{2(l+m+1)})\big|\widehat{\varphi}(p)\big|^2 dp$$
$$+ \int\limits_{|p|>\frac{1}{e\varepsilon}} C(1+|p|^{2(l+m)})\big|\widehat{\varphi}(p)\big|^2 dp \leqslant C\varepsilon^2\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.7}$$

Оценим теперь преобразование Фурье функции $e^{tA}\varphi(x)$. Имеем

$$\widehat{e^{tA}\varphi}(p) = \widehat{\varphi}(p) \exp\Big(t \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\exp(ipy) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ipy)^j}{j!}\Big) \frac{dy}{y^{1+m}}\Big).$$

Легко показать, что для всех $z \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\Big(\exp(iz) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(iz)^j}{j!}\Big) = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2!} - \ldots - \frac{z^{4k}}{(4k)!} \leqslant 0.$$

Откуда вытекает

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1 \tag{2.8}$$

для любого положительного $k > 0$ и $t > 0$

Утверждение теоремы следует из (2.4), (2.7) и (2.8).

□

Итак, мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (2.1).

Таким образом, для решения задачи Коши (2.1) при $m = 4k+2$ мы получаем следующее вероятностное представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))].$$

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что у случайной величины ξ_1 существуют моменты до $m+1$ порядка и

$$\mu_m = \int\limits_0^{+\infty} y^m d\mathcal{P}(y) = 1. \tag{2.9}$$

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/m}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \tag{2.10}$$

Для натуральных n определим функцию $u_n(t,x)$

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \varkappa_n^t)(x - \zeta_n(t))\Big], \tag{2.11}$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\Big(-nt\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\mu_j(ip)^j}{j!n^{j/m}}\Big).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (2.1), *а функция* $u_n(t,x)$ *определяется формулой* (2.11). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant \frac{Ct}{n^{1/m}}\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Определим операторы A_n, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_n\psi(x) = n\int_0^{+\infty}\Big(\psi(x - \frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\psi)^{(j)}(x)\cdot(-y)^j}{n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Положим теперь в (1.6)

$$A = A_n,\ B = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m} - A_n.$$

Тогда

$$A + B = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}.$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.12}$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi$. Получим

$$\widehat{B\varphi}(p) = \frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi}(p) - \widehat{\varphi}(p)\cdot n\int_0^{+\infty}\Big(\exp(ip\frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ipy)^j}{n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Обозначим

$$S^m(y) = e^{iy} - \sum_{j=0}^{m}\frac{(iy)^j}{j!}.$$

Учитывая, что $\mu_m = 1$, то $\widehat{B\varphi}$ можно представить

$$\widehat{B\varphi}(p) = -\widehat{\varphi}(p) n \int\limits_0^{+\infty} S^m(\frac{py}{n^{1/m}}) d\mathcal{P}(y).$$

Представим

$$n \int\limits_0^{+\infty} S^m(\frac{py}{n^{1/m}}) d\mathcal{P}(y) = n \int\limits_0^{\frac{n^{1/m}}{|p|}} S^m(\frac{py}{n^{1/m}}) d\mathcal{P}(y) + n \int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} S^m(\frac{py}{n^{1/m}}) d\mathcal{P}(y).$$

Первый интеграл мы оценим

$$\Big| n \int\limits_0^{\frac{n^{1/m}}{|p|}} S^m(\frac{py}{n^{1/m}}) d\mathcal{P}(y) \Big| \leqslant \frac{C|p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Для второго интеграла справедливо неравенство

$$\Big| n \int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} S^m(\frac{py}{n^{1/m}}) d\mathcal{P}(y) \Big| \leqslant n \int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} \frac{C|p|^{m+1} y^{m+1}}{n^{1+1/m}} d\mathcal{P}(y) \leqslant \frac{C\mu_{m+1}|p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant \frac{C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Тогда

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |p|^{2l}) |\widehat{B\varphi}(p)|^2 \leqslant C n^{-2/m} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.13}$$

Осталось оценить

$$\widehat{e^{tA}\varphi}(p) = \widehat{\varphi}(p) \cdot \exp\Big(nt \int\limits_0^{+\infty} \Big(\exp(ip\frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ipy)^j}{j! n^{j/m}} \Big) d\mathcal{P}(y) \Big).$$

Легко показать, что для всех $z \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re} \Big(\exp(iz) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(iz)^j}{j!} \Big) = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2!} - \ldots - \frac{z^{4k}}{(4k)!} \leqslant 0.$$

Откуда вытекает

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1 \tag{2.14}$$

для любого положительного $k > 0$ и $t > 0$

Утверждение теоремы вытекает из (2.12)–(2.14).

$\square$

2.2 Оператор дифференцирования порядка $m = 4k+1$

Как и раньше, $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0, T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью (45).

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$ мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν формулой (49).

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon^{\pm}(t, x)$

$$u_\varepsilon^{\pm}(t, x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \omega_\varepsilon^{\pm,t})(x \pm \xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big], \tag{2.15}$$

где функции $\omega_\varepsilon^{\pm,t}(x)$ определяются своими преобразованиями Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^{\pm,t}(p) = \exp\Big(- t \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \Big(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{(\mp ipy)^j}{j!} \Big) \frac{dy}{y^{1+m}} \Big),$$

Заметим, что функции $\widehat{\omega}_\varepsilon^{\pm,t}(p)$ являются быстро убывающими.

Функция $u_\varepsilon^{+}(t, x)$ аппроксимирует решение $u^{+}(t, x)$ задачи Коши (2.1) со знаком "плюс", а функция $u_\varepsilon^{-}(t, x)$ аппроксимирует решение $u^{-}(t, x)$ задачи Коши (2.1) со знаком "минус".

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u^{\pm}(t, x)$ *– решения задачи Коши* (2.1), *а функции* $u_\varepsilon^{\pm}(t, x)$ *определяются* (2.15). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\big\| u_\varepsilon^{\pm}(t, \cdot) - u^{\pm}(t, \cdot) \big\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct \, \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})} \, \varepsilon.$$

Доказательство. Будем рассматривать только задачу Коши (2.1) со знаком минус. При этом вместо $u_\varepsilon^{-}(t, x)$ и $u^{-}(t, x)$ будем писать просто $u_\varepsilon(t, x)$ и $u(t, x)$.

Определим оператор A_ε, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon \psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \Big(\psi(x - y) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\psi^{(j)}(x) \cdot (-y)^j}{j!} \Big) \frac{dy}{y^{1+m}}.$$

Снова воспользуемся формулой (1.6).

Положим в (1.6)

$$A = A_\varepsilon, \; B = -\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} - A_\varepsilon.$$

Тогда

$$A + B = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}.$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.16}$$

Сосчитаем преобразование Фурье функции $B\varphi$. Получим

$$\widehat{B\varphi}(p) = -\frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi}(p) - \widehat{\varphi}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ipy) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ipy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}$$
$$= -\widehat{\varphi}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ipy) - \sum_{j=0}^{m}\frac{(ipy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}.$$

При $|p| \leqslant \frac{1}{e\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C\varepsilon|\widehat{\varphi}(p)||p|^{m+1}, \tag{2.17}$$

а при $|p| > \frac{1}{e\varepsilon}$ – неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^m. \tag{2.18}$$

С учетом (2.17) и (2.18) имеем

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1 + |p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2 dp$$
$$\leqslant \int\limits_{|p|\leqslant\frac{1}{e\varepsilon}} C\varepsilon^2(1 + |p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp$$
$$+ \int\limits_{|p|>\frac{1}{e\varepsilon}} C(1 + |p|^{2(l+m)})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \leqslant C\varepsilon^2\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.19}$$

Так же как это было сделано при доказательстве Теоремы 2.1, можно показать, что справедливо неравенство

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.20}$$

Утверждение теоремы следует из (2.16), (2.19) и (2.20).

Используя приведенные выше рассуждения с некоторыми очевидными изменениями, можно доказать утверждение для задачи Коши (2.1) со знаком "плюс".

С этой целью мы определим "аппроксимирующий" оператор A_ε

$$A_\varepsilon\psi(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\psi(x+y) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\psi^{(j)}(x)\cdot y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}$$

для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$.

Все необходимые неравенства для доказательства утверждения получаются аналогично. $\square$

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функции $u_\varepsilon^\pm(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближают решения $u^\pm(t,x)$ задач Коши (2.1) соответственно.

Таким образом, для решений задач Коши (2.1) при $m = 4k+1$ мы получаем представление

$$u^\pm(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^{\pm,t})(x \pm \xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))].$$

Как и раньше, через $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ мы обозначим последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин. Предположим, что у случайной величины ξ_1 существуют моменты μ_m до $m+1$ порядка и верно (2.9).

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, определенный (2.10).

Для натуральных n определим функцию $u_n(t,x)$

$$u_n^\pm(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \varkappa_n^{\pm,t})(x \pm \zeta_n(t))\Big], \tag{2.21}$$

где функция $\varkappa_n^{\pm,t}(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa^{\pm,t}}_n(p) = \exp\Big(-nt\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\mu_j(\mp ip)^j}{j!n^{j/m}}\Big). \tag{2.22}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u^{\pm}(t,x)$ *– решение задачи Коши* (2.1), *а функция* $u_n^{\pm}(t,x)$ *определяется формулой* (2.21). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_n^{\pm}(t,\cdot) - u^{\pm}(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant \frac{Ct}{n^{1/m}} \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся формулой Дюамеля (1.6). Мы, как и раньше, будем рассматривать только задачу Коши (2.1) со знаком минус. При этом вместо обозначений $u_n^-(t,x)$ и $u^-(t,x)$ дальше мы будем использовать просто обозначения $u_n(t,x)$ и $u(t,x)$.

Определим операторы A_n, полагая для $\psi \in C_b^{\infty}(\mathbf{R})$

$$A_n\psi(x) = n \int\limits_0^{+\infty} \Big(\psi(x - \frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\psi^{(j)}(x)\cdot(-y)^j}{n^{j/m}}\Big) d\mathcal{P}(y).$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A = A_n, \ B = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m} - A_n.$$

Тогда

$$A + B = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}.$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.23}$$

Имеем

$$B\varphi(x) = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\varphi - A\varphi.$$

Перейдем в импульсное представление. Именно

$$\widehat{B\varphi}(p) = -\frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi}(p) - \widehat{\varphi}(p)\cdot n \int\limits_0^{+\infty} \Big(\exp(ip\frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ipy)^j}{n^{j/m}}\Big) d\mathcal{P}(y).$$

Обозначим

$$S^m(y) = e^{iy} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(iy)^j}{j!}.$$

Учитывая, что $\mu_m = 1$, то $\widehat{B\varphi}$ можно представить

$$\widehat{B\varphi}(p) = -\widehat{\varphi}(p)n\int\limits_0^{+\infty} S^m(\frac{py}{n^{1/m}})d\mathcal{P}(y).$$

Представим

$$n\int\limits_0^{+\infty} S^m(\frac{py}{n^{1/m}})d\mathcal{P}(y) = n\int\limits_0^{\frac{n^{1/m}}{|p|}} S^m(\frac{py}{n^{1/m}})d\mathcal{P}(y) + n\int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} S^m(\frac{py}{n^{1/m}})d\mathcal{P}(y).$$

Первый интеграл оценивается

$$\Big|n\int\limits_0^{\frac{n^{1/m}}{|p|}} S^m(\frac{py}{n^{1/m}})d\mathcal{P}(y)\Big| \leqslant \frac{C|p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Для второго интеграла справедливо

$$\Big|n\int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} S^m(\frac{py}{n^{1/m}})d\mathcal{P}(y)\Big| \leqslant n\int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} \frac{C|p|^{m+1}y^{m+1}}{n^{1+1/m}}d\mathcal{P}(y) \leqslant \frac{C\mu_{m+1}|p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant \frac{C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Тогда

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2 \leqslant Cn^{-2/m}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \qquad (2.24)$$

Также как это было сделано при доказательстве Теоремы 2.1, можно показать, что справедливо неравенство

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \qquad (2.25)$$

Утверждение теоремы вытекает из (2.23)–(2.25).

Используя приведенные выше рассуждения с некоторыми очевидными изменениями, можно доказать утверждение для задачи Коши (2.1) со знаком "плюс".

Именно, мы определим "аппроксимирующий" оператор A_n, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_n\psi(x) = n\int\limits_0^{+\infty} \Big(\psi(x+\frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\psi^{(j)}(x)\cdot y^j}{n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Все необходимые неравенства для доказательства утверждения получаются аналогично.

□

2.3 Вспомогательная лемма

Для построения вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (2.1) для случаев $m = 4k - 1$ или $m = 4k$ нам потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 2.1. *Пусть $m = 4k - 1$ или $m = 4k$. Тогда для любого $z \geqslant 0$ справедливы неравенства*

1. $\operatorname{Re}\Big(\exp(iz\sigma_+) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(iz\sigma_+)^j}{j!}\Big) \leqslant 0,$

2. $\operatorname{Re}\Big(\exp(-iz\sigma_-) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-iz\sigma_-)^j}{j!}\Big) \leqslant 0.$

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Обозначим

$$f(z) = \operatorname{Re}\Big(\exp(iz\sigma_+) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(iz\sigma_+)^j}{j!}\Big).$$

Легко показать, что

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) = 0,$$

$$f''(0) = 0,$$

$$\ldots$$

$$f^{(m-1)}(0) = 0.$$

Вычислим производную m-го порядка

$$f^{(m)}(z) = \operatorname{Re}\Big((i\sigma_+)^m \exp(iz\sigma_+)\Big).$$

Рассмотрим случай $m = 4k - 1$.

Заметим, что

$$i^{4k-1} = -i,\ \sigma_+^m = -1,$$

$$\exp(iz\sigma_+) = e^{-z\sin(\frac{\pi}{m})}(\cos(z\cos\frac{\pi}{m}) + i\sin(z\cos\frac{\pi}{m})).$$

Тогда

$$f^{(m)}(z) = -e^{-\sin(\frac{\pi}{m})z}\sin(z\cos\frac{\pi}{m}).$$

Производная m–го порядка обращается в 0, если

$$z = \frac{\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})},\ l = 0, 1, 2 \dots.$$

Производная m–го порядка $f^{(m)}(z) \leqslant 0$ на промежутках $z \in [\frac{2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\pi(2l+1)}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$ и $f^{(m)}(z) \geqslant 0$ на промежутках $z \in [\frac{\pi(2l+1)}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$.

Таким образом, производная $m-1$–го порядка $f^{(m-1)}(z)$ не возрастает на промежутках $z \in [\frac{2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\pi(2l+1)}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$ и не убывает на промежутках $z \in [\frac{\pi(2l+1)}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$.

Если мы покажем, что $f^{(m-1)}(z) \leqslant 0$ при $z = \frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}$, $l = 0, 1, 2 \dots$, то $f^{(m-1)}(z) \leqslant 0$ при всех z, то мы покажем, что $f(z) \leqslant 0$ при всех z.

Имеем

$$f^{(m-1)}(z) = \mathrm{Re}\Big((i\sigma_+)^{m-1}\exp(iz\sigma_+) - (i\sigma_+)^{m-1}\Big).$$

Заметим, что

$$i^{4k-2} = -1,\ \sigma_+^{m-1} = \cos(\frac{\pi(m-1)}{m}) + i\sin(\frac{\pi(m-1)}{m}),$$

$$\begin{aligned}\exp(iz\sigma_+) &= e^{-\sin(\frac{\pi}{m})z}(\cos(\cos(\frac{\pi}{m})z) + i\sin(\cos(\frac{\pi}{m})z))\\ &= e^{-\sin(\frac{\pi}{m})\frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}}(\cos(\cos(\frac{\pi}{m})\frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}) + i\sin(\cos(\frac{\pi}{m})\frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}))\\ &= e^{-\sin(\frac{\pi}{m})\frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}}(\cos(\pi(2l+2)) + i\sin(\pi(2l+2))) = e^{-\sin(\frac{\pi}{m})\frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}f^{(m-1)}(\frac{\pi(2l+2)}{\cos(\frac{\pi}{m})}) &= \cos(\frac{\pi(m-1)}{m})\Big(1 - e^{-\tan(\frac{\pi}{m})\pi(2l+2)}\Big)\\ &= -\cos(\frac{\pi}{m})\Big(1 - e^{-\tan(\frac{\pi}{m})\pi(2l+2)}\Big) \leqslant 0. \quad (2.26)\end{aligned}$$

(Отметим, что $\cos(\frac{\pi}{m}) > 0$ и $\tan(\frac{\pi}{m}) > 0$.)

Теперь рассмотрим случай $m = 4k$.

Заметим, что

$$i^{4k} = 1,\ \sigma_+^m = -1,$$

$$\exp(iz\sigma_+) = e^{-z\sin(\frac{\pi}{m})}(\cos(z\cos(\frac{\pi}{m})) + i\sin(z\cos(\frac{\pi}{m})))$$

Тогда

$$f^{(m)}(z) = -e^{-z\sin(\frac{\pi}{m})}\cos(z\cos(\frac{\pi}{m})).$$

Производная m–го порядка обращается в 0, если

$$z = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})},\ l = 0, 1, 2 \ldots.$$

Производная m–го порядка $f^{(m)}(z) \leqslant 0$ на промежутках $z \in [\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$ и $f^{(m)}(z) \geqslant 0$ на промежутках $z \in [\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\frac{\pi}{2}+\pi(2l+1)}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$.

Таким образом, производная $m-1$–го порядка $f^{(m-1)}(z)$ не возрастает на промежутках $z \in [\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$ и не убывает на промежутках $z \in [\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\frac{\pi}{2}+\pi(2l+1)}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$.

Если мы покажем, что $f^{(m-1)}(z) \leqslant 0$ при $z = \frac{\frac{\pi}{2}+\pi(2l+1)}{\cos(\frac{\pi}{m})}$, $l = 0, 1, 2 \ldots$, то $f^{(m-1)}(z) \leqslant 0$ при всех z, то мы покажем, что $f(z) \leqslant 0$ при всех z.

Имеем

$$f^{(m-1)}(z) = \mathrm{Re}\Big((i\sigma_+)^{m-1}\exp(iz\sigma_+) - (i\sigma_+)^{m-1}\Big).$$

Заметим, что

$$i^{4k-1} = -i,\ \sigma_+^{m-1} = \cos(\frac{\pi(m-1)}{m}) + i\sin(\frac{\pi(m-1)}{m}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f^{(m-1)}(z) = \mathrm{Re}\Big(&-ie^{-z\sin(\frac{\pi}{m})}\Big(\cos(z\cos(\frac{\pi}{m})) + i\sin(z\cos(\frac{\pi}{m}))\Big) \\ &\cdot\Big(\cos(\frac{\pi(m-1)}{m}) + i\sin(\frac{\pi(m-1)}{m})\Big)\Big) - (-i)i\sin(\frac{\pi}{m}) \\ &= e^{-z\sin(\frac{\pi}{m})}\Big(\cos(z\cos(\frac{\pi}{m}))\sin(\frac{\pi}{m}) - \sin(z\cos(\frac{\pi}{m}))\cos(\frac{\pi}{m})\Big) \\ &\quad - \sin(\frac{\pi}{m}) = e^{-z\sin\frac{\pi}{m}}\sin\Big(\frac{\pi}{m} - z\cos\frac{\pi}{m}\Big) - \sin\frac{\pi}{m}. \end{aligned}$$

Вычислим значение $m-1$–ой производной в точке $\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}$

$$f^{(m-1)}(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}) = e^{-(\frac{3\pi}{2}+2\pi l)\tan\frac{\pi}{m}}\sin\Big(\frac{\pi}{m} - \frac{3\pi}{2} - 2\pi l\Big) - \sin\frac{\pi}{m}.$$

Заметим, что угол $\frac{\pi}{m} - \frac{3\pi}{2}$ лежит во второй четверти, и, значит, $\sin\left(\frac{\pi}{m} - \frac{3\pi}{2} - 2\pi l\right) > 0$. Тогда про точный знак мы ничего не можем сказать. При некоторых значениях $m = 4k$ мы можем получать и положительные, и отрицательные значения.

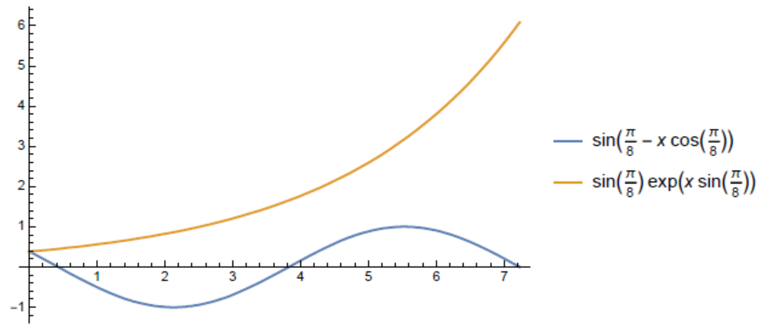

Рис. 2.1: Случай $m = 8$.

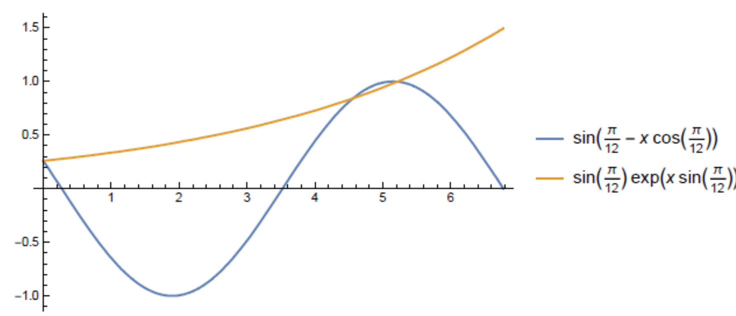

Рис. 2.2: Случай $m = 12$.

Значит надо рассмотреть следующую производную $f^{(m-2)}(z)$. Заметим, что

$$f^{(m-1)}\left(\frac{\frac{\pi}{m} + \frac{3\pi}{2} + 2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}\right) = e^{-(\frac{\pi}{m}+\frac{3\pi}{2}+2\pi l)\tan\frac{\pi}{m}} \sin\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{m} - \frac{3\pi}{2} - 2\pi l\right) - \sin\frac{\pi}{m} = e^{-(\frac{\pi}{m}+\frac{3\pi}{2}+2\pi l)\tan\frac{\pi}{m}} - \sin\frac{\pi}{m}.$$

Производная $(m-1)$–ого порядка обладает конечным числом нулей на промежутках $z \in [\frac{\pi+\frac{2\pi}{m}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{2\pi+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. На этих промежутках $(m-2)$–ая производная возрастает, то есть точки максимумов $(m-2)$–ой производной содержатся $z \in [\frac{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{m}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{2\pi+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$, $l = 0, 1, 2 \ldots$

Если мы покажем, что $f^{(m-2)}(z) \leqslant 0$ при $z \in [\frac{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{m}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{2\pi+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$, $l = 0, 1, 2 \ldots$, то $f^{(m-2)}(z) \leqslant 0$ при всех z, а значит, и $f(z) \leqslant 0$ при всех z.

Вычислим

$$f^{(m-2)}(z) = \mathrm{Re}\Big((i\sigma_+)^{m-2}\exp(iz\sigma_+) - (i\sigma_+)^{m-2} - (i\sigma_+)^{m-1}z\Big).$$

Заметим, что

$$i^{4k-2} = -1,\ \sigma_+^{m-2} = \cos(\frac{\pi(m-2)}{m}) + i\sin(\frac{\pi(m-2)}{m})$$

и

$$i^{4k-1} = -i,\ \sigma_+^{m-1} = \cos(\frac{\pi(m-1)}{m}) + i\sin(\frac{\pi(m-1)}{m}).$$

Вычислим производную $(m-2)$–ого порядка

$$\begin{aligned} f^{(m-2)}(z) = \mathrm{Re}\Big(&- e^{-z\sin(\frac{\pi}{m})}\Big(\cos(z\cos(\frac{\pi}{m})) + i\sin(z\cos(\frac{\pi}{m}))\Big) \\ &\cdot\Big(\cos(\frac{\pi(m-2)}{m}) + i\sin(\frac{\pi(m-2)}{m})\Big)\Big) - (-1)\cos(\frac{\pi(m-2)}{m}) \\ &- z(-i)i\sin(\frac{\pi(m-1)}{m}) = -e^{-z\sin(\frac{\pi}{m})}\Big(\cos(z\cos\frac{\pi}{m})\cos\frac{\pi(m-2)}{m} \\ &- \sin(z\cos\frac{\pi}{m})\sin\frac{\pi(m-2)}{m}\Big) - \cos\frac{2\pi}{m} - z\sin\frac{\pi}{m} \\ &= -e^{-z\sin\frac{\pi}{m}}\cos\Big(z\cos\frac{\pi}{m} + \frac{\pi(m-2)}{m}\Big) - \cos\frac{2\pi}{m} - z\sin\frac{\pi}{m} \\ &= e^{-z\sin\frac{\pi}{m}}\cos\Big(z\cos\frac{\pi}{m} - \frac{2\pi}{m}\Big) - \cos\frac{2\pi}{m} - z\sin\frac{\pi}{m}. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение

$$\cos\Big(z\cos\frac{\pi}{m} - \frac{2\pi}{m}\Big) = \big(\cos\frac{2\pi}{m} + z\sin\frac{\pi}{m}\big)e^{z\sin\frac{\pi}{m}}.$$

Очевидно, что $z = 0$ – решение уравнения, и число корней конечно.

Второй корень лежит в промежутке $z \in [\frac{\frac{2\pi}{m}}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\frac{4\pi}{m}}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$. Следующие корни могут лежать в промежутках $z \in [\frac{2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{\frac{4\pi}{m}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$, $l = 1, 2, \ldots$, но на этих промежутках нет корней, так как $f^{(m-1)}(z) < 0$, и, значит, $f^{(m-2)}(z)$ убывает.

Заметим, что корней на промежутках $z \in [\frac{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{m}+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}, \frac{2\pi+2\pi l}{\cos(\frac{\pi}{m})}]$, $l = 0, 1, 2 \ldots$ нет, а значит $f^{(m-2)}(z) \leqslant 0$ при всех z.

$\square$

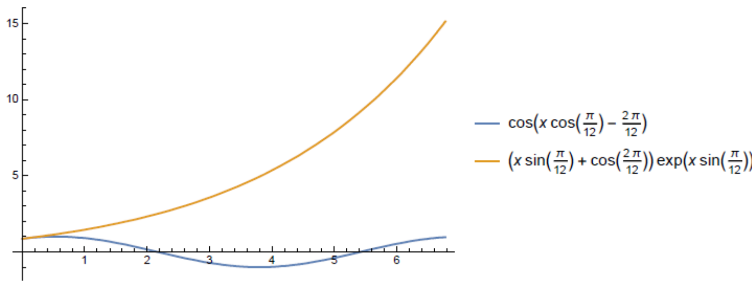

Рис. 2.3: Случай $m = 12$.

2.4 Оператор дифференцирования порядка $m = 4k$

Заметим, что в данном случае использованный для случая $m = 4k+2$ метод не работает, так как для таких значений m функция (2.3) сверхэкспоненциально возрастает на бесконечности и, соответственно, для нее не определено обратное преобразование Фурье. В данном случае для построения вероятностной аппроксимации решения задачи Коши мы привлечем некоторые идеи комплексного анализа (как и в случае $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k)$).

Как и раньше, $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0, T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью (45).

Для $\varepsilon{>}0$ через $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$ мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν, вида (49).

Будем рассматривать $\sigma\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$, где σ – комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [9]) имеем

$$\mathbf{E}\exp(ip\sigma\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) = \exp\left(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}(e^{i\sigma py} - 1)\frac{dy}{y^{m+1}}\right).$$

Заметим, что в последней формуле экспонента ограничена по переменной p, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$.

Рассмотрим проекторы Рисса $P_\pm$, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2_\pm$.

Возьмем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^m = \sigma_-^m = -1$. Вместо одного случайного процесса $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ мы теперь рассмотрим два комплексных процесса $\sigma_+\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ и $\sigma_-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$. Далее, сначала мы по начальному данному φ построим новую функцию φ_M, полагая $\varphi_M = P_M\varphi$. Функция φ_M уже будет целой аналитической функцией экспоненциального типа. Число M мы будем выбирать в зависимости от ε, именно $M = M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$. Далее, используя проекторы Рисса, представим функцию φ_M в виде суммы двух функций – одна имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а вторая в нижнюю. Соответственно, для одной из них будем пользоваться одним комплексным процессом, для другой – другим.

Итак, для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t,x)$

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big], \tag{2.27}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{(ip)^j\sigma_+^j y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{(ip)^j\sigma_-^j y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big), & p < 0. \end{cases}$$

Так как $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ – аналитична в верхней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таком выборе $\sigma_\pm$ и m функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (2.1), *а функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется формулой* (2.27). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C(t+\varepsilon^m)\,\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}\,\varepsilon.$$

Доказательство. Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm\psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\psi^\pm(x - \sigma_\mp y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\psi^\pm)^{(j)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^{\pm} = A^{\pm}_{\varepsilon},\ B^{\pm} = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_{\pm} - A^{\pm}_{\varepsilon}.$$

Тогда

$$A^{\pm} + B^{\pm} = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_{\pm}.$$

Заметим, что из условия $m = 4k$ следует справедливость неравенства

$$\|e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}P_{\pm}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1.$$

Далее, представим

$$e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}(x) - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}\varphi^{\pm}(x) = (e^{tA^{\pm}} - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})})P_M\varphi^{\pm}(x) \\ - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}(I - P_M)\varphi^{\pm}(x) = V_1^{\pm} + V_2^{\pm}.$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^-, норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Вычислим преобразование Фурье функции $B^-\varphi_M(x)$. Имеем

$$\widehat{B^-\varphi_M}(p) = -\frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi^-_M}(p) \\ - \widehat{\varphi^-_M}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+ y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}} \\ = -\widehat{\varphi^-_M}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{j=0}^{m}\frac{(ip\sigma_+ y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Из последней формулы следует справедливость оценки

$$|\widehat{B^-\varphi_M}(p)| \leqslant C\varepsilon|\widehat{\varphi^-_M}(p)||p|^{m+1}.$$

Далее, имеем

$$\|\widehat{B^-P_M\varphi}^-\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp\big(1 + |p|^{2l}\big)\big|\widehat{B^-\varphi^-}(p)\big|^2 \leqslant C\varepsilon^2\|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}.$$

Осталось оценить

$$\widehat{e^{tA^-}P_M\varphi^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p)\cdot\exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big). \tag{2.28}$$

Из (2.28) и леммы 2.1 следует неравенство

$$\|e^{tA^-}P_M\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1.$$

Таким образом, мы показали, что существует константа C, такая что

$$\|V_1^-\|^2_{W_2^l} \leqslant Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.29}$$

Аналогичным образом может быть получено неравенство

$$\|V_1^+\|^2_{W_2^l} \leqslant Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^+\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.30}$$

Завершает доказательство неравенство

$$\begin{aligned}\|V_2^\pm\|^2_{W_2^l} \leqslant \int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2dp \\ \leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2dp \\ \leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}} \leqslant C\varepsilon^{2(m+1)}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Утверждение теоремы следует из (2.29)–(2.31).

□

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (2.1) соответственно.

Таким образом, для решения задачи Коши (2.1) при $m = 4k$ мы получаем представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x-\sigma_+\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x-\sigma_-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big].$$

Как и раньше, через $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ мы обозначим последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин. Предположим, что у случайной величины ξ_1 существуют моменты μ_m до $m+1$ порядка и верно (2.9).

Рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, определенный (2.10).

Для натуральных n определим функцию $u_n(t,x)$

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \varkappa_n^t)(x - \sigma_+\zeta_n(t)) + (\varphi_M^+ * \varkappa_n^t)(x - \sigma_-\zeta_n(t))\Big], \tag{2.32}$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{\mu_j(ip\sigma_+)^j}{j!n^{j/m}}\Big)\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{\mu_j(ip\sigma_-)^j}{j!n^{j/m}}\Big)\Big), & p < 0. \end{cases}$$

Так как $P_-\varphi_M$ – ограниченная аналитическая функция в нижней полуплоскости, а $P_+\varphi_M$ – в верхней полуплоскости, то функция $u_n(t,x)$ корректно определена.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(n) = \delta_0 n^{1/m}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (2.1)*, а функция* $u_n(t,x)$ *определяется формулой* (2.32)*. Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$*, такая что справедливо неравенство*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant \frac{C}{n^{1/m}}\Big(t + \frac{1}{n}\Big)\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_n^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_n^\pm\psi^\pm(x) = n\int\limits_0^{+\infty}\Big(\psi^\pm(x - \sigma_\mp\frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\psi^\pm)^{(j)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^j}{j!n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^\pm = A_n^\pm,\ B^\pm = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_\pm - A_n^\pm.$$

Тогда

$$A^\pm + B^\pm = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_\pm.$$

Далее, представим

$$e^{tA^\pm}P_M\varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm+B^\pm)}\varphi^\pm(x) = (e^{tA^\pm} - e^{t(A^\pm+B^\pm)})P_M\varphi^\pm(x) \\ - e^{t(A^\pm+B^\pm)}(I - P_M)\varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^-, норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A^-+B^-)}P_-\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.33}$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B^-\varphi_M(x)$. Имеем

$$\widehat{B^-\varphi_M}(p) = -\frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi_M^-}(p) - \widehat{\varphi_M^-}(p)\cdot n\int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp(ip\sigma_+\frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Как и раньше, обозначим

$$S^m(y) = e^{iy} - \sum_{j=0}^{m}\frac{(iy)^j}{j!}.$$

Учитывая, что $\sigma_+^m = -1$ и $\mu_m = 1$, то $\widehat{B^-\varphi_M}$ можно представить

$$\widehat{B^-\varphi_M}(p) = -\widehat{\varphi_M^-}(p)n\int\limits_0^{+\infty}S^m\Big(\frac{p\sigma_+y}{n^{1/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Представим

$$\int\limits_0^{+\infty}S^m\Big(\frac{\sigma_+py}{n^{1/m}}\Big)d\mathcal{P}(y) = \int\limits_0^{\frac{n^{1/m}}{|p|}}S^m\Big(\frac{\sigma_+py}{n^{1/m}}\Big)d\mathcal{P}(y) + \int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty}S^m\Big(\frac{\sigma_+py}{n^{1/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Для первого интеграла справедлива оценка

$$\Big|n\int\limits_0^{\frac{n^{1/m}}{|p|}}S^m\Big(\frac{\sigma_+py}{n^{1/m}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big| \leqslant \frac{C|p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Для второго интеграла справедливо

$$\Big|n\int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty}S^m\Big(\frac{\sigma_+py}{n^{1/m}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big| \leqslant n\int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty}\frac{C|p|^{m+1}y^{m+1}}{n^{1+1/m}}d\mathcal{P}(y) \leqslant \frac{C\mu_{m+1}|p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Тогда

$$|\widehat{B^-\varphi_M}(p)| \leqslant \frac{C|\widehat{\varphi_M}(p)||p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Отсюда следует, что

$$\|B^-\widehat{P_M\varphi^-}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B^-\varphi^-}(p)|^2 \leqslant Cn^{-2/m}\|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.34}$$

Осталось оценить

$$e^{tA^-}\widehat{P_M}\varphi^-(p) = \widehat{\varphi^-_M}(p)\cdot\exp\Big(nt\int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp(\frac{ip\sigma_+y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big).$$

Определим функцию $h(p)$ следующим выражением

$$h(p) = \int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big).$$

Тогда

$$\operatorname{Re} h(p) = -\frac{p^m}{m!}\int\limits_0^{+\infty} y^m d\mathcal{P}(y) + o(|p|^m) = -\frac{p^m}{m!} + o(|p|^m).$$

Тогда норма оператора, действующего на функции из подпространства в $L_2(\mathbf{R})$, такого что носитель преобразования Фурье функции содержится в отрезке $[-M, M]$, где $M(n) = \delta_0 n^{1/m}$, оценивается

$$\|e^{tA^-}P_M\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.35}$$

Завершает доказательство неравенство

$$\begin{aligned}\|V_2^\pm\|^2_{W_2^l} &\leqslant \int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2dp \\ &\leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2dp \\ &\leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}} \leqslant \frac{C\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}}{n^{2(m+1)/m}}. \end{aligned}\tag{2.36}$$

Утверждение теоремы следует из (2.33)–(2.36).

$\square$

2.5 Оператор дифференцирования порядка $m = 4k-1$

Как и раньше, $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью (45).

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$, $t \in [0,T]$ мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν, вида (49).

Будем рассматривать $\sigma\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$, где σ – комплексная константа. Напомним, что по теореме Кэмпбелла (см. [9]) имеем

$$\mathbf{E}\exp(ip\sigma\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) = \exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}(e^{i\sigma py} - 1)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big).$$

Заметим, что в последней формуле экспонента ограничена по переменной p, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$.

Аналогично,

$$\mathbf{E}\exp(-ip\sigma\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) = \exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}(e^{-i\sigma py} - 1)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big).$$

Заметим, что в последней формуле экспонента ограничена по переменной p, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$.

Как и раньше, через $P_\pm$ мы обозначаем проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2_\pm$ соответственно.

Возьмем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^m = \sigma_-^m = -1$.

Опишем сначала приближающую функцию для решения задачи Коши с оператором со знаком "плюс". Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon^+(t,x)$

$$u_\varepsilon^+(t,x) = \mathbf{E}\Big(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big], \qquad (2.37)$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{(ip)^j\sigma_+^j y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{(ip)^j\sigma_-^j y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big), & p < 0. \end{cases}$$

Так как $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ – аналитична в верхней полуплоскости, то функция $u^+_\varepsilon(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таком выборе $\sigma_\pm$ и m функция $\widehat{\omega}^t_\varepsilon(p)$ является быстро убывающей.

Приближающая функция для решения задачи Коши с оператором со знаком "минус" строится следующим образом. Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u^-_\varepsilon(t,x)$

$$u^-_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi^-_M * \omega^t_\varepsilon)(x+\sigma_-\xi^{e\varepsilon}_\varepsilon(t)) + (\varphi^+_M * \omega^t_\varepsilon)(x+\sigma_+\xi^{e\varepsilon}_\varepsilon(t))\Big], \qquad (2.38)$$

где функция $\omega^t_\varepsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}^t_\varepsilon(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{(-ip)^j\sigma_-^j y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{(-ip)^j\sigma_+^j y^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big), & p < 0. \end{cases}$$

Заметим, что как и в предыдущем случае, функция $u^-_\varepsilon(t,x)$ корректно определена, так как $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ – аналитична в верхней полуплоскости. Заметим также, что при таком выборе $\sigma_\pm$ и m функция $\widehat{\omega}^t_\varepsilon(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.7. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$, $u^\pm(t,x)$ *– решения задач Коши* (2.1) *со знаком "плюс" и "минус" соответственно, функция* $u^+_\varepsilon(t,x)$ *определяется* (2.37), *а* $u^-_\varepsilon(t,x)$ *– формулой* (2.38). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\left\|u^\pm_\varepsilon(t,\cdot) - u^\pm(t,\cdot)\right\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^m)\left\|\varphi\right\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Мы докажем утверждение только для задачи Коши (2.1) со знаком "плюс". Как и в случае $m = 4k+1$, чтобы доказать утверждение для оператора со знаком "минус" достаточно повторить приведенное ниже рассуждение с некоторыми изменениями. Далее, как и в теореме 2.3, вместо $u^+_\varepsilon(t,x)$ и $u^+(t,x)$ будем писать просто $u_\varepsilon(t,x)$ и $u(t,x)$.

Определим операторы $A^{\pm}_{\varepsilon}$, полагая для $\psi \in C_b^{\infty}(\mathbf{R})$

$$A^{\pm}_{\varepsilon}\psi(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\psi^{\pm}(x-\sigma_{\mp}y) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\psi^{\pm})^{(j)}(x)\cdot(-\sigma_{\mp}y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^{\pm} = A^{\pm}_{\varepsilon},\ B^{\pm} = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_{\pm} - A^{\pm}_{\varepsilon}.$$

Тогда

$$A^{\pm} + B^{\pm} = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_{\pm}.$$

Далее, представим

$$e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}(x) - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}\varphi^{\pm}(x) = (e^{tA^{\pm}} - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})})P_M\varphi^{\pm}(x) \\ - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}(I-P_M)\varphi^{\pm}(x) = V_1^{\pm} + V_2^{\pm}.$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^-, норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Заметим, что для любых $t > 0$ и k справедливо неравенство

$$\|e^{t(A^-+B^-)}P_-\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \qquad (2.39)$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B^-\varphi_M(x)$. Имеем

$$\widehat{B^-\varphi_M}(p) = \frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi_M^-}(p) - \widehat{\varphi_M^-}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}} \\ = -\widehat{\varphi_M^-}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|\widehat{B^-\varphi_M}(p)| \leqslant C\varepsilon|\widehat{\varphi_M^-}(p)||p|^{m+1},$$

из которой следует

$$\|\widehat{B^-P_M\varphi^-}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B^-\varphi^-}(p)|^2 \leqslant C\varepsilon^2\|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}.$$

Осталось оценить

$$\widehat{e^{tA^-}P_M\varphi^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p) \cdot \exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+ y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big).$$

Из леммы 2.1 следует справедливость неравенства

$$\|e^{tA^-}P_M\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1.$$

Таким образом, мы показали, что существует константа C, такая что

$$\|V_1^-\|^2_{W_2^l} \leqslant Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.40}$$

Аналогичным образом может быть получено неравенство

$$\|V_1^+\|^2_{W_2^l} \leqslant Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^+\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.41}$$

Завершает доказательство неравенство

$$\begin{aligned}\|V_2^\pm\|^2_{W_2^l} \leqslant \int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2dp \\ \leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2dp \\ \leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}} \leqslant C\varepsilon^{2(m+1)}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Утверждение теоремы следует из (2.40)–(2.42).

Используя приведенные выше рассуждения с некоторыми очевидными изменениями, можно доказать утверждение для задачи Коши (2.1) со знаком "минус".

Для этого мы определим "аппроксимирующие" операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm\psi(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\psi^\pm(x+\sigma_\pm y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\psi^\pm)^{(j)}(x)\cdot(\sigma_\pm y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Все необходимые неравенства для доказательства утверждения получаются аналогично.

□

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функции $u_\varepsilon^\pm(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближают решения $u^\pm(t,x)$ задач Коши (2.1) соответственно.

Таким образом, для решений задач Коши (2.1) при $m = 4k-1$ мы получаем представление

$$u^\pm(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x \mp \sigma_\pm \xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x \mp \sigma_\mp \xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big].$$

Как и раньше, через $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ мы обозначим последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин. Предположим, что у случайной величины ξ_1 существуют моменты μ_m до $m+2$ порядка и верно (2.9).

Рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, определенный (2.10).

Будем рассматривать $\sigma\zeta_n(t)$, где σ – комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [9])

$$\mathbf{E}\exp(ip\sigma\zeta_n(t)) = \exp\Big(t\int_0^{+\infty}(e^{i\sigma p y n^{-1/m}} - 1)d\mathcal{P}(y)\Big).$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$.

Аналогично,

$$\mathbf{E}\exp(-ip\sigma\zeta_n(t)) = \exp\Big(t\int_0^{+\infty}(e^{-i\sigma p y n^{-1/m}} - 1)d\mathcal{P}(y)\Big).$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$.

Через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций у которых носитель преобразования Фурье лежит в $[-M,M]$. Положим $\varphi_M = P_M\varphi$, причем M мы будем выбирать зависящим от n.

Опишем сначала приближающую функцию $u_n^+(t,x)$ для решения задачи Коши с оператором со знаком "плюс". Для натуральных n определим функцию $u_n^+(t,x)$

$$u_n^+(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \varkappa_n^{+,t})(x - \sigma_+\zeta_n(t)) + (\varphi_M^+ * \varkappa_n^{+,t})(x - \sigma_-\zeta_n(t))\Big], \qquad (2.43)$$

где функция $\varkappa_n^{+,t}(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^{+,t}(p) = \begin{cases} \exp\Big(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{\mu_j(ip\sigma_+)^j}{j!n^{j/m}}\Big)\Big), & p \geqslant 0,\\ \exp\Big(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{\mu_j(ip\sigma_-)^j}{j!n^{j/m}}\Big)\Big), & p < 0.\end{cases}$$

Так как $P_-\varphi$ аналитическая функция в нижней полуплоскости, а $P_+\varphi$ – в верхней полуплоскости, то функция $u_n^+(t,x)$ корректно определена.

Приближающая функция для решения задачи Коши с оператором со знаком "минус" строится следующим образом. Для натуральных n определим функцию двух переменных $u_n^-(t,x)$

$$u_n^-(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \varkappa_n^{-,t})(x+\sigma_-\zeta_n(t)) + (\varphi_M^+ * \varkappa_n^{-,t})(x+\sigma_+\zeta_n(t))\Big], \tag{2.44}$$

где функция $\varkappa_n^{-,t}(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^{-,t}(p) = \begin{cases} \exp\Big(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{\mu_j(-ip\sigma_-)^j}{j!n^{j/m}}\Big)\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-nt\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{\mu_j(-ip\sigma_+)^j}{j!n^{j/m}}\Big)\Big), & p < 0. \end{cases}$$

Заметим, что как и в предыдущем случае, функция $u_n^-(t,x)$ корректно определена, так как $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ – аналитична в верхней полуплоскости.

Заметим также, что, полагая $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$, функции $\widehat{\varkappa}_n^{\pm,t}(p)$ являются быстро убывающими.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.8. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(n) = \delta_0 n^{1/m}$, $u^\pm(t,x)$ *– решения задач Коши* (2.1) *со знаком "плюс" и "минус" соответственно, функция* $u_\varepsilon^+(t,x)$ *определяется* (2.43), *а* $u_\varepsilon^-(t,x)$ *– формулой* (2.44). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_n^\pm(t,\cdot) - u^\pm(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant \frac{C}{n^{1/m}}\big(t + \frac{1}{n}\big)\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Мы докажем утверждение только для задачи Коши (2.1) со знаком "плюс". Как и в случае $m = 4k+1$, чтобы доказать утверждение для оператора со знаком "минус" достаточно повторить приведенное ниже рассуждение с некоторыми изменениями. Далее, как и в теореме 2.7, вместо $u_n^+(t,x)$ и $u^+(t,x)$ будем писать просто $u_n(t,x)$ и $u(t,x)$.

Определим операторы $A_n^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_n^\pm\psi^\pm(x) = n\int\limits_0^{+\infty}\Big(\psi^\pm\big(x - \sigma_\mp\frac{y}{n^{1/m}}\big) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\psi^\pm)^{(j)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^j}{j!n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^{\pm} = A_n^{\pm},\ B^{\pm} = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_{\pm} - A_n^{\pm}.$$

Тогда

$$A^{\pm} + B^{\pm} = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_{\pm}.$$

Далее, представим

$$e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}(x) - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}\varphi^{\pm}(x) = (e^{tA^{\pm}} - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})})P_M\varphi^{\pm}(x) \\ - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}(I - P_M)\varphi^{\pm}(x) = V_1^{\pm} + V_2^{\pm}.$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^-, норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Заметим, что для любых $t > 0$ и k справедливо неравенство

$$\|e^{t(A^-+B^-)}P_-\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.45}$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B^-\varphi_M(x)$. Имеем

$$\widehat{B^-\varphi_M}(p) = \frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi_M^-}(p) - \widehat{\varphi_M^-}(p)\cdot n\int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp\big(\frac{ip\sigma_+ y}{n^{1/m}}\big) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+ y)^j}{j!n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Как и раньше, обозначим

$$S^m(y) = e^{iy} - \sum_{j=0}^{m}\frac{(iy)^j}{j!}.$$

Учитывая, что $\sigma_+^m = -1$ и $\mu_m = 1$, то $\widehat{B^-\varphi_M}$ можно представить

$$\widehat{B^-\varphi_M}(p) = -\widehat{\varphi_M^-}(p)n\int\limits_0^{+\infty} S^m\big(\frac{\sigma_+ py}{n^{1/m}}\big)d\mathcal{P}(y).$$

Представим

$$n\int\limits_0^{+\infty} S^m\big(\frac{\sigma_+ py}{n^{1/m}}\big)d\mathcal{P}(y) = n\int\limits_0^{\frac{n^{1/m}}{|p|}} S^m\big(\frac{\sigma_+ py}{n^{1/m}}\big)d\mathcal{P}(y) + n\int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} S^m\big(\frac{\sigma_+ py}{n^{1/m}}\big)d\mathcal{P}(y).$$

Первый интеграл оценивается

$$\Big|n\int\limits_0^{\frac{n^{1/m}}{|p|}} S^m\big(\frac{\sigma_+py}{n^{1/m}}\big)d\mathcal{P}(y)\Big| \leqslant \frac{C|p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Для второго интеграла справедливо

$$\Big|n\int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} S^m\big(\frac{\sigma_+py}{n^{1/m}}\big)d\mathcal{P}(y)\Big| \leqslant n\int\limits_{\frac{n^{1/m}}{|p|}}^{+\infty} \frac{C|p|^{m+1}y^{m+1}}{n^{1+1/m}}d\mathcal{P}(y) \leqslant \frac{C\mu_{m+1}|p|^{m+1}}{n^{1/m}}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|\widehat{B^-\varphi_M}(p)| \leqslant \frac{C|\widehat{\varphi_M}(p)||p|^{m+1}}{n^{1/m}}. \tag{2.46}$$

Имеем

$$\|B^\pm \widehat{P_M\varphi}^\pm\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p\|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B^\pm\varphi^\pm}(p)|^2 \leqslant Cn^{-2/m}\|\varphi^\pm\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{2.47}$$

Осталось оценить

$$e^{tA^-}\widehat{P_M\varphi^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p)\cdot\exp\Big(nt\int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp\big(\frac{ip\sigma_+y}{n^{1/m}}\big) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big).$$

Определим функцию $h(p)$

$$h(p) = \int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)d\mathcal{P}(y)$$

и представим ее в виде

$$h(p) = \int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m+1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)d\mathcal{P}(y) + \frac{\mu_m(ip\sigma_+)^m}{m!} + \frac{\mu_{m+1}(ip\sigma_+)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Учитывая, что $\cos\left(\frac{\pi(m+1)}{m}\right) < 0$, имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} h(p) &= \cos\Big(\frac{\pi(m+1)}{m}\Big)\frac{\mu_{m+1}p^{m+1}}{(m+1)!} + \int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m+1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)d\mathcal{P}(y)\\ &= \cos\Big(\frac{\pi(m+1)}{m}\Big)\frac{\mu_{m+1}p^{m+1}}{(m+1)!} + \int\limits_0^{1/p}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m+1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)d\mathcal{P}(y)\\ &\qquad + \int\limits_{1/p}^{+\infty}\Big(\exp(ip\sigma_+y) - \sum_{j=0}^{m+1}\frac{(ip\sigma_+y)^j}{j!}\Big)d\mathcal{P}(y).\end{aligned}$$

Повторяя аналогичные рассуждения, которые были использованы при получении (2.47), можно показать, что существует положительная константа δ_0, такая что при $0 < p < \delta_0$ справедливо

$$\operatorname{Re} h(p) = \cos\left(\frac{\pi(m+1)}{m}\right)\frac{\mu_{m+1}p^{m+1}}{(m+1)!} + o(|p|^{m+1}).$$

Тогда норма оператора, действующего на функции из подпространства в $L_2(\mathbf{R})$, такого что носитель преобразования Фурье функции содержится в отрезке $[-M, M]$, где $M(n) = \delta_0 n^{1/m}$, оценивается

$$\|e^{tA^-}P_M\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.48}$$

Повторяя аналогичные рассуждения, можно показать, что

$$\|e^{tA^+}P_M\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{2.49}$$

Завершает доказательство неравенство

$$\begin{aligned}\|V_2^{\pm}\|^2_{W_2^l} \leqslant \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2 dp \\ \leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}} \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2 dp \\ \leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}} \leqslant \frac{C\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}}{n^{2(m+1)/m}}.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Утверждение теоремы следует из (2.45), (2.47)–(2.50).

Используя приведенные выше рассуждения с некоторыми очевидными изменениями, можно доказать утверждение для задачи Коши (2.1) со знаком "минус".

Для этого мы определим "аппроксимирующие" операторы $A_n^{\pm}$, полагая для $\psi \in C_b^{\infty}(\mathbf{R})$

$$A_n^{\pm}\psi^{\pm}(x) = n\int\limits_0^{+\infty}\Big(\psi^{\pm}(x+\sigma_{\pm}\frac{y}{n^{1/m}}) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\psi^{\pm})^{(j)}(x)\cdot(\sigma_{\pm}y)^j}{j!n^{j/m}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Все необходимые неравенства для доказательства утверждения получаются аналогично.

$\square$

Глава 3

Задача Коши для эволюционных уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка больше двух с постоянными коэффициентами

В третьей главе мы построим вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка больше двух с постоянными коэффициентами. Частными случаями этих уравнений являются уравнения (14), (15) и (16).

3.1 Порядок дифференциального оператора $m = 6$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \sum_{k=1}^{5} \frac{a_k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad u(0,x) = \varphi(x). \tag{3.1}$$

Пусть $\nu(dt, dx)$ - пуассоновская случайная мера на $[0,T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью (45) при $m = 6$. Для $\varepsilon > 0$ и $k = 0, \ldots, 5$ через $\xi^k_\varepsilon(t)$, $t \in [0,T]$ мы обозначим случайные процессы, заданные стохастическими интегралами по мере ν, вида

$$\xi_\varepsilon^k(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,e\varepsilon]} x^{k+1}\nu(ds,dx).$$

Рассмотрим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M * \omega_\varepsilon^t)(x - \sum_{k=0}^{5}\beta_k\xi_\varepsilon^k(t))\Big], \tag{3.2}$$

где $\beta_0 = 1$, β_k определяются через коэффициенты a_k следующим образом

$$\beta_1 = -\frac{a_5}{5}.$$

$$\beta_2 = \frac{a_4}{4} - \frac{3a_5^2}{50},$$

$$\beta_3 = -\frac{a_3}{3} - \frac{a_4a_5}{10} + \frac{8a_5^3}{375},$$

$$\beta_4 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_4^2}{32} - \frac{a_3a_5}{15} - \frac{a_4a_5^2}{200} + \frac{37a_5^4}{15000},$$

$$\beta_5 = -a_1.$$

Функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t\int_\varepsilon^{e\varepsilon} G(p,y)\frac{dy}{y^7}\Big),$$

где функция $G(p,y)$

$$\begin{aligned} G(p,y) = ipy(1 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4) \\ + \frac{(ipy)^2}{2!}(1 + 2\beta_1 y + (\beta_1^2 + 2\beta_2)y^2 + (2\beta_1\beta_2 + 2\beta_3)y^3) \\ + \frac{(ipy)^3}{3!}(1 + 3\beta_1 y + (3\beta_1^2 + 3\beta_2)y^2) + \frac{(ipy)^4}{4!}(1 + 4\beta_1 y) + \frac{(ipy)^5}{5!}. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+7}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(\varepsilon) = \delta_0\varepsilon^{-1}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (3.1), *функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется* (3.2). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\varepsilon(t + \varepsilon^7)\,\|\varphi\|_{W_2^{l+7}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Определим оператор A_ε, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon\psi(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\psi\big(x - \sum_{k=0}^{5}\beta_k y^{k+1}\big) - \psi(x) - \psi'(x)\cdot\big(\sum_{k=0}^{4}\beta_k y^k\big)$$

$$- \frac{\psi''(x)\cdot(1 + 2\beta_1 y + (\beta_1^2 + 2\beta_2)y^2 + (2\beta_1\beta_2 + 2\beta_3)y^3)}{2!}$$

$$- \frac{\psi'''(x)\cdot(1 + 3\beta_1 y + (3\beta_1^2 + 3\beta_2)y^2)}{3!} - \frac{\psi^{(4)}(x)\cdot(1 + 4\beta_1 y)}{4!} - \frac{\psi^{(5)}(x)}{5!}\Big)\frac{dy}{y^7}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A = A_\varepsilon,\ \ B = \frac{1}{6!}\frac{\partial^6}{\partial x^6} + \sum_{k=1}^{5}\frac{a_k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x^k} - A.$$

Тогда

$$A + B = \frac{1}{6!}\frac{\partial^6}{\partial x^6} + \sum_{k=1}^{5}\frac{a_k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x^k}.$$

Оператор $e^{t(A+B)}$ – это оператор умножения на

$$\exp(-\frac{tp^6}{6!} + t\sum_{k=1}^{5} a_k\frac{(ip)^k}{k!}).$$

Так как функция $f(p) = \exp(-\frac{tp^6}{6!} + a_4\frac{tp^4}{4!} - a_2\frac{tp^2}{2!})$ – непрерывная функция, на бесконечности убывающая сверхэкспоненциально и имеющая конечные локальные максимумы, которые зависят от коэффициентов a_k, то справедливо неравенство

$$\big\|e^{t(A+B)}\big\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant C. \tag{3.3}$$

Далее, представим

$$e^{tA}P_M\varphi(x) - e^{t(A+B)}\varphi(x) = (e^{tA} - e^{t(A+B)})P_M\varphi(x) - e^{t(A+B)}(I - P_M)\varphi(x) = V_1 + V_2.$$

Для оценки нормы слагаемого V_1 воспользуемся формулой (1.6).

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi_M(x)$. Имеем

$$B\varphi_M(x) = \varphi_M(x)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(e^{ip(y+\sum\limits_{k=1}^{5}\beta_k y^{k+1})} - 1 - G(p,y) - g_6(p)y^6\Big)\frac{dy}{y^7},$$

где

$$g_6(p) = ip\beta_5 + \frac{(ip)^2}{2!}(\beta_2^2 + 2\beta_4 + 2\beta_1\beta_3) + \frac{(ip)^3}{3!}(3\beta_3 + \beta_1^3 + 6\beta_1\beta_2)$$
$$+ \frac{(ip)^4}{4!}(4\beta_2 + 6\beta_1^2) + \frac{(ip)^5}{5!}5\beta_1 + \frac{(ip)^6}{6!}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|B\varphi(p)| \leqslant C\varepsilon|\widehat{\varphi}(p)||p|^7. \tag{3.4}$$

Осталось показать, что $\|e^{tA}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant C$.

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора выражения

$$e^{ip(y+\sum\limits_{k=1}^{5}\alpha_k y^{k+1})} - 1 - G(p,y).$$

Заметим, что в силу малости слагаемых типа $p^k y^{k+l}$ для $l \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$ при $|p| < \delta_0\varepsilon^{-1}$, в показателе экспоненты главный член имеет порядок $-\frac{p^6}{6!}$. То есть

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant C.$$

Завершает доказательство неравенство

$$\|V_2\|^2_{W_2^l} \leqslant \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \leqslant \frac{1}{M^{14}} \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2(l+7)})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \leqslant C\|\varphi\|^2_{W_2^{l+7}}\varepsilon^{14}.$$

□

Для уравнения (14) вероятностная аппроксимация решения задачи Коши строится аналогично.

3.2 Порядок дифференциального оператора $m = 4$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha_2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \tag{3.5}$$

Для уравнения (3.5) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{3.6}$$

Пусть $\nu(dt,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T]\times\mathbf{R}$ с интенсивностью (45) при $m = 4$. Для $\varepsilon > 0$ и $k = 0,\ k = 2$ через $\xi_\varepsilon^k(t)$, $t \in [0,T]$ мы обозначим случайные процессы, заданные стохастическими интегралами по мере ν, вида

$$\xi_\varepsilon^k(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,e\varepsilon]} x^{k+1}\nu(ds,dx),$$

где e – основание натурального логарифма. Заметим, что такой выбор интервала интегрирования обеспечивает нам выполнение соотношения

$$\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} x^m \frac{dx}{x^{1+m}} = 1.$$

Через $\zeta_\varepsilon^\pm(t)$ мы обозначим процессы

$$\zeta_\varepsilon^-(t) = \sigma_+ \xi_\varepsilon^0(t) + \frac{\alpha_2 \sigma_-}{2} \xi_\varepsilon^2(t),$$

$$\zeta_\varepsilon^+(t) = \sigma_- \xi_\varepsilon^0(t) + \frac{\alpha_2 \sigma_+}{2} \xi_\varepsilon^2(t).$$

По теореме Кэмпбелла (см. [9]) имеем

$$\mathbf{E} \exp(ip\zeta_\varepsilon^-(t)) = \exp\Big(t \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \big(e^{ip(\sigma_+ y + \frac{\alpha_2 \sigma_- y^3}{2})} - 1\big) \frac{dy}{y^5}\Big), \tag{3.7}$$

$$\mathbf{E} \exp(ip\zeta_\varepsilon^+(t)) = \exp\Big(t \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \big(e^{ip(\sigma_- y + \frac{\alpha_2 \sigma_+ y^3}{2})} - 1\big) \frac{dy}{y^5}\Big), \tag{3.8}$$

где константы выбираются следующим образом: $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{4})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{4})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- – в нижней, и выполнено

$$\sigma_+^4 = \sigma_-^4 = -1.$$

Заметим, что при достаточно малых ε (ε выбираем так, чтобы функция $\sigma_+ y + \frac{\alpha_2 \sigma_- y^3}{2}$ при всех $y \in [\varepsilon, e\varepsilon]$ лежала в верхней полуплоскости, а функция $\sigma_- y + \frac{\alpha_2 \sigma_+ y^3}{2}$ при всех $y \in [\varepsilon, e\varepsilon]$ лежала в нижней полуплоскости) выражения в формулах (3.7) и (3.8) будут ограничены по переменной p при $p > 0$ и $p < 0$ соответственно.

Рассмотрим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[P_+ \varphi_M * \omega_\varepsilon^t(x - \zeta_\varepsilon^+(t)) + P_- \varphi_M * \omega_\varepsilon^t(x - \zeta_\varepsilon^-(t))\Big], \tag{3.9}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} G^-(p,y)\frac{dy}{y^5}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} G^+(p,y)\frac{dy}{y^5}\Big), & p < 0. \end{cases}$$

Функции $G^+(p,y)$ и $G^-(p,y)$ сокращают все члены при разложении

$$e^{ip(\sigma_- y + \frac{\alpha_2 \sigma_+ y^3}{2})} - 1$$

и

$$e^{ip(\sigma_+ y + \frac{\alpha_2 \sigma_- y^3}{2})} - 1$$

в ряды Тейлора до порядка y^3.

Легко получить, что

$$G^-(p,y) = ipy\big(\sigma_+ + \frac{\alpha_2 \sigma_- y^2}{2}\big) + \frac{(ipy)^2}{2!}\sigma_+^2 + \frac{(ipy)^3}{3!}\sigma_+^3,$$

$$G^+(p,y) = ipy\big(\sigma_- + \frac{\alpha_2 \sigma_+ y^2}{2}\big) + \frac{(ipy)^2}{2!}\sigma_-^2 + \frac{(ipy)^3}{3!}\sigma_-^3.$$

Заметим, что функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) \in L_2(\mathbf{R})$. (Нам нужен отрицательный вещественный коэффициент при степени p^3 ($\mathrm{Re}(i\sigma_+)^3 > 0$ и $\mathrm{Re}(i\sigma_-)^3 < 0$).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+5}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(\varepsilon) = \delta_0 \varepsilon^{-1}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (3.5), (3.6), *функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется* (3.9). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^5)\,\|\varphi\|_{W_2^{l+5}(\mathbf{R})}\,.$$

Доказательство. Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^\pm \psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \Big(\psi^\pm(x - \sigma_\mp y - \frac{\alpha_2 \sigma_\pm}{2} y^3) - \psi^\pm(x) \\ - (\psi^\pm)'(x)\cdot(-\sigma_\mp y - \alpha_2\sigma_\pm y^3) - \frac{(\psi^\pm)''(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^2}{2!} \\ - \frac{(\psi^\pm)'''(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^3}{3!}\Big)\frac{dy}{y^5}. \end{aligned}$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^\pm = A_\varepsilon^\pm,\ B^\pm = \frac{\alpha_2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_\pm - \frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}P_\pm - A^\pm.$$

Тогда

$$A^\pm + B^\pm = \frac{\alpha_2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_\pm - \frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}P_\pm.$$

Так как функция $f(p) = \exp(-\frac{p^4}{4!} - \alpha_2 \frac{p^2}{2!})$ – непрерывная функция, на бесконечности убывающая сверхэкспоненциально и имеющая конечные локальные максимумы, которые зависят от коэффициента α_2, то справедливо неравенство

$$\|e^{t(A^\pm + B^\pm)} P_\pm\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant C. \tag{3.10}$$

Далее, представим

$$e^{tA^\pm} P_M \varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm + B^\pm)} \varphi^\pm(x) = (e^{tA^\pm} - e^{t(A^\pm + B^\pm)}) P_M \varphi^\pm(x)$$
$$- e^{t(A^\pm + B^\pm)} (I - P_M) \varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ воспользуемся формулой (1.6) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^-, норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Вычислим преобразование Фурье функции $B^- \varphi_M(x)$. Имеем

$$B^- \varphi_M(x) = \varphi_M^-(x) \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(e^{ip(\sigma_+ y + \frac{\alpha_2 \sigma_- y^3}{2})} - 1 - G^+(p, y) - g_4^-(p) y^4 \right) \frac{dy}{y^5},$$

где

$$g_4^-(p) = \frac{2\alpha_2 (ip)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ip)^4}{4!} \sigma_+^4 = \frac{(ip)^2 \alpha_2}{2} - \frac{(ip)^4}{4!}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|B\varphi(p)| \leqslant C\varepsilon |\widehat{\varphi}(p)| |p|^5. \tag{3.11}$$

Надо показать, что $\left\| e^{tA} \right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant C$. Напомним, что $|p| < M(\varepsilon)$.

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора выражения

$$e^{ip(\sigma_+ y + \frac{\alpha_2 \sigma_- y^3}{2})} - 1 - G^-(p, y).$$

Заметим, что в силу малости слагаемых типа $p^k y^{k+l}$ для $l \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$ при $|p| < \delta_0 \varepsilon^{-1}$, в показателе экспоненты главный член имеет порядок $-\frac{p^4}{4!}$. То есть

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant C.$$

Завершает доказательство неравенство

$$\|V_2\|^2_{W_2^l} \leqslant \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \leqslant \frac{1}{M^{10}} \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2(l+5)})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \leqslant C\|\varphi\|^2_{W_2^{l+5}}\varepsilon^{10}.$$

□

Как и в Главе 1, вместо интеграла по пуассоновской случайной мере для построения вероятностной аппроксимации задачи Коши можно использовать случайные блуждания, на шаг блуждания которых наложены некоторые условия на моменты (можно рассматривать суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, у которых существует экспоненциальный момент).

Глава 4

Невероятностные безгранично делимые распределения

Естественным обобщением устойчивой случайной величины является безгранично делимая случайная величина с мерой Леви Λ.

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $\mathbf{R}$ с интенсивностью $\mathbf{E}\nu(dx) = \Lambda(dx)$. В этой главе, мы рассмотрим нетипичный для теории вероятностей случай, когда $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^2 \wedge 1)d\Lambda(x) = \infty$. Предположим выполнение одного из условий: $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^4 \wedge 1)d\Lambda(x) < \infty$ или $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^4 \wedge 1)d\Lambda(x) = \infty$, но $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^6 \wedge 1)d\Lambda(x) < \infty$. Также предположим, что Λ – симметричная мера с плотностью $\lambda(x) = g(|x|)\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$, $g(x) \in C^1(\mathbf{R})$, $0 < B \leqslant g(x) \leqslant C$, $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$.

Для $\varepsilon > 0$ через ξ_ε обозначим случайную величину (интеграл по пуассоновской мере ν)

$$\xi_\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} x\nu(dx).$$

В последней формуле не существует предела при $\varepsilon \to 0$ при наших предположениях на меру $\Lambda(dx)$. Через p_ε обозначим плотность распределения случайной величины ξ_ε. некоторую последовательность функций ζ_ε из $L_2(\mathbf{R})$, такую что последовательность $p_\varepsilon * \zeta_\varepsilon$ сходится в $L_2(\mathbf{R})$ к плотности q знакопеременной меры Q.

Далее покажем, что распределение Q является предельным для сумм независимых случайных величин. Именно, рассмотрим последовательность серий

$$\begin{array}{llll} \xi_{11} & & & \\ \xi_{21} & \xi_{22} & & \\ \dots & & & \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{array}$$

независимых в каждой серии одинаково распределенных симметричных случайных величин. Предположим, что функция распределения F_n случайной величины ξ_{nk} удовлетворяет условию для любого $x \neq 0$

$$\begin{aligned} nF_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x), \qquad x < 0, \\ n(1 - F_n(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x), \quad x > 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_{nj}$, а через p_n соответствующую плотность. В параграфе 4.3 мы построим последовательность функций $\zeta_n, n \in \mathbf{N}$, такую что соответствующая последовательность $p_n + p_n * \zeta_n$ сходится в $L_2(\mathbf{R})$ к плотности q знакопеременной меры.

Соответствующая предельная мера Q является знакопеременной и, соответственно, невероятностной. Вне конечного интервала функция q положительна. В параграфе 4.4, используя положительную часть предельной меры, мы докажем утверждение об асимптотике больших уклонений сумм независимых случайных величин.

В этой главе, мы используем другой вариант построения регуляризованных выражений при $\alpha \in (2, 4)$. С одной стороны, этот способ проще, так как он не использует идеи комплексного анализа, с другой стороны, для характеристической функции обобщенного распределения мы получим вид, отличающийся от "классического" (тем не менее, мы покажем, что вероятностный смысл не теряется).

4.1 Безгранично делимые распределения

Рассмотрим представление Леви-Хинчина для безгранично делимой случайной величины.

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $\mathbf{R}$ с интенсивностью $\mathbf{E}\nu(dx) = \Lambda(dx)$, причем мера $\Lambda(x)$ – симметрична и удовлетворяет

$$\int\limits_{\mathbf{R}} (x^2 \wedge 1) d\Lambda(x) < \infty, \tag{4.2}$$

то есть является мерой Леви некоторого безгранично делимого распределения.

Обозначим множества $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\mathbf{B}_\varepsilon = \{x : \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1\}$.

Для $\varepsilon > 0$ через ξ_ε обозначим случайную величину (интеграл по пуассоновской мере ν)

$$\xi_\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}_\varepsilon} x\nu(dx) = \int\limits_{\mathbf{B}_\varepsilon} x\nu(dx) + \int\limits_{|x|>1} x\nu(dx) = \sum_{x\in\{X\cap\mathbf{B}_\varepsilon\}} x + \sum_{x\in\{X\cap\{|x|>1\}\}} x. \tag{4.3}$$

Известно, что если выполнено (4.2), то существует предел

$$\xi = (L_2)\lim_{\varepsilon\to0}\xi_\varepsilon = (L_2)\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\mathbf{B}_\varepsilon} x\widetilde{\nu}(dx) + \int\limits_{|x|>1} x\nu(dx), \tag{4.4}$$

причем случайная величина ξ имеет безгранично делимое распределение с мерой Леви Λ. Характеристическая функция $f(p)$ случайной величины ξ равна

$$f(p) = \exp\Big(\int\limits_{\mathbf{R}} \big(e^{ipx} - 1 - ipx\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\big)d\Lambda(x)\Big). \tag{4.5}$$

Хорошо известно [4], что безграничная делимость вероятностного распределения является как необходимым, так и достаточным условием того, что данное распределение является предельным для распределений сумм независимых случайных величин. Именно, рассмотрим последовательность серий

$$\begin{array}{lllll} \xi_{11}, & \ldots, & \xi_{1k_1} & & \\ \xi_{21}, & \xi_{22}, & \ldots, & \xi_{2k_2} & \\ & & \ldots & & \\ \xi_{n1}, & \xi_{n2}, & \ldots, & \xi_{nk_n-1}, & \xi_{nk_n} \end{array}$$

независимых в каждой серии случайных величин.

Теорема 4.1. *Для того чтобы при надлежащем выборе постоянных A_n функция $F(x)$ могла быть предельной в смысле слабой сходимости распределений для сумм*

$$Z_n = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nk_n} - A_n \tag{4.6}$$

независимых бесконечно малых случайных слагаемых, необходимо и достаточно, чтобы она была безгранично делимой.

Условия сходимости к заданному безгранично делимому распределению были получены Б. В. Гнеденко.

Теорема 4.2. *Для того чтобы при надлежащем выборе постоянных A_n функции распределения сумм (4.6) слабо сходились к безгранично делимой функции распределения $F(x)$, необходимо и достаточно, чтобы*

1.

$$k_n F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x), x < 0,$$

$$k_n(1 - F_n(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x), x > 0,$$

во всех точках непрерывности $\Lambda(x)$.

2.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} k_n \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_n(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{\lim_{n\to\infty}} k_n \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_n(x) = \sigma^2,$$

где $\Lambda(x)$ и σ^2 определяются формулой Леви для закона $F(x)$, а $F_n(x)$ – функции распределения величин ξ_{nk}.

Доказательство теорем 4.1 и 4.2 см. в [4].

4.2 Сходимость в $L_2(\mathbf{R})$ регуляризованных распределений стохастических интегралов

Пусть $\nu(dx)$ – пуассоновская случайная мера на $\mathbf{R}$ с интенсивностью $\Lambda(dx)$. Как и раньше, предполагаем, что Λ – симметричная мера. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим случайную величину

$$\xi_\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}_\varepsilon} x\nu(dx), \tag{4.7}$$

где $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Предположим, что мера Λ имеет следующий вид: $d\Lambda(x) = \lambda(x)dx$, где $\lambda(x) = g(|x|)\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$, $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$, а функция $g(x)$ ограничена сверху и снизу, именно

$$0 < B \leqslant g(x) \leqslant C. \tag{4.8}$$

В этом случае $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^2 \wedge 1)d\Lambda(x) = \infty$ и в выражении (4.5) стоит расходящийся интеграл.

Регуляризуем выражение, стоящее под знаком интеграла, в (4.5). При регуляризации будем умножать характеристическую функцию на некоторую специально выбранную функцию $\widehat{\omega}_\varepsilon$. Эта операция соответствует свертке плотности p_ε распределения случайной величины ξ_ε с функцией ω_ε.

В случае $\alpha \in (2,4)$ положим

$$\widehat{\omega}_\varepsilon(p) = \exp\Big(\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\big(\frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\big)d\Lambda(x)\Big), \tag{4.9}$$

а при $\alpha \in (4,6)$

$$\widehat{\omega}_\varepsilon(p) = \exp\Big(\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\big(\frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)d\Lambda(x)\Big). \tag{4.10}$$

Через $\widehat{q}_\varepsilon(p)$ обозначим регуляризованную характеристическую функцию. При $\alpha \in (2,4)$ имеем

$$\widehat{q}_\varepsilon(p) = \exp\Big(\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\big(e^{ipx} - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\big)d\Lambda(x)\Big)$$
$$= \exp\Big(2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\big)d\Lambda(x)\Big),$$

а при $\alpha \in (4,6)$

$$\widehat{q}_\varepsilon(p) = \exp\Big(\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\big(e^{ipx} - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)d\Lambda(x)\Big)$$
$$= \exp\Big(2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)d\Lambda(x)\Big).$$

Теорема 4.3. *Существует L_2-предел*

$$\widehat{q} = (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{q}_\varepsilon,$$

где при $\alpha \in (2,4)$

$$\widehat{q}(p) = \exp\Big(2\int\limits_0^\infty \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\big)d\Lambda(x)\Big), \tag{4.11}$$

при $\alpha \in (4,6)$

$$\widehat{q}(p) = \exp\Big(2\int\limits_0^\infty \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)d\Lambda(x)\Big). \tag{4.12}$$

Доказательство. Сходимость при каждом $p \in \mathbf{R}$ очевидна. Покажем, что сходимость имеет место также и в смысле $L_2(\mathbf{R})$.

При $\alpha \in (2,4)$ имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}} \widehat{q}_\varepsilon(p) = \exp\big(2\int\limits_\varepsilon^{+\infty}(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x))d\Lambda(x)\big)$$

$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}} \exp\big(2C|p|^\alpha \int\limits_{\varepsilon|p|}^\infty (\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!})\frac{dy}{y^{1+\alpha}} - \frac{2p^4}{4!}B\int\limits_\varepsilon^1 \frac{x^4}{x^{1+\alpha}}dx\big)$$

$$\leqslant \exp\big(c_0|p|^\alpha - \frac{2p^4}{4!(4-\alpha)}B(1 - \frac{1}{2^{4-\alpha}})\big) \leqslant \exp(c_0|p|^\alpha - c_1p^4),$$

где $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$. Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем $\widehat{q} = (L_2)\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\widehat{q}_\varepsilon$.

Рассмотрим случай $\alpha \in (4,6)$. Сначала выберем $K > 0$ так, чтобы для $|y| > K$ выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{y^4}{4!} > \cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}.$$

При $|p|\varepsilon \geqslant K$ имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \widehat{q}_\varepsilon(p) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \exp\Big(2\int\limits_\varepsilon^\infty \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big)$$

$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \exp\Big(2|p|^\alpha B\int\limits_{|p|\varepsilon}^\infty \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)$$

$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \exp\big(-|p|^\alpha B\int\limits_{|p|}^\infty \frac{y^4}{4!}\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\big) \leqslant \exp\big(\frac{-Bp^4}{4!(\alpha-4)}\big),$$

а при $|p|\varepsilon < K$ имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \widehat{q}_\varepsilon(p) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \exp\Big(2\int\limits_\varepsilon^\infty \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big)$$

$$\leqslant \exp\Big(2B|p|^\alpha \int\limits_K^\infty \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\big)\frac{1}{y^{1+\alpha}}dy\Big).$$

Снова используя теорему Лебега, получаем $\widehat{q} = (L_2)\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \widehat{q}_\varepsilon$. □

Обозначим через q_ε обратное преобразование Фурье функции $\widehat{q}_\varepsilon$. Из теоремы 4.3 следует L_2–сходимость q_ε при $\varepsilon \to 0$. Обозначим

$$q = \big(L_2\big)\lim_{\varepsilon\to 0} q_\varepsilon. \tag{4.13}$$

Заметим, что $\int\limits_{\mathbf{R}} q(x)dx = \widehat{q}(0) = 1$ и $\int\limits_{\mathbf{R}} x^2 q(x)dx = -\widehat{q}''(0) = 0$. Следовательно, q – плотность знакопеременной меры $\mathcal{Q}$ на $\mathbf{R}$, полный интеграл от которой равен 1, а полная вариация конечна.

Таким образом, не существует L_2–предела у последовательности p_ε при $\varepsilon \to 0$, но есть L_2–предел у последовательности q_ε.

4.3 Сходимость в $L_2(\mathbf{R})$ регуляризованных распределений сумм независимых случайных величин

Рассмотрим последовательность серий

$$\begin{array}{llll} \xi_{11} & & & \\ \xi_{21} & \xi_{22} & & \\ \dots & & & \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{array}$$

независимых в каждой серии одинаково распределенных симметричных случайных величин. Предположим, что функция распределения F_n случайной величины ξ_{nk} удовлетворяет условию

$$nF_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x), \qquad x<0,$$
$$n(1-F_n(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x), \quad x>0 \tag{4.14}$$

для любого $x \neq 0$. Дополнительно предположим, что для некоторых констант $0 < \gamma_0 < 1$ и $\mu > 0$ характеристическая функция $f_{\xi_n}(p)$ случайной величины ξ_{nk} удовлетворяет условию

$$\sup_{p>n^{1/\alpha}} f_{\xi_n}(p) \leqslant 1 - \mu n^{-\gamma_0}. \tag{4.15}$$

Как и выше, предполагаем, что Λ – симметричная мера с плотностью $\lambda(x) = g(|x|)\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$, $g(x) \in C^1(\mathbf{R})$, $0 < B \leqslant g(x) \leqslant C$, $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. Обозначим через $\Lambda_n(x) = nF_n(x)$. Предположим, что у $\Lambda_n(x)$ существует плотность $\lambda_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}$. Обозначим через $h_n(x) = (g(x) - g_n(x))\mathbf{1}_{[n^{-1/\alpha},+\infty)}$. Предположим, что выполнено следующее условие

$$\|h_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}}|h_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.16}$$

и существует такая константа $D > 0$, что

$$g_n(x) \leqslant Dn^{1/\alpha}x^{1+\alpha} \tag{4.17}$$

при $x \in [0, n^{-1/\alpha})$. Дополнительно предположим, что существует функция $h(x) \in L_1(\mathbf{R})$, такая что

$$|h_n(x)| \leqslant h(x). \tag{4.18}$$

Условия (4.15)–(4.18) выполнены, например, для случая, когда $g_n(x) = g(x)\cdot\mathbf{1}_{[n^{-1/\alpha},+\infty)}$.

Мы рассмотрим распределения сумм независимых случайных величин $\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_{nj}$. Такая последовательность распределений не имеет слабого предела. Покажем, что после некоторой регуляризации эта последовательность сходится к знакопеременной мере с плотностью q. Мы будем превращать последовательность распределений сумм $\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_{nj}$ в сходящуюся с помощью свертки со специально выбранной последовательностью быстро осциллирующих функций. Эта последовательность выбирается по-разному для $\alpha \in (2,4)$ и $\alpha \in (4,6)$. Эти случаи мы рассмотрим отдельно.

4.3.1 Случай $\alpha \in (2,4)$

Характеристическая функция $f_n(p)$ суммы независимых случайных величин $\xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$, где функция распределения каждой из случайных величин удовлетворяет (4.14), имеет вид

$$f_n(p) = \Big(1 + \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}} + \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} - \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big)\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} - \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big)^n. \quad (4.19)$$

Введем обозначения

$$V_n(p) = 2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}},$$

$$v_n(p) = 2 \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}},$$

$$w_n(p) = 2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big)\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}.$$

В этих обозначениях

$$f_n(p) = \Big(1 + \frac{1}{n}V_n(p) + \frac{1}{n}v_n(p) - \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{2}{n}\int\limits_0^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)\Big)^n.$$

Лемма 4.1. *При $n \to +\infty$ справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{2!}d\Lambda_n(x) = \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \frac{x^2}{2!}d\Lambda(x)\big(1 + o(1)\big),$$

при этом существуют константы $\widetilde{B} > 0$ и $\widetilde{C} > 0$, такие что $\frac{\widetilde{B}}{n^{2/\alpha}} \leqslant \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \frac{x^2}{2!}d\Lambda(x) \leqslant \frac{\widetilde{C}}{n^{2/\alpha}}$.

Доказательство. Представим интеграл $\frac{2}{n}\int_0^\infty \frac{x^2}{2!}d\Lambda_n(x)$ в виде суммы

$$\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{2!}d\Lambda_n(x) = \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{x^2}{2!}d\Lambda(x) + \frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} \frac{x^2}{2!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} - \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{x^2}{2!}\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}. \tag{4.20}$$

Оценим первое слагаемое в (4.20)

$$\frac{B}{n^{2/\alpha}(\alpha-2)} \leqslant \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{x^2}{2!}g(x)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} \leqslant \frac{C}{n^{2/\alpha}(\alpha-2)}.$$

Учитывая (4.17), имеем

$$\frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} \frac{x^2}{2!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} \leqslant \frac{Dn^{1/\alpha}}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} x^2dx = \frac{D}{3n^{2/\alpha+1}} = o\big(\frac{1}{n^{2/\alpha}}\big).$$

Пользуясь (4.16), получаем

$$\Big|\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{x^2}{2!}\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big| \leqslant \|h_n\|_\infty\frac{n^{-2/\alpha}}{\alpha-2} = o\big(\frac{1}{n^{2/\alpha}}\big).$$

□

Лемма 4.2. *Существуют константы $\widetilde{B}_1 > 0$ и $\widetilde{C_1} > 0$, такие что справедливо неравенство $\widetilde{B}_1|p|^\alpha \leqslant V_n(p) \leqslant \widetilde{C}_1|p|^\alpha$ при $|p| \leqslant 1$.*

Доказательство. Представим $V_n(p)$ в виде

$$V_n(p) = 2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}} = 2|p|^\alpha\int\limits_{|p|n^{-1/\alpha}}^\infty \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\big)g(\frac{y}{|p|})\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Из условия $0 < B \leqslant g(x) \leqslant C$, следует, что при при $|p| \leqslant 1$

$$\widetilde{B}_1|p|^\alpha \leqslant V_n(p) \leqslant \widetilde{C}_1|p|^\alpha,$$

где $\widetilde{B}_1 = 2B\int\limits_1^\infty\big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$ и $\widetilde{C}_1 = 2C\int\limits_0^\infty\big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$. □

Лемма 4.3. *Справедливы соотношения $\sup\limits_n v_n(p) = o\big(|p|^\alpha\big)$ и $\sup\limits_n w_n(p) = o\big(|p|^\alpha\big)$ при $p \to 0$.*

Доказательство. Можно считать, что $|p| \leqslant 1$. Представим $w_n(p)$ в виде

$$w_n(p) = 2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big)\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{1} \frac{p^4x^4}{4!}\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} + 2|p|^\alpha \int\limits_{|p|}^{\infty} \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\big)h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \quad (4.21)$$

Учитывая (4.16), имеем

$$\sup_n \Big(2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{1} \frac{p^4x^4}{4!}\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big) = o\big(|p|^\alpha\big).$$

Для оценки второго слагаемого в (4.21) рассмотрим случаи $\alpha \in (2,3]$ и $\alpha \in (3,4)$ отдельно. В случае $\alpha \in (2,3]$

$$2|p|^\alpha \int\limits_{|p|}^{\infty} \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\big)h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} \leqslant \max_{y\in[0,\infty)} \frac{\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}}{y^{1+\alpha}}|p|^\alpha$$

$$\cdot \int\limits_{|p|}^{\infty} h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)dy = K|p|^{\alpha+1}\int\limits_{1}^{\infty} h_n(t)dt \leqslant K|p|^{\alpha+1}\int\limits_{1}^{\infty} h(t)dt = o\big(|p|^\alpha\big).$$

В случае $\alpha \in (3,4)$ второе слагаемое представим в виде

$$2|p|^\alpha \int\limits_{|p|}^{\infty} \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\big)h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} \leqslant 2|p|^\alpha \int\limits_{|p|}^{1} \frac{y^4}{4!}h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$+ 2|p|^\alpha \max_{y\in[1,\infty)} \frac{\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}}{y^{1+\alpha}} \int\limits_{1}^{\infty} h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)dy \leqslant 2|p|^3 \int\limits_{1}^{\frac{1}{|p|}} h(t)|p|dt$$

$$+ 2|p|^{\alpha+1} \max_{y\in[1,\infty)} \frac{\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}}{y^{1+\alpha}} \int\limits_{0}^{\infty} h(t)dt = o\big(|p|^\alpha\big),$$

так как $h(x) \in L_1(\mathbf{R})$.

Заметим, что

$$v_n(p) = 2 \int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} \big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\big) \frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$\leqslant 2p^4 D n^{1/\alpha} \int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} \frac{x^4}{4!} dx = \frac{D}{60n^{4/\alpha}} p^4 = o\left(|p|^\alpha\right).$$

□

Лемма 4.4. *Существуют* $\varepsilon_0, d_0 > 0$*, такие что для* $|p| < \varepsilon_0$ *справедливо неравенство*

$$0 \leqslant f_n(p) \exp\Big(2 \int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)\Big) \leqslant e^{d_0|p|^\alpha}.$$

Доказательство. Используя (4.19) и неравенство $\ln x \leqslant x - 1$, справедливое при $x > 0$, получим

$$\ln\Big(f_n(p) \exp\big(2 \int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)\big)\Big) = \ln f_n(p) + 2 \int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)$$

$$\leqslant n\big(\frac{1}{n} V_n(p) + \frac{1}{n} v_n(p) - \frac{1}{n} w_n(p) - \frac{2}{n} \int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)\big)$$

$$+ 2 \int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x) = V_n(p) + v_n(p) - w_n(p).$$

Утверждение леммы следует из лемм 4.2 и 4.3.

□

Выберем убывающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, такую что $\chi(x) = 1$ при $x \leqslant 1$ и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$. Для каждого $\alpha \in (2, 4)$ мы выберем и зафиксируем число $\beta = \beta(\alpha)$ так, что $\beta \in (\alpha, \min(4, \frac{2\alpha}{4-\alpha} t))$, если $\alpha \in (2, 3)$, или, если $\alpha \in (3, 4)$, то $\beta = 4$.

Определим последовательность функций $\psi_n, n \in \mathbf{N}$, полагая

$$\psi_n(p) = \Big(\exp\Big\{\big(\frac{2}{n} \int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x) - \frac{\gamma p^4}{n}\big) \chi\big(\frac{|p|}{n^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}}\big)\Big\}\Big)^n, \tag{4.22}$$

где константа $\gamma > 0$ определяется формулой

$$\gamma = \int_0^1 \frac{x^4}{4!} d\Lambda(x). \tag{4.23}$$

Лемма 4.5. *Существует n_0, такое что для всех $n \geqslant n_0$*

$$\inf_p \psi_n(p) = 1. \tag{4.24}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (4.20). Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для $\varepsilon > 0$ существует число $N_1 \in \mathbf{N}$, такое что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство

$$\Big| 2 \int_0^{n^{-1/\alpha}} \frac{x^2}{2} \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx \Big| < \varepsilon$$

и существует число $N_2 \in \mathbf{N}$, такое что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство

$$\Big| \frac{2}{n} \int_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \frac{x^2}{2} \frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} \Big| \leqslant \frac{\|h_n\|_\infty}{(\alpha-2)n^{2/\alpha}} < \frac{\varepsilon}{(\alpha-2)n^{2/\alpha}}.$$

Тогда для фиксированного $\varepsilon > 0$ и $n > N = \max(N_1, N_2)$ справедливо неравенство

$$\frac{2}{n} \int_0^{\infty} \frac{p^2 x^2}{2!} d\Lambda_n(x) \geqslant \frac{p^2(B-\varepsilon)}{(\alpha-2)n^{2/\alpha}} - \frac{\varepsilon}{n} p^2.$$

Функция $\psi_n(p)$ отлична от 1 только при $|p| \leqslant 2n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}$. Покажем, что для таких значений p и достаточно больших n справедливо неравенство

$$\frac{\gamma p^4}{n} \leqslant p^2 \Big(\frac{B-\varepsilon}{(\alpha-2)n^{2/\alpha}} - \frac{\varepsilon}{n} \Big)$$

или

$$|p| \leqslant \frac{n^{1/2}}{n^{1/\alpha}} \sqrt{\frac{B-\varepsilon}{\gamma(\alpha-2)}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon(\alpha-2)}{C+1} \frac{n^{2/\alpha}}{n}}.$$

Выберем $\varepsilon < \frac{C+1}{\alpha-2}$. Тогда

$$|p| \leqslant \sqrt{\frac{2B}{\gamma(\alpha-2)}} \frac{n^{1/2}}{n^{1/\alpha}}.$$

Это равносильно следующему условию на показатели

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha},$$

что эквивалентно условию на показатель β

$$\beta < \frac{2\alpha}{4-\alpha}.$$

□

Отметим, что последовательность функций $f_n(p)$, заданная формулой (4.19), не имеет предела. С помощью умножения на функцию ψ_n, заданную формулой (4.22), получим сходящуюся последовательность.

Теорема 4.4. *Последовательность $f_n\psi_n$ сходится в $L_2(\mathbf{R})$ при $n\to\infty$ к функции $\widehat{q}$, заданной формулой* (4.11).

Доказательство. Сначала покажем, что при $n\to\infty$ $f_n(p)\psi_n(p)\to\widehat{q}(p)$ для каждого $p\in\mathbf{R}$.

Заметим, что для каждого фиксированного p и достаточно больших n, таких что $|p|n^{1/\beta-1/\alpha}<1$, имеем

$$f_n(p)\psi_n(p) = \Big[1+\frac{1}{n}V_n(p)+\frac{1}{n}v_n(p)-\frac{1}{n}w_n(p)-\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)\Big]^n$$
$$\cdot\Big(\exp\big(\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)\big)\Big)^n\exp\big(-\gamma p^4\big).$$

Из лемм 4.2 и 4.3, получаем

$$f_n(p)\psi_n(p) = \Big[1+\frac{1}{n}V_n(p)+\frac{1}{n}v_n(p)-\frac{1}{n}w_n(p)-\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)\Big]^n$$
$$\cdot\Big(1+\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)+o\big(\frac{1}{n}\big)\Big)^n\exp\big(-\gamma p^4\big)$$
$$=\Big[1+\frac{1}{n}V_n(p)+o\big(\frac{1}{n}\big)\Big]^n\exp\big(-\gamma p^4\big)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\widehat{q}(p).$$

Покажем теперь, что $f_n\psi_n$ сходится к $\widehat{q}$ не только поточечно, но также и в смысле $L_2(\mathbf{R})$.

Представим $f_n(p)\psi_n(p)$ в виде

$$f_n(p)\psi_n(p) = A_n(p)+B_n(p),$$

где

$$A_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\mathbf{1}_{[0,2n^{1/\alpha-1/\beta})}(p)$$

и

$$B_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\mathbf{1}_{[2n^{1/\alpha-1/\beta},\infty)}(p).$$

Заметим, что для каждого $p \in \mathbf{R}$ $A_n(p) \to \widehat{q}(p)$ при $n \to \infty$, а в силу лемм 4.4 и 4.5 функции A_n^2 мажорируются функцией $e^{2d_0|p|^\alpha - 2\gamma p^4}$. Используя теорему Лебега, получаем, что $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q}$ в $L_2(\mathbf{R})$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\|B_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Докажем вспомогательные леммы. $\square$

Лемма 4.6. *Существует $K > 0$, такое что*

$$|f_{\xi_n}(p)| \leqslant \frac{Kn^{1/\alpha}}{|p|}. \tag{4.25}$$

Доказательство. Представим характеристическую функцию $f_{\xi_n}(p)$ случайной величины ξ_{nk} в виде

$$f_{\xi_n}(p) = \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \cos(px)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}} + \frac{2}{n}\int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} \cos(px)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} - \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \cos(px)\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}. \tag{4.26}$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. Из условия (4.8) и формулы интегрирования по частям следует, что

$$\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \cos(px)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}} \leqslant \frac{2C}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \cos(px)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$= -\frac{2C}{n}\frac{\sin(pn^{-1/\alpha})}{p}n^{1+1/\alpha} + \frac{2C(1+\alpha)}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \frac{\sin(px)}{p}\frac{dx}{x^{2+\alpha}}.$$

Тогда для первого слагаемого в (4.26) справедливо неравенство

$$\Big|\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \cos(px)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big| \leqslant \frac{2Cn^{1/\alpha}}{|p|} + \frac{2Cn^{1/\alpha}}{|p|} = \frac{4Cn^{1/\alpha}}{|p|}.$$

Из (4.16) следует, что

$$\Big|\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \cos(px)\frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx\Big| \leqslant \frac{2}{n}\|h_n\|_\infty\Big|\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \cos(px)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big| \leqslant \frac{4n^{1/\alpha}}{|p|}\|h_n\|_\infty,$$

а из (4.17) следует неравенство

$$\Big|\frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}}\cos(px)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big|\leqslant\frac{2Dn^{1/\alpha}}{n|p|}.$$

□

Лемма 4.7. *При $u\in[n^{-1/\beta},1)$ справедливо соотношение*

$$f_{\xi_n}\big(n^{1/\alpha}u\big)=1-d_nu^2+O\big(|u|^\alpha\big),$$

где $B\leqslant d_n\leqslant C$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}f_{\xi_n}(p)=1-\frac{p^2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}x^2\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}}+\frac{p^2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}x^2\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\\+\frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}}\big(\cos(px)-1\big)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}+\frac{2}{n}|p|^\alpha\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}\big)g\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\-\frac{2}{n}|p|^\alpha\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}\big)h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Из условия (4.8) следует, что

$$\frac{B}{n^{2/\alpha}}\leqslant\frac{1}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}x^2\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}}\leqslant\frac{C}{n^{2/\alpha}},$$

а в силу условия (4.16) справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}x^2\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}=o\big(\frac{1}{n^{2/\alpha}}\big).$$

В силу (4.17), имеем

$$\sup_{n^{1/\alpha-1/\beta}<p<n^{1/\alpha}}\Big|\frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}}(\cos(px)-1)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big|\leqslant\frac{4D}{n}.$$

Для пятого слагаемого в (4.27) справедлива оценка

$$\sup_{n^{1/\alpha-1/\beta}<p<n^{1/\alpha}} \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \Big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\Big) g\Big(\frac{y}{|p|}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} \leqslant \frac{-\pi C}{n\Gamma(1+\alpha)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}.$$

Из (4.16), (4.18) следует, что

$$\sup_{n^{1/\alpha-1/\beta}<p<n^{1/\alpha}} \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \Big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\Big) h_n\Big(\frac{y}{|p|}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Таким образом, справедливо следующее равенство

$$f_{\xi_n}(n^{1/\alpha}u) = 1 - d_n u^2 + O\big(|u|^\alpha\big).$$

□

Вернемся к доказательству теоремы 4.4.

Доказательство. Для нормы $\|B_n\|_{L_2}$ справедливо соотношение

$$\|B_n\|^2_{L_2} = \int\limits_{2n^{1/\alpha-1/\beta}}^{\infty} dp\Big(\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \cos(px)\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx\Big)^{2n} = \int\limits_{2n^{1/\alpha-1/\beta}}^{\infty} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n}.$$

Из (4.15), (4.25) следует, что

$$\begin{aligned}\|B_n\|^2_{L_2} = \int\limits_{2n^{1/\alpha-1/\beta}}^{n^{1/\alpha}} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n} + \int\limits_{n^{1/\alpha}}^{Kn^{1/\alpha}} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n} + \int\limits_{Kn^{1/\alpha}}^{\infty} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n} \\ \leqslant n^{1/\alpha}\big(1-4d_n n^{-2/\beta}\big)^{2n} + \big(1-\mu n^{-\gamma}\big)^{2n} n^{1/\alpha}(K-1) + \frac{Kn^{1/\alpha}}{(2n-1)}.\end{aligned}$$

Заметим, что последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$.

□

4.3.2 Случай $\alpha \in (4,6)$

Характеристическую функцию $f_n(p)$ случайной величины $\xi_{n1}+\ldots+\xi_{nn}$ можно представить в виде

$$f_n(p)=\Big(1+\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos(px)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$+\frac{2}{n}\int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}}\big(\cos(px)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}dx$$

$$-\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos(px)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$-\frac{2}{n}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)+\frac{2}{n}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{p^4x^4}{4!}d\Lambda_n(x)\Big)^n. \quad (4.28)$$

Введем обозначения

$$V_n(p)=-2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos(px)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}},$$

$$v_n(p)=-2\int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}}\big(\cos(px)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}$$

и

$$w_n(p)=-2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos(px)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}.$$

В этих обозначениях

$$f_n(p)=\Big(1-\frac{1}{n}V_n(p)-\frac{1}{n}v_n(p)+\frac{1}{n}w_n(p)-\frac{2}{n}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)+\frac{2}{n}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{p^4x^4}{4!}d\Lambda_n(x)\Big)^n.$$

Лемма 4.8. *При $n\to+\infty$ справедливы соотношения*

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda_n(x)=\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda(x)\big(1+o(1)\big),$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{p^4x^4}{4!}d\Lambda_n(x)=\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{p^4x^4}{4!}d\Lambda(x)\big(1+o(1)\big),$$

при этом существуют положительные константы $\widetilde{B}_2$, $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{B}_3$ и $\widetilde{C}_3$, такие что $\frac{\widetilde{B}_2}{n^{2/\alpha}} \leqslant \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda(x) \leqslant \frac{\widetilde{C}_2}{n^{2/\alpha}}$ и $\frac{\widetilde{B}_3}{n^{4/\alpha}} \leqslant \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^4}{4!}d\Lambda(x) \leqslant \frac{\widetilde{C}_3}{n^{4/\alpha}}$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{2}{n}\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda_n(x) = \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda(x) + \frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}}\frac{x^2}{2!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} - \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}\frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx. \tag{4.29}$$

Из условия (4.8) следует

$$\frac{B}{n^{2/\alpha}(\alpha-2)} \leqslant \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}} \leqslant \frac{C}{n^{2/\alpha}(\alpha-2)}.$$

Учитывая неравенство (4.17), получим

$$\frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}}\frac{x^2}{2!}\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx \leqslant \frac{D}{3n^{2/\alpha+1}} = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Из условия (4.16) следует, что

$$\Big|\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big| \leqslant \|h_n\|_\infty\frac{n^{-2/\alpha}}{\alpha-2} = o\Big(\frac{1}{n^{2/\alpha}}\Big).$$

Представим

$$\frac{2}{n}\int\limits_0^{\infty}\frac{x^4}{4!}d\Lambda_n(x) = \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^4}{4!}d\Lambda(x) + \frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}}\frac{x^4}{4!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} - \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^4}{4!}\frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx. \tag{4.30}$$

Из условия (4.8) следует, что

$$\frac{B}{12n^{4/\alpha}(\alpha-4)} \leqslant \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^4}{4!}\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}} \leqslant \frac{C}{12n^{4/\alpha}(\alpha-4)},$$

а из неравенства (4.17) –

$$\frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}}\frac{x^4}{4!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} \leqslant \frac{D}{60n^{4/\alpha+1}} = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

В силу условия (4.16), имеем

$$\Big|\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^4}{4!}\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big| \leqslant \frac{\|h_n\|_\infty}{12}\frac{n^{-4/\alpha}}{\alpha-4} = o\big(\frac{1}{n^{4/\alpha}}\big).$$

□

Лемма 4.9. *Для* $|p| \leqslant 1$ *существуют положительные константы* $\widetilde{B}_4$ *и* $\widetilde{C}_4$, *такие что справедливо неравенство* $\widetilde{B}_4|p|^\alpha \leqslant V_n(p) \leqslant \widetilde{C}_4|p|^\alpha$.

Доказательство. Представим $V_n(p)$ в виде

$$V_n(p) = -2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{g(x)dx}{x^{1+\alpha}} =$$

$$-2|p|^\alpha\int\limits_{|p|n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\big)g\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Из условия $0 < B \leqslant g(x) \leqslant C$ следует, что при $|p| \leqslant 1$

$$\widetilde{B}_4|p|^\alpha \leqslant V_n(p) \leqslant \widetilde{C}_4|p|^\alpha,$$

где $\widetilde{B}_4 = 2B\int\limits_1^\infty\big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$ и $\widetilde{C}_4 = 2C\int\limits_0^\infty\big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$. □

Лемма 4.10. *Справедливы соотношения* $\sup\limits_n v_n(p) = o\big(|p|^\alpha\big)$ *и* $\sup\limits_n w_n(p) = o\big(|p|^\alpha\big)$ *при* $p \to 0$.

Доказательство. Можно считать, что $|p| \leqslant 1$. Представим $w_n(p)$ в виде

$$w_n(p) = -2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$\leqslant -2|p|^\alpha\int\limits_{|p|}^{\infty}\big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\big)h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + 2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{1}\frac{p^6x^6}{6!}\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}. \quad (4.31)$$

Из условия (4.16) следует, что

$$\sup_n\Big(2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{1}\frac{p^6x^6}{6!}\frac{h_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big) = o\big(|p|^\alpha\big).$$

Чтобы оценить первое слагаемое в (4.31) рассмотрим отдельно случаи $\alpha \in (4,5]$ и $\alpha \in (5,6)$. В случае $\alpha \in (4,5]$ имеем

$$
\begin{aligned}
-2|p|^{\alpha}\int_{p|}^{\infty}\big(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^4}{4!}\big)h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}& \\
\leqslant \max_{y\in[0,\infty)}\big(-\frac{\cos y-1+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^4}{4!}}{y^{1+\alpha}}\big)|p|^{\alpha}\int_{|p|}^{\infty}h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)dy& \\
\leqslant K|p|^{\alpha+1}\int_{1}^{\infty}h(t)dt=o\big(p|^{\alpha}\big).&
\end{aligned}
$$

В случае $\alpha \in (5,6)$ первое слагаемое в (4.31) представим в виде

$$
\begin{aligned}
-2|p|^{\alpha}\int_{|p|}^{\infty}\big(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^4}{4!}\big)h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}& \\
\leqslant 2|p|^{\alpha}\int_{|p|}^{1}\frac{y^6}{6!}h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}+2|p|^{\alpha}\max_{y\in[1,\infty)}\frac{\big|\cos y-1+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^4}{4!}\big|}{y^{1+\alpha}}& \\
\cdot\int_{1}^{\infty}\big|h_n\big(\frac{y}{|p|}\big)\big|dy\leqslant 2|p|^{6}\int_{1}^{\frac{1}{|p|}}h_n(t)dt+2|p|^{\alpha+1}K_1\int_{0}^{\infty}h(t)dt=o\big(|p|^{\alpha}\big),&
\end{aligned}
$$

так как $h(x)\in L_1(\mathbf{R})$.

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
v_n(p)=-2\int_{0}^{n^{-1/\alpha}}\big(\cos(px)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\big)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}& \\
\leqslant 2p^6Dn^{1/\alpha}\int_{0}^{n^{-1/\alpha}}\frac{x^6dx}{6!}=\frac{2D}{7!n^{6/\alpha}}p^6=o\big(|p|^{\alpha}\big).&
\end{aligned}
$$

□

Введем некоторые новые обозначения. Обозначим

$$
\sigma_n^2=\frac{2}{n}\int_{0}^{\infty}x^2d\Lambda_n(x) \tag{4.32}
$$

и

$$m_n = \frac{2}{n}\int\limits_0^\infty x^4 d\Lambda_n(x). \tag{4.33}$$

Лемма 4.11. *Существуют $\varepsilon_0, d_0 > 0$, такие что для $|p| < \varepsilon_0$ справедливо неравенство*

$$0 \leqslant f_n(p)\exp\big(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{(m_n - 3\sigma_n^4)p^4}{24}\big)^n \leqslant e^{-d_0|p|^\alpha}$$

и

$$\exp\big(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{(m_n - 3\sigma_n^4)p^4}{24}\big) \geqslant 1. \tag{4.34}$$

Доказательство. Справедливость неравенства (4.34) в малой окрестности нуля очевидна.

Используя (4.28) и неравенство $\ln x \leqslant x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$, справедливое при $x \in (0,1)$, получим

$$\begin{aligned}\ln\Big(f_n(p)\exp\big(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{(m_n - 3\sigma_n^4)p^4}{24}\big)^n\Big) = \ln f_n(p) + \frac{np^2\sigma_n^2}{2}\\ - \frac{np^4(m_n - 3\sigma_n^4)}{24} \leqslant n\big(- \frac{1}{n}V_n(p) - \frac{1}{n}v_n(p) + \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{p^2\sigma_n^2}{2}\\ + \frac{p^4 m_n}{4!} - \frac{p^2\sigma_n^2}{2}\frac{V_n + \nu_n - w_n}{n} + \frac{p^2\sigma_n^2}{2}\frac{p^4 m_n}{4!} - \frac{p^4\sigma_n^4}{4}\big)\\ + \frac{np^2\sigma_n^2}{2} - \frac{np^4(m_n - 3\sigma_n^4)}{24} = -V_n(p) - v_n(p) + w_n(p)\\ + \frac{p^2\sigma_n^2}{2}\big(- V_n(p) - v_n(p) + w_n(p)\big) + \frac{p^4 m_n}{24}.\end{aligned}$$

Утверждение леммы следует из лемм 4.9 и 4.10. □

Выберем убывающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, такую что $\chi(x) = 1$ при $x \leqslant 1$ и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$.

Определим последовательность функций $\psi_n, n \in \mathbf{N}$, полагая

$$\psi_n(p) = \Big(\exp\Big\{\big(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{(m_n - 3\sigma_n^4)p^4}{24}\big)\chi\big(\frac{|p|}{n^{1/\alpha - 1/6}}\big)\Big\}\Big)^n. \tag{4.35}$$

Последовательность функций $f_n(p)$, заданная формулой (4.28), не имеет предела. Для того, чтобы сделать эту последовательность сходящейся, умножим f_n на функцию ψ_n, заданную формулой (4.35).

Теорема 4.5. *Последовательность $f_n\psi_n$ сходится в $L_2(\mathbf{R})$ при $n \to \infty$ к функции $\widehat{q}$, заданной формулой* (4.12).

Доказательство. Сначала покажем, что при $n \to \infty$ $f_n(p)\psi_n(p) \to \widehat{q}(p)$ для каждого $p \in \mathbf{R}$.

Заметим, что для каждого фиксированного p и достаточно больших n, таких что $|p|n^{1/6-1/\alpha} < 1$, имеем

$$f_n(p)\psi_n(p) = \Big[1 - \frac{1}{n}V_n(p) - \frac{1}{n}v_n(p) + \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{\sigma_n^2 p^2}{2} + \frac{m_n p^4}{24}\Big]^n \cdot \Big(\exp\big(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{(m_n - 3\sigma_n^4)p^4}{24}\big)\Big)^n.$$

Из лемм 4.9 и 4.10 следует, что

$$f_n(p)\psi_n(p) = \Big[1 - \frac{1}{n}V_n(p) - \frac{1}{n}v_n(p) + \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{\sigma_n^2 p^2}{2} + \frac{m_n p^4}{24}\Big]^n \cdot \Big(1 + \frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{(m_n - 3\sigma_n^4)p^4}{24} + \frac{\sigma_n^4 p^4}{8} + o\big(\frac{1}{n}\big)\Big)^n = \Big[1 - \frac{1}{n}V_n(p) + o\big(\frac{1}{n}\big)\Big]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q}(p).$$

Покажем теперь, что $f_n\psi_n$ сходится к $\widehat{q}$ не только поточечно, но также и в смысле $L_2(\mathbf{R})$.

Представим $f_n(p)\psi_n(p)$ в виде суммы двух функций

$$f_n(p)\psi_n(p) = A_n(p) + B_n(p),$$

где

$$A_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\mathbf{1}_{[0,2n^{1/\alpha-1/6})}(p)$$

и

$$B_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\mathbf{1}_{[2n^{1/\alpha-1/6},\infty)}(p).$$

Заметим, что для каждого $p \in \mathbf{R}$ $A_n(p) \to \widehat{q}(p)$ при $n \to \infty$, а в силу леммы 4.11 функции A_n^2 мажорируются функцией $e^{-2d_0|p|^\alpha}$. Используя теорему Лебега, мы получаем, что $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q}$ в $L_2(\mathbf{R})$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\|B_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Докажем вспомогательную лемму.

$\square$

Лемма 4.12. *При* $u \in [n^{-1/6}, 1)$ *справедливо соотношение*

$$f_{\xi_n}\big(n^{1/\alpha}u\big) = 1 - d_n u^2 + O\big(|u|^\alpha\big),$$

где $B \leqslant d_n \leqslant C$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 4.7. □

Вернемся к доказательству теоремы 4.5.

Доказательство. Из определения $\|B_n\|^2_{L_2}$ представляется в следующем виде

$$\|B_n\|^2_{L_2} = \int\limits_{2n^{1/\alpha - 1/6}}^{\infty} dp\Big(\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \cos(px)\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}}\Big)^{2n}.$$

Как и при доказательстве теоремы 4.4, можно показать, что существует константа $K_1 > 0$, такая что для характеристической функции $f_{\xi_n}(p)$ случайной величины ξ_{nk} справедливо неравенство

$$|f_{\xi_n}(p)| \leqslant \frac{K_1 n^{1/\alpha}}{|p|}. \tag{4.36}$$

Преобразуем выражение для $\|B_n\|^2_{L_2}$. Из (4.15) и (4.36) следует, что

$$\|B_n\|^2_{L_2} = \int\limits_{2n^{1/\alpha-1/6}}^{n^{1/\alpha}} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n} + \int\limits_{n^{1/\alpha}}^{K_1 n^{1/\alpha}} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n}$$
$$+ \int\limits_{K_1 n^{1/\alpha}}^{\infty} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n} \leqslant n^{1/\alpha}\big(1 - 4d_n n^{-1/3}\big)^{2n}$$
$$+ (1 - \mu n^{-\gamma})^{2n} n^{1/\alpha}(K_1 - 1) + \frac{K_1 n^{1/\alpha}}{(2n-1)}.$$

Заметим, что последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$.

□

4.4 Локальные предельные теоремы для больших уклонений

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$, а через p_n обозначим соответствующую плотность. Через ζ_n обозначим обратное преобразование

Фурье функции $\psi_n - 1$. Функция ψ_n для $\alpha \in (2,4)$ определяется формулой (4.22), а для $\alpha \in (4,6)$ – формулой (4.35).

Из теорем 4.4, 4.5 следует, что последовательность $p_n + p_n * \zeta_n$ сходится в $L_2(\mathbf{R})$ к функции q, определенной (4.13).

Нам понадобится понятие слабой эквивалентности на бесконечности. Напомним соответствующее определение.

Пусть функции $f(x) > 0$ и $h(x) > 0$ при $x \geqslant a \geqslant 0$. Функции f и h слабо эквивалентны на бесконечности, если для произвольного ε существует $\delta_0 \in (0,1)$, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ найдется такое $x_0 > 0$, что при $x \geqslant x_0$ выполнены неравенства

$$(1-\varepsilon) g\big(x(1+\delta)\big) \leqslant f(x) \leqslant (1+\varepsilon) g\big(x(1-\delta)\big).$$

Будем использовать обозначение $f(x) \overset{w}{\backsim} h(x)$ при $x \to \infty$.

Теорема 4.6. *Пусть ζ – безгранично делимая случайная величина со спектральной мерой Леви $G(dx)$. Пусть $G(dx)$ ограничена и обладает непрерывной на $[0,\infty)$ плотностью $\widetilde{g}(x)$, существует $\beta_0 > 0$, такое что функция $b(x) = x\widetilde{g}(x)$ не возрастает при $x \geqslant \beta_0$,*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\widetilde{g}(x)}{\widetilde{g}(2x)} < \infty \tag{4.37}$$

и для произвольного $\lambda_0 > 1$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{G\big([\lambda_0 x, \infty)\big)}{G\big([x,\infty)\big)} < 1. \tag{4.38}$$

Тогда для плотности распределения $f(x) = \frac{d}{dx} P\{\xi \leqslant x\}$ справедливо при $x \to \infty$

$$f(x) \overset{w}{\backsim} \widetilde{g}(x).$$

Доказательство можно найти в [19], стр. 207.

Нам понадобится простое свойство преобразования Фурье.

Лемма 4.13. *Пусть $\widehat{r}$ – преобразование Фурье функции r. Пусть для некоторого $k \in \mathbf{N}$ $\widehat{r}^{(k)} \in L_1(\mathbf{R})$. Тогда для каждого $x \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство*

$$|r(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|^k} \int\limits_{\mathbf{R}} |\widehat{r}^{(k)}(p)| dp.$$

Доказательство можно найти в [10].

Лемма 4.14. *Пусть* $g(x) \in C^1(\mathbf{R}), 0 < B \leqslant g(x) \leqslant C, \alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. *Пусть существует* $\beta_0 > 0$, *такое что функция* $b(x) = \frac{g(x)}{x^\alpha}$ *не возрастает при* $x \geqslant \beta_0$. *Тогда при* $x \to \infty$

$$q(x) \overset{w}{\backsim} \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Представим плотность меры Леви в виде

$$\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} = \lambda_1(x) + \lambda_2(x),$$

где $\lambda_1(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ и удовлетворяет условию

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}, & x| \geqslant 1, \end{cases}$$

а функция $\lambda_2(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию

$$\lambda_2(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}, & |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\alpha \in (2,4)$. Представим

$$\widehat{q}(p) = \exp\Big(2\int\limits_{1/2}^{\infty}\big(\cos(px)-1\big)\lambda_1(x)dx\Big) \cdot \exp\Big(2\int\limits_{1/2}^{\infty}\big(\frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\big)\lambda_1(xt)dx\Big)$$
$$\cdot \exp\Big(2\int\limits_0^1\big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\big)\lambda_2(x)dx\Big) = \widehat{q_1}(p)\cdot\widehat{q_2}(p)\cdot\widehat{q_3}(p).$$

Функция $\widehat{q_1}(p)$ является характеристической функцией некоторой случайной безгранично делимой величины η. Условия (4.37) и (4.38) равносильны условиям

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{g(x)}{g(2x)} < \infty \tag{4.39}$$

и

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\int\limits_{\lambda_0 x}^{\infty}\frac{g(t)}{t^{1+\alpha}}dt}{\int\limits_{x}^{\infty}\frac{g(t)}{t^{1+\alpha}}dt} < 1 \tag{4.40}$$

соответственно.

Условие (4.39) выполнено, так как $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{g(2x)} \leqslant \frac{C}{B} < \infty$, а условие (4.40) выполнено в силу

$$0 < \frac{\int\limits_{\lambda_0 x}^{\infty} \frac{g(t)}{t^{1+\alpha}} dt}{\int\limits_{x}^{\infty} \frac{g(t)}{t^{1+\alpha}} dt} = 1 - \frac{\int\limits_{x}^{\lambda_0 x} \frac{g(t)}{t^{1+\alpha}} dt}{\int\limits_{x}^{\infty} \frac{g(t)}{t^{1+\alpha}} dt} \leqslant 1 - \frac{B}{C}\Big(1 - \frac{1}{(\lambda_0)^\alpha}\Big) < 1$$

при $\lambda_0 > 1$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 4.6, и значит, что для плотности $q_1(x)$ верно $q_1(x) \overset{w}{\backsim} \lambda_1(x)$ при $x \to \infty$, то есть при $x \to \infty$

$$q_1(x) \overset{w}{\backsim} \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}.$$

Обозначим $q_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{q}_2(p) e^{ipx} dp$ и $q_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{q}_3(p) e^{ipx} dp$. По лемме 4.13 для $q_2(x)$ и $q_3(x)$ при $x \to \infty$ выполнены соотношения

$$q_2(x) = o\big(x^{-k}\big)$$

и

$$q_3(x) = o\big(x^{-k}\big)$$

для любого натурального k.

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.6 (см. [19], стр. 207), получим

$$q(x) \overset{w}{\backsim} \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}.$$

Случай $\alpha \in (4, 6)$ доказывается аналогично.

$\square$

Покажем, что для достаточно больших $x = x(n)$ асимптотическое поведение p_n совпадаем с асимптотическим поведением q.

Дополнительно предположим, что функция $g(x) \in C^{[\alpha]+2}(\mathbf{R})$, причем справедливы оценки $|g^{(l)}(x)| \leqslant \frac{K_l}{|x|^l}$, $l = 1, 2, \ldots, [\alpha] + 2$ при $x \to \infty$.

Предположим, что для $\alpha \in (2, 4)$ характеристическая функция f_{ξ_n} случайной величины ξ_{nk} допускает представление

$$f_{\xi_n}(p) = 1 - \frac{2}{n} \int\limits_0^\infty \frac{p^2 x^2}{2!} \frac{g_n(x) dx}{x^{1+\alpha}} + \frac{1}{n} c_0(|p|)|p|^\alpha - \frac{1}{n} T_n(p) p^{[\alpha]+1}, \tag{4.41}$$

где

$$c_0(|p|) = 2\int\limits_0^\infty \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\big) g(\frac{y}{|p|}) \frac{dy}{y^{1+\alpha}},$$

$$\sup_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-1/\beta}} |T_n(p)| = \frac{\widetilde{K}}{n^\theta}, \theta > 1 - \frac{\alpha}{4}.$$

Дополнительно предположим, что функция $T_n(p)$ $[\alpha]+2$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности 0 и

$$\sup_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-1/\beta}} |T_n^{(l)}(p)| = \frac{\widetilde{K}^{(l)}}{n^\theta}, \theta > 1 - \frac{\alpha}{4}$$

при $l = 1, 2, \ldots, [\alpha]+2$.

Аналогично (4.41), предположим, что для $\alpha \in (4, 6)$ характеристическая функция $f_{\xi_n}(p)$ случайной величины ξ_{nk} допускает представление

$$f_{\xi_n}(p) = 1 - \frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!}\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx + \frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{p^4x^4}{4!}\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx - \frac{1}{n}c_2(|p|)|p|^\alpha + \frac{1}{n}T_n(p)p^{[\alpha]+1}, \quad (4.42)$$

где

$$c_2(|p|) = -2\int\limits_0^\infty \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\big) g(\frac{y}{|p|}) \frac{dy}{y^{1+\alpha}},$$

$$\sup_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-1/6}} |T_n(p)| = \frac{\widetilde{K}}{n^\theta}, \theta > 1 - \frac{\alpha}{6}.$$

Дополнительно предположим, что функция $T_n(p)$ $[\alpha]+2$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности 0 и

$$\sup_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-1/6}} \big|T_n^{(l)}(p)\big| = \frac{\widetilde{K}^{(l)}}{n^\theta}, \theta > 1 - \frac{\alpha}{6}$$

при $l = 1, 2, \ldots, [\alpha]+2$.

Через $\widehat{h}_n$ обозначим функцию

$$\widehat{h}_n(p) = f_n(p)\psi_n(p) - \widehat{q}(p).$$

Заметим, что из теорем 4.4, 4.5 следует, что $\|\widehat{h}_n\|_{L_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Теорема 4.7. *Для* $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$ *имеем*

$$\int\limits_{\mathbf{R}} |\widehat{h}_n^{([\alpha]+2)}(p)|dp \leqslant \frac{C}{n^{\varrho}},$$

где $\varrho = \min\left(\theta + \frac{\alpha}{4} - 1, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ *при* $\alpha \in (2,4)$ *и* $\varrho = \min\left(\theta + \frac{\alpha}{6} - 1, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ *при* $\alpha \in (4,6)$.

Доказательство. Напомним, что при $\alpha \in [3,4)$ мы выбрали $\beta = 4$, и выполнено $[\alpha] + 2 = 5$. Оценим $\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \left|\widehat{h}_n^{(5)}(p)\right|dp$. При $|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}$ из формулы (4.41) следует, что

$$\ln f_{\xi_n}(p) = -\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} + \frac{1}{n}c_0(|p|)|p|^\alpha - \frac{1}{n}R_n(p)p^4,$$

где функция $R_n(p)$ 5 раз непрерывно дифференцируема в окрестности нуля. Тогда при $|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}$ функция $\widehat{h}_n(p)$ может быть представлена в виде

$$\widehat{h}_n(p) = \exp\left(n\Big(\ln f_{\xi_n}(p) + \frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} - \frac{\gamma p^4}{n}\Big)\right)$$
$$- \exp\left(c_0(|p|)|p|^\alpha - \gamma p^4\right) = \exp\left(c_0(|p|)|p|^\alpha - \gamma p^4\right) \cdot \left(\exp\big(-R_n(p)p^4\big) - 1\right).$$

Следовательно

$$\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \left|\widehat{h}_n^{(5)}(p)\right|dp \leqslant \frac{C}{n^{\theta + \alpha/4 - 1}}.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.4, получим

$$\int\limits_{|p| > n^{1/\alpha - 1/4}} \left|\widehat{h}_n^{(5)}(p)\right|dp \leqslant \int\limits_{|p| > n^{1/\alpha - 1/4}} \left|\Big(\exp\big(c_0(|p|)|p|^\alpha - \gamma p^4\big)\Big)^{(5)}\right|dp$$
$$+ \int\limits_{|p| > n^{1/\alpha - 1/4}} \left|\big(f_n(p)\psi_n(p)\big)^{(5)}\right|dp \leqslant \frac{C}{n^{1 - 1/\alpha}}.$$

В случае $\alpha \in (2,3) \cup (4,6)$ теорема доказывается аналогично.

□

Из теоремы 4.7 и леммы 4.13 следует, что для каждого $x \in \mathbf{R}$ и для $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$ верно

$$\left|p_n(x) + p_n(x) * \zeta_n(x) - q(x)\right| \leqslant \frac{C}{n^\varrho |x|^{[\alpha]+2}}. \tag{4.43}$$

Из (4.43) и леммы 4.14 следует, что

$$p_n(x) + p_n(x) * \zeta_n(x) \backsim q(x)$$

при $x \to \infty$.

Далее сравним асимптотическое поведение $p_n + p_n * \zeta_n$ и p_n. Положим

$$d_n(p) = f_n(p)\psi_n(p) - f_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)(1 - \psi_n^{-1}(p)).$$

Теорема 4.8. *Для всех $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \big|d_n^{([\alpha]+2)}(p)\big| dp \leqslant C\rho_n^{[\alpha]+1-\alpha},$$

где $\rho_n = n^{1/2 - 1/\alpha} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Предположим $\alpha \in [3,4)$. Для начала покажем, что

$$\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \big|d_n^{(5)}(p)\big| dp \leqslant C\rho_n^{4-\alpha}.$$

При $|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}$ из формулы (4.41) имеем

$$d_n(p) = \exp\big(c_0(|p|)|p|^\alpha - \gamma p^4 - p^4 R_n(p)\big) \cdot \Big(1 - \exp\big(-2\int\limits_0^\infty \frac{x^2p^2}{2!}\frac{g_n(x)dx}{x^{1+\alpha}} + \gamma p^4\big)\Big).$$

Тогда

$$\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \big|d_n^{(5)}(p)\big| dp = \int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/2}} \big|d_n^{(5)}(p)\big| dp$$
$$+ \int\limits_{n^{1/\alpha - 1/2} \leqslant |p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \big|d_n^{(5)}(p)\big| dp \leqslant C_1 n^{1-2/\alpha} \int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/2}} p^{\alpha-3} dp$$
$$+ C_2 n^{1-2/\alpha} \int\limits_{n^{1/\alpha - 1/2} \leqslant |p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} p^{\alpha-5} e^{c_0(|p|)|p|^\alpha - \gamma p^4} dp \leqslant C\rho_n^{4-\alpha}.$$

Далее, учитывая, что для каждого $p \in \mathbf{R}$ и достаточно больших n справедливо (4.24), имеем при $n > n_0$

$$\int\limits_{n^{1/\alpha - 1/4} \leqslant |p| \leqslant 2n^{1/\alpha - 1/4}} \big|d_n^{(5)}(p)\big| dp \leqslant \frac{C}{n^{1-1/\alpha}}.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что $d_n(p) = 0$ при $|p| > 2n^{1/\alpha - 1/4}$.

Аналогично теорема доказывается для $\alpha \in (2,3) \cup (4,6)$.

$\square$

Для любого $\alpha \in (2,3) \cup (4,6)$ из теорем 4.7, 4.8 имеем при $x \to \infty$

$$p_n(x) = q(x) + O\Big(\frac{1}{|x|^{[\alpha]+2}}\Big) + r_n(x),$$

где

$$\Big|r_n(x)\Big| \leqslant \frac{\big(n^{1/2-1/\alpha}\big)^{[\alpha]+1-\alpha}}{|x|^{[\alpha]+2}}.$$

Отсюда следует, что асимптотическое поведение $p_n(x) \backsim q(x)$ при $x \to \infty$, если

$$\frac{\big(n^{1/2-1/\alpha}\big)^{[\alpha]+1-\alpha}}{|x|^{[\alpha]+2}} = o\big(\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}\big),$$

что эквивалентно

$$\frac{\sqrt{n}}{|x| n^{1/\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Заключение

В диссертации рассмотрены вопросы вероятностной аппроксимации решений задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений. Основные результаты состоят в следующем:

1. Построены вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана–Лиувилля с показателем $\alpha > 2$, $\alpha \notin \mathbf{N}$.

2. Построены вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором дифференцирования порядка больше двух.

3. Построена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка больше двух с постоянными коэффициентами.

4. Построены аналоги безгранично делимых распределений с "мерой Леви" Λ, удовлетворяющей условию $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^2 \wedge 1) d\Lambda(x) = \infty$. Соответствующее распределение (аналог безгранично делимого распределения) является знакопеременным и, соответственно, невероятностным. Тем не менее, в последней части работы показано, что предельная теорема о сходимости к такому распределению имеет простой вероятностный смысл, а именно, из него следует утверждение об асимптотике больших уклонений для сумм независимых случайных величин при некоторых предположениях об асимптотике хвостового распределения отдельного слагаемого.

Литература

[1] Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы в квантовой физике. // М.: Мир. — 1984.

[2] Гегузин Я. Е. Очерки о диффузии в кристаллах. // М.: Наука. — 1974.

[3] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. // М.: Государственное издательство физико–математической литературы. — 1959. — 470 с.

[4] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. // Гостехиздат. — 1949.

[5] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах. // М.: Наука. — 1983.

[6] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Предельные теоремы о сходимости функционалов от комплексных случайных блужданий к решениям начально–краевых задач. // Теория вероятностей и ее применения. – 2014. – Т. 59. – №. 2. – С. 233–251.

[7] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. // М.: Мир. — 1972.

[8] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. // М.: Мир. — 1965.

[9] Кингман Дж. Пуассоновские процессы. // М.: МЦНМО. — 2007.

[10] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. // М.: Наука. — 1976.

[11] Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики. // М.: МИФИ. — 2008.

[12] Кусис П. Введение в теорию пространств H_p. // М.: Мир. — 1984.

[13] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. // М.: Мир. — 1978.

[14] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. // Минск: Наука и техника. — 1987.

[15] Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. // М.: Наука. — 1964. — 278 с.

[16] Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Представление Леви–Хинчина одного класса знакопеременных устойчивых мер. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2008. — Т. 361. — С. 145–166.

[17] Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Вероятностное представление решений некоторого класса эволюционных уравнений. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — Т. 384. — С. 238–266.

[18] Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. Избранные главы анализа и высшей алгебры. // Л.: Изд–во Ленингр. ун–та. – 1981. — 200 с.

[19] Якымив А. Л. Вероятностные приложения тауберовых теорем. // М.: Физматлит. — 2005.

[20] Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Mazzucchi S. Mathematical theory of Feynman Path Integrals – An introduction. // Lecture Notes in Mathematics. — 2008. — V. 523. — Berlin: Springer, 2nd edition.

[21] Beghin L., Hochberg K. J., Orsingher E. Conditional maximal distributions of processes related to higher–order heat–type equations. // Stochastic Processes and their Applications. — 2000. — V. 85, No. 2. – P. 209–223.

[22] Beghin L. Pseudoprocesses governed by higher–order fractional differential equations. // Electronic Journal of Probability. — 2008. — V. 13, No. 16. – P. 467–485.

[23] Bertoin J., Martinelli F., Peres Y., Bernard P. Lectures on Probability Theory and Statistics: Ecole d'Ete de Probabilites de Saint–Flour XXVII. // Berlin: Springer. — 1991. — P. 1–91.

[24] Bonaccorsi S., Mazzucchi S. High Order Heat–type Equations and Random Walks on the Complex Plane. // Stochastic Processes and their Applications. — 2015. — V. 125, No. 2. — P. 797–818.

[25] Bonaccorsi S., D'Ovidio M., Mazzucchi S. Probabilistic representation formula for the solution of fractional high order heat–type equations. // ArXiv:1611.03364. — 2016.

[26] Chen Z. Q., Meerschaert M. M., Nane E. Space–time fractional diffusion on bounded domains. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. — V. 393, No. 2. — P. 479–488. — doi:10.1016/j.jmaa.2012.04.032.

[27] Debbi L. Explicit solutions of some fractional partial differential equations via stable subordinators. // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. — 2006. — V. 2006. — Article ID 93502.

[28] Funaki T. Probabilistic construction of the solution of some higher order parabolic differential equation. // Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences. — 1979. — V. 55, No. 5. — P. 176–179.

[29] Gardiner C. W. Handbook of Stochastic Methods.// Berlin: Springer. — 1985.

[30] Hernández–Hernández M. E., Kolokoltsov V. N. On the probabilistic approach to the solution of generalized fractional differential equations of Caputo and Riemann–Liouville type. // ArXiv:1509.04139v2. — 2015.

[31] Hochberg K. A signed measure on path space related to Wiener measure. // The Annals of Probability. — 1978. — V. 6, No. 3. — P. 433–458.

[32] Kac M. Integration in function spaces and some its applications. // Pisa: Lezioni Fermiane, Accademia Nezionale dei Lincei. — 1980.

[33] Kakutani T., Ono H. Weak non–linear hydromagnetic waves in a cold collision–free plasma. // Journal of the physical society of Japan. — 1969. — V. 26. — P. 1305–1318.

[34] Kolokoltsov V. N. On fully mixed and multidimensional extensions of the Caputo and Riemann–Liouville derivatives, related Markov processes and fractional differential equations. // ArXiv:1501.03925. — 2015.

[35] Krylov V. Yu. Some properties of the distribution corresponding to the equation $\partial u/\partial t = (-1)^{q+1}\partial^{2q}u/\partial x^{2q}$. // Doklady Akademii Nauk SSSR. — 1960. — V. 132. — P. 1254–1257.

[36] Lachal A. From pseudo–random walk to pseudo–Brownian motion: first exit time from a one–sided or a two–sided interval. // International Journal of Stochastic Analysis. — 2014. — V. 2014. — Article ID 520136.

[37] Lachal A. First hitting time and place, monopoles and multipoles for pseudo–processes driven by the equation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^N}{\partial x^N}$. // Electronic Journal of Probability. — 2007. — V. 12, No. 29. — P. 300–353.

[38] Lachal A. First hitting time and place for the pseudo–processes driven by the equation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ subject to a linear drift. // Stochastic Processes and their Applications. — 2008. — V. 118, No. 1. — P. 1–27.

[39] Lachal A. A survey on the pseudo–process driven by the high–order heat–type equation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^N}{\partial x^N}$ concerning the first hitting times and sojourn times. // Methodology and Computing in Applied Probability. — 2014. — V. 14, No. 3. — P. 549–566.

[40] Mazzucchi S. Mathematical Feynman Path Integrals and Applications. // Singapore: World Scientific. — 2009.

[41] Mazzucchi S. Probabilistic representations for the solution of higher order differential equations. // International Journal of Partial Differential Equations. — 2013. — V. 2013. — Article ID 297857.

[42] Meerschaert M. M., Sikorskii A. Stochastic Models for Fractional Calculus. // Berlin, Boston: De Gruyter. – De Gruyter studies in mathematics. — V. 43. — 2012. — 291 p.

[43] Mullins W. W. Theory of Thermal Grooving. // Journal of Applied Physics. — 1957. — V. 28, No. 3. — P. 333–339.

[44] Nigmatullin R. R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. // Physica status solidi (b). — 1986.

[45] Orsingher E., Toaldo B. Pseudoprocesses related to space–fractional higher–order heat–type equations. // Stochastic Analysis and Applications. — 2014. — V. 32, No. 4. — P. 619–641.

[46] Orsingher E., Zhao X. Iterated processes and their applications to higher order differential equations. // Acta Mathematica Sinica. — 1999. — V. 15, No. 2. — P. 173–180.

[47] Saichev A. I., Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equations: solutions and applications. // American Institute of Physics. — 1997.

[48] Smorodina N. V., Faddeev M. M. The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications. // Acta applicandae mathematicae. — 2010. — V. 110. — P. 1289–1308.

[49] Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. // Physics Reports. — 2002. — V. 371. — P. 461–580.

Работы автора по теме диссертации

[50] Платонова М. В. Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана–Лиувилля. // Теория вероятностей и ее применения. — 2016. — Т. 61. — №. 3. — С. 417–438.

[51] Платонова М. В. Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы. Записки научных семинаров ПОМИ. — 2015. — Т. 442. — С. 101–117.

[52] Платонова М. В. Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2016. — Т. 454. — С. 92–106.

[53] Платонова М. В. Невероятностные безгранично делимые распределения: представление Леви–Хинчина, предельные теоремы. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2014. — Т. 431. — С. 145–177.