Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Гордеев Алексей Сергеевич

Приложения полиномиального метода в комбинаторике

Специальность 01.01.06 —
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Петров Фёдор Владимирович

Санкт-Петербург — 2022

Оглавление

Стр.

Введение

Актуальность темы и степень её разработанности. Полиномиальным методом называют ряд алгебраических инструментов, нашедших в последнее время множество различных применений в задачах арифметической и перечислительной комбинаторики, геометрии инциденций и теории графов. В общих чертах, метод, как правило, заключается в том, чтобы некоторым образом описать исследуемый объект (свободное от арифметических прогрессий множество, конфигурацию точек и прямых, набор списков цветов вершин графа и т.п.) в терминах множества корней структурно не очень сложного многочлена от нескольких переменных. Ограничения на сложность многочлена чаще всего представляют собой ограничения на его степень или на вид его коэффициентов. После этого информация об алгебраической структуре множества корней многочлена используется для изучения комбинаторных свойств исходного объекта.

Полиномиальный метод сформировался сравнительно недавно, но активно развивается и уже привел к ряду замечательных достижений. Так, в 2009 году Двиром [19] была решена гипотеза Какея над конечными полями. В 2015 году Кароли, Надь, Волков и Петров [41] доказали гипотезу Форрестера. В 2015 году Гут и Кац [30] совершили прорыв в задаче Эрдёша о различных расстояниях на плоскости. В 2017 году Крут, Лев и Пах [18] показали, что любое свободное от арифметических прогрессий подмножество абелевой группы $\mathbb{Z}_4^n$ экспоненциально мало, а Гийсвейт и Элленберг [22] перенесли результат Крута, Льва и Паха на свободные от арифметических прогрессий подмножества векторного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_q^n$. Больше примеров можно найти в обзоре Тао [60].

Данная работа посвящена приложениям комбинаторной теоремы о нулях — одного из первых систематически описанных инструментов полиномиального метода. Кратко опишем историю появления и применения этой теоремы.

В 1999 году Алон переформулировал идеи, встречавшиеся на протяжении 1990-х годов в различных комбинаторных работах [7; 8; 12], в виде комбинаторной теоремы о нулях [9]. В той же работе он привёл ряд приложений, в том числе, простые и короткие доказательства классических результатов аддитивной комбинаторики — теоремы Коши – Девенпорта и гипотезы Эрдёша – Хейльброна, а также некоторых их обобщений. Сформулируем обобщение теоремы Алона, известное как явная форма комбинаторной теоремы о нулях, или как лемма о коэффициенте. Оно было независимо получено Карасёвым и Петровым, Ласоном и Шаузом.

Теорема 1 (Карасёв – Петров [37], Ласон [46], Шауз [58])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *— набор независимых переменных,* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ *— набор целых неотрицательных чисел,* $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$*, где* $A_i \subset \mathbb{F}$*,* $|A_i| = d_i + 1$ *для* $1 \leqslant i \leqslant n$*. Пусть* $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$ *— многочлен степени* $\deg f \leqslant |\mathbf{d}|$*. Тогда коэффициент* $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f$ *при одночлене* $\mathbf{x}^{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i}$ *многочлена* $f(\mathbf{x})$ *равен*

$$[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f = \sum_{\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in A} \frac{f(\mathbf{a})}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{b\in A_i\setminus\{a_i\}} (a_i - b)}.$$

Перечислим некоторые результаты, полученные с помощью комбинаторной теоремы о нулях (в том числе в форме теоремы 1).

Тождества для коэффициентов многочленов. В фундаментальной работе Дайсона 1962 года [20] была сформулирована следующая гипотеза. Рассмотрим семейство многочленов Лорана

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — набор независимых переменных, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор целых неотрицательных чисел. Тогда свободный член любого многочлена семейства равен

$$\mathrm{CT}[\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{a})] = \frac{(a_1 + \cdots + a_n)!}{\prod_{i=1}^{n} a_i!}.$$

Гипотеза была доказана Гансоном (не опубликовано) и Уилсоном [63] в том же году. Изящное доказательство, основанное на интерполяции методом Лагранжа, было дано Гудом [28]. В 1975 году Эндрюс [13] выдвинул q-версию этой гипотезы. Она была доказана лишь в 1985 году Зильбергером и Брессу [65]. В том же году Брессу и Гулден [15] доказали ряд обобщений гипотезы.

В 2012 году Карасёв и Петров [37] предложили короткое доказательство гипотезы Дайсона с помощью теоремы 1, а Кароли и Надь вскоре обобщили его до q-версии [40]. Примечательно, что полученное доказательство q-версии гипотезы было в разы короче и проще известных до этого доказательств. В 2013 году Зильбергером [21] был получен ещё ряд обобщений q-версии гипотезы.

Подобные тождества для свободных членов многочленов Лорана часто возникают в квантовой электродинамике. Они также тесно связаны с интегральной формулой Сельберга, играющей важную роль в теории случайных матриц, статистической механике, теории специальных функций (см. обзор [27]). В 2015 году Кароли, Надь, Волков и Петров [41] доказали ряд тождеств с интегралами типа Сельберга, в том числе гипотезу Форрестера.

Глава 2 данной работы посвящена получению дальнейших обобщений гипотезы Дайсона и её q-версии при помощи теоремы 1. В частности, получены простые и короткие доказательства основного результата из работы Брессу и Гулдена [15] — мастер-теоремы и её транзитивного аналога. Основной результат главы — это тождество на свободные коэффициенты некоторого класса многочленов Лорана, в качестве частных случаев включающее в себя q-версию гипотезы Дайсона, мастер-теорему Брессу и Гулдена и её транзитивный аналог, а также теорему 2.5 из той же работы [15].

Списочное хроматическое число и число Алона – Тарси графа. Пару $G = (V, E)$ из множества вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множества рёбер (неупорядоченных пар вершин) E называют графом. Степенью вершины $\deg_G(v_i)$ называют число рёбер, концом которых она является. Граф называют d-регулярным, если степень любой его вершины равна d.

Пусть каждой вершине v_i назначен свой список цветов A_i, в которые её можно красить. Правильной раскраской G называют выбор цветов $a_i \in A_i$, при котором концы каждого ребра имеют разные цвета. Хроматическим числом $\chi(G)$ называют минимальное положительное целое k, для которого существует правильная раскраска G согласно одинаковым спискам $A_i = \{1, \ldots, k\}$. Списочным хроматическим числом $\mathrm{ch}(G)$ называют минимальное положительное целое k, для которого существует правильная раскраска G согласно произвольным спискам размера $|A_i| = k$.

Аналогично определяются рёберные раскраски, рёберное хроматическое $\chi'(G)$ и списочное хроматическое $\mathrm{ch}'(G)$ числа графа G: в этом случае список цветов есть у каждого ребра, а в правильной раскраске любые два ребра с общим концом должны иметь разные цвета. Одна из самых известных открытых гипотез в области раскрасок графов — гипотеза о списочных раскрасках рёбер, согласно которой $\chi'(G) = \mathrm{ch}'(G)$ для любого графа G.

В 1992 году Алон и Тарси [8] предложили новый алгебраический метод (позже переформулированный Алоном в виде комбинаторной теоремы о нулях) доказательства верхних оценок на списочные хроматические числа графов. Вкратце опишем метод: для графа $G = (V, E)$ рассмотрим графовый многочлен $F_G(\mathbf{x}) = \prod_{\{v_i,v_j\}\in E}(x_i - x_j)$, где переменные $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ соответствуют вершинам графа $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Правильные раскраски $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \subset A_1 \times \cdots \times A_n$ графа соответствуют точкам, в которых графовый многочлен не равен нулю: $F_G(\mathbf{a}) \neq 0$. Тогда, по комбинаторной теореме о нулях, любой ненулевой коэффициент F_G даёт оценку на списочное хроматическое число G. Показывать, что коэффициент не равен нулю, Алон и Тарси предлагали с помощью комбинаторной интерпретации коэффициентов в терминах ориентаций (выборов направлений на каждом ребре) графа G. Сформулируем эту интерпретацию в случае двудольных (имеющих правильную раскраску в 2 цвета) графов, когда она имеет особенно простой вид.

Теорема 2 (Алон – Тарси [8]). *Рассмотрим двудольный граф G. Если существует ориентация G (выбор направления на каждом ребре), в которой из любой вершины наружу направлено меньше k рёбер, то $\mathrm{ch}(G) \leqslant k$.*

В частности, пользуясь этой теоремой, Алон и Тарси показали, что списочное хроматическое число планарного (такого, что его можно нарисовать на плоскости так, чтобы рёбра без общих концов не пересекались) двудольного графа не превосходит 3.

При помощи метода Алона – Тарси вскоре было установлено множество новых результатов. В том же году Фляйшнер и Штибиц [26] доказали, что любой граф на $3n$ вершинах, являющийся объединением гамильтонова (проходящего через все вершины графа) цикла и n попарно не пересекающихся по вершинам треугольников, имеет списочное хроматическое число 3. В 1996 году Эллингхам и Годдин [23] доказали гипотезу о списочных раскрасках рёбер в случае d-регулярных d-рёберно-раскрашиваемых планарных мультиграфов (графов, в которых между одной парой вершин может быть проведено несколько рёбер). В 1997 году Хеггквист и Янссен [32] доказали эту гипотезу в случае полных графов (графов, в которых есть ребро между каждой парой вершин) на нечётном числе вершин.

После появления теоремы 1 стало возможно вычислять коэффициенты графового многочлена напрямую с её помощью. Так, в 2014 году Шауз [59] при помощи теоремы 1 доказал гипотезу о списочных раскрасках рёбер для полных графов на $(p+1)$ вершине, где p — простое.

Оценки, полученные методом Алона – Тарси, со временем стали называть числом Алона – Тарси (см. [35]). В 2019 году Каул и Мадрок [42] исследовали число Алона – Тарси прямых произведений графов, и, в частности, показали, что прямое произведение нечётного простого цикла и простого пути является 3-списочно-раскрашиваемым.

В главе 3 данной работы исследуется число Алона – Тарси (и списочное хроматическое число) прямого произведения двух циклов. При помощи теоремы 1 коэффициент графового многочлена интерпретируется как след степени некоторой матрицы, после чего доказательство того, что коэффициент не равен нулю, сводится к исследованию собственных чисел матрицы. В той же главе показано, как подобная интерпретация коэффициента как следа позволяет строить верхнюю оценку на число Алона – Тарси более широкого класса графов — прямых произведений чётного цикла и графа G с чётными степенями вершин, в графовом многочлене F_G которого есть ненулевой коэффициент при таком одночлене $\prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i}$, что $|d_i - \deg_G(v_i)/2| \leqslant 1$ для всех i. Наконец, приведены несколько приложений полученной оценки, в том числе верхняя оценка на число Алона – Тарси прямого произведения чётного цикла и произвольного графа.

Списочное хроматическое число гиперграфа. Гиперграфом $H = (V, E)$ называют пару из множества вершин V и множества рёбер E, где ребро — уже не пара, а произвольное подмножество вершин размера больше 1. Гиперграф называют s-однородным, если каждое его ребро имеет размер s. Понятия хроматического и списочного хроматического числа обобщаются на гиперграфы: правильной раскраской гиперграфа называют такую раскраску вершин, в которой каждое ребро содержит две вершины разных цветов.

В 1988 году Алон и Брегман [6] доказали, что любой k-регулярный k-однородный гиперграф имеет хроматическое число 2 при $k \geqslant 8$, усилив тем самым фольклорную оценку, доказывающую тот же самый факт при $k \geqslant 9$ с помощью локальной леммы Ловаса. В той же работе они предположили, что утверждение верно для любого $k \geqslant 4$. Заметим, что при $k = 2, 3$ утверждение неверно: контрпример для $k = 2$ — это простой цикл нечётной длины, для

$k = 3$ — плоскость Фано, то есть гиперграф на вершинах $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ с рёбрами $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_5\}$, $\{v_3, v_4, v_6\}$, $\{v_4, v_5, v_7\}$, $\{v_1, v_5, v_6\}$, $\{v_2, v_6, v_7\}$, $\{v_1, v_3, v_7\}$. В 1992 году Томассен [61] (см. также [33]) показал, что k-регулярные k-однородные гиперграфы имеет хроматическое число 2 при $k \geqslant 4$, тем самым ответив на вопрос Алона и Брегмана.

В 2005 году Рамамурти и Уэст [55] предложили обобщение метода Алона – Тарси на p-однородные гиперграфы для простого p. К сожалению, метод не получил широкого распространения, поскольку предложенные ими аналоги условий Алона и Тарси на ориентации графа оказалось слишком сложно проверять. В частности, не было получено простого аналога теоремы 2. Рамамурти и Уэст задались вопросом, существует ли такой аналог. В 2010 году Шауз [57] обобщил теорему 2 на k-дольные k-однородные гиперграфы, то есть гиперграфы, вершины которых можно разделить на k долей так, чтобы каждое ребро содержало ровно по одной вершине из каждой доли. Отметим, что любой k-дольный k-однородный гиперграф красится в два цвета: например, можно покрасить одну из долей в первый цвет, а остальные доли — во второй.

В главе 4 приведено обобщение теоремы 2 (и результата Шауза для k-дольных k-однородных гиперграфов) на произвольные двудольные (имеющие хроматическое число 2) гиперграфы. В качестве следствия получено обобщение результата Томассена с обычных раскрасок на списочные: показано, что k-регулярные k-однородные гиперграфы имеют списочное хроматическое число 2 при $k \geqslant 4$. Также получены верхняя и нижняя вероятностные оценки списочного хроматического числа полного двудольного однородного гиперграфа, отличающиеся на субэкспоненциальный множитель.

Целью данной работы является приложение комбинаторной теоремы о нулях и её явной формы для получения, во-первых, новых обобщений q-версии гипотезы Дайсона; во-вторых, оценок на число Алона – Тарси (и списочное хроматическое число) прямых произведений двух циклов, а также прямых произведений графов, одним из множителей в которых является чётный цикл; в-третьих, оценок на списочное хроматическое число двудольных гиперграфов.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации — новые.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и идеи из них могут быть использованы для дальнейшего изучения тождеств с коэффициентами многочленов, а также списочных хроматических чисел (и чисел Алона – Тарси) графов и гиперграфов.

Методология и методы исследования. Большинство результатов используют полиномиальный метод в комбинаторике, а именно комбинаторную теорему о нулях Алона и её явную форму, а также её графовую интерпретацию — метод Алона – Тарси. Результаты главы 3 используют линейную алгебру. В главе 4 используются вероятностные методы в комбинаторике.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено простое и короткое доказательство мастер-теоремы и её транзитивного аналога из работы Брессу и Гулдена [15] (см. доказательство теоремы 2.2.2).
2. Получено новое обобщение q-версии гипотезы Дайсона, включающее в качестве частных случаев мастер-теорему, её транзитивный аналог, а также теорему 2.5 из работы Брессу и Гулдена [15] (теорема 2.2.4).
3. Доказана общая оценка на число Алона – Тарси (и списочное хроматическое число) прямого произведения чётного цикла и графа с чётными степенями вершин, в графовом многочлене которого есть ненулевой почти центральный коэффициент (теорема 3.2.5). Получен ряд приложений этой оценки (предложения 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8 и 3.2.10 и следствие 3.2.9).
4. Получено обобщение на случай двудольных гиперграфов результатов Алона и Тарси для двудольных графов (теоремы 4.2.3 и 4.2.4, следствие 4.2.5).
5. Получено обобщение теоремы Томассена [61] о 2-раскрашиваемости k-регулярных k-однородных гиперграфов при $k \geqslant 4$: показано, что такие гиперграфы являются и 2-списочно-раскрашиваемыми (теорема 4.2.6).
6. Получены оценки на списочное хроматическое число полного двудольного однородного гиперграфа (теоремы 4.2.10 и 4.2.11).

Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием строгих математических доказательств.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на финальном туре второго конкурса студенческих работ по теоретической информатике и дискретной математике им. Алана Тьюринга (Санкт-Петербург, 2017 год), в секции «Группы и графы» на Конференции международных математических центров мирового уровня (онлайн, 2021 год), а также на петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, 2022 год).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в четырёх работах [4; 29; 47; 52]. Работы [4; 29; 52] опубликованы в рецензируемых журналах. Работа [47] принята к печати в рецензируемом журнале.

Личный вклад. Результаты работы [29] получены автором самостоятельно. В работе [47] Ли и Шао принадлежит постановка задачи, Петрову принадлежит интерпретация формулы для коэффициента графового многочлена как следа матрицы (лемма 3.2), автору принадлежит идея доказательства следствия 3.3 с помощью проверки (анти)эрмитовости матрицы; остальные результаты получены всеми авторами совместно. В работе [52] Петрову принадлежит формулировка и исходное доказательство основного результата — теоремы 3, автором получены упрощённое доказательство теоремы 3, а также приложения: следствие 7 и предложение 8; остальные результаты получены соавторами совместно. В работе [4] автором получено обобщение метода Алона – Тарси на случай двудольных гиперграфов (теоремы 5 и 6, а также следствие 1), Черкашиным получена верхняя вероятностная оценка на списочное хроматическое число (теорема 8); остальные результаты получены соавторами совместно.

Благодарности. Выражаю глубокую признательность моему научному руководителю Фёдору Владимировичу Петрову за постановки задач, многочисленные обсуждения, проявленные внимание и терпение. Также я благодарен Даниле Черкашину за его прямоту, за совместные занятия наукой и советы старшего коллеги. Я безумно благодарен любимой жене Анастасии Софроновой и нашему коту Локи, без поддержки которых я бы не справился.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 61 страницу. Список литературы содержит 65 наименований.

Глава 1. Основные определения и используемые методы

1.1 Список используемых обозначений

В этой работе используются следующие обозначения.

- $\mathbb{F}$ — произвольное поле, если не сказано иного.
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ — множество целых неотрицательных чисел.
- $\mathbb{N}$ — множество натуральных (целых положительных) чисел.
- $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.
- $[l, r] = \{l, l+1, \ldots, r\}$ для $l, r \in \mathbb{Z}$, $l \leqslant r$.
- $[\![\ldots]\!]$ равняется 1, если выражение в скобках истинно, и 0 иначе.
- Для $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$ положим $|\mathbf{d}| = d_1 + \cdots + d_n$.
- Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$\mathbf{x}^{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i}.$$

- $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f$ — коэффициент при одночлене $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$ многочлена $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$.
- Для конечного $A \subset \mathbb{F}$ и $a \in A$ положим

$$\varkappa(A, a) = \prod_{b \in A \setminus \{a\}} (a - b).$$

- $f(n) = o(g(n))$, если $\frac{f(n)}{g(n)}$ стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.
- $f(n) = O(g(n))$, если существует такое $c > 0$, что $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ для любого достаточно большого n.
- $f(n) = \Omega(g(n))$, если существует такое $c > 0$, что $f(n) \geqslant c \cdot g(n)$ для любого достаточно большого n.
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где $n! = \prod_{i=1}^{n} i$, $0! = 1$, для $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $k \in [0, n]$.

1.2 Комбинаторная теорема о нулях

Комбинаторная теорема о нулях в современном виде была сформулирована в работе Алона 1999 года [9]. Она получила такое название, поскольку была получена Алоном как следствие усиленной версии теоремы Гильберта о нулях для идеала специального вида (см. теорему 1.1 в [9]).

Теорема 1.2.1 (Комбинаторная теорема о нулях, Алон [9]). *Пусть* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *— набор независимых переменных,* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *где* $A_i \subset \mathbb{F}$, $|A_i| = d_i + 1$ *для* $i \in [1, n]$. *Пусть* $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$ *— многочлен степени* $\deg f \leqslant |\mathbf{d}|$. *Если* $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f \neq 0$, *то найдётся такое* $\mathbf{a} \in A$, *что* $f(\mathbf{a}) \neq 0$.

Всё в той же работе [9] Алон привёл множество различных примеров применения теоремы 1.2.1, в том числе простые доказательства теоремы Коши – Девенпорта и гипотезы Эрдёша – Хейльбронна — классических результатов аддитивной комбинаторики — а также некоторых их обобщений. В более ранней работе Алона и Тарси 1992 года [8] алгебраические приёмы, впоследствии переформулированные в виде теоремы 1.2.1, было предложено использовать для получения оценок на списочное хроматическое число графа. Этот метод более подробно описан в разделе 1.4.

Следующее обобщение комбинаторной теоремы о нулях, известное как её явная форма, а также как лемма о коэффициенте, было независимо сформулировано Карасёвым и Петровым, Ласоном и Шаузом.

Теорема 1.2.2 (Карасёв – Петров [37], Ласон [46], Шауз [58]). *Пусть* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *— набор независимых переменных,* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *где* $A_i \subset \mathbb{F}$, $|A_i| = d_i + 1$ *для* $i \in [1, n]$. *Пусть* $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$ *— многочлен степени* $\deg f \leqslant |\mathbf{d}|$. *Тогда коэффициент* $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f$ *равен*

$$[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]f = \sum_{\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in A} \frac{f(\mathbf{a})}{\prod_{i=1}^{n} \kappa(A_i, a_i)}.$$

Теорема 1.2.2 показала себя сильным инструментом для нахождения коэффициентов многочленов. Так, были получены простые доказательства гипотезы Дайсона [37] и её q-версии [40], а также их обобщений [21; 29], доказана гипотеза

Форрестера и другие тождества, связанные с интегральной формулой Сельберга [41]. Глава 2 посвящена доказательству с помощью теоремы 1.2.2 обобщения q-версии гипотезы Дайсона, полученного автором в [29].

Заметим, что при $n = 1$ теорема 1.2.2 фактически представляет собой вариацию интерполяционной формулы Лагранжа. Один из способов доказательства теоремы как раз и состоит в её выводе из формулы Лагранжа с помощью индукции по числу переменных. Кроме того, как отметил Карасёв в работе [38], теорема 1.2.2 представляет собой частный случай формулы Эйлера – Якоби [34] (современное изложение обобщения формулы Эйлера – Якоби можно найти в [45]).

1.3 Списочные раскраски графов и гиперграфов

Гиперграф — это пара конечных множеств (V, E), где V — множество **вершин**, $E \subset \mathcal{P}(V)$ — множество **рёбер** (здесь $\mathcal{P}(V)$ — это множество всех подмножеств V). В этой работе рассматриваются только гиперграфы, все рёбра которых имеют размер больше 1. **n-однородный** гиперграф, или **n-граф**, — это гиперграф, все рёбра которого имеют размер n. 2-граф обычно называют просто **графом**. Как правило, нам будет удобно нумеровать вершины: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Степень $\deg_H(v_i)$ вершины v_i гиперграфа $H = (V, E)$ — это число рёбер H, содержащих v_i. $\Delta(H)$ — максимальная степень вершины в гиперграфе H. Гиперграф H — **d-регулярный**, если $\deg_H(v_i) = d$ для всех v_i.

Ориентация гиперграфа H — это отображение $\varphi : E \to V$, такое что $\varphi(e) \in e$ для каждого ребра $e \in E$. **Степень относительно ориентации** $\deg_\varphi(v_i)$ вершины v_i — это число рёбер, на которых ориентация принимает значение v_i: $\deg_\varphi(v_i) = |\varphi^{-1}(v_i)|$.

В случае графов ориентацию удобно интерпретировать как выбор направления на каждом ребре: ориентация D графа $G = (V, E)$ — это пара $D = (V, E')$ такая, что в E' лежит ровно одна из упорядоченных пар (v_i, v_j), (v_j, v_i) для каждого ребра $\{v_i, v_j\} \in E$. **Входящая степень** $\deg^{\mathrm{in}}_D(v_i)$ вершины v_i — это число рёбер, направленных в вершину v_i, то есть рёбер вида $(v_j, v_i) \in E'$. **Исходя-**

щая степень $\deg_D^{\mathrm{out}}(v_i)$ — это число рёбер, направленных из вершины v_i, то есть рёбер вида $(v_i, v_j) \in E'$.

Пусть каждой вершине v_i назначен свой **список цветов** $A_i \subset \mathbb{F}$, в которые её разрешается красить. **Раскраска** H **(согласно спискам** A_i**)** — это выбор цвета $a_i \in A_i$ для каждой вершины v_i. Раскраска $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — **правильная**, если в каждом ребре $e \in E$ найдутся две вершины $v_i, v_j \in e$ разных цветов: $a_i \neq a_j$.

Гиперграф H — k**-раскрашиваемый** для $k \in \mathbb{N}$, если существует его правильная раскраска согласно одинаковым спискам $A_i = [1, k]$. **Хроматическое число** $\chi(H)$ гиперграфа H — это минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что H — k-раскрашиваемый.

Рассмотрим **двудольный** (2-раскрашиваемый) гиперграф H. Любая правильная раскраска H в два цвета задаёт такое разбиение множества вершин V на две части $A \cup B = V$, $A \cap B = \varnothing$, что любое ребро H пересекает и A, и B. Будем называть такие множества A и B **долями** H. **Полный двудольный гиперграф** $K_{n,m}^s$ — это двудольный s-граф с долями размеров n и m и всеми возможными рёбрами, пересекающими обе доли. Для полного двудольного графа будем опускать верхний индекс: $K_{n,m} = K_{n,m}^2$.

Пусть $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$. Гиперграф H — $\mathbf{d}$**-списочно-раскрашиваемый**, если для *любых* списков размеров $|A_i| = d_i$ найдётся правильная раскраска H согласно этим спискам. Гиперграф H — k**-списочно-раскрашиваемый**, если он $\mathbf{d}$-списочно-раскрашиваемый для $\mathbf{d} = (k, \ldots, k)$. **Списочное хроматическое число** $\mathrm{ch}(H)$ гиперграфа H — это минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что H — k-списочно-раскрашиваемый.

Из определения немедленно следует неравенство $\chi(H) \leqslant \mathrm{ch}(H)$. При этом хроматическое и списочное хроматическое числа часто не совпадают. Например, назначив списки $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ вершинам каждой доли полного двудольного графа $K_{3,3}$, мы видим, что $\mathrm{ch}(K_{3,3}) > 2 = \chi(K_{3,3})$. В [25] (см. также теорему 4.2.8) было доказано, что

$$\mathrm{ch}(K_{n,n}) = (1 + o(1)) \cdot \log_2 n. \tag{1.1}$$

Задача изучения списочных раскрасок графов и гиперграфов была независимо поставлена Визингом [1] и Эрдёшем, Рубином и Тейлором [25]. Замечательные обзоры результатов в этой области были написаны Алоном [11], Тузой [62] (был обновлен Кратохвилем, Тузой и Войт [44]) и Вудоллом [64]. Из свежих результатов отметим работу 2015 года [50], в которой Ноэл, Рид и Ву доказали, что для любого графа G на не более чем $2\chi(G)+1$ вершинах верно $\chi(G) = \mathrm{ch}(G)$. Тем самым была подтверждена гипотеза, которую выдвинул в 2002 году Оба [51].

1.4 Число Алона – Тарси

В статье 1992 года [8] Алон и Тарси предложили алгебраический метод доказательства верхних оценок на списочные хроматические числа графов. Этот метод впоследствии стали называть **методом Алона – Тарси**, а верхняя оценка на списочное хроматическое число графа G, полученная методом, получила название **числа Алона – Тарси** $\mathrm{AT}(G)$ (см., например, книгу Йенсена и Тофта [35]).

Пусть D — ориентация графа G. Подграф H ориентации D — **эйлеров**, если входящая степень любой вершины v_i равна её исходящей степени: $\deg_H^{\mathrm{in}}(v_i) = \deg_H^{\mathrm{out}}(v_i)$. Эйлеров подграф H — **чётный**, если число его рёбер чётно, и **нечётный** иначе. Отметим, что любая ориентация D имеет пустой чётный эйлеров подграф. Обозначим за $\mathrm{EE}(D)$ и $\mathrm{EO}(D)$ число чётных и нечётных эйлеровых подграфов D, соответственно.

Теорема 1.4.1 (Алон – Тарси [8])**.** *Пусть D — ориентация графа G. Если $\mathrm{EE}(D) \neq \mathrm{EO}(D)$, то G — $(\deg_D^{\mathrm{out}}+1)$-списочно-раскрашиваемый.*

Число Алона – Тарси $\mathrm{AT}(G)$ графа G — это минимальное $k \in \mathbb{N}$, для которого найдётся такая ориентация D графа G, что $\mathrm{EE}(D) \neq \mathrm{EO}(D)$, а исходящая степень $\deg_D^{\mathrm{out}}(v_i)$ любой вершины v_i не превосходит $k-1$.

Из определения и теоремы 1.4.1 немедленно следует, что списочное хроматическое число графа не превосходит его числа Алона – Тарси: $\mathrm{ch}(G) \leqslant \mathrm{AT}(G)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, с одной стороны мы имеем тождество (1.1): $\mathrm{ch}(K_{n,n}) = (1+o(1))\cdot\log_2 n$. С другой стороны, из определения числа Алона – Тарси сразу следует, что $\mathrm{AT}(K_{n,n}) \geqslant n/2$ (в [8] было доказано, что $\mathrm{AT}(K_{n,n}) = \lceil n/2\rceil + 1$).

Покажем, как теорема 1.4.1 вытекает из теоремы 1.2.1. Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Определим **графовый**

многочлен $F_G(\mathbf{x})$ от n независимых переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ как

$$F_G(\mathbf{x}) = \prod_{\{i,j\}\in E} (x_j - x_i).$$

Каждое ребро соответствует одному линейному множителю $x_j - x_i$, а сам графовый многочлен F_G, таким образом, определён с точностью до знака.

Заметим, что раскраска $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ является правильной тогда и только тогда, когда $F_G(\mathbf{a}) \neq 0$. Рассмотрим ненулевой коэффициент $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]F_G \neq 0$, где $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. По теореме 1.2.1, найдётся правильная раскраска G согласно произвольным спискам $A_i \subset \mathbb{F}$, $|A_i| = d_i + 1$.

Отметим, что каждое слагаемое, получающееся при раскрытии всех скобок в многочлене $F_G(\mathbf{x})$, задаёт ориентацию D графа G, и, наоборот, любая ориентация соответствует такому слагаемому. При этом ориентации, соответствующие слагаемым вида $\pm\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$ — это ровно такие ориентации D, что $\deg^{\text{out}}_D(v_i) = d_i$ для $i \in [1, n]$. Пусть D и Q — две таких ориентации. Рассмотрим H — подграф D на множестве рёбер, направление которых в D и Q отличается. H — эйлеров подграф, поскольку исходящие степени вершин в D и Q совпадают. При этом знаки слагаемых $\pm\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$, соответствующих D и Q, совпадают тогда и только тогда, когда H — чётный.

Остаётся заметить, что если $\mathrm{EE}(D) \neq \mathrm{EO}(D)$, то при раскрытии скобок в $F_G(\mathbf{x})$ количество слагаемых вида $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$ будет отличаться от количества слагаемых вида $-\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$, то есть $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]F_G \neq 0$. Таким образом, теорема 1.4.1 является прямым следствием теоремы 1.2.1.

Отметим также, что мы получили альтернативное определение числа Алона – Тарси: $\mathrm{AT}(G)$ — это минимальное k, для которого найдётся такой одночлен $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}$, что $\max(d_1, \ldots, d_n) = k - 1$ и $[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}]F_G \neq 0$.

Для графа $G = (V, E)$ аналогично вершинным раскраскам можно определить также рёберные раскраски: пусть у каждого ребра $e_i \in E$ есть список цветов $A_i \subset \mathbb{F}$, тогда в правильной раскраске рёбер $a_i \in A_i$ любые два ребра $e_i, e_j \in E$ с общим концом $v \in e_i \cap e_j$ должны иметь разные цвета: $a_i \neq a_j$. Тогда **рёберное хроматическое** $\chi'(G)$ **и списочное хроматическое** $\mathrm{ch}'(G)$ **числа** определяются так же, как и вершинные. Интересно, что, в отличие от вершинных раскрасок, неизвестны примеры графов, рёберное списочное хроматическое и рёберное хроматическое числа которых бы отличались. Знаменитая открытая **гипотеза о списочных раскрасках рёбер** гласит, что для любого графа G верно $\chi'(G) = \mathrm{ch}'(G)$.

Перечислим наиболее известные результаты, полученные при помощи метода Алона – Тарси. В 1992 году Фляйшнер и Штибиц [26] решили задачу, предложенную двумя годами ранее Эрдёшем: они показали, что любой граф на $3n$ вершинах, рёбра которого можно разбить на гамильтонов (проходящий по разу через каждую вершину) цикл и n попарно не пересекающихся по вершинам треугольников, является 3-списочно-раскрашиваемым. Гипотеза о списочных раскрасках рёбер получила несколько подтверждений в частных случаях: так в 1996 году Эллингхам и Годдин [23] показали, что она верна для d-регулярных d-рёберно-раскрашиваемых планарных мультиграфов (в мультиграфе разрешается иметь несколько рёбер между одной парой вершин, а планарный граф можно нарисовать на плоскости так, чтобы его рёбра, не имеющие общих концов, не пересекались). В 1997 году Хеггквист и Янссен [32] доказали гипотезу для случая полных графов (таких, в которых есть ребро между каждой парой вершин), имеющих нечётное число вершин, а в 2014 году Шауз [59] при помощи теоремы 1.2.2 доказал гипотезу для полных графов на $p+1$ вершине, где p — простое.

Глава 3 посвящена оценкам на число Алона – Тарси прямых произведений графов, полученных в работах [47; 52]. В главе 4 приведены результаты работы [4] — обобщения метода Алона – Тарси со случая двудольных графов на случай двудольных гиперграфов, а также вероятностные оценки на списочное хроматическое число полного двудольного однородного гиперграфа.

Глава 2. Тождества для коэффициентов многочленов

2.1 Обозначения

Перечислим специфические для этой главы обозначения.

- На протяжении главы $x_1, \ldots, x_n, q$ — это независимые переменные.
- $\mathrm{CT}[f]$ — это свободный член многочлена Лорана

$$f \in \mathbb{F}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}, q, q^{-1}]$$

  над полем рациональных функций $\mathbb{F}(q)$.
- $A \rtimes B = \{(i, j) \in A \times B \mid i < j\}$.
- Для $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ положим

$$(x)_n = \prod_{t=0}^{n-1}(1 - q^t x).$$

- $\mathcal{S}_n$ — множество перестановок длины n.

Турнир T на n вершинах — это такой набор упорядоченных пар (i, j), что $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и $(i, j) \in T$ тогда и только тогда, когда $(j, i) \notin T$. Можно рассматривать турнир как отношение на множестве $[1, n]$: $i \to j$ тогда и только тогда, когда $(i, j) \in T$. **Транзитивный** турнир — такой, что отношение $\to$ транзитивно, то есть для любых $i, j, k \in [1, n]$ если $i \to j$ и $j \to k$, то $i \to k$. Для транзитивного турнира **победная** перестановка $\sigma \in \mathcal{S}_n$ — это такая перестановка, что $\sigma_i \to \sigma_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$. Отметим, что для каждого транзитивного турнира существует ровно одна победная перестановка.

2.2 Обзор результатов

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. В фундаментальной работе Дайсона 1962 года [20] была сформулирована следующая гипотеза:

$$\mathrm{CT}\left[\prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i}\right] = \frac{|\mathbf{a}|!}{\prod_{i=1}^n a_i!}.$$

Она была доказана Гансоном (неопубликовано) и Уилсоном [63] в том же году. В 1970 году Гуд [28] предложил простое доказательство, основанное на интерполяционной формуле Лагранжа. В 1975 году Эндрюс [13] предположил, что верно q-обобщение гипотезы. Предложенная им задача оказалась гораздо более сложной, и была решена лишь через 10 лет, в 1985 году, Зильбергером и Брессу. Сформулируем их результат.

Теорема 2.2.1 (Зильбергер – Брессу [65])**.** *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. *Рассмотрим многочлен Лорана над полем* $\mathbb{F}$

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j}.$$

Тогда

$$\mathrm{CT}[f] = \frac{(q)_{|\mathbf{a}|}}{(q)_{a_1} \dots (q)_{a_n}}.$$

В том же году Брессу и Гулден доказали следующие обобщения гипотезы.

Теорема 2.2.2 (Брессу – Гулден [15], теоремы 1.3 и 2.2)**.** *Пусть* T *— турнир на* n *вершинах,* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. *Рассмотрим многочлен Лорана над полем* $\mathbb{F}$

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{(i,j) \in T} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j - 1}.$$

Тогда $\mathrm{CT}[f] = 0$*, если* T *— не транзитивен. В случае, когда* T *— транзитивный турнир с победной перестановкой* σ*,*

$$\mathrm{CT}[f] = \frac{(q)_{|\mathbf{a}|}}{(q)_{a_1} \dots (q)_{a_n}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - q^{a_{\sigma_i}}}{1 - q^{a_{\sigma_1} + \dots + a_{\sigma_i}}}.$$

Теорема 2.2.3 (Брессу – Гулден [15], теорема 2.5)**.** *Пусть* $k \in \mathbb{N}$*,* $l_i, m_i, r_i \in \mathbb{N}$*,* $i \in [1, k]$ *— такие, что* $1 \leqslant l_1 \leqslant m_1 \leqslant r_1 < l_2 \leqslant \dots \leqslant r_{k-1} < l_k \leqslant m_k \leqslant r_k \leqslant n$. *Пусть*

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} \left([m_i, r_i] \rtimes [m_i, r_i] \right) \cup \left([l_i, m_i - 1] \times [m_i, r_i] \right).$$

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. *Рассмотрим многочлен Лорана над полем* $\mathbb{F}$

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j - [\![(i,j) \in U]\!]}.$$

Тогда

$$\mathrm{CT}[f] = \frac{(q)_{|\mathbf{a}|}}{(q)_{a_1}\dots(q)_{a_n}} \cdot \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=m_i}^{r_i} \frac{1-q^{a_j}}{1-q^{a_{l_i}+\dots+a_j}}.$$

В 2012 году Карасёв и Петров [37] получили доказательство гипотезы Дайсона с помощью теоремы 1.2.2. Вскоре Кароли и Надь обобщили его до q-версии [40], получив значительно более короткое и простое доказательство теоремы 2.2.1, чем все известные ранее. В 2013 году Зильбергер [21] показал ещё некоторые обобщения q-версии гипотезы.

Отметим, что известны также обобщения (специального случая) гипотезы Дайсона на произвольные системы корней; оригинальное тождество Дайсона в этом случае соответствует системе A_n. Речь о знаменитых гипотезах Макдональда [48], доказанных Чередником [16] при помощи так называемых двойных аффинных алгебр Гекке.

В работе автора [29] доказан следующий результат, обобщающий теоремы 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.3.

Теорема 2.2.4. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $l_i, m_i, r_i \in \mathbb{N}$, $i \in [1,k]$ — числа, удовлетворяющие $1 \leqslant l_1 \leqslant m_1 \leqslant r_1 < l_2 \leqslant \ldots \leqslant r_{k-1} < l_k \leqslant m_k \leqslant r_k \leqslant n$. Пусть*

$$C_i = \bigcup_{j=m_i+1}^{r_i} [l_i, j-2] \times \{j\}, \quad B_i \subset C_i,$$

$$U_i = B_i \cup ([l_i, m_i - 1] \times \{m_i\}) \cup \bigcup_{j=m_i}^{r_i-1} (j, j+1), \quad U = \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Рассмотрим многочлен Лорана над полем $\mathbb{F}$

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j - [\![(i,j)\in U]\!]}.$$

Тогда

$$\mathrm{CT}[f] = \frac{(q)_{|\mathbf{a}|}}{(q)_{a_1}\dots(q)_{a_n}} \cdot \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=m_i}^{r_i} \frac{1-q^{a_j}}{1-q^{a_{l_i}+\dots+a_j}}.$$

Поясним идею за громоздкими формулировками приведённых теорем, а также связь между этими теоремами. Рассмотрим соответствие между многочленами Лорана над полем $\mathbb{F}$ вида

$$f(\mathbf{x}, q) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_{i,j}} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_{j,i}}$$

и квадратными матрицами с неотрицательными целыми коэффициентами и нулями на главной диагонали $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n$. Так, многочлены из теоремы 2.2.1 и транзитивного случая теоремы 2.2.2 (для тождественной победной перестановки) соответствуют матрицам

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & 0 & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2-1 & 0 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3-1 & a_3-1 & 0 & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-1 & a_n-1 & \dots & a_n-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Многочлен из теоремы 2.2.4 с параметрами $n = 9$, $k = 1$, $l_1 = 2$, $m_1 = 5$, $r_1 = 8$, $B_1 = \{(2,6),(4,6),(3,7),(4,7),(2,8),(4,8)\}$ соответствует матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & 0 & a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & 0 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \\ a_5 & a_5-1 & a_5-1 & a_5-1 & 0 & a_5 & a_5 & a_5 & a_5 \\ a_6 & a_6-1 & a_6 & a_6-1 & a_6-1 & 0 & a_6 & a_6 & a_6 \\ a_7 & a_7 & a_7-1 & a_7-1 & a_7 & a_7-1 & 0 & a_7 & a_7 \\ a_8 & a_8-1 & a_8 & a_8-1 & a_8 & a_8 & a_8-1 & 0 & a_8 \\ a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & a_9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видим, эта матрица отличается от матрицы из теоремы 2.2.1 тем, что некоторые коэффициенты уменьшены на 1. Такие коэффициенты сгруппированы в k блоков. Каждый блок состоит из подотрезка какой-то строки ($[l_i, m_i - 1] \times \{m_i\}$), подотрезка диагонали (той, что находится под главной диагональю, $\bigcup_{j=m_i}^{r_i-1}(j, j+1)$) и произвольного подмножества коэффициентов "под ними" (B_i — произвольное подмножество C_i). Отметим, что:

- Теорема 2.2.1 получается из теоремы 2.2.4 при $k = 0$.
- Транзитивная часть теоремы 2.2.2 (для тождественной победной перестановки) получается из теоремы 2.2.4 при $k = 1$, $l_1 = m_1 = 1$, $r_1 = n$, $B_1 = C_1$.
- Теорема 2.2.3 получается из теоремы 2.2.4, если $B_i = C_i$ для всех i.

2.3 Доказательства

В подразделе 2.3.1 приведено доказательство q-версии тождества Дайсона (теоремы 2.2.1) при помощи теоремы 1.2.2. В подразделе 2.3.2 приведено короткое доказательство тем же методом теоремы 2.2.2. В подразделе 2.3.3 приведено доказательство основного результата из работы автора [29] — теоремы 2.2.4.

2.3.1 q-версия гипотезы Дайсона

Начнём со следующего модельного доказательства, на основе которого строятся доказательства в следующих подразделах. Доказательство взято из работы автора [29], но, по существу, оно следует рассуждениям из [40].

Доказательство теоремы 2.2.1. Можно считать, что все $a_i > 0$. Действительно, если $a_i = 0$, то x_i встречается в f только в отрицательной степени. Тогда, поскольку нас интересует свободный член f, можно считать, что f на самом деле не зависит от x_i.

$\mathrm{CT}[f]$ равняется коэффициенту при $\prod_{i=1}^n x_i^{|\mathbf{a}|-a_i}$ многочлена h, где

$$h(\mathbf{x}, q) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j} x_j^{a_i} x_i^{a_j}.$$

Вычислим этот коэффициент при помощи теоремы 1.2.2. Рассмотрим решётку

$$G = G_1 \times \cdots \times G_n, \quad G_i = \{q^y \mid y \in [0, |\mathbf{a}| - a_i]\}.$$

Предположим, что $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (q^{y_1}, \ldots, q^{y_n}) \in G$ не является корнем h. Тогда для любых $i < j$ верно

$$y_j - y_i \geqslant a_i \text{ или } y_i - y_j \geqslant a_j + 1, \tag{2.1}$$

иначе один из множителей в $\left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j}$ оказался бы равен нулю. В частности, отсюда следует, что все y_i попарно различны. Пусть $\pi \in \mathcal{S}_n$ — такая перестановка, что $y_{\pi_1} < \cdots < y_{\pi_n}$. Неравенства (2.1) для пары индексов (π_i, π_{i+1}) можно переписать как

$$y_{\pi_{i+1}} - y_{\pi_i} \geqslant a_{\pi_i} + [\![\pi_{i+1} < \pi_i]\!]. \tag{2.2}$$

Сложив эти неравенства для $i \in [1, n-1]$ друг с другом и с неравенством $y_{\pi_1} \geqslant 0$, получаем

$$y_{\pi_n} \geqslant |\mathbf{a}| - a_{\pi_n} + \sum_{i=1}^{n-1} [\![\pi_{i+1} < \pi_i]\!].$$

Но $y_{\pi_n} \leqslant |\mathbf{a}| - a_{\pi_n}$, значит, $\pi_i < \pi_{i+1}$ для всех i, то есть π — тождественная перестановка. Кроме того, все неравенства (2.2) должны были выродиться в равенства, значит, единственная точка решётки, не являющаяся корнем многочлена — это $(q^{y_1}, \ldots, q^{y_n})$, где $y_i = a_1 + \cdots + a_{i-1}$.

Введём для удобства обозначение $y_{n+1} = |\mathbf{a}|$. По теореме 1.2.2,

$$\begin{aligned}
\mathrm{CT}[f] = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{|\mathbf{a}|-a_i}\right] h &= \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (q^{y_i-y_j})_{a_i} (q^{y_j+1-y_i})_{a_j} q^{y_j a_i} q^{y_i a_j}}{\prod_{i=1}^{n} \kappa(G_i, y_i)} \\
&= \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\prod_{k=0}^{a_i-1} (q^{y_j} - q^{y_i+k}) \prod_{k=0}^{a_j-1} (q^{y_i} - q^{y_j+1+k})\right)}{\prod_{i=1}^{n} (-1)^{y_i} \left(\prod_{t=0}^{y_i-1} q^t\right) (q)_{y_i} q^{y_i(|\mathbf{a}|-a_i-y_i)} (q)_{|\mathbf{a}|-a_i-y_i}} \\
&= \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left((-1)^{a_i} \left(\prod_{t=y_i}^{y_{i+1}-1} q^t\right) \frac{(q)_{y_j-y_i}}{(q)_{y_j-y_{i+1}}} q^{y_i a_j} \frac{(q)_{y_{j+1}-y_i}}{(q)_{y_j-y_i}}\right)}{\prod_{i=1}^{n} (-1)^{y_i} \left(\prod_{t=0}^{y_i-1} q^t\right) (q)_{y_i-y_1} q^{y_i(|\mathbf{a}|-a_i-y_i)} (q)_{y_{n+1}-y_{i+1}}} \\
&= (q)_{y_{n+1}-y_1} \Big/ \left(\prod_{i=1}^{n} (q)_{y_{i+1}-y_i}\right) = \frac{(q)_{|\mathbf{a}|}}{(q)_{a_1} \cdots (q)_{a_n}}.
\end{aligned}$$

□

2.3.2 Мастер-теорема Брессу и Гулдена

Стоит отметить, что рассуждения, похожие на приведённые в этом подразделе, можно найти в [39] (см. теоремы 1.2 и 3.5). Однако, приведённое здесь доказательство — более прямолинейное и короткое.

Доказательство теоремы 2.2.2. Пусть $\deg(i) = |\{j \mid (i,j) \in T\}|$. Рассмотрим такую перестановку $\delta \in \mathcal{S}_n$, что для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ выполняется $\deg(\delta_i) \geqslant \deg(\delta_j)$, при этом $\deg(\delta_i) = \deg(\delta_j)$ только когда $\delta_i < \delta_j$ (то есть все элементы с одинаковым значением deg расположены по возрастанию). Отметим, что $\sigma = \delta$ для транзитивного T.

$\mathrm{CT}[f]$ равняется коэффициенту при $\prod_{i=1}^n x_i^{|\mathbf{a}|-a_i-\deg(i)}$ многочлена h, где

$$h(\mathbf{x}, q) = \prod_{(i,j)\in T} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j-1} \cdot x_j^{a_i} x_i^{a_j-1}.$$

Для вычисления этого коэффициента снова воспользуемся теоремой 1.2.2. Рассмотрим решётку

$$G = G_1 \times \dots \times G_n, \quad G_i = \{q^y \mid y \in [0, |\mathbf{a}| - a_i] \setminus S_i\},$$

где

$$S_{\delta_i} = \left\{ |\mathbf{a}| - a_{\delta_i} - \sum_{v=j}^{n} a_{\delta_v} \;\middle|\; n+1-\deg(\delta_i) < j \leqslant n+1 \right\}.$$

Предположим, что $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = (q^{y_1}, \dots, q^{y_n}) \in G$ не является корнем h. Для любых $(i,j) \in T$ верно

$$y_j - y_i \geqslant a_i \text{ или } y_i - y_j \geqslant a_j, \tag{2.3}$$

иначе один из множителей в $\left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j-1}$ оказался бы равен нулю. Отсюда следует, что все y_i попарно различны. Пусть $\pi \in \mathcal{S}_n$ — такая перестановка, что $y_{\pi_1} < \dots < y_{\pi_n}$. Неравенства (2.3) для пары индексов (π_i, π_{i+1}) можно переписать как

$$y_{\pi_{i+1}} - y_{\pi_i} \geqslant a_{\pi_i}. \tag{2.4}$$

Складывая эти неравенства для $i \in [1, n-1]$ друг с другом и с неравенством $y_{\pi_1} \geqslant 0$, получаем $y_{\pi_n} \geqslant |\mathbf{a}| - a_{\pi_n}$. Но $y_{\pi_n} \leqslant |\mathbf{a}| - a_{\pi_n}$, значит, все неравенства (2.4) должны были выродиться в равенства и

$$y_{\pi_i} = |\mathbf{a}| - \sum_{j=i}^{n} a_{\pi_j}.$$

Поскольку $y_{\pi_n} \notin S_{\pi_n}$, из определения S_{π_n} следует, что $\deg(\pi_n) = 0$. Но T — турнир, значит, $\deg(i) = 0$ для не более чем одного i. Поскольку $\mathbf{x}$ не является корнем h, такое i существует (и равняется δ_n), то есть $\deg(\delta_n) = 0$ и $\pi_n = \delta_n$.

Пусть мы уже доказали, что $\pi_k = \delta_k$ и $\deg(\delta_k) = n - k$ для $j < k \leqslant n$. Из условий на deg следует, что $(\delta_i, \delta_k) \in T$ для всех $1 \leqslant i < k$, $j < k \leqslant n$. Тогда $\deg(\delta_i) \geqslant n - j$ для всех $1 \leqslant i \leqslant j$, и, поскольку T — турнир, $\deg(\delta_i) > n - j$ для всех $1 \leqslant i < j$.

Из того, что $y_{\pi_j} \notin S_{\pi_j}$, следует, что $\deg(\pi_j) \leqslant n-j$. Это возможно, только если $\pi_j = \delta_j$ и $\deg(\delta_j) = n-j$.

Итак, либо все точки решётки G — корни h и $\mathrm{CT}[f] = 0$, либо $\pi = \delta$ и $\deg(\delta_i) = n - i$ для всех i. В последнем случае T транзитивен и $\pi = \delta = \sigma$.

Осталось лишь явно вычислить коэффициент в случае транзитивного T. Мы опустим эти вычисления, поскольку они приведены в более общем случае в следующем подразделе. $\square$

2.3.3 Основной результат

Доказательство теоремы 2.2.4. $\mathrm{CT}[f]$ равняется коэффициенту при одночлене $\prod_{i=1}^n x_i^{|\mathbf{a}|-a_i-\sum_{j=1}^n [\![(i,j)\in U]\!]}$ многочлена h, где

$$h(\mathbf{x}, q) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)_{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}\right)_{a_j-[\![(i,j)\in U]\!]} \cdot x_j^{a_i} x_i^{a_j-[\![(i,j)\in U]\!]}.$$

Снова воспользуемся теоремой 1.2.2. Рассмотрим решётку

$$G = G_1 \times \cdots \times G_n, \quad G_i = \{q^y \mid y \in [0, |\mathbf{a}| - a_i] \setminus S_i\},$$

где

$$S_i = \left\{|\mathbf{a}| - a_i - \sum_{v=r_t+1}^{n} a_v\right\} \cup \left\{|\mathbf{a}| - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v \;\middle|\; (i,j) \in B_t\right\},$$

если существует такое t, что $i \in [l_t, r_t - 1]$, и $S_i = \varnothing$ иначе. Рассмотрим

$$N = [1,n] \rtimes [1,n], \quad V_i = [l_i, r_i] \rtimes [m_i, r_i], \quad V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i.$$

Заметим, что $U_i \subset V_i$, значит, $U \subset V$. Также заметим, что $C_i \setminus B_i = V_i \setminus U_i$. Заменим линейные множители h

$$(x_i - q^{a_j}x_j), \text{ где } (i,j) \in V \setminus U,$$

на

$$\left(x_i - q^{a_j}x_j - \left(q^{|\mathbf{a}|-a_i-\sum_{v=j}^n a_v} - q^{|\mathbf{a}|-\sum_{v=j}^n a_v}\right)\right),$$

и обозначим полученный многочлен за h'. Интересующий нас коэффициент h совпадает с соответствующим коэффициентом h', поскольку при рассмотрении

h и h' как многочленов над полем рациональных функций $\mathbb{F}(q)$ он является одним из старших коэффициентов, а h отличается от h' лишь константами из $\mathbb{F}(q)$ в линейных множителях.

Предположим, что $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (q^{y_1}, \ldots, q^{y_n}) \in G$ не является корнем h'. Введём обозначение

$$[\![i,j]\!]^* = [\![(i,j) \in V \setminus U]\!] \cdot \left[\!\!\left[y_i = |\mathbf{a}| - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v \right]\!\!\right] \cdot \left[\!\!\left[y_j = |\mathbf{a}| - \sum_{v=j}^{n} a_v \right]\!\!\right].$$

Для любых $i < j$ верно

$$y_j - y_i \geqslant a_i + [\![i,j]\!]^* \text{ или } y_i - y_j \geqslant a_j + [\![(i,j) \in N \setminus V]\!], \tag{2.5}$$

иначе один из линейных множителей h' оказался бы равен нулю. Отсюда следует, что все y_i попарно различны. Пусть $\pi \in \mathcal{S}_n$ — такая перестановка, что $y_{\pi_1} < \cdots < y_{\pi_n}$. Поскольку $U \subset V$, неравенства (2.5) для пары индексов (π_i, π_{i+1}) можно переписать как

$$y_{\pi_{i+1}} - y_{\pi_i} \geqslant a_{\pi_i} + [\![(\pi_{i+1}, \pi_i) \in N \setminus V]\!] + [\![\pi_i, \pi_{i+1}]\!]^*. \tag{2.6}$$

Складывая эти неравенства для $i \in [1, n-1]$ друг с другом и с неравенством $y_{\pi_1} \geqslant 0$, получаем

$$y_{\pi_n} \geqslant |\mathbf{a}| - a_{\pi_n} + \sum_{i=1}^{n-1} ([\![(\pi_{i+1}, \pi_i) \in N \setminus V]\!] + [\![\pi_i, \pi_{i+1}]\!]^*).$$

Но $y_{\pi_n} \leqslant |\mathbf{a}| - a_{\pi_n}$, значит, $(\pi_{i+1}, \pi_i) \notin N \setminus V$ и $[\![\pi_i, \pi_{i+1}]\!]^* = 0$ для всех i. При этом все неравенства (2.6) должны были выродиться в равенства, поэтому

$$y_{\pi_i} = |\mathbf{a}| - \sum_{j=i}^{n} a_{\pi_j}.$$

Спуск в перестановке π — это позиция i, в которой выполняется неравенство $\pi_{i+1} < \pi_i$. Спуск возможен только при $(\pi_{i+1}, \pi_i) \in V$. Из определения V следует, что спуск мог произойти, только если $\pi_i, \pi_{i+1} \in [l_t, r_t]$ для некоторого t. Тогда для любого t все элементы π из $[l_t, r_t]$ должны идти подряд, все элементы меньше них должны идти до них, а все элементы больше — после.

Покажем, что элементы $[l_t, r_t]$ в перестановке должны идти не просто подряд, а в порядке возрастания. Тогда π — обязательно тождественная перестановка, то есть только одна точка решётки G не является корнем h'.

Если $\pi_{r_t} \in [l_t, r_t - 1]$, то

$$y_{\pi_{r_t}} = |\mathbf{a}| - a_{\pi_{r_t}} - \sum_{j=r_t+1}^{n} a_{\pi_j} = |\mathbf{a}| - a_{\pi_{r_t}} - \sum_{j=r_t+1}^{n} a_j,$$

что противоречит определению $G_{\pi_{r_t}}$. Значит, $\pi_{r_t} = r_t$.

Пусть $s \geqslant m_t$, и мы уже доказали, что $\pi_{s+1} = s+1, \ldots, \pi_{r_t} = r_t$. Предположим, что $\pi_s < s$. Заметим, что $[\![\pi_s, \pi_{s+1}]\!]^* = [\![\pi_s, s+1]\!]^* = 0$. Кроме того,

$$y_{\pi_s} = |\mathbf{a}| - a_{\pi_s} - \sum_{j=s+1}^{n} a_j, \quad y_{s+1} = |\mathbf{a}| - \sum_{j=s+1}^{n} a_j,$$

а также $(\pi_s, s+1) \in V$. Тогда из определения $[\![\ldots]\!]^*$ следует, что $(\pi_s, s+1) \in U$. По предположению, $\pi_s < s$, значит, $(\pi_s, s+1) \in B_t$. Но

$$y_{\pi_s} = |\mathbf{a}| - a_{\pi_s} - \sum_{j=s+1}^{n} a_j,$$

что противоречит определению G_{π_s}. Значит, $\pi_s = s$.

Итак, мы доказали, что $\pi_{m_t} = m_t, \ldots, \pi_{r_t} = r_t$. Но, по определению V, спуски невозможны при $\pi_i, \pi_{i+1} \in [l_t, m_t - 1]$, поэтому все элементы $[l_t, m_t - 1]$ также идут в возрастающем порядке.

Таким образом, π — тождественная перестановка, а единственная точка решётки G, не являющаяся корнем h' — это $(q^{y_1}, \ldots, q^{y_n})$, где $y_i = a_1 + \cdots + a_{i-1}$.

Посмотрим, какие изменения произошли при вычислении коэффициента по сравнению с теоремой 2.2.1. Для удобства положим $y_{n+1} = |\mathbf{a}|$. Зафиксируем $1 \leqslant t \leqslant k$.

Во-первых, из множеств G_i, $l_t \leqslant i < r_t$), пропали элементы q^y, $y \in S_i$, то есть коэффициент увеличился в

$$\prod_{i=l_t}^{r_t-1} \left(q^{y_i} - q^{|\mathbf{a}| - a_i - \sum_{v=r_t+1}^{n} a_v}\right) \cdot \prod_{(i,j)\in B_t} \left(q^{y_i} - q^{|\mathbf{a}| - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v}\right)$$

раз. Во-вторых, появился линейный множитель

$$x_i - q^{a_j} x_j - (q^{|\mathbf{a}| - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v} - q^{|\mathbf{a}| - \sum_{s=j}^{n} a_v})$$

для всех $(i, j) \in V_t \setminus U_t = C_t \setminus B_t$, то есть коэффициент увеличился в

$$\prod_{(i,j)\in C_t\setminus B_t} \left(q^{y_i} - q^{y_{j+1}} - (q^{|\mathbf{a}| - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v} - q^{|\mathbf{a}| - \sum_{v=j}^{n} a_v})\right)$$
$$= \prod_{(i,j)\in C_t\setminus B_t} \left(q^{y_i} - q^{|\mathbf{a}| - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v}\right)$$

раз. В-третьих, пропал линейный множитель $x_i - q^{a_j}x_j$ для всех $(i,j) \in V_t$, поэтому коэффициент уменьшился в

$$\prod_{(i,j)\in V_t} (q^{y_i} - q^{y_{j+1}})$$

раз. Таким образом, всего коэффициент увеличился в

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=l_t}^{r_t-1} \left(q^{y_i} - q^{|\mathbf{a}|-a_i-\sum_{v=r_t+1}^n a_v}\right) \cdot \prod_{(i,j)\in C_t} \left(q^{y_i} - q^{|\mathbf{a}|-a_i-\sum_{v=j}^n a_v}\right) / \prod_{(i,j)\in V_t} (q^{y_i} - q^{y_{j+1}}) \\
&= \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} \left(q^{y_i} - q^{|\mathbf{a}|-a_i-\sum_{v=j+1}^n a_v}\right) / \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} (q^{y_i} - q^{y_{j+1}}) \\
&= \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} \left(1 - q^{a_{i+1}+\dots+a_j}\right) / \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} (1 - q^{a_i+\dots+a_j}) \\
&= \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t+1}^{j} \left(1 - q^{a_i+\dots+a_j}\right) / \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} (1 - q^{a_i+\dots+a_j}) \\
&= \prod_{j=m_t}^{r_t} \frac{1 - q^{a_j}}{1 - q^{a_{l_t}+\dots+a_j}}
\end{aligned}$$

раз. Остаётся перемножить результат по $1 \leqslant t \leqslant k$. $\square$

Глава 3. Число Алона – Тарси прямых произведений графов

3.1 Обозначения

Прямое (декартово) произведение $G_1 \square G_2$ графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — это граф на множестве вершин $V_1 \times V_2$, в котором две вершины (v_1, v_2) и (u_1, u_2) соединены ребром тогда и только тогда, когда либо $v_1 = u_1$ и $\{v_2, u_2\} \in E_2$, либо $v_2 = u_2$ и $\{v_1, u_1\} \in E_1$.

Полный граф (клика) K_n на n вершинах — это граф на n вершинах, в котором есть ребро между каждой парой вершин. **(Простой) путь** P_n на n вершинах — это граф на множестве вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множестве рёбер $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in [1, n-1]\}$. Наконец, **(простой) цикл** C_n на n вершинах — это граф на множестве вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множестве рёбер $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in [1, n]\}$, где $v_{n+1} = v_1$.

Также нам понадобится понятие **мультиграфов** — графов, рёбра которых образуют мультимножество. Другими словами, одна пара вершин в мультиграфе может быть соединена несколькими рёбрами, которые в таком случае называют **кратными**.

Обозначим за $\operatorname{tr} M$ след квадратной матрицы M, то есть сумму элементов её главной диагонали $M_{i,i}$.

Коэффициент $\left[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}\right] F_G$ графового многочлена $F_G(\mathbf{x})$ — **центральный**, если $d_i = \deg_G(v_i)/2$ для всех i, и **почти центральный**, если $|d_i - \deg_G(v_i)/2| \leqslant 1$ для всех i.

3.2 Обзор результатов

Известно (см. лемму 2.6 в [56]), что $\chi(G_1 \square G_2) = \max(\chi(G_1), \chi(G_2))$. Намного меньше известно о списочном хроматическом числе (и числе Алона – Тарси) прямых произведений графов. Боровецкий, Ендроль, Краль и Мишкуф в 2006 году показали следующую оценку.

Теорема 3.2.1 (Боровецкий – Ендроль – Краль – Мишкуф [14]). *Для любых графов G_1 и G_2 верно*

$$\mathrm{ch}(G_1 \square G_2) \leqslant \min(\mathrm{ch}(G) + \mathrm{col}(H), \mathrm{col}(G) + \mathrm{ch}(H)) - 1.$$

Здесь $\mathrm{col}(G)$ — это **число раскрашивания** графа G, то есть наименьшее $k \in \mathbb{N}$, для которого существует способ упорядочить вершины $v_1, \ldots, v_n$ графа G так, чтобы каждая вершина v_i была соединена ребром не более чем с $k-1$ вершиной среди $v_1, \ldots, v_{i-1}$.

В 2019 году Каул и Мадрок доказали следующие утверждения.

Теорема 3.2.2 (Каул – Мадрок [42], теорема 4). *Для любых $k, n \in \mathbb{N}$*

$$\chi(C_{2k+1} \square P_n) = \mathrm{ch}(C_{2k+1} \square P_n) = \mathrm{AT}(C_{2k+1} \square P_n) = 3.$$

Теорема 3.2.3 (Каул – Мадрок [42], теорема 7). *Пусть G — полный граф или нечётный цикл на $n \geqslant 3$ вершинах. Пусть H — граф на $k \geqslant 3$ вершинах, который содержит гамильтонов (проходящий через все вершины H) путь $w_1, \ldots, w_m$, при этом каждая w_i соединена ребром с не более чем k вершинами среди $w_1, \ldots, w_{i-1}$. Тогда $\mathrm{AT}(G \square H) \leqslant \Delta(G) + k$.*

Работа [47] посвящена вычислению числа Алона – Тарси **тороидальной решётки** $C_n \square C_k$ при помощи теоремы 1.2.2. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3.2.4. *Для любых $n, k \geqslant 3$*

$$\mathrm{AT}(C_n \square C_k) = \begin{cases} 3, & \textit{если } nk \textit{ чётно}, \\ 4, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Заметим, что для тороидальной решётки $C_n \square C_{2k}$ при $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$

$$\chi(C_n \square C_{2k}) = \mathrm{ch}(C_n \square C_{2k}) = \mathrm{AT}(C_n \square C_{2k}) = 3.$$

Для тороидальной решётки $C_{2n+1} \square C_{2k+1}$ при $n, k \geqslant 1$ известно лишь

$$3 = \chi(C_{2n+1} \square C_{2k+1}) \leqslant \mathrm{ch}(C_{2n+1} \square C_{2k+1}) \leqslant \mathrm{AT}(C_{2n+1} \square C_{2k+1}) = 4.$$

В работе [52] другим методом показан следующий более общий результат.

Теорема 3.2.5. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, G — граф, все вершины в котором имеют чётную степень. Предположим, что у графового многочлена F_G есть хотя бы один ненулевой почти центральный коэффициент. Тогда центральный коэффициент графового многочлена F_H графа $H = G \square C_{2k}$ не равен нулю. Как следствие, граф H — $(\deg_H/2+1)$-списочно-раскрашиваемый и*

$$\mathrm{ch}(H) \leqslant \mathrm{AT}(H) \leqslant \frac{\Delta(H)}{2} + 1 = \frac{\Delta(G)}{2} + 2.$$

Заметим, что теорема 3.2.1 при тех же условиях даёт оценку $\mathrm{ch}(H) \leqslant \min(\mathrm{ch}(G)+2, \mathrm{col}(G)+1)$. Эта оценка сильнее, если $\mathrm{ch}(G)$ (или $\mathrm{col}(G)$) мало. Однако в случае, когда $\mathrm{ch}(G)$ и $\mathrm{col}(G)$ близки к $\Delta(G)$, она может оказаться слабее. Например, если $G = C_{2n+1}$ — нечётный цикл, F_G имеет ненулевой почти центральный коэффициент (просто потому что все его коэффициенты — почти центральные), значит, по теореме 3.2.5, $\mathrm{ch}(C_{2n+1} \square C_{2k}) \leqslant 3$ (что также является одним из утверждений теоремы 3.2.4). С другой стороны, теорема 3.2.1 даёт лишь оценку $\mathrm{ch}(C_{2n+1} \square C_{2k}) \leqslant 4$.

Перечислим также полученные в работе [52] приложения теоремы 3.2.5.

Предложение 3.2.6. *Пусть $G = C_{2k_1+1} \square \cdots \square C_{2k_m+1} \square C_{2k_{m+1}} \square \cdots \square C_{2k_n}$, $0 \leqslant m < n$,*

$$\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_m} \leqslant 1.$$

Тогда

$$\mathrm{ch}(G) \leqslant \mathrm{AT}(G) = n + 1.$$

Несмотря на то, что эта оценка точка для числа Алона – Тарси, она далека от точной оценки списочного хроматического числа при большом n. Например, если $k_i \geqslant 2$ для всех $i = 1, \ldots, m$ (что точно верно при $m \geqslant 2$ и $\sum 1/k_i \leqslant 1$), то граф G не содержит треугольников, а его максимальная степень равна $2n$. Тогда $\mathrm{ch}(G) \leqslant (2+o(1))\frac{n}{\log n}$ по результату Моллоя [49], недавно улучшившему оценку $O(\frac{n}{\log n})$, впервые полученную Йохансcоном [36].

Предложение 3.2.7. *Пусть C_n^p — это p-**я степень цикла** C_n, то есть граф на множестве вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$, в котором v_i и v_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $j \in \{i-p, \ldots, i-1, i+1, \ldots i+p\}$ (все индексы по модулю n). Пусть $p+1$ делит n, либо $n \geqslant p(p+1)$. Тогда*

$$\mathrm{ch}(C_n^p \square C_{2k}) \leqslant \mathrm{AT}(C_n^p \square C_{2k}) \leqslant p + 2.$$

Теорему 3.2.5 можно применять и к мультиграфам. В частности, добавляя кратные рёбра к графам с большим списочным хроматическим числом, можно получать для них нетривиальные оценки. Примером такой оценки является следующее предложение.

Предложение 3.2.8. *Пусть $G = (V, E)$ — граф, все вершины максимальной степени в котором можно покрыть набором непересекающихся по вершинам циклов. Тогда*

$$\mathrm{AT}(G \square C_{2k}) \leqslant \Delta(G) + 1 = \Delta(G \square C_{2k}) - 1.$$

Следствие 3.2.9.

$$\mathrm{ch}(K_n \square C_{2k}) = \mathrm{AT}(K_n \square C_{2k}) = n.$$

Наконец, следующее предложение представляет собой обобщение теоремы 3.2.5 на произвольные графы (не обязательно с чётными степенями вершин, не обязательно с ненулевым почти центральным коэффициентом). Нестрого говоря, оно оценивает списочное хроматическое число в терминах того, насколько близкий к центральному ненулевой коэффициент есть у графового многочлена. Также из этого предложения можно вывести следствие 3.2.9.

Предложение 3.2.10. *Рассмотрим граф $G = (V, E)$, пусть $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Для любого $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ определим $l_G(\eta, i) = |\eta_i - \deg_G(v_i)/2|$. Пусть $[\mathbf{x}^\tau]F_G(\mathbf{x})$ — ненулевой коэффициент графового многочлена F_G. Разделим множество $[1, n]$ на части*

$$\begin{aligned}
N &= \{i \mid \tau_i = \deg_G(v_i)/2\},\\
A_1 &= \{i \mid \tau_i \leqslant \deg_G(v_i)/2 - 1\},\\
A_2 &= \{i \mid \tau_i = \deg_G(v_i)/2 - 1/2\},\\
B_1 &= \{i \mid \tau_i \geqslant \deg_G(v_i)/2 + 1\},\\
B_2 &= \{i \mid \tau_i = \deg_G(v_i)/2 + 1/2\}.
\end{aligned}$$

Также, пусть A_3 — произвольное подмножество A_1 размера $\max(0, |A_1| - |B_1|)$, B_3 — произвольное подмножество B_1 размера $\max(0, |B_1| - |A_1|)$. Тогда граф $G \square C_{2k}$ — f-списочно-раскрашиваемый, где

$$f(v_i) = \begin{cases} \deg_G(v_i)/2 + 2, & \text{если } i \in N,\\ \deg_G(v_i)/2 + l_G(\tau, i) + 1, & \text{если } i \in A_1 \cup B_1 \setminus A_3 \setminus B_3,\\ \deg_G(v_i)/2 + l_G(\tau, i) + 2, & \text{если } i \in A_2 \cup B_2 \cup A_3 \cup B_3. \end{cases}$$

3.3 Доказательства

Подраздел 3.3.1 содержит доказательство теоремы 3.2.4. В подразделе 3.3.2 приведено доказательство теоремы 3.2.5. Подразделы 3.3.3 — 3.3.5 посвящены доказательствам приложений теоремы 3.2.5.

3.3.1 Тороидальная решётка

На протяжении этого подраздела i — мнимая единица, e — число Эйлера (основание натурального логарифма), $\overline{z}$, где $z \in \mathbb{C}$ — комплексное сопряжение, то есть если $z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, то $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.

Лемма 3.3.1. *Пусть $H = (V, E)$ — $2d$-регулярный граф на множестве вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $G = H \square C_k$. Положим $N = nk$. Зафиксируем одинаковый для всех вершин список цветов $A \subset \mathbb{F}$, $|A| = d + 2$. Пусть $\mathcal{U}$ — множество всех правильных раскрасок $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in A^n$ графа H. Определим квадратную матрицу M, строки и столбцы которой пронумерованы элементами $\mathcal{U}$:*

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = F_H(\mathbf{u}) \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{u_i - v_i}{\kappa(A, u_i)}$$

для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$. Тогда

$$\left[\prod_{i=1}^{N} x_i^{d+1}\right] F_G(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} M^k,$$

где переменные $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ соответствуют N вершинам графа G.

Доказательство. По теореме 1.2.2,

$$\left[\prod_{i=1}^{N} x_i^{d+1}\right] F_G(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_N)\in A^N} \frac{F_G(\mathbf{a})}{\prod_{i=1}^{N} \kappa(A, a_i)}. \tag{3.1}$$

Ненулевые слагаемые в правой части формулы (3.1) соответствуют правильным раскраскам графа G. Каждая правильная раскраска G соответствует последовательности $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k \in \mathcal{U}$ правильных раскрасок H. Для такой последовательности соответствующее слагаемое в правой части формулы (3.1) имеет вид

$$M_{\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^2} \cdot M_{\mathbf{u}^2,\mathbf{u}^3} \cdot \dots \cdot M_{\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^1}.$$

Сумма же таких произведений есть ничто иное как $\operatorname{tr} M^k$. $\square$

Предложение 3.3.2. *Пусть $G = C_n \square C_k$ — это тороидальная решётка, где $n, k \geqslant 3$. Положим $N = nk$. Тогда $\left[\prod_{i=1}^N x_i^2\right] F_G(\mathbf{x}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда N чётно. Здесь переменные $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ соответствуют N вершинам графа G.*

Доказательство. Можно считать, что если N чётно, то k чётно. Воспользуемся леммой 3.3.1 с параметрами $H = C_n$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $A = \{1, w, w^2\}$, где $w = e^{2\pi i/3}$.

Достаточно показать, что M — не тождественно нулевая матрица, которая является антиэрмитовой, если n нечётно, и эрмитовой, если n чётно (то есть и k чётно). Действительно, если это так, то либо все собственные числа M — чисто мнимые, либо все они чисто вещественные, и при этом не все собственные числа равны нулю. Заметим, что $\operatorname{tr} M^k$ — это сумма k-х степеней этих собственных чисел. Если N чётно, то чётно и k, тогда $\operatorname{tr} M^k$ — это сумма вещественных чисел одного знака, не все из которых равны нулю, то есть $\operatorname{tr} M^k \neq 0$. Если же N нечётно, то нечётно и k, тогда $\operatorname{tr} M^k$ — это сумма чисто мнимых чисел, то есть чисто мнимое число. Но $\operatorname{tr} M^k = \left[\prod_{i=1}^N x_i^2\right] F_G(\mathbf{x})$ — вещественное число, значит, $\operatorname{tr} M^k = 0$.

Матрица M точно не тождественно нулевая: например, $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \neq 0$, если $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$ — любая правильная раскраска C_n в 3 цвета, $\mathbf{v} = (u_n, u_1, \dots, u_{n-1})$.

С этого момента и до конца доказательства все индексы — циклические по модулю n. Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$ — правильная раскраска C_n в цвета $1, w, w^2$. Обозначим за u_i^* уникальный цвет $\{1, w, w^2\} \setminus \{u_i, u_{i-1}\}$. Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{u_i - u_i^*} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\kappa(A, u_i)},$$

получаем

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{u_i - v_i}{u_i - u_i^*}. \tag{3.2}$$

Требуется показать, что для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ верно

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = (-1)^n \overline{M_{\mathbf{v},\mathbf{u}}}. \tag{3.3}$$

Если $u_i = v_i$ для некоторого $i \in [1, n]$, то $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = 0 = (-1)^n \overline{M_{\mathbf{v},\mathbf{u}}}$. В противном случае, применив (3.2) и сделав подстановку $\overline{z} = 1/z$ для корней из единицы $z \in \{u_i, v_i, v_i^*\}$, мы приводим выражение (3.3) к виду

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{u_i - u_i^*}{u_i} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{v_i^* - v_i}{v_i^*}. \tag{3.4}$$

Пусть $\varepsilon_i = u_i/u_{i-1}$, тогда $\varepsilon_i \in \{w, w^2\}$, $u_i^* = u_i\varepsilon_i$. Аналогично, пусть $\delta_i = v_i/v_{i-1}$, тогда $\delta_i \in \{w, w^2\}$, $v_i^* = v_i\delta_i$. Из определения ε_i и δ_i немедленно следует, что

$$\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \prod_{i=1}^{n} \delta_i = 1. \tag{3.5}$$

Выражение (3.4) эквивалентно

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - \varepsilon_i) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(1 - \overline{\delta_i}) = (-1)^{2n} \prod_{i=1}^{n} \delta_i^{-1} \prod_{i=1}^{n}(1 - \delta_i).$$

Подставляя (3.5), получаем

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - \varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \delta_i). \tag{3.6}$$

Заметим, что $1 - \varepsilon = \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\varepsilon^2$ для $\varepsilon \in \{w, w^2\}$; при этом знаки отличны для w и w^2. Подставляя это тождество для всех ε_i и δ_i и снова пользуясь (3.5), выражение (3.6) сводится к следующему утверждению: суммарное количество ε_i и δ_i, равных w, чётно.

Назовём индекс i **белым**, если $u_i = w \cdot v_i$, и **чёрным**, если $u_i = w^2 \cdot v_i$. Тогда $\varepsilon_i = \delta_i$ тогда и только тогда, когда $i - 1$ и i имеют один цвет. Остаётся заметить, что $i - 1$ и i имеют разные цвета для чётного числа i. □

Доказательство теоремы 3.2.4. По теореме 3.2.3 имеем неравенство

$$\mathrm{AT}(C_n \square C_k) \leqslant \Delta(C_n) + 2 \leqslant 4.$$

Утверждение немедленно следует из этого неравенства и предложения 3.3.2. □

3.3.2 Прямое произведение графа с чётным циклом

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Рассмотрим многочлен от переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x})R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}],$$

где Q имеет степень не более $|\mathbf{a}|$, а R — однородный многочлен степени $|\mathbf{b}|$.

Рассмотрим nl переменных $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^l)$, $\mathbf{x}^i = (x^i_1, \ldots, x^i_n)$. Для удобства, положим $\mathbf{x}^{l+1} = \mathbf{x}^1$. Определим

$$P_l(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^l) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant l} P(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^{j+1}).$$

Нас интересует коэффициент $\left[\prod_{j=1}^l (\mathbf{x}^j)^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}\right] P_l$. Несложно видеть, что этот коэффициент равен

$$\sum \prod_{j=1}^{l} \left[(\mathbf{x}^j)^{\mathbf{p}^j} (\mathbf{x}^{j+1})^{\mathbf{q}^j}\right] R(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^{j+1}) \cdot \left[(\mathbf{x}^j)^{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{p}^j-\mathbf{q}^{j-1}}\right] Q(\mathbf{x}^j) = \operatorname{tr} \Phi^l,$$

где суммирование идёт по всем таким $(\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^l)$, $(\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^l)$, что

$$\mathbf{p}^j = (p^j_1, \ldots, p^j_n),\ \mathbf{q}^j = (q^j_1, \ldots, q^j_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}, \quad |\mathbf{p}^j| + |\mathbf{q}^j| = |\mathbf{b}|,$$

а коэффициент матрицы Φ для $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$ и $\beta = (\beta^1, \beta^2)$, $\alpha^i, \beta^i \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, $|\alpha^1| + |\alpha^2| = |\beta^1| + |\beta^2| = |\mathbf{b}|$, равен

$$\Phi_{\alpha,\beta} = \left[\mathbf{x}^{\alpha^1} \mathbf{y}^{\alpha^2}\right] R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \left[\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\alpha^1-\beta^2}\right] Q(\mathbf{x}).$$

Если Q — однородный многочлен, то $\Phi_{\alpha,\beta} \neq 0$ только когда $|\alpha^1| + |\beta^2| = |\mathbf{b}|$, то есть когда $|\alpha^1| = |\beta^1|$, $|\alpha^2| = |\beta^2|$; то же верно и для $\Phi_{\beta,\alpha}$.

Доказательство теоремы 3.2.5. Итак, теперь $G = (V, E)$ — граф, все вершины в котором имеют чётную степень, $k \in \mathbb{N}$, $H = G \square C_{2k}$. Положим $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $a_i = \deg_G(v_i)/2$, $Q(\mathbf{x}) = F_G(\mathbf{x})$, $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{j=1}^n (y_j - x_j)$, $\mathbf{b} = (1, \ldots, 1)$, $l = 2k$. Тогда $P_l = P_{2k} = F_H$.

Заметим, что $\Phi_{\alpha,\beta} \neq 0$ только если $\alpha^1_j = 1 - \alpha^2_j \leqslant 1$ при $j \in [1, n]$, $|\alpha^1| = |\beta^1|$, $|\alpha^2| = |\beta^2|$. Тогда $\operatorname{tr} \Phi^{2k} = \operatorname{tr}(\Phi')^{2k}$, где Φ' — подматрица Φ на таких

α, β, что $\alpha^1_j = 1-\alpha^2_j \leqslant 1$, $\beta^1_j = 1-\beta^2_j \leqslant 1$ при $j \in [1,n]$, $|\alpha^1| = |\beta^1|$, $|\alpha^2| = |\beta^2|$. Для любых таких α, β

$$\Phi'_{\alpha,\beta} = (-1)^{|\alpha^1|}\left[\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\alpha^1-(\mathbf{b}-\beta^1)}\right] F_G(\mathbf{x}) = (-1)^{|\alpha^1|}\left[\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\beta^1-\alpha^1}\right] F_G(\mathbf{x}).$$

Заметим, что

$$\left[\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\beta^1-\alpha^1}\right] F_G(\mathbf{x}) = (-1)^{|E|}\left[\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\alpha^1-\beta^1}\right] F_G(\mathbf{x}), \tag{3.7}$$

поскольку мы получаем эти одночлены друг из друга, одновременно меняя знак в каждом множителе $x_i - x_j$ многочлена F_G. Таким образом, помня, что $\Phi'_{\alpha,\beta}$ и $\Phi'_{\beta,\alpha}$ не равны нулю только при $|\alpha^1| = |\beta^1|$, мы получаем

$$\Phi'_{\alpha,\beta} = (-1)^{|E|+|\alpha^1|-|\beta^1|}\cdot\Phi'_{\beta,\alpha} = (-1)^{|E|}\cdot\Phi'_{\beta,\alpha}$$

для любых α, β. Отметим, что множитель $(-1)^{|E|}$ не зависит от α и β, значит, матрица Φ' симметрична или антисимметрична. Тогда собственные числа матрицы Φ' либо все вещественные, либо все чисто мнимые. Значит, $(2k)$-е степени всех ненулевых собственных чисел вещественны и имеют один и тот же знак (положительны, если Φ' симметрична, и отрицательны, если Φ' антисимметрична). Таким образом, $\operatorname{tr}\Phi^{2k} = \operatorname{tr}(\Phi')^{2k} \neq 0$, если хотя бы один из коэффициентов вида

$$\left[\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\beta^1-\alpha^1}\right] F_G(\mathbf{x})$$

не равен нулю; другими словами, если есть хотя бы один ненулевой коэффициент $\left[\mathbf{x}^{\mathbf{d}}\right] F_G(\mathbf{x})$, такой что $|d_i - \deg_G(v_i)/2| \leqslant 1$ при всех i. $\square$

Замечание 3.3.3. Определим обобщённый графовый многочлен Q для графа или мультиграфа $G = (V,E)$ с чётными степенями всех вершин, $V = \{v_1,\dots,v_n\}$, как произведение множителей $x_i \pm x_j$ по всем рёбрам $\{v_i,v_j\} \in E$ (по множителю на каждое кратное ребро). Заметим, что такой многочлен попрежнему удовлетворяет свойству (3.7) с некоторым множителем ±1 на месте $(-1)^{|E(G)|}$. Значит, те же рассуждения показывают, что если у Q есть ненулевой почти центральный коэффициент, то у многочлена

$$\prod_{i=1}^{2k} Q(\mathbf{x}^i,\mathbf{x}^{i+1})\prod_{i=1}^{2k}\prod_{j=1}^{n}(x^i_j - x^{i+1}_j),\ \text{где } \mathbf{x}^{2k+1} = \mathbf{x}^1, \tag{3.8}$$

не равен нулю центральный коэффициент (то есть коэффициент при одночлене $\prod_{i,j}(x^i_j)^{\deg_G(v_j)/2+1}$).

3.3.3 Прямое произведение нескольких циклов

Пусть $G = C_{2k_1+1}\square\cdots\square C_{2k_n+1}$ — прямое произведение нечётных циклов, удовлетворяющее

$$\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_n}\leqslant 1.$$

Наша цель — показать, что графовый многочлен F_G имеет ненулевой почти центральный коэффициент. Мы применим метод Алона – Тарси (см. теорему 1.4.1): построим такую ориентацию D графа G, чтобы исходящая степень любой вершины лежала в множестве $\{n-1, n, n+1\}$, и в D не было нечётных ориентированных циклов. Заметим, что тогда автоматически $0 = \mathrm{EO}(D) \neq \mathrm{EE}(D) > 0$: действительно, в любом нечётном эйлеровом подграфе D нашёлся бы ориентированный нечётный цикл, а хотя бы один чётный эйлеров подграф (пустой) всегда существует.

Будем обозначать вершины графа G как $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n)$, $0\leqslant v_i\leqslant 2k_i$. Разделим G на 2^n "блоков" H_i, $0\leqslant i<2^n$: если двоичная запись числа i — это $\overline{b_{i,1}\ldots b_{i,n}}$, то

$$H_i = \{\mathbf{v} \mid 0\leqslant v_j\leqslant k,\ \text{если}\ b_{i,j}=0;\ \ k<v_j\leqslant 2k\ \text{иначе}\}.$$

Покрасим эти блоки поочерёдно в белый и чёрный цвета (в шахматном порядке). Все рёбра, соединяющие вершину из чёрного блока с вершиной из белого блока, направим от чёрной вершины к белой. Заметим, что теперь любой ориентированный цикл будем целиком содержаться в одном из блоков H_i и поэтому будет чётным.

Остаётся найти такую ориентацию каждого блока, чтобы все исходящие степени вершин лежали в множестве $\{n-1,n\}$. Пусть такая ориентация существует, тогда воспользуемся ей для всех белых блоков H_i, а для чёрных используем обратную ориентацию (где все рёбра развернуты). Тогда исходящие степени вершин в белых блоках будут лежать в множестве $\{n-1,n\}$; входящие степени вершин в чёрных блоках будут лежать в $\{n-1,n\}$, то есть исходящие степени будут лежать в $\{n,n+1\}$.

Для того, чтобы доказать существование такой ориентации, воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3.3.4 (Дьярфас – Франк [31], теорема 3). *Ориентация* φ *графа* $G = (V, E)$ *с* $\deg^{\text{out}}_{\varphi}(v) \in [l_v, u_v]$ *для всех* $v \in V$ *существует тогда и только тогда, когда для любого подмножества* $W \subset V$ *выполняются следующие два условия:*

1. $|E(W)| \leqslant \sum_{v \in W} u_v$;
2. $|\overline{E}(W)| \geqslant \sum_{v \in W} l_v$.

Здесь $E(W)$ *— это множество рёбер, оба конца которых лежат в* W, *а* $\overline{E}(W) = E(V) \setminus E(V \setminus W)$ *— это множество рёбер, хотя бы один конец которых лежит в* W.

Предложение 3.3.5. *Пусть* $H = P_{k_1} \square \cdots \square P_{k_n}$. *Ориентация* H, *в которой исходящие степени всех вершин лежат в множестве* $\{n-1, n\}$, *существует тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} \leqslant 1. \tag{3.9}$$

Доказательство. В первую очередь заметим, что условие (3.9) необходимо: сумма исходящих степеней вершин не превосходит числа рёбер в графе, значит,

$$(n-1)\prod_{i=1}^{n} k_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}(k_i - 1) \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} k_i = \prod_{i=1}^{n} k_i \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k_i}\right),$$

что эквивалентно (3.9). Для того, чтобы показать, что условие (3.9) достаточно, проверим, что условия теоремы 3.3.4 выполнены, если $l_v = n-1$, $u_v = n$ для всех v. Первое условие выполнено: для любого $W \subset V$ верно

$$|E(W)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{v \in W} \deg_H(v) \leqslant n|W|.$$

Второе условие можно записать как

$$|E(V)| - |E(V \setminus W)| \geqslant (n-1)|W|.$$

Переобозначив $U = V \setminus W$, получаем

$$|E(U)| - (n-1)|U| \leqslant |E(V)| - (n-1)|V|$$

для любого $U \subset V$. Значит, второе условие эквивалентно тому, что функция

$$f(U) = |E(U)| - (n-1)|U|$$

достигает максимума при $U = V$. Для $i \in [1, n]$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n)$, $p_j \in [1, k_j]$, Положим

$$U(i, \mathbf{p}) = \{v \in U \mid v_j = p_j \text{ для любого } j \neq i\}.$$

Тогда

$$|E(U)| \leqslant n|U| - \sum_{i,\mathbf{p}} [\![|U(i, \mathbf{p})| > 0]\!] .$$

Положим $l = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \geqslant 0$; тогда

$$|U| = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} + l \right) |U| = l|U| + \sum_{i,\mathbf{p}} \frac{|U(i, \mathbf{p})|}{k_i}.$$

Таким образом,

$$f(U) \leqslant l|U| + \sum_{i,\mathbf{p}} \left(\frac{|U(i, \mathbf{p})|}{k_i} - [\![|U(i, \mathbf{p})| > 0]\!] \right) \leqslant l|U| \leqslant l|V| = f(V).$$

□

Доказательство предложения 3.2.6. Верхняя оценка следует из описанной выше конструкции; нижняя оценка очевидна: в любом одночлене графового многочлена F_G найдётся переменная степени хотя бы n. □

3.3.4 Степень цикла

Доказательство предложения 3.2.7. В статье [53] 2003 года Проуз и Вудолл оценивают число Алона – Тарси для степени цикла. Если $p + 1$ делит n, они показывают, что центральный коэффициент $F_{C_n^p}$ не равен нулю; если же $p + 1$ не делит n, но $n \geqslant p(p+1)$, то они показывают, что для графа H_n^p, полученного добавлением некоторого паросочетания к графу C_n^p, в $F_{H_n^p}$ найдётся ненулевой коэффициент при одночлене со степенями всех переменных лежащими в множестве $\{p, p+1\}$. Такой коэффициент — линейная комбинация почти центральных коэффициентов $F_{C_n^p}$, значит, хотя бы один из них также не равен нулю. В любом случае, утверждение верно по теореме 3.2.5. □

3.3.5 Мультиграфы

Доказательство предложения 3.2.8. Обозначим множество рёбер, содержащихся в циклах из условия, за T. Рассмотрим граф G', полученный из G добавлением кратного ребра к каждому ребру из множества $E \setminus T$. Очевидно, $\mathrm{AT}(G \square C_{2k}) \leqslant \mathrm{AT}(G' \square C_{2k})$. Если мы покажем, что $F_{G'}$ имеет ненулевой почти центральный коэффициент, то

$$\mathrm{AT}(G' \square C_{2k}) \leqslant \frac{\Delta(G')}{2} + 2 = \Delta(G) + 1.$$

Рассмотрим ещё один граф G'', полученный из G добавлением кратного ребра к каждому ребру. По определению, графовый многочлен графа G'' — это квадрат графового многочлена графа G: $F_{G''} = F_G^2$. Центральный коэффициент $F_{G''}$ не равен нулю, поскольку он равен сумме произведений “противоположных” коэффициентов F_G, а каждое слагаемое в этой сумме имеет один и тот же знак (который зависит от чётности числа рёбер G, см. (3.7)). Но центральный коэффициент $F_{G''}$ — это линейная комбинация почти центральных коэффициентов $F_{G'}$; значит, хотя бы один из них тоже не равен нулю. □

Доказательство следствия 3.2.9. По предложению 3.2.8,

$$n \geqslant \mathrm{AT}(K_n \square C_{2k}) \geqslant \mathrm{ch}(K_n \square C_{2k}) \geqslant \mathrm{ch}(K_n) \geqslant n.$$

□

Доказательство предложения 3.2.10. Определим мультимножество A следующим образом:

- каждое $i \in A_1 \setminus A_3$ встречается $2(l_G(\tau, i) - 1)$ раз в A;
- каждое $i \in A_2 \cup A_3$ встречается $2l_G(\tau, i)$ раз в A.

Аналогично определим мультимножество B. Заметим, что

$$|A| = \sum_{i \in A_1 \cup A_2} 2l_G(\tau, i) - 2\min(|A_1|, |B_1|).$$

Аналогично,

$$|B| = \sum_{i \in B_1 \cup B_2} 2l_G(\tau, i) - 2\min(|A_1|, |B_1|).$$

Таким образом, $|A| = |B|$; положим $m = |A| = |B|$. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$.

Рассмотрим 2^m многочленов

$$Q_\varepsilon(\mathbf{x}) = F_G(\mathbf{x}) \cdot \prod_{j=1}^{m} (x_{a_j} \pm x_{b_j})$$

проиндексированных ε — выбором m знаков в линейных множителях. Использовав тождество $x_{a_j} = \frac{1}{2}((x_{a_j}+x_{b_j})+(x_{a_j}-x_{b_j}))$, несложно показать, что многочлен $Q = F_G(\mathbf{x}) \cdot \prod_{i=1}^{m} x_{a_i}$ является линейной комбинацией многочленов Q_ε. Заметим, что

$$\left[\mathbf{x}^\tau \cdot \prod_{i=1}^{m} x_{a_i}\right] Q = [\mathbf{x}^\tau]\, F_G \neq 0,$$

значит, найдётся такой ε, что

$$\left[\mathbf{x}^\tau \cdot \prod_{i=1}^{m} x_{a_i}\right] Q_\varepsilon \neq 0.$$

Заметим, что Q_ε — обобщённые графовые многочлены некоторого мультиграфа G_ε на множестве вершин V со степенной функцией $\deg_{G_\varepsilon}(v_i) = 2f(v_i) - 4$. При этом коэффициент при $\mathbf{x}^\tau \cdot \prod_{i=1}^{m} x_{a_i}$ — почти центральный для Q_ε.

Тогда из замечания 3.3.3 следует, что центральный коэффициент многочлена (3.8) (для $Q = Q_\varepsilon$) не равен нулю. Но этот многочлен делится на графовый многочлен $F_{G\square C_{2k}}$, значит, $G\square C_{2k}$ — f-списочно-раскрашиваемый. $\square$

Глава 4. Списочное хроматическое число двудольных гиперграфов

4.1 Обозначения

Для гиперграфа $H = (V, E)$ положим

$$\mathrm{L}(H) = \max_{\varnothing \neq E' \subset E} \frac{|E'|}{|\bigcup_{e \in E'} e|}.$$

Для подмножества доли $T \subset A$ двудольного гиперграфа $H = (V, E)$ определим **окрестность**

$$N_H(T) = \bigcup_{\substack{e \in E,\\ e \cap T \neq \varnothing}} e \setminus A.$$

Для удобства определим также $N_H(v) = N_H(\{v\})$.

k-дольный k-граф — это k-граф, чьё множество вершин можно разделить на k множеств $V_1, \ldots, V_k$ так, чтобы каждое ребро пересекало каждое из V_i ровно по одной вершине.

4.2 Обзор результатов

4.2.1 Обобщения метода Алона – Тарси

Заметим, что при применении теоремы 1.4.1 к двудольному (2-раскрашиваемому) графу G любая ориентация D удовлетворяет $\mathrm{EE}(D) \neq \mathrm{EO}(D)$, поскольку $\mathrm{EO}(D) = 0$, $\mathrm{EE}(D) > 0$. Это даёт следующие две теоремы.

Теорема 4.2.1 (Алон – Тарси [8])**.** *Если двудольный граф $G = (V, E)$ имеет ориентацию D, то G — $(\deg_D^{\mathrm{out}} + 1)$-списочно-раскрашиваемый.*

Теорема 4.2.2 (Алон – Тарси [8], теорема 3.2)**.** *Любой двудольный граф G удовлетворяет*

$$\mathrm{ch}(G) \leqslant \lceil \mathrm{L}(G) \rceil + 1.$$

В 2010 году Шауз [57] обобщил теоремы 4.2.1 и 4.2.2 на случай k-дольных k-графов (двудольные графы соответствуют случаю $k = 2$).

В работе [4] получены следующие обобщения тех же оценок на случай двудольных (2-раскрашиваемых) гиперграфов. Отметим, что любой k-дольный k-граф является 2-раскрашиваемым: например, можно покрасить первую долю в один цвет, а остальные доли — в другой.

Теорема 4.2.3. *Если двудольный гиперграф $H = (V, E)$ имеет ориентацию φ, то H — $(\deg_\varphi +1)$-списочно-раскрашиваемый.*

Теорема 4.2.4. *Любой двудольный гиперграф H удовлетворяет*

$$\mathrm{ch}(H) \leqslant \lceil \mathrm{L}(H) \rceil + 1.$$

Поскольку точное значение $\mathrm{L}(H)$ часто бывает трудно явно вычислить, сформулируем также оценку списочного хроматического числа двудольного гиперграфа в более простых терминах. Обозначим за $s(H)$ минимальный размер ребра в H.

Следствие 4.2.5. *Пусть $H = (V, E)$ — двудольный гиперграф. Тогда*

$$\mathrm{ch}(H) \leqslant \left\lceil \frac{\Delta(H)}{s(H)} \right\rceil + 1.$$

Одно из классических следствий из локальной леммы Ловаса — это утверждение, что любой k-регулярный k-граф является 2-раскрашиваемым при $k \geqslant 9$. В 1988 году Алон и Брегман [6] усилили это утверждение, показав, что оно верно при $k \geqslant 8$, и предположили, что на самом деле это так и при $k \geqslant 4$. Заметим, что при $k = 2, 3$ утверждение неверно: действительно, простой цикл нечётной длины, а также плоскость Фано, то есть гиперграф на вершинах $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ с рёбрами $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_5\}$, $\{v_3, v_4, v_6\}$, $\{v_4, v_5, v_7\}$, $\{v_1, v_5, v_6\}$, $\{v_2, v_6, v_7\}$, $\{v_1, v_3, v_7\}$, не являются 2-раскрашиваемыми. В 1992 году Томассен [61] (см. также [33]) подтвердил предположение Алона и Брегмана, показав, что любой k-регулярный k-граф является 2-раскрашиваемым при $k \geqslant 4$. Применив следствие 4.2.5, мы немедленно получаем следующее усиление этого результата.

Теорема 4.2.6. *Любой k-регулярный k-граф является 2-списочно-раскрашиваемым при $k \geqslant 4$.*

Для произвольного (не обязательно двудольного) гиперграфа верна более слабая оценка с дополнительным множителем 2. Следующая теорема была фактически доказана Гравиным и Карповым [2], хотя они и не рассматривали свои результаты в контексте списочных раскрасок. Отметим, что в соответствующей теореме из [2] есть вторая часть, в которой слагаемое $+1$ пропадает из оценки при некоторых предположениях; эти рассуждения также можно обобщить на списочные раскраски.

Теорема 4.2.7. *Для любого гиперграфа $H = (V, E)$ выполняется оценка*

$$\mathrm{ch}(H) \leqslant \left\lceil \frac{2\Delta(H)}{s(H)} \right\rceil + 1.$$

4.2.2 Вероятностные оценки

Заметим, что приведённые выше оценки осмыслены по большей части для разреженных гиперграфов (гиперграфов с малым отношением числа вершин к числу рёбер). Для плотных гиперграфов, как правило, намного более сильными оказываются вероятностные оценки. Приведём несколько примеров.

Обозначим за $N(n, r)$ минимальное число вершин в n-раскрашиваемом графе со списочным хроматическим числом, большим r. Следующая классическая теорема описывает скорость роста $N(2, r)$ в терминах минимального количества рёбер n-графа, не имеющего правильной раскраски в 2 цвета. Обозначим последнюю величину за $m(n)$.

Теорема 4.2.8 (Эрдёш – Рубин – Тейлор [25])**.** *Для любого $r \geqslant 2$ верно*

$$m(r) \leqslant N(2, r) \leqslant 2m(r).$$

Задача нахождения $m(n)$ хорошо известна, лучшие известные на данный момент оценки —

$$c\sqrt{\frac{n}{\ln n}}2^n \leqslant m(n) \leqslant (1 + o(1))\frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n.$$

Верхняя оценка была получена ещё в 1964 году Эрдёшем [24], и так и не была улучшена с тех пор. Нижняя оценка была получена в 1998 году Радхакришнаном и Сринивасаном [54]. В 2015 году Черкашин и Козик [17] получили более сильную в общем случае оценку $m(n,r)$ (определено ниже), которая совпадает с оценкой Радхакришнана и Сринивасана для $m(n) = m(n,2)$.

Косточка [43] обобщил теорему 4.2.8 в двух направлениях. Пусть $Q(n,r)$ — минимальное число рёбер в n-дольном n-графе со списочным хроматическим числом, большим r. Пусть $m(n,r)$ — минимальное число рёбер в n-графе с хроматическим числом, большим r. Наконец, пусть $p(n,r)$ — минимальное число рёбер в n-графе, не имеющем такой раскраски в r цветов, при которой каждое ребро содержало бы вершину каждого цвета.

Теорема 4.2.9 (Косточка [43]). *Для любых $n, r \geqslant 2$ выполняются следующие неравенства:*

$$m(r,n) \leqslant Q(n,r) \leqslant nm(r,n);$$

$$p(r,n) \leqslant N(n,r) \leqslant np(r,n).$$

Верхние и нижние оценки на величины $m(n,r)$ и $p(n,r)$ сильно зависят от того, как n и r связаны между собой. Больше известных оценок можно найти в обзоре Райгородского и Черкашина [3] (см. также более свежую работу [5]).

В работе [4] получены следующие вероятностные оценки на списочное хроматическое число полного двудольного однородного гиперграфа.

Теорема 4.2.10. *Пусть H — s-однородный двудольный гиперграф с t вершинами, где*

$$t < \frac{(1+s^{1/l})^l}{4}.$$

Тогда

$$\mathrm{ch}(H) \leqslant l.$$

По теореме 4.2.8, $\mathrm{ch}(K^s_{t/2,t/2}) \leqslant \mathrm{ch}(K^2_{t/2,t/2}) = (1+o(1))\log_2 t$. Заметим, что для $s = t^\alpha$, где α — константа, оценка из теоремы 4.2.10 оказывается в константу раз сильнее.

Теорема 4.2.11. *Пусть*

$$t = \Omega\left((\log s + \log l) \cdot l^2 (1+s^{1/l})^l\right).$$

Тогда

$$\mathrm{ch}(K^s_{t/2,t/2}) > l.$$

Отметим, что рассуждения теорем 4.2.10 и 4.2.11 можно провести и в случае r-раскрашиваемых гиперграфов, где $r \geqslant 2$ — константа.

Как видно, оценки в разреженном и плотном случаях далеки друг от друга; такая же ситуация имеет место даже для графов: достаточно сравнить теорему 4.2.8 с теоремой 4.2.2. Наилучшие известные оценки на списочное хроматическое число d-регулярного двудольного графа G (см. [10]) —

$$\left(\frac{1}{2} - o(1)\right) \log d \leqslant \mathrm{ch}(G) \leqslant c\frac{d}{\log d}.$$

4.3 Доказательства

В подразделе 4.3.1 приведены доказательства теорем 4.2.3 и 4.2.4, следствия 4.2.5 и теоремы 4.2.7. В подразделе 4.3.2 приведены доказательства теорем 4.2.10 и 4.2.11.

4.3.1 Обобщения метода Алона – Тарси

Доказательство теоремы 4.2.3. Поскольку H — двудольный, мы можем выбрать по вершине $u_e \in e$ в каждом ребре $e \in E$ так, чтобы $\varphi(e)$ и u_e лежали в разных долях H.

Рассмотрим двудольный граф B на множестве вершин V с ребром между вершинами $\varphi(e)$ и u_e для каждого $e \in E$. Рассмотрим следующую ориентацию D графа B: направим ребро $\{\varphi(e), u_e\}$ из $\varphi(e)$ в u_e. Заметим, что $\deg_D^{\mathrm{out}}(v) = \deg_\varphi(v)$ для любой вершины $v \in V$. Тогда, по теореме 4.2.1, B — $(\deg_\varphi +1)$-списочно-раскрашиваемый. Но любая правильная раскраска B является и правильной раскраской H, значит, H тоже $(\deg_\varphi +1)$-списочно-раскрашиваемый. $\square$

Приведём также ещё одно, более прямое, доказательство теоремы 4.2.3.

Альтернативное доказательство теоремы 4.2.3. Обозначим доли $H = (V, E)$ за $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$; каждое ребро H пересекает и A, и B. Для каждого $e \subset E$ зафиксируем такое остовное дерево T_e на его множестве вершин, чтобы любое ребро T_e соединяло вершину из A с вершиной из B. Рассмотрим следующий многочлен на переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$:

$$F_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{e \in E} \left(\sum_{\{a_i, b_j\} \in T_e} (x_i - y_j) \right).$$

Заметим, что если $F_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$, то значения $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ задают правильную раскраску H (обратно, вообще говоря, неверно). Тогда, по теореме 1.2.1, если

$$\left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{\deg_\varphi(a_i)} \prod_{j=1}^{m} y_j^{\deg_\varphi(b_j)} \right] F_H \neq 0,$$

то H — $(\deg_\varphi +1)$-списочно-раскрашиваемый. Рассмотрим теперь многочлен

$$F_H^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_H(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) = \prod_{e \in E} \left(\sum_{\{a_i, b_j\} \in T_e} (x_i + y_j) \right).$$

Заметим, что

$$\left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{\deg_\varphi(a_i)} \prod_{j=1}^{m} y_j^{\deg_\varphi(b_j)} \right] F_H = \pm \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{\deg_\varphi(a_i)} \prod_{j=1}^{m} y_j^{\deg_\varphi(b_j)} \right] F_H^*,$$

значит, вместо коэффициента F_H можно изучать коэффициент F_H^*. Но интересующий нас коэффициент F_H^* не равен нулю, поскольку при раскрытии скобок в F_H^* никакие слагаемые не могут сократиться (так как они все имеют один знак), а ориентация φ соответствует какому-то слагаемому, дающему вклад в интересующий нас коэффициент. $\square$

Следующая лемма впервые появилась в [57].

Лемма 4.3.1 (Шауз [57], лемма 3.2)**.** *Для любого гиперграфа $H = (V, E)$ найдётся такая ориентация φ, что* $\deg_\varphi \leqslant \lceil \mathrm{L}(H) \rceil$.

Доказательство. Рассмотрим двудольный граф G с долями $V \times [1, \lceil \mathrm{L}(H) \rceil]$ и E, в котором (v, i) и e соединены ребром тогда и только тогда, когда $v \in e$. Утверждение леммы равносильно тому, что в G существует паросочетание, покрывающее E. Проверим условие теоремы Холла: пусть $\varnothing \neq T \subset E$ — произвольное подмножество рёбер H. Оценим размер окрестности T в G:

$$|N_G(T)| = |\cup_{e \in T} e| \cdot \lceil \mathrm{L}(H) \rceil \geqslant |\cup_{e \in T} e| \cdot \frac{|T|}{|\cup_{e \in T} e|} = |T|.$$

Значит, по теореме Холла, в G найдётся покрывающее E паросочетание. $\square$

Доказательство теоремы 4.2.4. Теорема немедленно следует из теоремы 4.2.3 и леммы 4.3.1. □

Доказательство следствия 4.2.5. Для любого $E' \subset E$ выполняется неравенство

$$|E'| \cdot s(H) \leqslant \sum_{e \in E'} |e| \leqslant | \cup_{e \in E'} e| \cdot \Delta(H),$$

значит,

$$\mathrm{L}(H) \leqslant \frac{\Delta(H)}{s(H)}.$$

□

Доказательство теоремы 4.2.7. Положим $k = \left\lceil \frac{2\Delta(H)}{s(H)} \right\rceil$. Пусть G — **граф инциденций** гиперграфа H, то есть двудольный граф с долями V и E, в котором $v \in V$ и $e \in E$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $v \in e$. Мы хотели бы удалить из G некоторые рёбра так, чтобы получился граф K со следующими условиями на степени:

$$\deg_K(e) = 2 \text{ для любого } e \in E, \quad \max_{v \in V} \deg_K(v) \leqslant k.$$

Пусть такой K существует, тогда положим $N_K(e) = \{v_e, u_e\}$ и рассмотрим граф B на множестве вершин V с ребром между v_e и u_e для каждого $e \in E$. Будем красить вершины B в любом порядке, каждый раз выбирая любой цвет, ещё не использованный соседними вершинами. Таким образом мы получим оценку $\mathrm{ch}(B) \leqslant \Delta(B) + 1 \leqslant k + 1$. Но любая правильная раскраска B является и правильной раскраской H, значит, $\mathrm{ch}(H) \leqslant k + 1$.

Если же такого K не существует, выберем такой $K = (V, E_K)$, что $\deg_K(e) = 2$ для любого $e \in E$, а $p(K) = \sum_{v \in V} \max(0, \deg_K(v) - k)$ минимально возможно. Обозначим за $S \subset V$ множество вершин с $\deg_K > k$. Определим **чередующийся путь** как такую последовательность рёбер и вершин $v_1, e_1, \ldots, v_m, e_m, v_{m+1}$, что $v_i \in V$, $e_i \in E$, $\{v_i, e_i\} \in E_K$, $\{v_{i+1}, e_i\} \notin E_K$, все e_i попарно различны, $v_1 \in S$. Пусть $U \subset V$ — множество вершин V, являющихся концом чередующегося пути. Заметим, что:

- Для любой вершины $v \in U$ выполняется неравенство $\deg_K(v) \geqslant k$. Действительно, в противном случае мы могли бы рассмотреть чередующийся путь $v_1, e_1, \ldots, e_m, v_{m+1} = v$, удалить из E_k пары $\{v_i, e_i\}$ и добавить туда вместо них пары $\{v_{i+1}, e_i\}$, уменьшив при этом $p(K)$.

- Для любого ребра $e \in E$, если $N_K(e) \cap U \neq \varnothing$, то $|N_G(e) \setminus U| \leqslant 1$. Действительно, предположим, что $v \in N_K(e) \cap U$, тогда любая вершина $w \in N_G(e) \setminus N_K(e)$ должна лежать в U, поскольку существует чередующийся путь, заканчивающийся в w. Тогда единственная вершина из $N_G(e)$, которая могла бы не лежать в U — это уникальная вершина из $N_K(e) \setminus \{v\}$.

Обозначим за $T \subset N_K(U)$ множество таких $e \in N_K(U)$, что $|N_G(e) \setminus U| = 1$. Из того, что $\deg_K(v) \geqslant k$ для любой $v \in U$, и $\deg_K(v) > k$ для любой $v \in S$, следует неравенство

$$|N_K(U) \setminus T| > \frac{k|U| - |T|}{2}.$$

Теперь оценим снизу сумму степеней $\deg_G$ по вершинам множества U, просуммировав $|N_G(e) \cap U|$ по всем $e \in N_K(U)$:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in U} \deg_G(v) &> |T|(s(H) - 1) + \frac{k|U| - |T|}{2} s(H) \\ &\geqslant \Delta(H)|U| + |T|\left(s(H) - 1 - \frac{s(H)}{2}\right) \geqslant \Delta(H)|U|.\end{aligned}$$

Значит, найдётся $v \in U$ степени $\deg_G(v) > \Delta(H)$, что невозможно. □

4.3.2 Вероятностные оценки

Доказательство теоремы 4.2.10. Рассмотрим множество списков цветов как гиперграф $F = (V_F, E_F)$. Тогда $t = |E_F|$; будем по-прежнему называть рёбра F списками, чтобы не путать их с рёбрами H. Случайно разобьём **палитру цветов** V_F на три части — **синие** цвета, **красные** цвета и **нейтральные** цвета — следующим образом: каждый цвет из V_F сделаем независимо красным или синим с вероятностью $\frac{1-p}{2}$, или нейтральным с вероятностью p; значение p выберем позже. Математическое ожидание числа **одноцветных** (полностью красных или полностью синих) списков равняется

$$A = 2\left(\frac{1-p}{2}\right)^l |E_F|.$$

Назовём список **опасным**, если в нём не оказалось синих цветов, либо не оказалось красных цветов. Математическое ожидание числа опасных списков равняется

$$B = 2\left(\frac{1+p}{2}\right)^l |E_F|.$$

Если $A < 1/2$ и $B < s/2$, то, по неравенству Маркова, с положительной вероятностью в F нет одноцветных списков и меньше чем s опасных списков. Тогда покрасим вершины с опасными списками в нейтральные цвета, оставшиеся вершины одной доли H — в синие цвета, а оставшиеся вершины другой доли — в красные цвета. Поскольку опасных списков всего меньше s, полученная раскраска — правильная раскраска H.

Покажем, что требуемые неравенства на A и B выполнены для

$$p = \frac{s^{1/l}-1}{1+s^{1/l}}.$$

Заметим, что

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^l = s.$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{2}{1-p}\right)^l = \left(1+s^{1/l}\right)^l.$$

Таким образом,

$$A = \frac{2|E_F|}{\left(1+s^{1/l}\right)^l} = \frac{2t}{\left(1+s^{1/l}\right)^l} < \frac{1}{2}, \quad B = As < \frac{s}{2}.$$

$\square$

Доказательство теоремы 4.2.11. Положим $H = K^s_{t/2,t/2}$. Зафиксируем палитру из $v = l^2$ цветов и выберем из неё (равномерно и независимо) случайный список цветов размера l для каждой вершины левой доли H. Для правой доли используем тот же набор списков, что и для левой. Пусть F — случайный гиперграф, вершины которого — палитра из v цветов, а рёбра — выбранные выше списки цветов. Для того, чтобы избежать путаницы с рёбрами гиперграфа H, будем называть рёбра F списками.

Предположим, что утверждение теоремы неверно, тогда для любого F найдётся правильная раскраска гиперграфа H цветами из F. Рассмотрим произвольную такую правильную раскраску $\pi_H = \pi_H(F)$. Назовём цвет (вершину F) **плохим**, если он встретился в раскраске π_H в обеих долях H; любой плохой цвет всего встретился не более $s-1$ раза. Определим раскраску π_F вершин F

следующим образом: если цвет встречается только в левой доле H, то соответствующая вершина F — **синяя**, если цвет встречается только в правой доле H, то соответствующая вершина F — **красная**, и, наконец, если цвет плохой, то соответствующая вершина F **бесцветна**. Заметим, что в F нет одноцветных (полностью красных или полностью синих) списков: действительно, если бы нашёлся, например, полностью синий список, мы не смогли бы выбрать цвет для вершины с таким списком в правой доле H, что противоречит существованию π_H.

Рассмотрим произвольную раскраску π вершин F в красный и синий цвета, в которой часть вершин остаётся бесцветной. Назовём список **опасным**, если в нём нет красных вершин, либо нет синих вершин. Оказывается, с положительной вероятностью случайный гиперграф F оказался таким, что относительно любой раскраски π в нём найдётся либо одноцветный список, либо больше чем $v_0(s-1)$ опасных списков, где $v_0 = v_0(\pi)$ — количество бесцветных вершин. Но в таком случае π_F (а, значит, и π_H) не может существовать, и мы получаем желаемое противоречие. Ниже мы приводим оценку сверху на вероятность того, что F не содержит одноцветных списков и содержит не более $v_0(s-1)$ опасных списков относительно раскраски π.

Пусть $c = c(\pi) = \frac{v_0}{v}$ — отношение числа бесцветных вершин к общему числу вершин в F. Обозначим за $p_1 = p_1(\pi)$ вероятность того, что случайный список оказался одноцветным, а за $p_2 = p_2(\pi)$ вероятность того, что случайный список оказался опасным. Вероятность того, что число опасных списков не превосходит $(s-1)cv$, строго меньше вероятности $q_1 = q_1(\pi)$ того, что их не более sl^2. Последнюю вероятность можно оценить как

$$q_1 = \sum_{i=1}^{sl^2} \binom{t/2}{i} p_2^i (1-p_2)^{t/2-i} \leqslant \sum_{i=1}^{sl^2} \left(\frac{tp_2}{2}\right)^i e^{-p_2(t/2-i)} \leqslant \sum_{i=1}^{sl^2} \left(\frac{tp_2}{2}\right)^i e^{-p_2(t/2-sl^2)}.$$

Временно зафиксируем $c = \frac{(l-1)^2}{l^2} \cdot \frac{s^{1/l}-1}{s^{1/l}+1}$ и положим $T = \frac{t}{32\cdot(s^{1/l}+1)^l}$. По определению,

$$p_1 \geqslant \frac{\binom{(v-v_0)/2}{l}}{\binom{v}{l}} \geqslant \frac{\left(\frac{v-v_0}{2} - l + 1\right)^l}{v^l} = \left(\frac{1-c}{2} - \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2}\right)^l$$
$$\geqslant \left(\frac{(l-1)^2}{2l^2} - \frac{c}{2}\right)^l \geqslant \frac{(l-1)^{2l}}{l^{2l}} \cdot \frac{1}{(s^{1/l}+1)^l} \geqslant \frac{1}{16\cdot(s^{1/l}+1)^l},$$

так как $(1-1/l)^{2l} \geqslant 1/16$ при $l \geqslant 2$. Аналогично,

$$p_2 \geqslant \frac{s}{16 \cdot (s^{1/l}+1)^l}.$$

Поскольку q_1 монотонно убывает с ростом p_2, для удобства будем считать, что $p_2 = \frac{s}{16\cdot(s^{1/l}+1)^l}$. Тогда $\frac{tp_2}{2} = sT$, и

$$q_1 \leqslant \sum_{i=1}^{sl^2} \left(\frac{tp_2}{2}\right)^i e^{-p_2(t/2-sl^2)} \leqslant sl^2 \left(\frac{tp_2}{2}\right)^{sl^2} e^{-p_2(t/2-sl^2)}.$$

Заметим, что

$$e^{-p_2(t/2-sl^2)} \leqslant e^{-(p_2t/2-sl^2)} = e^{-sT+sl^2}.$$

Кроме того,

$$sl^2 \left(\frac{tp_2}{2}\right)^{sl^2} = (sT+o(1))^{sl^2} = e^{(1+o(1))\log(sT)sl^2}.$$

Наконец, в предположениях теоремы,

$$sT - (1+o(1))\log(sT)sl^2 - sl^2 = \Omega(l^2),$$

значит, неравенство $q_1 < 3^{-l^2}$ будет выполнено при подходящем выборе константы в Ω в условии теоремы.

С другой стороны, вероятность $q_2 = q_2(\pi)$ того, что одноцветных списков не нашлось, можно оценить как

$$q_2 = (1-p_1)^{t/2} \leqslant e^{-p_1t/2} \leqslant e^{-T} < 3^{-l^2}.$$

Из комбинаторных соображений, при меньшем c вероятность q_2 может только уменьшиться, а при большем c вероятность q_1 может только уменьшиться. Значит, для любой раскраски π вероятность того, что не нашлось одноцветных списков, а опасных списков меньше sl^2, не превосходит $\min(q_1, q_2) < 3^{-l^2}$. Поскольку всего раскрасок π строго меньше $3^v = 3^{l^2}$, с положительной вероятностью гиперграф F оказался таким, что для любой раскраски π в F найдётся либо одноцветный список, либо sl^2 опасных списков. Это противоречит нашему предположению. $\square$

Заключение

В заключение перечислим некоторые возможные направления дальнейшей работы.

В главе 2 было отмечено, что q-версия гипотезы Дайсона в некотором смысле является частным случаем более общих тождеств Макдональда [48]. Эти тождества были доказаны Чередником [16] при помощи двойных аффинных алгебр Гекке. Было бы интересно получить доказательство тождеств Макдональда полиномиальным методом. При этом похоже, что комбинаторная теорема о нулях и известные на данный момент её обобщения для этой цели подходят плохо. В этом контексте перспективно выглядит отмеченная Карасёвым [38] связь между комбинаторной теоремой о нулях и вычетной формулой Эйлера – Якоби [34; 45]. Возможно, дальнейшее исследование этой связи позволит получить формулы в духе комбинаторной теоремы о нулях, с помощью которых удастся подступиться к тождествам Макдональда.

Пока непонятны границы применения метода, описанного в главе 3. Возможное направление дальнейших исследований — перенос имеющихся рассуждений на другие произведения графов, например, на тензорное или сильное произведения. Как в этой задаче, так и в задаче обобщения полученных оценок на более широкие классы прямых произведений графов, было бы интересно найти применение методам тензорной алгебры.

Наконец, остаётся открытым вопрос существования полиномиальной техники наподобие описанной в главе 4, применимой к произвольным (а не только 2-раскрашиваемым) гиперграфам. Напомним, что Рамамурти и Уэст [55] уже предпринимали попытку сформулировать такую технику для p-однородных гиперграфов, когда p — простое. Однако, к сожалению, предложенный ими метод оказалось слишком сложно применять на конкретных гиперграфах.

Список литературы

1. *Визинг В. Г.* Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: сборник научных трудов. — 1976. — Т. 29. — С. 3—10.
2. *Гравин Н. В.*, *Карпов Д. В.* О правильных раскрасках гиперграфов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2011. — Т. 391. — С. 79—89.
3. *Райгородский А. М.*, *Черкашин Д. Д.* Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов // Успехи математических наук. — 2020. — Т. 75, № 1. — С. 95—154.
4. *Черкашин Д. Д.*, *Гордеев А. С.* On list chromatic numbers of 2-colorable hypergraphs // Труды МФТИ. — 2022. — Т. 14, № 1. — С. 49—57.
5. *Akhmejanova M.*, *Balogh J.* Chain Method for Panchromatic Colorings of Hypergraphs // arXiv:2008.03827v3 [math]. — 2021.
6. *Alon N.*, *Bregman Z.* Every 8-Uniform 8-Regular Hypergraph Is 2-Colorable // Graphs and Combinatorics. — 1988. — Vol. 4, no. 1. — P. 303–306.
7. *Alon N.*, *Tarsi M.* A Nowhere-Zero Point in Linear Mappings // Combinatorica. — 1989. — Vol. 9, no. 4. — P. 393–395.
8. *Alon N.*, *Tarsi M.* Colorings and Orientations of Graphs // Combinatorica. — 1992. — Vol. 12, no. 2. — P. 125–134.
9. *Alon N.* Combinatorial Nullstellensatz // Combinatorics, Probability and Computing. — 1999. — Vol. 8, no. 1–2. — P. 7–29.
10. *Alon N.* Degrees and Choice Numbers // Random Structures & Algorithms. — 2000. — Vol. 16, no. 4. — P. 364–368.
11. *Alon N.* Restricted Colorings of Graphs // Surveys in combinatorics. — 1993. — Vol. 187. — P. 1–33.
12. *Alon N.*, *Nathanson M. B.*, *Ruzsa I.* The Polynomial Method and Restricted Sums of Congruence Classes // Journal of Number Theory. — 1996. — Vol. 56, no. 2. — P. 404–417.
13. *Andrews G. E.* Problems and Prospects for Basic Hypergeometric Functions // Theory and Application of Special Functions. — Academic Press, 1975. — P. 191–224.

14. *Borowiecki M.*, *Jendrol' S.*, *Král' D.*, *Miškuf J.* List Coloring of Cartesian Products of Graphs // Discrete Mathematics. — 2006. — Vol. 306, no. 16. — P. 1955–1958.

15. *Bressoud D. M.*, *Goulden I. P.* Constant Term Identities Extending the q-Dyson Theorem // Transactions of the American Mathematical Society. — 1985. — Vol. 291, no. 1. — P. 203–228.

16. *Cherednik I.* Double Affine Hecke Algebras and Macdonald's Conjectures // Annals of Mathematics. — 1995. — Vol. 141, no. 1. — P. 191–216.

17. *Cherkashin D. D.*, *Kozik J.* A Note on Random Greedy Coloring of Uniform Hypergraphs // Random Structures & Algorithms. — 2015. — Vol. 47, no. 3. — P. 407–413.

18. *Croot E.*, *Lev V.*, *Pach P.* Progression-Free Sets in $\mathbb{Z}_4^n$ Are Exponentially Small // Annals of Mathematics. — 2017. — Vol. 185, no. 1.

19. *Dvir Z.* On the Size of Kakeya Sets in Finite Fields // Journal of the American Mathematical Society. — 2009. — Vol. 22, no. 4. — P. 1093–1097.

20. *Dyson F. J.* Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I // Journal of Mathematical Physics. — 1962. — Vol. 3, no. 1. — P. 140–156.

21. *Ekhad S. B.*, *Zeilberger D.* How to Extend Karolyi and Nagy's BRILLIANT Proof of the Zeilberger–Bressoud q-Dyson Theorem in Order to Evaluate ANY Coefficient of the q-Dyson Product // Personal Journal of Shalosh B. Ekhad and Doron Zeilberger. See also arXiv:1308.2983. — 2013.

22. *Ellenberg J.*, *Gijswijt D.* On Large Subsets of $\mathbb{F}_q^n$ with No Three-Term Arithmetic Progression // Annals of Mathematics. — 2017. — Vol. 185, no. 1.

23. *Ellingham M.*, *Goddyn L.* List Edge Colourings of Some 1-Factorable Multigraphs. // Combinatorica. — 1996. — Vol. 16. — P. 343–352.

24. *Erdős P.* On a Combinatorial Problem. II // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica. — 1964. — Vol. 15, no. 3. — P. 445–447.

25. *Erdős P.*, *Rubin A. L.*, *Taylor H.* Choosability in Graphs // Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium. Vol. 26. — 1979. — P. 125–157.

26. *Fleischner H.*, *Stiebitz M.* A Solution to a Colouring Problem of P. Erdős // Discrete Mathematics. — 1992. — Vol. 101, no. 1–3. — P. 39–48.

27. *Forrester P.*, *Warnaar S.* The Importance of the Selberg Integral // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2008. — Vol. 45, no. 4. — P. 489–534.

28. *Good I. J.* Short Proof of a Conjecture by Dyson // Journal of Mathematical Physics. — 1970. — Vol. 11, no. 6. — P. 1884–1884.

29. *Gordeev A.* Constant Terms of Near-Dyson Polynomials // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2018. — P4.11.

30. *Guth L.*, *Katz N.* On the Erdős Distinct Distances Problem in the Plane // Annals of Mathematics. — 2015. — Vol. 181, no. 1. — P. 155–190.

31. *Gyárfás A.*, *Frank A.* How to Orient the Edges of a Graph? // Combinatorics. — 1978. — Vol. 18. — P. 353–364.

32. *Häggkvist R.*, *Janssen J.* New Bounds on the List-Chromatic Index of the Complete Graph and Other Simple Graphs // Combinatorics, Probability and Computing. — 1997. — Vol. 6, no. 3. — P. 295–313.

33. *Henning M. A.*, *Yeo A.* 2-Colorings in k-Regular k-Uniform Hypergraphs // European Journal of Combinatorics. — 2013. — Vol. 34, no. 7. — P. 1192–1202.

34. *Jacobi C. G. J.* Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum, inter duas variabiles propositarum. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1835. — Vol. 14. — P. 281–288.

35. *Jensen T. R.*, *Toft B.* Graph Coloring Problems. — John Wiley & Sons, 2011.

36. *Johansson A.* Asymptotic Choice Number for Triangle Free Graphs // DIMACS Technical Report. — 1996. — Vol. 91, no. 5.

37. *Karasev R. N.*, *Petrov F. V.* Partitions of Nonzero Elements of a Finite Field into Pairs // Israel Journal of Mathematics. — 2012. — Vol. 192, no. 1. — P. 143–156.

38. *Karasev R.* Residues and the Combinatorial Nullstellensatz // Periodica Mathematica Hungarica. — 2019. — Vol. 78, no. 2. — P. 157–165.

39. *Károlyi G.*, *Lascoux A.*, *Warnaar S.* Constant Term Identities and Poincaré Polynomials // Transactions of the American Mathematical Society. — 2015. — Vol. 367, no. 10. — P. 6809–6836.

40. *Károlyi G.*, *Nagy Z.* A Simple Proof of the Zeilberger–Bressoud q-Dyson Theorem // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2014. — Vol. 142, no. 9. — P. 3007–3011.

41. *Károlyi G.*, *Nagy Z. L.*, *Petrov F. V.*, *Volkov V.* A New Approach to Constant Term Identities and Selberg-type Integrals // Advances in Mathematics. — 2015. — Vol. 277. — P. 252–282.

42. *Kaul H.*, *Mudrock J. A.* On the Alon–Tarsi Number and Chromatic-Choosability of Cartesian Products of Graphs // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2019. — Vol. 26, no. 1. — P1.3.

43. *Kostochka A.* On a Theorem of Erdős, Rubin, and Taylor on Choosability of Complete Bipartite Graphs // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2002. — Vol. 9, no. 1. — N9.

44. *Kratochvíl J.*, *Tuza Z.*, *Voigt M.* New Trends in the Theory of Graph Colorings: Choosability and List Coloring // Contemporary Trends in Discrete Mathematics. Vol. 49. — American Mathematical Soc., 1999. — P. 183.

45. *Kunz E.*, *Kreuzer M.* Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersections // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1987. — Vol. 1987, no. 381. — P. 181–204.

46. *Lasoń M.* A Generalization of Combinatorial Nullstellensatz // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2010. — Vol. 17, no. 1. — N32.

47. *Li Z.*, *Shao Z.*, *Petrov F.*, *Gordeev A.* The Alon–Tarsi Number of A Toroidal Grid // arXiv:1912.12466 [math]. — 2019. — принято к публикации в журнал European Journal of Combinatorics.

48. *MacDonald I. G.* Some Conjectures for Root Systems // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1982. — Vol. 13, no. 6. — P. 988–1007.

49. *Molloy M.* The List Chromatic Number of Graphs with Small Clique Number // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 2019. — Vol. 134. — P. 264–284.

50. *Noel J. A.*, *Reed B. A.*, *Wu H.* A Proof of a Conjecture of Ohba // Journal of Graph Theory. — 2015. — Vol. 79, no. 2. — P. 86–102.

51. *Ohba K.* On Chromatic-Choosable Graphs // Journal of Graph Theory. — 2002. — Vol. 40, no. 2. — P. 130–135.

52. *Petrov F.*, *Gordeev A.* Alon–Tarsi Numbers of Direct Products // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2021. — Vol. 10, no. 4. — P. 271–279.

53. *Prowse A.*, *Woodall D. R.* Choosability of Powers of Circuits // Graphs and Combinatorics. — 2003. — Vol. 19, no. 1. — P. 137–144.

54. *Radhakrishnan J.*, *Srinivasan A.* Improved Bounds and Algorithms for Hypergraph Two-Coloring // Proceedings 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. — IEEE Comput. Soc, 1998. — P. 684–693.

55. *Ramamurthi R.*, *West D. B.* Hypergraph Extension Of The Alon–Tarsi List Coloring Theorem // Combinatorica. — 2005. — Vol. 25, no. 3. — P. 355–366.

56. *Sabidussi G.* Graphs with Given Group and Given Graph-Theoretical Properties // Canadian Journal of Mathematics. — 1957. — Vol. 9. — P. 515–525.

57. *Schauz U.* A Paintability Version of the Combinatorial Nullstellensatz, and List Colorings of k-Partite k-Uniform Hypergraphs // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2010. — R176.

58. *Schauz U.* Algebraically Solvable Problems: Describing Polynomials as Equivalent to Explicit Solutions // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2008. — Vol. 15. — R10.

59. *Schauz U.* Proof of the List Edge Coloring Conjecture for Complete Graphs of Prime Degree // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2014. — P3.43.

60. *Tao T.* Algebraic Combinatorial Geometry: The Polynomial Method in Arithmetic Combinatorics, Incidence Combinatorics, and Number Theory // EMS Surveys in Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 1, no. 1. — P. 1–46.

61. *Thomassen C.* The Even Cycle Problem for Directed Graphs // Journal of the American Mathematical Society. — 1992. — Vol. 5, no. 2. — P. 217–229.

62. *Tuza Z.* Graph Coloring with Local Constraints — A Survey // Discuss. Math. Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, no. 2. — P. 161–228.

63. *Wilson K. G.* Proof of a Conjecture by Dyson // Journal of Mathematical Physics. — 1962. — Vol. 3, no. 5. — P. 1040–1043.

64. *Woodall D.* List Colourings of Graphs // Surveys in Combinatorics, 2001. — Cambridge University Press, 2001. — P. 269–301. — (London Mathematical Society Lecture Note Series).

65. *Zeilberger D.*, *Bressoud D. M.* A Proof of Andrews' q-Dyson Conjecture // Discrete Mathematics. — 1985. — Vol. 54, no. 2. — P. 201–224.