Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Иевлев Павел Николаевич

Операторный подход к построению комплексных и отражающихся случайных процессов

Специальность 01.01.05 –
Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2021

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, **Смородина Наталия Васильевна**, ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ), ведущий научный сотрудник
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук **Белопольская Яна Исаевна**, ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, профессор кафедры математики; доктор физико-математических наук
	доктор физико-математических наук **Гликлих Юрий Евгеньевич**, ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет, профессор кафедры алгебры и математических методов гидродинамики.
Ведущая организация	ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится «____» ____________ 2021 г. в __.__ на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ПОМИ по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ПОМИ http://pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2021 г.

Учёный секретарь диссертационного совета к.ф.-м.н.	____________________ Рядовкин К. С.

1 Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Пусть $\xi_{\mathbf{x}}(t)$ – это однородный марковский процесс со значениями в $\mathbb{R}^d$ с условием $\xi_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$, переходная функция $P(t, \mathbf{x}, A)$ которого порождает C_0-полугруппу $T^t\colon C_0(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$, где

$$(T^t f)(\mathbf{x}) = \int_A f(\mathbf{y})\, P(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \mathbb{E} f(\xi_{\mathbf{x}}(t)).$$

Такие процессы называются феллеровскими. Это весьма широкий класс, при этом обладающий многими хорошими свойствами, выгодно отличающими его от общего случая марковского процесса. Всякий однородный феллеровский процесс даёт интегральное представление решения задачи Коши

$$u_t = Lu, \quad u|_{t=0} = \varphi, \tag{1}$$

где L – это генератор полугруппы T^t. При этом семейство его одномерных распределений есть фундаментальное решение задачи (1).

Класс процессов, который фактически будет рассматриваться, это класс симметричных процессов Леви. В этот класс входит как процесс броуновского движения с генератором $L = \Delta/2$, так и класс скачкообразных процессов Леви с мерой Леви Π, имеющей конечный второй момент и инвариантной относительно вращений. В этом случае генератор соответствующей полугруппы имеет вид

$$-Lf(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \Big)\, d\Pi(\mathbf{y}) \tag{2}$$

с ядром $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(L)$, $-L \geq 0$.

Сам процесс $\xi(t)$ мы будем называть свободным, имея в виду, что его полугруппа T^t сопоставляет функции φ решение задачи Коши $u_t = Lu$ с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi$. "Версиями" $\xi(t)$ мы будем называть процессы, соответствующие другим задачам для оператора L.

В частности, начально-краевая задача Дирихле для оператора $\Delta/2$ приводит к версии винеровского процесса, остановленного в момент первого достижения границы (см. [1]). Задача Неймана для того же оператора приводит к отражающейся версии винеровского процесса (см. [2]).

Существует два подхода к построению версий свободных процессов. Первый подход (Леви, Ито, Скороход) можно условно назвать потраекторным: версии процессов строятся при помощи преобразований траекторий свободного процесса. Главным преимуществом этого подхода является ясный вероятностный смысл. Однако возможности этого подхода ограничены с точки зрения класса генераторов, для которых удаётся строить версии. Именно, генератор должен удовлетворять принципу максимума, или, что практически то же самое, соответствующее фундаментальное решение должно быть вероятностным распределением.

Второй подход (восходящий к работам Винера, Колмогорова, Феллера, Иосиды, Дынкина) основан на более прямом использовании функционально-аналитических методов.

Используемый в настоящей работе метод идейно близок ко второму подходу. При построении версий свободных процессов мы будем использовать идеологию теории обобщённых функций. Именно, мы будем рассматривать функционалы от траекторий, и *определять операции над траекториями через операции над функционалами.* Это позволит нам строить вероятностные представления (в виде математического ожидания функционалов от случайных процессов) для решения задачи Коши и начально-краевых задач в ситуации, когда фундаментальные решения, вообще говоря, не являются вероятностными распределениями. Данный подход является развитием идей [3], [4], [5], [6], [7], [8], а также [9], [10], [11], [12]. Соответствующий формальный аппарат изложен в первом параграфе первой главе диссертации.

Цель диссертационной работы. Построение вероятностных аппроксимаций для решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера и начально-краевых задач для оператора Лапласа и операторов Леви в $\mathbb{R}^d$. Изучение структуры полугрупп и построение разложений Скорохода, отвечающих отражающимся версиям броуновского движения в d-мерном шаре и симметричным процессам Леви в ограниченных гладких областях.

Методы исследований. В посвящённой начально-краевым задачам части диссертации мы используем методы [5], [6], [7] и [8]. Помимо классических вероятностных методов, в диссертации использованы методы теории операторов и теории обобщённых функций.

В части диссертации, посвящённой задаче Коши для уравнения Шрёдингера, мы используем методы [3] и [4]. Кроме того, мы вводим специальный класс обобщённых случайных величин $\mathcal{GRV}$, расширяющий класс случайных величин $\mathcal{RV}$ на заданном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. Этот класс до сих пор не рассматривался в литературе. Он является естественным классом невероятностных распределений в рассматриваемой нами задаче.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах теории вероятностей, в частности, в теории случайных процессов. Результаты также могут быть использованы в различных вопросах математической физики, в частности, в теории уравнений в частных производных. Результаты и методы диссертации будут востребованы в исследованиях, проводимых в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Институте проблем передачи информации РАН, Новосибирском государственном университете, Дальневосточном федеральном университете, Техническом университете им. Н. Э. Баумана.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Построена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера в $\mathbb{R}^d$.

2. Построена вероятностная аппроксимация решения начально-краевых задач Дирихле и Неймана для оператора $e^{i\phi}\Delta$, $\phi \in [0, \pi/4]$ в d-мерном шаре.

3. Получен операторный аналог разложения Скорохода для броуновского движения с отражением в d-мерном шаре. Именно, доказано, что разность Q^t полугруппы отражающегося процесса P^t и полугруппы свободного процесса R^t является оператором, переводящим функции, заданные на границе, в функции, заданные в области. Построен случайный оператор $\mathcal{Q}^t$, обобщающий понятие интеграла по локальному времени. Доказано равенство $Q^t = \mathbb{E}\mathcal{Q}^t$.

4. Для последовательности сложных пуассоновских процессов, слабо сходящейся к броуновскому движению, построены отражающиеся версии и доказаны соответствующие предельные теоремы.

5. Получен операторный аналог разложения Скорохода для симметричных процессов Леви, имеющих конечный второй момент, с отражением в гладких ограниченных областях. Именно, доказано, что разность Q^t полугруппы отражающегося процесса P^t и полугруппы свободного процесса R^t является оператором, переводящим функции, заданные на границе, в функции, заданные в области. Построен случайный оператор $\mathcal{Q}^t$, обобщающий понятие интеграла по локальному времени. Доказано равенство $Q^t = \mathbb{E}\mathcal{Q}^t$.

6. Показано что для α-устойчивых процессов оператор Q^t можно определить лишь с точностью до произвольной константы. Построен случайный оператор $\mathcal{Q}^t$ и доказано равенство $Q^t = \mathbb{E}\mathcal{Q}^t$.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на международной конференции “Крымская Осенняя Математическая Школа--симпозиум по спектральным и эволюционным задачам” (Батилиман, 17-29 сентября, 2018 г.), на Санкт-Петербургском Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистики по руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (Санкт-Петербург, 23 марта 2018; 20 декабря 2020), на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики СПбГУ (Санкт-Петербург, 13 ноября 2019), Санкт-Петербургской Зимней Молодёжной Конференции по Теории Вероятностей и Математической Физике (24-26 декабря 2018; 21-23 декабря 2020), на Третьей Международной Конференции по Стохастическим Методам (Дивноморское, 3-9 июня 2018), на Аналитическом семинаре Факультета Математики и Компьютерных Наук (12 марта 2020), на семинаре

“Вероятность и математическая статистика” (Санкт-Петербург, Москва, Новосибирск, 16 февраля 2021).

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в четырёх работах [13], [14], [15], [16], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Список работ приведён в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Общий объём диссертации составляет 75 страниц. Список литературы содержит 48 наименований.

2 Содержание работы

Во Введении предложен краткий обзор существующих подходов к определению понятия отражающегося процесса и связанных с этими подходами задач. Обоснована актуальность диссертационной работы и подчёркнута научная новизна исследований.

В первой главе строится вероятностная аппроксимация решения Коши для уравнения Шрёдингера

$$\begin{cases} -iu_t = \Delta u/2, \\ u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases}$$

для $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Отвечающие этому уравнению распределения являются комплексными мерами в $\mathbb{R}^d$ и, соответственно, не могут быть получены как распределение какой-либо случайной величины. Чтобы обойти эту трудность, в первом параграфе второй главы вводится специальный класс случайных функционалов (обобщённых случайных величин), который расширяет понятие случайной величины. Обозначим чере з $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ пространство d-мерных случайных векторов на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, снабжённое топологией сходимости по распределению. Мы будем действовать по аналогии со стандартным определением [17], гл. 2, §1. В качестве класса пробных функций возьмём пространство $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ функций, являющихся обратными преобразованиями Фурье зарядов конечной полной вариации с финитным носителем

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{px}} \widehat{\Phi}(d\mathbf{p}), \tag{3}$$

снабжённое топологией $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{Z}_0} 0$, если $\widehat{\Phi}_n \xrightarrow{*w} 0$.

Обобщённой случайной функцией будем называть непрерывное линейное отображение $\xi\colon \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{RV}(\mathbb{R})$. Действие ξ на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ обозначаем через $\xi[\varphi]$. Множество обобщённых функций будем обозначать $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$.

Нам потребуется особое вложение пространства $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ в $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$. Именно, для каждой $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ определим обобщённую случайную функцию $\widetilde{\xi} \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, действующую на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ по правилу $\widetilde{\xi}[\varphi] = \varphi(-\xi)$. Для простоты обозначений мы будем опускать волну над ξ.

Для обобщённых случайных функций мы определяем ряд стандартных операций и понятий: умножение на число, математическое ожидание, характеристическую функцию, проекции, декартово произведение, семиинварианты и независимость. В силу специфики нашей задачи эти операции не всегда совпадают с определениями из [17].

Нам также потребуются две особые операции, специфичные для рассматриваемой задачи. Пусть семиинварианты s^α обобщённой случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ корректно определены и функция

$$\widehat{B}(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \exp\left(-\sum_{|\alpha|=1,\,3} \frac{s^\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!}\mathbf{p}^\alpha\right)$$

лежит в классе $L_1(\mathbb{R}^d)$. Тогда *вторым центрированием* ξ будем называть случайный функционал $\xi^{(2)}$, определяемый равенством

$$\xi^{(2)}[\varphi] = \xi[\varphi * B].$$

Для $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^1)$ определим обобщённую случайную функцию $\xi^\bigstar$, действующую на $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$\xi^\bigstar[\varphi] = \xi[(\mathrm{I}P_+ + P_-)\varphi],$$

где I – это оператор инверсии $\mathrm{I}\phi(x) = \phi(-x)$, а $P_\pm$ – это проекторы Рисса. Распространим это определение на класс $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\xi^\bigstar = (\xi_1^\bigstar, \ldots, \xi_d^\bigstar).$$

Для обычных случайных величин $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ последнее равенство может быть переписано как $\xi^\bigstar[\varphi] = \varphi_+(\xi) + \varphi_-(-\xi)$.

Наконец, мы поставим каждой обобщённой случайной функции в соответствие некоторый оператор. Положим для $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$

$$Q_\xi\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\xi[\varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\cdot}\,)]. \tag{4}$$

Во втором параграфе мы применим этот аппарат для доказательства предельной теоремы для последовательности сложных пуассоновских процессов, слабо сходящихся к броуновскому движению. Для $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс

$$\xi_1^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} x\,\nu(dt\,dx),$$

где $\nu(dt,\, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)^2$ с интенсивностью $\mathbb{E}\nu(dt,\, dx) = dt\,dx\,/x^3$. Пусть $\xi_k^\varepsilon(t)$, $k = 2, \ldots, d$ – независимые копии $\xi_1^\varepsilon(t)$.

При фиксированных $t \geqslant 0,\ \varepsilon > 0$ определим обобщённую случайную функцию $\eta^{\varepsilon}(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \big(\sigma\xi_1^{\varepsilon}(t),\, \sigma\xi_2^{\varepsilon}(t),\, \ldots,\, \sigma\xi_d^{\varepsilon}(t)\big)^{\bigstar,(2)}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_{ε}^t, полагая $P_{\varepsilon}^t = Q_{\eta^{\varepsilon}(t)}$.

Теорема 1. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой $\varphi \in W_2^4(\mathbb{R}^d)$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\left\| P_{\varepsilon}^t\varphi - e^{\frac{it}{2}\Delta}\varphi \right\|_{L_2} \leqslant Ct\varepsilon^2 \|\varphi\|_{W_2^4}.$$

В третьем параграфе первой главы мы доказываем предельную теорему такого же типа для последовательности случайных блужданий, слабо сходящихся к броуновскому движению. Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных d-мерных векторов с общим распределением $\mathcal{P}$, сосредоточенном на $\mathbb{R}_+^d$. Будем предполагать, что случайный вектор ξ_1 имеет единичную матрицу ковариации и конечные моменты третьего порядка. Пусть $\eta(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Определим последовательность $\{\zeta^n\}_{n=1}^{\infty}$ сложных пуассоновских процессов, полагая

$$\zeta^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \tag{5}$$

Определим при каждом фиксированном t обобщённую случайную функцию $\eta^n(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^n(t) = \big(\sigma\zeta_1^n(t),\, \sigma\zeta_2^n(t),\, \ldots,\, \sigma\zeta_d^n(t)\big)^{\bigstar,(2)}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим полугруппу операторов P_n^t, полагая $P_n^t = Q_{\eta^n(t)}$.

Теорема 2. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $\varphi \in W_2^3(\mathbb{R}^d)$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\left\| P_n^t\varphi - e^{\frac{it}{2}\Delta}\varphi \right\|_{L_2} \leqslant \frac{Ct}{\sqrt{n}} \|\varphi\|_{W_2^3}. \tag{6}$$

Результаты первой главы опубликованы в работе [13].

Во второй главе мы строим операторным методом комплексное броуновское движение с отражением или поглощением в d-мерном шаре. При помощи этих процессов мы строим аппроксимацию решений начально-краевых задач Дирихле (напомним, что $\arg\sigma \in [0, \pi/4]$)

$$\begin{cases} u_t = \sigma^2\Delta u/2,\ \mathbf{x} \in D, \\ u(0,\, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \\ u\big|_{\partial D} = \gamma_0 f, \end{cases} \tag{7}$$

и Неймана

$$\begin{cases} u_t = \sigma^2 \Delta u/2,\ \mathbf{x} \in D, \\ u(0,\, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = \gamma_0 \dfrac{\partial f}{\partial n}. \end{cases} \tag{8}$$

В последних формулах оператор $\gamma_0\colon W_2^2(D) \to W_2^{3/2}(D)$ – это замкнутый с $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ оператор сужения на ∂D.

Пусть начальная функция f задачи (7) принадлежит классу $W_2^2(D)$ и пусть $\{\xi_j\}_{j\geq 1}$ – последовательность н.о.р. вещественных d-векторов. Будем предполагать, что их общее распределение $\mathcal{P}$ инвариантно относительно поворотов, случайный вектор ξ_1 имеет единичную матрицу ковариации, а также для некоторого $\beta > 0$ конечен экспоненциальный момент $\mathbb{E}\exp(\beta|\xi_1|)$. Пусть, кроме того, $\eta(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от $\{\xi_j\}_{j\geq 1}$. Определим сложный пуассоновский процесс $\zeta_n(t)$ аналогично формуле (5).

Рассмотрим задачу Дирихле. Обозначим через $c^h_{\lambda\mu}$ коэффициенты разложения $\gamma_0 f$ по базису $\{Y_\lambda^\mu\}$, составленному из сферических гармоник. Для каждого $M > 0$ определим

$$f_h^M(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \leq M^{1/d}} c^h_{\lambda\mu} x^\lambda Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}), \qquad f_h = (W_2^2) \lim_{M\to\infty} f_h^M, \tag{9}$$

причём справедливо $\sum \lambda^3 |c^h_{\lambda\mu}|^2 < \infty$.

Определим функциюf_0, полагая $f_0 = f - f_h$. Ясно, что $f_0 \in W_2^{2,0}(D)$. Разложим f_0 по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Дирихле

$$f_0^M(\mathbf{x}) = \sum_{m\leq M} c^0_m s_m(\mathbf{x}), \qquad f_0 = (W_2^2) \lim_{M\to\infty} f_0^M. \tag{10}$$

Функция f_0^M является аналитической функцией d переменных. Наконец, положим

$$f^M = f_0^M + f_h^M.$$

Теорема 3. *Пусть $f \in W_2^2(D)$, $M(n) = n^{d/4}$ и $u_n(t,\, \mathbf{x}) = \mathbb{E} f^{M(n)}(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t))$. Тогда существует такое число $C = C(T) > 0$, что справедлива оценка*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t,\, \cdot) - u_n(t,\, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \|f\|_{W_2^2(D)}, \tag{11}$$

где $u(t,\, \mathbf{x})$ – это точное решение начально-краевой задачи Дирихле (7).

Рассмотрим задачу Неймана. Обозначим $\chi(\mathbf{x}) = x^2/2|D|d$. Функция χ очевидно является бигармонической Рассмотрим $f \in W_2^2(D)$. Выделим из неё бигармоническую компоненту f_b, полагая

$$f_b(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\hat{\mathbf{y}}. \tag{12}$$

Функция $f_1 = f - f_b$ удовлетворяет условию разрешимости задачи Неймана. Пусть f_h – это гармоническая функция в области D, имеющая ту же нормальную производную на границе ∂D, что и f_1. Обозначим через $c^h_{\lambda\mu}$ коэффициенты разложения функции $\gamma_0\partial_n f_1$ по базису $\{Y^\mu_\lambda\}$. Для каждого $M > 0$ определим гармонический полином f_h^M, полагая

$$f_h^M(\mathbf{x}) = \sum_{0\neq\lambda\leq M^{1/d}} c^h_{\lambda\mu}\frac{x^\lambda}{\lambda}Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}), \qquad f_h = (W^2_2)\lim_{M\to\infty} f_h^M, \tag{13}$$

при этом f_h принадлежит классу $W^2_2(D)$ и справедливо $\sum\lambda|c^h_{\lambda\mu}|^2 < \infty$.

Рассмотрим теперь функцию $f_0 = f_1 - f_h$. Ясно, что f_0 удовлетворяет $\gamma_0\partial_n f_0 = 0$. Разложим её в ряд по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Неймана

$$f_0^M(\mathbf{x}) = \sum_{m\leq M} c^0_m\widetilde{s}_m(\mathbf{x}), \qquad f_0 = (W^2_2)\lim_{M\to\infty} f_0^M. \tag{14}$$

Функция f_0^M является аналитической функцией d переменных. Наконец, положим

$$f^M = f_b + f_0^M + f_h^M. \tag{15}$$

Теорема 4. *Пусть $f \in W^2_2(D)$ и удовлетворяет условию разрешимости (**??**). Положим $M(n) = n^{d/4}$ и $u_n(t, \mathbf{x}) = \mathbb{E}f^{M(n)}(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t))$, где функция $f^{M(n)}$ определена формулой (15). Тогда существует такое $C = C(T) > 0$, что справедлива оценка*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t,\,\cdot) - u_n(t,\,\cdot)\|_{L_2(D)} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}\|f\|_{W^2_2(D)}, \tag{16}$$

где $u(t, \mathbf{x})$ – это точное решение начально-краевой задачи Неймана (8).

Результаты второй главы опубликованы в работе [14].

В третьей главе мы применяем операторный подход к задаче о построении разложения Скорохода для броуновского движения с отражением в d-мерном шаре.

Нам потребуются два способа продолжать начальную функцию $f \in W^2_2(D)$ до класса $W^2_{2,loc}(\mathbb{R}^d)$. В стандартной конструкции (см. [18] или [1]) отражающегося броуновского движения $|w(t)|$ на $[0, \infty)$ используется формула Танаки $|w(t)| \overset{d}{=} w(t) + \zeta(t)$, где $\zeta(t)$ – локальное время. В нашей конструкции отражающийся процесс (аналог $|w(t)|$) будет связан с продолжением $\widetilde{f}$, заданным равенством $\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \widetilde{f}_0(\mathbf{x}) + \widetilde{f}_b(\mathbf{x}) + \widetilde{f}_h(\mathbf{x})$, тогда как продолжение $\overline{f}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(f,\, s_m)s_m(\mathbf{x})$ будет отвечать процессу в области (аналог $w(t)$ в стандартной конструкции). Определим отвечающие двум продолжениям полугруппы P^t и R^t, полагая для $\mathbf{x} \in D$

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\widetilde{f}(w_{\mathbf{x}}(t)) \qquad \text{и} \qquad (R^t f)(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\overline{f}(w_{\mathbf{x}}(t)).$$

Их генераторы выражаются через оператор $\widetilde{A} = -\Delta/2$ на области определения $D(\widetilde{A}) = W^2_{2,loc}(\mathbb{R}^d)$. Именно, генератором полугруппы P^t является оператор A с областью определения $D(A) = W^2_2(D)$ и действующий по формуле $(Af)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}\widetilde{f})(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in D$. Генератор R^t – это оператор A^N, заданный на области определения $D(A^N) = \ker\gamma_1$ формулой $(A^N f)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}\overline{f})(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in D$. Далее мы будем обозначать $\mathcal{N}^0(D) = \ker\gamma_1$.

Далее мы доказываем две леммы о разности полугрупп P^t и R^t:

Лемма 1. *Для $f \in L_2(D)$ справедлива формула*

$$P^t f - R^t f = (L_2) \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t P^\tau (A - A^N \Pi_m) f \, d\tau.$$

Этим соотношением мы будем пользоваться позднее для определения случайного оператора $\mathcal{Q}^t$. Вторая лемма о разности полугрупп P^t и R^t:

Лемма 2. *Для $f \in L_2(D)$ справедливо соотношение*

$$P^t f(\mathbf{x}) - R^t f(\mathbf{x}) = (Q^t \gamma_1 f)(\mathbf{x}), \tag{17}$$

где $Q^t \colon W_2^{1/2}(\partial D) \to W_2^2(D)$ определён равенствами

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} Q^t(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) g(\hat{\mathbf{y}}) \, dS(\hat{\mathbf{y}}), \qquad Q^t(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t R^\tau(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) \, d\tau,$$

а оператор $\gamma_1 \colon W_2^2(D) \to W_2^{1/2}(D)$ – это замкнутый с $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ оператор взятия нормальной производной на ∂D.

Из этой леммы следует, что разность полугрупп действительно “сосредоточена” на границе ∂D.

Другая полезная формула для Q^t получается из (1):

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t P^\tau (A - A^N \Pi_m) G(\mathbf{x}) \, d\tau, \tag{18}$$

где $G(\mathbf{x}) = g_h(\mathbf{x}) + g_b(\mathbf{x})$.

Из доказанного выше следует, что справедливы теоремы 5, 6 и 7.

Теорема 5. *Операторные семейства $(R^t)_{t\geq 0}$ и $(Q^t)_{t\geq 0}$ удовлетворяют следующим эволюционным соотношениям $R^{t+s} = R^t R^s$ и $Q^{t+s} = Q^t + R^t Q^s$. При этом $R^0 = I$, $Q^0 = 0$.*

Теорема 6. *При всех $t > 0$ и $f \in D(A^N)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} R^t f = \frac{1}{2} A^N R^t f.$$

Теорема 7. *При всех $t > 0$ и $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^t g = \frac{1}{2} \int R^t(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) g(\hat{\mathbf{y}})\, dS(\hat{\mathbf{y}}).$$

В третьем параграфе четвёртой главы мы пользуемся первой формулой для разности полугрупп P^t и R^t чтобы определить случайный оператор $\mathcal{Q}^t$, обобщающий понятие интеграла по локальному времени.

Определим случайный оператор $\mathcal{P}^\tau = \mathcal{P}^\tau[w(\cdot)]$, полагая

$$(\mathcal{P}^\tau s_m)(\mathbf{x}) = e^{iw_1(\tau)\varkappa_m} s_m(\mathbf{x}), \tag{19}$$

$$(\mathcal{P}^\tau f_b) = \widetilde{f}_b(x + w(\tau)), \tag{20}$$

$$(\mathcal{P}^\tau f_h) = \widetilde{f}_h(x + w(\tau)), \tag{21}$$

и определим оператор случайного накопленного импульса $\mathcal{Q}^t = \mathcal{Q}^t[w(\cdot)]$, пользуясь формулой (18):

$$(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t \mathcal{P}^\tau (A - A^N \Pi_m) G(\mathbf{x})\, d\tau, \tag{22}$$

где $G(\mathbf{x}) = g_h(\mathbf{x}) + g_b(\mathbf{x})$.

Теорема 8. *Предел в правой части (22) существует в смысле $L_2(\mathcal{H}, \mu)$, где $\mathcal{H} = D \times \Omega$ и $d\mu = d\mathbf{x} \times d\mathbf{P}$.*

Оператор Q^t получается как усреднение операторов $\mathcal{Q}^t$ по траекториям $w(\cdot)$. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Для любой функции $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ выполнено*

$$\mathbf{E}\left(\mathcal{Q}^t g\right)(\mathbf{x}) = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$

Наконец, в четвёртом параграфе мы доказываем предельные теоремы для последовательности случайных блужданий, слабо сходящихся к броуновскому движению. Именно, мы строим операторные семейства P_n^t и Q_n^t, а так же их случайные аналоги $\mathcal{P}_n^t$ и $\mathcal{Q}_n^t$, для процесса, определённого формулой (5) с $(\xi_j)_{j\geq 1}$ – н.о.р. случайные d-вектора с общим распределением $\mathcal{P}$, инвариантным относительно вращений, и $\mathbf{E}\,(\xi_1^1)^2 = 1$ (верхний индекс указывает на номер компоненты), а $(\eta(t))_{t\geq 0}$ – не зависящий от них стандартный пуассоновский процесс, и доказываем аналоги первой и второй леммы о разности полугрупп.

По аналогии с (19) определим случайный оператор $\mathcal{P}_n^\tau = \mathcal{P}_n^\tau[\zeta_n(\cdot)]$, и оператор случайного накопленного импульса $\mathcal{Q}_n^t = \mathcal{Q}_n^t[\zeta_n(\cdot)]$ по аналогии с (22).

Наконец, в пятом параграфе четвёртой главы мы доказываем предельные теоремы о сильной сходимости R_n^t и Q_n^t:

Теорема 10. *Пусть $f \in D(A^N)$. Тогда*

$$\left\|R_n^t f - R^t f\right\|_{L_2(D)} \leq \frac{C\sqrt{t}}{\sqrt{n}} \|f\|_{W_2^2(D)}.$$

Теорема 11. *Существует такое число $C > 0$, что для любой функции $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ выполнено неравенство*

$$\|Q_n^t g - Q^t g\|^2_{L_2(D)} \leq \frac{Ct^{3/8}}{n^{3/8}} \|g\|^2_{W_2^{1/2}(\partial D)}.$$

Результаты третьей главы опубликованы в работе [15].

В четвёртой главе мы строим отражающуюся версию симметричного чисто скачкообразного процесса Леви с единичной матрицей ковариации и конечным вторым моментом в произвольной гладкой ограниченной области. По формуле Леви–Хинчина характеристическая функция такого процесса равна

$$\varphi_t(\mathbf{p}) = \exp(-tL(\mathbf{p})), \quad L(\mathbf{p}) = -\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - 1 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right) d\Pi(\mathbf{x}), \tag{23}$$

причём мера Леви Π инвариантна относительно поворотов и имеет конечный второй момент, $\operatorname{cov}\xi(1) = I$. Генератором свободного процесса является нелокальный оператор L, заданный равенством

$$-Lf(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}\Big)\, d\Pi(\mathbf{y}) \tag{24}$$

и с ядром $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(L)$, $-L \geq 0$.

При этом справедливы формулы для разности полугрупп, аналогичные доказанным в четвёртой главе. Первая формула для разности:

Лемма 3. *Для $f \in W_2^2(D)$ и $\mathbf{x} \in D$ справедливо соотношение*

$$(P^t f)(\mathbf{x}) - (R^t f)(\mathbf{x}) = -\lim_{M\to\infty} \int_0^t P^\tau L\Big(\widetilde{f}_M - \overline{f}_M\Big)(\mathbf{x}, 0)\, d\tau\,.$$

Указанный предел существует также в смысле $W_2^2(D)$.

Вторая формула для разности полугрупп:

Лемма 4. *Для $f \in W_2^2(D)$ справедливо соотношение*

$$(P^t f)(\mathbf{x}) - (R^t f)(\mathbf{x}) = (Q^t \gamma_1 f)(\mathbf{x})$$

где $Q^t \colon W_2^{1/2}(\partial D) \to W_2^2(D)$ определён равенствами

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} Q^t(\mathbf{x},\, \hat{\mathbf{y}}) g(\hat{\mathbf{y}})\, dS(\hat{\mathbf{y}}), \qquad Q^t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{R}^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{z})\, d\tau$$

и

$$\widetilde{R}^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{l=0}^\infty \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2} e^{-tL(\varkappa_l)} s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\mathbf{z})}.$$

Другая полезная формула получается из предыдущей леммы:

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty} \int_0^t P^\tau L\Big(\widetilde{G}_M - \overline{G}_M\Big)(\mathbf{x},0)\,d\tau, \tag{25}$$

где $G(\mathbf{x}) = g_h(\mathbf{x}) + g_b(\mathbf{x})$.

В пятом параграфе четвёртой главы мы строим случайный оператор, обобщающий понятие интеграла по локальному времени на случай симметричных процессов Леви с конечным вторым моментом.

Определим случайный оператор $\mathcal{P}^\tau = \mathcal{P}^\tau[\xi(\cdot)]$ на области определения $W_2^2(D) = \mathcal{N}^0(D) \oplus BG_2^{2,0}(D)$, полагая

$$(\mathcal{P}^\tau f)(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum e^{i\varkappa_m \xi_1(\tau)}(f, s_m)s_m(\mathbf{x}), & \text{для } f \in \mathcal{N}^0(D), \\ f(\mathbf{x}+\xi(\tau)), & \text{для } f \in BG_2^{2,0}(D). \end{cases}$$

Очевидно, что $P^t = \mathbb{E}\mathcal{P}^t$. Определим теперь оператор $\mathcal{Q}^t = \mathcal{Q}^t[\xi(\cdot)]$, пользуясь формулой (25):

$$(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty} \int_0^t \mathcal{P}^\tau L\Big(\widetilde{G}_M - \overline{G}_M\Big)(\mathbf{x},0)\,d\tau, \tag{26}$$

где $G = G_b + G_h \in W_2^2(D)$.

Теорема 12. *Предел в правой части* (26) *существует в смысле* $L_2(\mathcal{H},\mu)$, *где* $\mathcal{H} = D\times\Omega$ *и* $d\mu = d\mathbf{x}\times d\mathbf{P}$.

Оператор Q^t получается как усреднение операторов $\mathcal{Q}^t$ по траекториям $\xi(\cdot)$.

Теорема 13. *Для любой функции* $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ *справедливо*

$$\mathbb{E}(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$

Наконец, в шестом параграфе четвёртой главы мы показываем, что в случае симметричного α-устойчивого процесса, который не обладает конечным вторым моментом, оператор Q^t_α не может быть определён однозначно. Именно, первая формула для разности полугрупп остаётся такой же, как в случае процессов Леви, а во второй возникает важное изменение:

Лемма 5. *Для* $f \in \mathcal{N}^0(D)\oplus G_2^2(D)$ *справедливо соотношение*

$$(P^t_\alpha f)(\mathbf{x}) - (R^t_\alpha f)(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} Q^t_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{z})(\gamma_1 f)(\mathbf{z})\,dS(\mathbf{z}),$$

где в качестве ядра Q^t_α *можно взять*

$$Q^t_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{z}) = C + \frac{1}{\alpha}\int_0^t \widetilde{R}^t_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{z})\,d\tau,$$

с любым вещественным C, а ядро $\widetilde{R}^t_\alpha$ определено формулой

$$\widetilde{R}^t_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa_l^{2-\alpha}} e^{-t\varkappa_l^\alpha/\alpha} s_m(\mathbf{x})\overline{s_m(\mathbf{z})}.$$

Невозможность выбрать Q^t_α однозначно означает, что средний накопленный импульс определяется лишь с точностью до константы, и корректно определены лишь разности накопленного импульса в разных точках.

Определим аналогично тому как это делалось выше случайные операторы $\mathcal{P}^\tau_\alpha = \mathcal{P}^\tau_\alpha[\xi_\alpha(\cdot)]$ на области определения $\mathcal{N}^0(D) \oplus B^2_2(D)$ и $\mathcal{Q}^t_\alpha = \mathcal{Q}^t_\alpha[\xi_\alpha(\cdot)]$, по аналогии с формулой (26).

Теорема 14. *Предел в определении $\mathcal{Q}^t$ существует в смысле $L_2(\mathcal{H},\mu)$, где $\mathcal{H} = D \times \Omega$ и $d\mu = d\mathbf{x} \times d\mathbf{P}$.*

Справедлив также результат, аналогичный теореме 13 о том, что оператор Q^t является средним случайных операторов $\mathcal{Q}^t$.

Теорема 15. *Для любой функции $g \in W_2^{1/2,0}(\partial D)$ справедливо*

$$\mathbb{E}(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$

Результаты четвёртой главы опубликованы в работе [16].

В Заключении кратко изложены основные результаты диссертации.

В Приложении введены общие для второй и третьей главы обозначения, касающиеся краевых задач во многомерных ограниченных гладких областях.

Список литературы

[1] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* — М. : Наука, 1968.

[2] R. F. Bass, P. Hsu, *Some potential theory for reflecting Brownian Motion in Hölder and Lipschitz domains.* — Ann. Probab. **19**, no. 2 (1991), 486–508.

[3] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения $\partial u/\partial t = \sigma^2 u$ с комплексным параметром σ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88–102.

[4] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана.* — Докл. акад. наук **459**, № 4 (2014), 400–402.

[5] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Начально-краевые задачи в ограниченной области: вероятностные представления решений и предельные теоремы, I.* — Теор. вер. и её примен. **61**, № 4 (2016), 733–752.

[6] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.

[7] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Начально-краевые задачи в ограниченной области: вероятностные представления решений и предельные теоремы, II.* — Теор. вер. и её примен. **62**, № 3 (2017), 446–467.

[8] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Отражающиеся процессы Леви и порождаемые ими семейства линейных операторов.* — Теор. вер. и её примен. **64**, № 3 (2019), 417–441.

[9] М. В. Платонова, *Невероятностные безгранично делимые распределения: представление Леви-Хинчина, предельные теоремы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **431** (2014), 145–177.

[10] М. В. Платонова, *Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **442** (2015), 101–117.

[11] М. В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 92–106.

[12] М. В. Платонова, *Вероятностные представления решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана-Лиувилля.* — Теор. вер. и её примен. **61**, № 3 (2016), 417–438.

[13] П. Н. Иевлев, *Вероятностное представление решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 145–158.

[14] П. Н. Иевлев, *Вероятностные представления для решений начально-краевых задач для уравнения Шрёдингера в d-мерном шаре.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 149–170.

[15] П. Н. Иевлев, *Броуновское движение с отражением в d-мерном шаре.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 158–177.

[16] P. Ievlev, *Symmetric Levy processes with reflection.* — Glob. Stoch. Anal. **8**, no. 1 (2021).

[17] И. М. Шилов, Г. Е. Гельфанд, *Обобщённые функции и действия над ними.* — М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958.

[18] K. L. Chung, R. J. Williams, *Introduction to stochastic integration: Vol. 2.* — Springer, 1990.