

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук К. Л. Малышева “Корреляционные функции низкоразмерных неоднородных моделей статистической физики и их асимптотики”

Диссертация К. Л. Малышева посвящена вычислению корреляционных функций и исследованию их асимптотик для некоторых низкоразмерных неоднородных моделей статистической физики, вызывающих значительный интерес в современной математической и теоретической физике. В частности, рассматриваются проблемы, находящиеся на стыке теории квантовых интегрируемых систем, с одной стороны, а также перечислительной комбинаторики, теории симметрических функций и случайных матриц, с другой. При этом основными методами применяемыми в диссертации являются как квантовый метод обратной задачи, так и подход функционального интегрирования. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы. В работе К. Л. Малышева рассмотрены низкоразмерные модели статистической физики, для которых вычисляются соответствующие корреляционные функции и изучается их асимптотическое поведение. В целом, диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне и заслуживает положительной оценки.

В главе 1 диссертации рассматривается XXZ -модель Гейзенберга в двух пределах: анизотропия Δ стремится к нулю, $\Delta \rightarrow 0$ ($XX0$ -магнетик, предел свободных фермионов), и к бесконечности, $\Delta \rightarrow -\infty$ (изинговский предел). Кроме того, рассматривается спиновая XU цепочка (квази-свободные фермионы), связанная с более общей XUZ -моделью Гейзенберга. Во первых, глава 1 посвящена вычислению для XXZ -модели при $\Delta \rightarrow 0, -\infty$ некоторых температурных корреляционных функций специального вида (и соответствующих форм-факторов). В результате возникают соотношения, связанные с перечислением плоских разбиений и решеточных самоизбегающих

путей. Более точно, автором рассмотрено вычисление температурных корреляционных функций – ‘выживание ферромагнитной струны’ и ‘выживание доменной стенки’ – для XXZ цепочки при нулевой и бесконечной анизотропии. В этих предельных случаях симметрические функции Шура могут быть использованы для записи N -частичных бетевских векторов состояния. Ответы, полученные автором для форм-факторов операторов ферромагнитной струны и доменной стенки, выражаются в терминах определителей. Вычисление полученных представлений в специальной q -параметризации приводит к выражениям, содержащим q -биномиальные определители. Вычисление q -биномиальных определителей приводит к выражениям, являющимся производящими функциями плоских разбиений в ящике, и при $q \rightarrow 1$ возникают аналоги формулы Мак-Магона для числа разбиений в ящике. При $q \rightarrow 1$ возникает также интерпретация форм-факторов операторов ферромагнитной струны и доменной стенки в терминах самоизбегающих путей на квадратной решетке. Далее, вычисляются асимптотики температурных корреляционных функций выживания ферромагнитной струны и выживания доменной стенки в случае длинной, но конечной цепочки и при достаточно низкой температуре. Получены представления в виде матричных интегралов, сводящиеся к произведению статсуммы гауссова унитарного ансамбля и коэффициента в виде квадрата числа плоских разбиений. Получены соотношения, явно выражающие асимптотическое поведение корреляционных функций в случае, когда все параметры (M – полное число узлов цепочки, N – число спинов “вниз”, n – число последовательных спинов в ферромагнитной струне или в доменной стенке, $\beta = \frac{1}{T}$ – обратная температура) растут. Если рост параметров подчинен определенному соотношению, то обеспечено убывание коррелятора.

Специальные корреляционные функции $XX0$ цепочки Гейзенберга над ферромагнитным состоянием могут быть использованы для перечисления путей блуждания недружественных пешеходов в модели со случайными поворотами. Для $XX0$ модели Гейзенберга на периодической цепочке вычисляется специальная двухточечная корреляционная функция над суперпозицией собственных состояний магнетика, которую также можно интерпретировать как производя-

щую функцию случайных блужданий недружественных пешеходов на одномерной решетке в среде с переменным числом недружественных соседей. Получена оценка числа путей пешехода, перемещающегося между двумя достаточно удаленными узлами в пределе, когда число поворотов растет как квадрат расстояния между начальным и конечным положениями пешехода.

Рассматривается XY цепочка Гейзенберга. Для производящей функции соответствующих корреляторов третьих компонент спинов получено выражение в терминах функциональных интегралов по антикоммутирующим переменным интегрирования. Производящая функция вычисляется с использованием известной формулы, выражающей след оператора в виде конечнократного грассмано-вого интеграла. При этом структура производящей функции такова, что при переходе от конечнократного интеграла к функциональному оказывается естественным наложить на переменные интегрирования определенные граничные условия, выражающие квазипериодичность на отрезке мнимого времени. Интегралы гауссова типа вычисляются стандартно, и регуляризованные ответы принимают вид определителей конечных матриц. Полученные выражения можно использовать для вывода многоточечных корреляторов третьих компонент спинов. В качестве одного из приложений, рассматривается использование интеграла с квазипериодическими условиями при вычислении производящей функции случайных блужданий недружественных пешеходов для XX0 модели.

В главе 2 рассматриваются модели квантовой статистической физики, объединенные тем, что функциональное интегрирование используется для вывода температурных корреляционных функций. При вычислении интегралов используется прием, состоящий в разделении переменных интегрирования на высокоэнергетичную (“быструю”) и низкоэнергетичную (“медленную”) составляющие.

Во первых, рассматривается одномерный бозе-газ в гармоническом потенциале на вещественной оси. Такая система описывается нерелятивистской $1 + 1$ $|\psi|^4$ -моделью с отталкиванием во внешнем гармоническом потенциале. Физически такой гамильтониан описывает Бозе-эйнштейновскую конденсацию в газах щелочных металлов, удерживаемых квази-одномерными магнито-оптическими ло-

вушками.

Стоит отметить, что модель бозе-газа в удерживающем потенциале существенно отличается от аналогичной задачи для пространственно однородного бозе-газа. Низкоэнергетический (на масштабах много больших межатомных расстояний) предел $|\psi|^4$ модели однородного бозе-газа описывается $1 + 1$ нелинейной $O(2)$ σ -моделью с известными корреляторами и критическими индексами. Однако, на таких масштабах эффекты неоднородности существенны в ловушках, что делает $O(2)$ σ -модель неприменимой в этом случае. Требуются новые приближенные контролируемые методы расчета корреляторов для пространственно неоднородного бозе-газа. Именно эту задачу и решает диссертант в главе 2.

Для вывода ведущих асимптотических оценок автор обобщает на неоднородный случай метод, предложенный В. Н. Поповым для получения оценок для критических индексов в случае однородного бозе-газа. Метод В. Н. Попова дает функцию Грина бозе-системы с качественно правильной длинноволновой асимптотикой. В частности, правильный вид имеет асимптотика вариационной функции Грина пространственно однородной $1d$ бозе-системы. Автор использует функциональное интегрирование для вывода однопетлевого эффективного действия. При этом роль “медленного” поля играет решение, получаемое в приближении Томаса-Ферми. В режиме Гросса-Питаевского (отталкивание слабое, плотность частиц высокая) и в приближении Томаса-Ферми исследуются затем асимптотики двухточечных и многоточечных температурных корреляционных функций.

Для неоднородного бозе-газа в диссертации получены оценки корреляторов в пределах, когда температура стремится к нулю, а объем, занимаемый квази-конденсатом растет. Определены критические индексы, которые зависят от пространственных координат и которые характеризуют убывание корреляционной функции. В целом, результаты полученные в рамках приближенного подхода, который основан на функциональном интегрировании, сводятся, в соответствующих пределах (например, при исчезновении удерживающего потенциала), к соотношениям для однородного бозе-газа, получаемым в рамках анзаца Бете. Полученные соотношения для крити-

ческого индекса записаны в терминах физических наблюдаемых и могут на практике продемонстрировать эффект неоднородности в виде конкретной зависимости от координат.

Для сверхтекучего гелия-3А получено в лондонском пределе разложение среднего оператора тока частиц по степеням производных параметра порядка. Асимптотика коррелятора исследуется методом Лапласа. Доказан сам факт наличия поправок (наличие или отсутствие которых обсуждалось в литературе) по степеням производных параметра порядка. Доказано наличие квадратичных поправок и продемонстрированы кубические поправки.

Кроме того, функциональное интегрирование применяется для вывода спектра коллективных возбуждений в антиферромагнитной фазе двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием как вблизи нулевой температуры, так и в окрестности критической температуры Нееля. Интерес к указанной модели был продиктован задачами, связанными с поиском модели высокотемпературной сверхпроводимости и с описанием (сильных) электронных корреляций в двумерных решеточных системах.

Большой теоретический и практический интерес вызывает физические и механические свойства нано-материалов. Здесь существенную роль играют такие дефекты кристаллической структуры как дислокации и дисклинации. Широко известные (“классические”) дислокационные решения, возникающие в рамках теории упругости с несовместностью, характеризуются полюсной особенностью тензора напряжений на оси дефекта. В главе 3 рассмотрены две задачи. Во-первых, предложена трансляционно-калибровочная лагранжева модель, приводящая к решениям, характеризующимся тензором напряжений со сглаженной особенностью на оси. Цилиндрическая область вблизи оси дефекта, внутри которой происходит сглаживание, называется областью ядра дефекта. Уравнения (нелинейной) модели решены для конкретного случая прямолинейной винтовой дислокации, залегающей вдоль оси упругого бесконечного цилиндра. Соответствующий тензор напряжений получен в линейном и квадратичном приближениях по модулю вектора Бюргерса. При этом калибровочное уравнение эйнштейновского вида играет роль нестандартного соотношения несовместности. Физический закон, который

связывает тензоры напряжений и деформаций, содержит члены как первого, так и второго порядков. Используется метод функции напряжений, при котором уравнения равновесия в напряжениях удовлетворяются тождественно. Получаемые окончательно компоненты тензора напряжений определены как вне, так и внутри ядра, причем область ядра характеризуется самосогласованно возникающими параметрами длины (радиусами). Самосогласованность решения обеспечивается возможностью фиксировать имеющийся произвол в выборе параметров. Это свидетельствует об удовлетворительности предложенной модели, в рамках которой собственная энергия дислокаций описывается калибровочным лагранжианом, квадратичным по плотности дефектов.

Далее, функциональное интегрирование используется для вычисления статистической суммы и температурных корреляционных функций компонент напряжений в модели, рассматривающей набор модифицированных дислокаций в упругом цилиндре как термодинамический ансамбль. Совокупность дислокаций при ненулевой температуре эквивалентна двумерному кулоновскому газу зарядов, потенциал взаимодействия которых имеет логарифмический вид на больших расстояниях и сглажен (стремится к нулю) для зарядов на близком расстоянии. В подходе производящего функционала вычисляются двухточечные корреляторы компонент тензора напряжений, которые затем используются для получения закона перенормировки упругих постоянных, обусловленной зарождением дислокационных диполей. При этом основное внимание уделяется тем проявлениям, которые связаны с использованием решения для несингулярных (модифицированных) дислокаций. Продемонстрировано, что эффекты обусловленные конечным размером ядер дислокаций имеют место и также могут быть проверены в экспериментах с коллоидными пленками.

К замечаниям по изложению материала диссертации следует отнести следующее:

1. Ключевой момент развитого в главе 2 оригинального метода расчета корреляторов неоднородного $1d$ бозе-газа состоит в предположении, что вся существенная низкоэнергетическая физика модели содержится в однопетлевом эффективном действии. Однако, в дис-

сертации не обсуждается, что контролирует такую теорию. Как известно, такого рода теории контролируются соответствующим $1/N$ разложением. Можно показать, что в нерелятивистской $1 + 1$ $|\psi|^4$ теории роль $1/N$ параметра играет параметр пропорциональный корню квадратному из отношения константы отталкивания к плотности частиц. Это как раз и есть режим Гросса-Питаевского (отталкивание слабое, плотность частиц высокая), обсуждаемый в Диссертации. Этот факт подтверждает достоверность оригинальных результатов автора по исследованию неоднородного $1d$ квази-конденсата.

2. В главе 1 при вычислении статсуммы спиновой XY модели используется определенная регуляризация фермионного интеграла по траекториям. В главе 2 бозонный интеграл по траекториям приводит к детерминанту, который вычисляется с использованием дзета-регуляризации. Однако, в диссертации не обсуждается, чем обусловлен тот или иной выбор регуляризации. На самом деле, регуляризация детерминантов, возникающих при вычислении формального интеграла по непрерывным траекториям, диктуется выбором соответствующей конечнократной временной аппроксимации этого интеграла. Различные аппроксимации интеграла на временной решетке могут приводить в континуальном пределе к одному и тому же формальному выражению. Выбор аппроксимации устраняет неопределенность соответствующих пропагаторов при совпадающих аргументах и фиксирует тем самым схему квантования. Автору следует пояснить, как выбранные им регуляризации соотносятся с этим общим принципом.

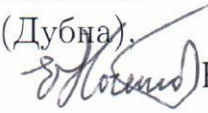
3. Утверждение автора на стр. 10: “Бозе-конденсация происходит не только в импульсном пространстве, но и в координатном” требует пояснений. Автору следует более аккуратно сформулировать, что в данном случае подразумевается под конденсацией в координатном пространстве без возникновения противоречия с принципом неопределенности Гейзенберга.

4. Обозначения, используемые в диссертации, иногда выглядят не очень аккуратно. Например, в главе 2 неперенормированный химпотенциал до 90 стр. обозначается буквой μ . Далее, та же величина обозначается уже буквой λ . Пространственно разделенные точки прямой обозначаются иногда как x_1, x_2 , а иногда как x, x' . Это

может привести к недоразумениям, особенно если эти разные обозначения фигурируют в одной и той же формуле (например, формула (289)).

Данные замечания, однако, никоим образом не ставят под сомнение достоверность и важность основных результатов диссертации. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Разработанные подходы и полученные результаты могут быть применены для дальнейшего изучения неоднородных моделей статистической физики.

В итоге можно сделать вывод, что в соответствии с требованиями пункта 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" представленная диссертация К. Л. Малышева является законченной научно-квалификационной работой, результаты которой могут быть квалифицированы как существенное научное достижение в теории квантовых интегрируемых систем и в статистической физике. Диссертация соответствует специальности 01.01.03 - математическая физика и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям.

Начальник сектора Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ (Дубна),
доктор физико-математических наук  Е. А. Кочетов

Подпись Е. А. Кочетова заверяю.

Зам. директора ЛТФ ОИЯИ,
доктор физико-математических наук  А. Б. Арбузов

