Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Белов Юрий Сергеевич

Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург– 2016

Оглавление

Глава 1. Введение

Гильбертовы пространства целых функций – один из важнейших объектов современного анализа. Чаще всего эти пространства возникают как образ функционального гильбертова пространства X при унитарном спектральном преобразовании $\mathcal{F}$ (в качестве $\mathcal{F}$ может выступать преобразование Фурье, спектральное преобразование Крейна - де Бранжа, преобразование Баргмана и т.д.). При этом оказывается, что многие важные вопросы математического анализа и математической физики проще и естественней решить в пространстве целых функций $\mathcal{F}(X)$, а не в пространстве X. Например, при помощи теории специального класса пространств целых функций (пространств де Бранжа) Луи де Бранж получил решение обратной спектральной задачи для класса *всех* канонических систем. К каноническим системам сводятся многие классические уравнения математической физики, такие как матричное уравнение струны, уравнение Штурма–Лиувилля, уравнение Шредингера, система Дирака и т.д. С другой стороны, гильбертово пространство целых функций может быть задано непосредственно. Чаще всего пространство задается как пространство целых функций F, лежащих в $L^2(\mu)$, где μ – некоторая локально конечная мера в $\mathbb{C}$

$$\|F\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 d\mu(z), \tag{1.0.1}$$

также могут накладываться дополнительные ограничения на рост целых функций из пространства (например, так определено пространство Пэли–Винера). Отметим, что *все* такие (с нормой из (1.0.1)) пространства целых функций удовлетворяют *аксиоме деления*:

Если F лежит в пространстве и $F(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\frac{F(z)}{z-\lambda}$ тоже лежит в пространстве.

Диссертация посвящена изучению трех классов пространств целых функций:

- пространства де Бранжа,
- пространства целых функций с базисом Рисса из воспроизводящих ядер,
- пространства фоковского типа.

В конце 1950-х годов Луи де Бранж создал теорию некоторого класса пространств целых функций. Основная цель создания этой теории – решить обратную спектральную задачу для канонических систем второго порядка. Очень скоро выяснилось, что полученные результаты могут быть использованы для решения многих классических проблем анализа, таких как проблема полноты полиномов и других систем специальных функций, проблемы лакуны в спектре меры с малым носителем и т.д. В последние годы интерес к *методу пространств де Бранжа* только нарастает. Например, в 2002 году

И. Ортега-Серда и К. Сейп решили знаменитый вопрос об описании фреймов из экспонент при помощи теории пространств де Бранжа.

Теория пространств де Бранжа тесно связана с теорией модельных подпространств $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ пространства Харди. А именно, для каждого пространства де Бранжа существует естественный унитарный изоморфизм между ним и некоторым модельным подпространством, порожденным мероморфной внутренней функцией Θ.

Модельные подпространства возникают в 1960-х годах в работах Х. Шапиро, А. Шилдса, Н. Никольского. Естественным образом пространства де Бранжа возникают при описании *одномерных возмущений компактных самосопряженных операторов.* Самосопряженные возмущения такого рода были описаны П. Ахерном и Д.Кларком, общий случай был описан В. Капустиным, Г. Губреевым, А. Тарасенко, А. Барановым и Д. Якубовичем.

Также теория пространств де Бранжа тесно связана с теорией сингулярных интегральных операторов. Например, задача об описании *бесселевых последовательностей из воспроизводящих ядер* – частный случай знаменитой проблемы об ограниченности двухвесового преобразования Гильберта. Эта проблема была недавно решена М. Лэйси, Э. Сойером, К. Шеном и И. Урарто-Туэро.

Хорошо известно, что любое пространство де Бранжа обладает семейством *ортогональных базисов из воспроизводящих ядер.* Существование таких базисов – характеризующее свойство пространств де Бранжа. Если же требовать только существование *базиса Рисса из воспроизводящих ядер*, то получается класс пространств шире, чем пространства де Бранжа. Впервые такие пространства были введены автором в совместной работе с К. Сейпом и Т. Менгстэ. Также такие пространства возникают при изучении *одномерных возмущений нормальных операторов.*

Пространство Фока – один важнейших объектов в математике и квантовой механике. К. Сейп показал, что в пространстве Фока *нет базиса Рисса из воспроизводящих ядер.* С другой стороны, существуют системы из воспроизводящих ядер, очень близкие по свойствам к базисам Рисса. Благодаря этому для изучения пространства Фока можно применять некоторые методы из теории пространств де Бранжа.

Несмотря на успешное развитие теории пространств де Бранжа многие важные вопросы остаются открытыми. Один из таких вопросов – описание базисов Рисса из вопроизводящих ядер. Другой важный вопрос – нахождение взаимно однозначных соответствий между классами канонических систем и классами пространств де Бранжа. Представляют огромный интерес задачи о полноте смешанных систем (когда часть системы состоит из воспроизводящих ядер, а часть берется из биортогональной системы).

В диссертации получены новые результаты по всем этим задачам из теории пространств де Бранжа, а также (при помощи теории пространств де Бранжа) решены некоторые открытые вопросы теории функций. Можно выделить следующие основные результаты:

- получено полное описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер для "малых" пространств де Бранжа;
- дан отрицательный ответ на вопрос Н. Никольского о полноте системы, биортогональной к системе из воспроизводящих ядер в K_Θ;
- решена задача спектрального синтеза для системы экспонент в $L^2(-\pi,\pi)$ и для систем воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа;
- доказана гипотеза Карлсона–Сандберга об описании замыкания системы из сдвигов;
- получен ответ на вопрос Б. Коренблюма об описании подпространств $C^\infty(\mathbb{R})$, инвариантных относительно дифференцирования;
- получено описание пространств де Бранжа, соответствующих каноническим системам, чей гамильтониан состоит из неделимых интервалов, сгущающихся влево;
- получено описание пространств де Бранжа, которые изоморфны пространствам фоковского типа.

Многие из доказательств этих результатов тесно связаны между собой. Например, метод доказательства гипотезы Карлсона–Сандберга используется при исследовании вопроса Б. Коренблюма, а идея построения системы из воспроизводящих ядер с неполной биортогональной используется при решении задачи о спектральном синтезе для экспонент.

Диссертация состоит из 11 глав. В настоящей главе мы расскажем обо всех основных результатах диссертации и дадим их полные формулировки. Для удобства читателя эти формулировки будут продублированы в соответствующих главах. Нумерация формул тройная (первое число – номер главы, второе число – номер параграфа, третье число – номер утверждения или формулы в параграфе).

1.1. Пространства де Бранжа

В этом параграфе мы дадим различные (эквивалентные) определения пространств де Бранжа и обсудим некоторые их свойства, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1.1.1. Пространство Харди

Пусть $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ – верхняя полуплоскость. Пространством Харди $H^2 = H^2(\mathbb{C}_+)$ мы будем называть множество всех аналитических в $\mathbb{C}_+$

функций f таких, что

$$\|f\|_{H^2}^2 := \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

Хорошо известно, что функции из пространства Харди H^2 имеют некасательный предел в почти любой точке $x \in \mathbb{R}$. В дальнейшем мы не будем различать функцию из $H^2(\mathbb{C}_+)$ и ее след на $\mathbb{R}$. Таким образом, пространство Харди H^2 становится замкнутым подпространством $L^2(\mathbb{R})$. Теорема Пэли–Винера дает нам эквивалентное определение класса H^2

$$H^2 = \mathcal{F}L^2(0,\infty) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}f = 0 \text{ п.в. на } (-\infty, 0)\}.$$

Информацию о пространствах Харди можно найти в монографиях [7,8,12,16, 82]. В дальнейшем нам понадобится внешне-внутренняя факторизация функций из класса Харди. Важную роль будут играть *внутренние функции*, то есть ограниченные аналитические функции Θ в $\mathbb{C}_+$ такие, что $|\Theta| = 1$ п.в. на $\mathbb{R}$.

Некоторые функции из H^2 допускают *мероморфное продолжение* в $\mathbb{C}_-$. Такие функции f могут быть представлены следующим образом:

$$f = e^{iaz}B(z)O(z), \tag{1.1.2}$$

где B – мероморфное произведение Бляшке, O – внешняя функция, $a \geq 0$.

1.1.2. Определение пространств де Бранжа. Элементарные свойства. Меры Кларка

Мы будем говорить, что целая функция E принадлежит классу Эрмита–Билера $\mathcal{HB}$, если выполнено неравенство

$$|E(z)| > |E(\bar{z})|, \quad z \in \mathbb{C}_+ \tag{1.1.3}$$

и $|E(x)| \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$[1]. В качестве примера можно взять функцию e^{-iaz}, $a > 0$ или любой полином с нулями в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$.

Каждая функция $E \in \mathcal{HB}$ порождает *пространство де Бранжа* $\mathcal{H}(E)$, состоящее из целых функций F таких, что функции F/E и F^*/E принадлежат пространству Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ (здесь и всюду далее $F^*(z) = \overline{F(\overline{z})}$). Скалярное произведение в $\mathcal{H}(E)$ задается формулой

$$(F,G)_{\mathcal{H}(E)} := \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t)\overline{G(t)}}{|E(t)|^2} dt.$$

[1] последнее требование иногда исключают из определения класса $\mathcal{HB}$

Теория пространств $\mathcal{H}(E)$, построенная де Бранжем [49, 50, 53], представляет интерес как с точки зрения математической физики [87, 88], так и с точки зрения теории функций [12]. Один из основных примеров пространства де Бранжа – пространство Пэли–Винера

$$\mathcal{P}W_\pi := \{F - \text{ целая } : F \in L^2(\mathbb{R}), \quad |F(z)| \le Ce^{\pi|z|}\} = \mathcal{H}(e^{-i\pi z}).$$

Другой важный пример – пространство полиномов $\mathcal{P}_N$ степени не выше N – получается, если в качестве E взять полином степени $N+1$ с корнями в нижней полуплоскости. Положим,

$$A(z) = \frac{E(z) + E^*(z)}{2}, \quad B(z) = \frac{E^*(z) - E(z)}{2i}.$$

Из неравенства Эрмита–Билера (1.1.3) следует, что функции A и B имеют только простые вещественные нули. Хорошо известно, что воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}(E)$ задается формулой[2]

$$k_w(z) = \frac{\overline{E(w)}E(z) - \overline{E^*(w)}E^*(z)}{2\pi i(\bar{w} - z)} = \frac{\overline{A(w)}B(z) - \overline{B(w)}A(z)}{\pi(z - \bar{w})}.$$

Заметим, что семейство $\{k_x\}_{x:A(x)=0}$ ортогонально. Более того, Л. де Бранж показал, что, за исключением некоторых случаев, оно является ортогональным базисом пространства $\mathcal{H}(E)$. С каждой функцией $E \in \mathcal{HB}$ свяжем ее *фазовую функцию* φ – вещественную непрерывную (гладкую) возрастающую функцию φ такую, что $E(t)e^{i\varphi(t)} \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что φ определена с точностью до аддитивного слагаемого, кратного 2π.

Следующее утверждение было доказано Л. де Бранжем (см. [53, теорема 22]).

Пусть $\alpha \in \mathbb{T}$, а $t_{\alpha,n}$ – (единственное) решение уравнения $\varphi(t_{\alpha,n}) = \frac{1}{2}\arg\alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (мы рассматриваем только те n, для которых решение существует). Тогда система $\{k_{t_{\alpha,n}}\}_n$ – ортогональный базис в $\mathcal{H}(E)$ для всех α, за исключением, быть может, одного.

Имеем

$$\{x : A(x) = 0\} = \{x : \varphi(x) = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{x : B(x) = 0\} = \{x : \varphi(x) = \pi n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

В частности, нули функций A и B *перемежаются.*

Замечание 1.1.1. *Вообще говоря, фазовая функция φ однозначно определяет функцию E (и пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$) с точностью до мно-*

[2]это нетрудно проверить при помощи формулы Коши для пространства Харди.

жителя S, где S – целая функция, нигде не обращающаяся в нуль и вещественная на $\mathbb{R}$ (например, $S(z) = e^z$). В этом случае $\mathcal{H}(SE) = S\mathcal{H}(E)$. Мы не будем различать такие пространства де Бранжа.

Меры Кларка. Пусть $\alpha \in \mathbb{T}$. Легко видеть, что функция $\frac{\alpha E + E^*}{\alpha E - E^*}$ имеет положительную вещественную часть в $\mathbb{C}_+$. То есть имеет место представление Герглотца

$$\Re \frac{\alpha E(z) + E^*(z)}{\alpha E(z) - E^*(z)} = p_\alpha y + \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\alpha(t)}{|t-z|^2},$$

где μ_α – мера, $p_\alpha \geq 0$. Видно, что носитель меры μ – это множество $\{x : \varphi(x) = \arg \alpha/2 + \pi n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Меры μ_α называют *мерами Кларка* (см. [56]), хотя в контексте пространств де Бранжа они появились на 10 лет раньше [53]. Мы напомним несколько хорошо известных свойств мер Кларка (см. [30, параграф 2.3]).

(i) Система $\{k_t\}_{t \in \operatorname{supp} \mu_\alpha}$ – ортогональный базис в $\mathcal{H}(E)$ для всех $\alpha \in \mathbb{T}$, кроме, быть может, одного исключительного значения. Число α – исключительное значение тогда и только тогда, когда $p_\alpha > 0$ (или $\alpha E^* - E \in \mathcal{H}(E)$, см. [53, Задача 89]).

(ii) $\mu_\alpha(\{t\}) = \pi |\varphi'(t)|^{-1} = |E(t)|^2 \|k_t\|^{-2}_{\mathcal{H}(E)}$, $t \in \operatorname{supp} \mu_\alpha$. Оператор вложения $E^{-1}\mathcal{H}(E)$ в $L^2(\mu_\alpha)$ унитарен для неисключительных α (изометричен для исключительного α).

(iii) Если существует исключительное значение α, то $\mu_\beta(\mathbb{R}) < \infty$ для любого $\beta \in \mathbb{T} \setminus \{\alpha\}$.

(iv) Если $\mu_\beta(\mathbb{R}) < \infty$ для некоторого $\beta \in \mathbb{T}$, то существует исключительное значение α такое, что $\alpha E^* - E \in \mathcal{H}(E)$.

Пространства де Бранжа, в которых конечна мера Кларка, – естественный подкласс пространств де Бранжа. Этот подкласс может быть задан многими способами (например, в таких и только таких пространствах не плотна область определения оператора умножения на z) и, как мы увидим в дальнейшем, будет возникать в различных задачах (полнота биортогональной системы, спектральный синтез, локализация нулей и. т. д.).

Замечание 1.1.2. *Мера Кларка пространства $\mathcal{P}W_\pi$ равна $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$.*

Пространства K_Θ и пространства де Бранжа. Пусть Θ – внутренняя функция в $\mathbb{C}_+$. Положим,

$$K_\Theta = H^2(\mathbb{C}_+) \ominus \Theta H^2(\mathbb{C}_+).$$

Хорошо известно, что K_Θ – подпространства в $H^2(\mathbb{C}_+)$, инвариантные относительно обратного сдвига $S : f \mapsto \frac{f(z) - f(i)}{z - i}$. Пространства K_Θ имеют многочисленные приложения в теории операторов и математической физике (см., например [16]).

Если функция Θ допускает мероморфное продолжение в $\mathbb{C}_-$, то она может быть представлена в виде

$$\Theta(z) = \Theta_E(z) = \frac{E^*(z)}{E(z)},$$

где E – функция класса Эрмита–Билера. В этом случае K_Θ может быть отождествлено с пространством де Бранжа $\mathcal{H}(E)$. А именно, отображение

$$f \mapsto \frac{f}{E}$$

действует унитарно из $\mathcal{H}(E)$ в K_Θ, причем воспроизводящие ядра переходят в воспроизводящие ядра. Таким образом, все вопросы о геометрии воспроизводящих ядер в K_Θ для мероморфных Θ – это вопросы о воспроизводящих ядрах в соответствующих пространствах де Бранжа.

Нагрузки в мере Кларка могут быть определены при помощи формулы $|\Theta_E'| = 2\varphi'$. Следовательно, оценки производной мероморфной внутренней функции представляют определенный интерес. Так как $2A = E(1+\Theta_E)$ и $2iB = E(\Theta_E - 1)$, мы получаем, что

$$|\Theta_E'(t)| = \left|i + r + \sum_n \mu_n \left(\frac{1}{t_n - t} - \frac{1}{t_n}\right)\right|^{-2} \sum_n \frac{2\mu_n}{(t_n - t)^2}, \qquad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1.4)$$

Эта формула окажется полезной в главе 4.

1.1.3. Эквивалентные определения пространств де Бранжа. Пространство дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T, \mu)$

Любое пространство де Бранжа удовлетворяет следующим трем аксиомам.

(B1) Если $F \in \mathcal{H}(E)$ и $F(w) = 0$, то $F(z) \cdot \frac{z-\bar{w}}{z-w} \in \mathcal{H}(E)$ и $\|F(z) \cdot \frac{z-\bar{w}}{z-w}\| = \|F\|$.

(B2) Функционал вычисления значения в точке $F \mapsto F(w)$ – нетривиальный непрерывный линейный функционал в $\mathcal{H}(E)$.

(B3) Если $F \in \mathcal{H}(E)$, то $F^* \in \mathcal{H}(E)$ и $\|F^*\| = \|F\|$.

Оказывается, что верно и обратное утверждение. А именно, любое нетривиальное гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее аксиомам $B1 - B3$, – пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ для некоторой функции $E \in \mathcal{HB}$ [53, теорема 23] (под равенством пространств мы понимаем их совпадение как множеств и равенство норм).

Таким образом, класс пространств де Бранжа – наиболее широкий класс гильбертовых пространств целых функций, в которых норма задается *весом на вещественной оси.* В частности, оказывается, что всегда существует вес вида $|E(x)|^{-2}$, задающий ту же самую норму. Этот глубокий факт имеет многочисленные приложения (см. [77]).

Благодаря аксиоматическому описанию пространств де Бранжа мы можем легко увидеть, что многие важные пространства целых функций суть пространства де Бранжа. Например, пусть ν мера на $\mathbb{R}$ такая, что полиномы $\mathcal{P}$ лежат в $L^2(\nu)$, но не плотны в $L^2(\nu)$. Легко проверить, что замыкание полиномов в $L^2(\nu)$ – след некоторого гильбертова пространства целых функций, удовлетворяющего аксиомам $B1-B3$. Следовательно, это пространство – пространство де Бранжа.

Пространство дискретных преобразований Гильберта. Пусть дискретная мера $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ на $\mathbb{R}$ такова, что $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$, а последовательность $T = \{t_n\}$ такова, что $|t_n| \to \infty$, $|n| \to \infty$. С любой такой мерой свяжем пространство *мероморфных функций*

$$\mathcal{H}(T, \mu) := \left\{ f : f(z) = \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \quad a = \{a_n\} \in \ell^2 \right\}. \tag{1.1.5}$$

Норма в $\mathcal{H}(T, \mu)$ задается формулой $\|f\|_{\mathcal{H}(T,\mu)} := \|a\|_{\ell^2}$.

Предположим, что A – каноническое произведение Вейерштрасса с простыми нулями в точках $\{t_n\}$, вещественное на вещественной оси. Тогда $A\mathcal{H}(T, \mu)$ – гильбертово пространство целых функций. Нетрудно проверить, что $A\mathcal{H}(T, \mu)$ удовлетворяет аксиомам $B1 - B3$. Следовательно, $A\mathcal{H}(T, \mu)$ – пространство де Бранжа. Более того, оказывается, что любое пространство де Бранжа может быть получено таким образом, если мы возьмем в качестве μ меру Кларка μ_α, где α – не исключительное значение.

Если, $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$, то мы получаем знаменитую параметризацию Шеннона–Котельникова–Уиттекера для пространства $\mathcal{P}W_\pi$

$$\mathcal{P}W_\pi = \left\{ f : f(z) = \sin \pi z \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{z - n}, \quad \{a_n\} = \{(-1)^n f(n)\} \in \ell^2 \right\}.$$

Как мы увидим, такой подход к пространствам де Бранжа позволил лучше понять их структуру и решить некоторые открытые вопросы (см. [28–31, 37, 38]).

1.1.4. Упорядоченность подпространств де Бранжа. Канонические системы

Возможно самый поразительный факт в теории пространств де Бранжа – теорема об упорядоченности пространств, изометрически вложенных в

$L^2(\mu)$. Следующее утверждение было доказано Л. де Бранжем (см. [53, теорема 35]):

Пусть два пространства де Бранжа $\mathcal{H}(E_1)$, $\mathcal{H}(E_2)$ изометрически вложены в $L^2(\mu)$, $\mu \in M^+(\mathbb{R})$. Если функция $\frac{E_1}{E_2}$ имеет ограниченный тип в $\mathbb{C}_+$ (т.е $\frac{E_1}{E_2} = \frac{h_1}{h_2}$, $h_1, h_2 \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$), то либо $\mathcal{H}(E_1) \subset \mathcal{H}(E_2)$, либо $\mathcal{H}(E_2) \subset \mathcal{H}(E_1)$.

В частности, любые два подпространства де Бранжа $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ (т.е подпространства пространства де Бранжа $\mathcal{H}(E)$, которые сами являются пространствами де Бранжа и порождают ту же норму) упорядочены по включению ($\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ или $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$).

Этот результат был доказан де Бранжем и использовался для доказательства обратной спектральной теоремы для канонических систем.

Пусть H – матрица 2×2, элементы которой принадлежат пространству $L^1([0, L])$. Предположим, что H вещественна, $H \geq 0$ п.в. на $[0, L]$ и $\mathrm{tr}(H) \equiv 1$. Будем называть интервал $I \subseteq [0, L]$ H-*неделимым*, если сужение H на I – постоянная вырожденная матрица, и это свойство не выполнено для любого накрывающего интервала $J \supsetneq I$ (т.е, $H(t)$ – проектор на фиксированный вектор e для п.в. $t \in I$).

С каждой H свяжем *каноническую систему дифференциальных уравнений*

$$Y'(t)J = zY(t)H(t), \qquad t \in [0, L], \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1.6}$$

где $Y(t)$ – 2×2-матрично значная функция на $[0, L]$, а $z \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр. Обозначим за $Y(t, z)$ (единственное) решение системы (1.1.6), удовлетворяющее условию $Y(0, z) = I$.

Положим, $(A_t(z), B_t(z)) := (1, 0)Y(t, z)$, $t \in [0, L]$, $E_t(z) := A_t(z) - iB_t(z)$. Легко проверить, что E_t – функция класса Эрмита–Билера.

Более того, цепочка подпространств де Бранжа $\mathcal{H}(E_L)$ задается сужением канонической системы $\mathcal{H}(E_t)$, $t \in [0, L]$, t не является внутренней точкой H-неделимого интервала.

Обозначим за $L^2([0, L], H)$ пространство вектор-функций с нормой

$$\|g\|^2_{L^2([0,L],H)} := \int_0^L \langle H(t)g(t), g(t)\rangle dt,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$. Существует обобщенное преобразование Фурье $\mathfrak{F}$, которое действует унитарно из $L^2([0, L], H)$ (при учете некоторой естественной факторизации) в $\mathcal{H}(E_L)$.

Пространство Пэли–Винера соответствует случаю, когда *гамильтониан* H – единичная матрица, $H(t) = I$, $t \in [0, L]$, $E_t(z) = e^{-itz}$.

Обратная спектральная теорема де Бранжа говорит, что *отображение* $H \mapsto E_L$ *задает взаимно однозначное соответствие между классом всех канонических систем и классом регулярных пространств де Бранжа.* Напомним, что пространство $\mathcal{H}(E)$ *регулярно*, если оно замкнуто относительно следующей операции $F(z) \mapsto \frac{F(z)-F(w)}{z-w}, w \in \mathbb{C}$.

1.1.5. Пространства, наделенные базисом Рисса из воспроизводящих ядер. Аксиоматический подход

Пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$, заданные формулой (1.1.5), можно определить для любой (не обязательно вещественной) дискретной меры $\mu \in M^+(\mathbb{C})$. Пусть A – каноническое произведение с простыми нулями в $T = \operatorname{supp}\mu$. Тогда $A\mathcal{H}(T,\mu)$ – пространство целых функций (пространство де Бранжа в случае $T \subset \mathbb{R}$). Многие результаты о пространствах де Бранжа могут быть доказаны для этого (более широкого) класса пространств целых функций. С другой стороны, такие пространства могут быть задана аксиоматически.

Будем говорить, что нетривиальное пространство целых функций $\mathcal{H}$ принадлежит классу $\mathfrak{R}$, если выполнены следующие три аксиомы:

(A1) функционал значения в точке $f \mapsto f(\lambda)$ непрерывен для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Т.е. в пространстве $\mathcal{H}$ есть воспроизводящее ядро k_λ;
(A2) если $f \in \mathcal{H}$ и $f(\lambda) = 0$, то $f(z)/(z-\lambda) \in \mathcal{H}$;
(A3) в пространстве $\mathcal{H}$ есть базис Рисса из нормированных воспроизводящих ядер. Т.е существует T такое, что $\{\frac{k_{t_n}}{\|k_{t_n}\|}\}_{t_n \in T}$ – базис Рисса в $\mathcal{H}$.

Покажем, что в этом случае $\mathcal{H}$ совпадает с одним из пространств $A\mathcal{H}(T,\mu)$. Рассмотрим систему $\{g_n\}$, биортогональную базису $\{\frac{k_{t_n}}{\|k_{t_n}\|}\}_{t_n \in T}$. Хорошо известно, что g_n – тоже базис Рисса.

Заметим, что $g_n(z) = c_n \cdot g_m(z)\frac{z-t_m}{z-t_n}$, $n \neq m$. Действительно, из аксиомы (A2) следует, что функция в правой части лежит в $\mathcal{H}$ и ортогональна системе $\{k_{t_l}\}_{l \neq n}$. Значит, она совпадает с g_n с точностью до скалярного множителя.

Таким образом, функция $G(z) := g_n(z)(z-t_n)$ не зависит от n. Заметим, что G имеет простые корни в T и не имеет других корней. Действительно, если $G(w) = 0$, $w \notin T$, то функция $G(z)/(z-w) \in \mathcal{H}$ и ортогональна системе $\{k_{t_n}\}_{t_n \in T}$. Это противоречит полноте системы $\{k_{t_n}\}_{t_n \in T}$.

Следовательно, любой вектор $h \in \mathcal{H}$ может быть записан как

$$h(z) = \sum_n h(t_n)\frac{G(z)}{G'(t_n)(z-t_n)}. \qquad (1.1.7)$$

Причем ряд сходится по норме пространства $\mathcal{H}$ и

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}} \asymp \sum_n \frac{|h(t_n)|^2}{\|k_{t_n}\|_{\mathcal{H}}} < \infty.$$

Пользуясь тем, что отображение $h \mapsto \{\frac{h(t_n)}{\|k_{t_n}\|}\}$ – биекция между $\mathcal{H}$ и ℓ^2, мы получаем

$$\sum_n \frac{\|k_{t_n}\|^2_{\mathcal{H}}}{|G'(t_n)|^2(1+|t_n|^2)} < \infty.$$

Положим, $\mu_n = \frac{\|k_{t_n}\|^2_{\mathcal{H}}}{|G'(t_n)|^2}$, $\mu = \sum_n \mu_n t_n$. Мы знаем, что $\sum_n \mu_n(1+|t_n^2|)^{-1} < \infty$. Таким образом, формула (1.1.7) может быть переписана в виде

$$h(z) = G(z) \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \quad \{a_n\} \in \ell^2.$$

Мы получили, что $\mathcal{H} = G\mathcal{H}(T,\mu)$.

Пространства де Бранжа как пространства класса $\mathfrak{R}$. В случае, если $\operatorname{supp}\mu = T \subset \mathbb{R}$ пространство $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ изоморфно пространству де Бранжа. Это свойство может быть выполнено и для некоторых других мер μ. С другой стороны, существует много пространств класса $\mathfrak{R}$, не изоморфных ни одному пространству де Бранжа. Например, если $\operatorname{supp}\mu = T \cup \tilde{T}$, где $\tilde{T} = \{\tilde{t}_n\} \subset i\mathbb{R}_+$ и $\sum_n |t_n|^{-1} = \infty$. С одной стороны, множество $T \cup \tilde{T}$ – полная интерполяционная последовательность в $\mathcal{H}$. С другой стороны, любая полная интерполяционная последовательность в пространстве де Бранжа должна удовлетворять условию Карлесона в $\mathbb{C}_+$. Полученное противоречие доказывает, что $A\mathcal{H}(T,\mu)$ не изоморфно ни одному пространству де Бранжа.

В любом пространстве $\mathcal{H} \in \mathfrak{R}$ можно заменить норму на эквивалентную так, что система из воспроизводящих ядер $\{k_{t_n}/\|k_{t_n}\|\}$ станет *ортонормированным базисом* в $\mathcal{H}$. С другой стороны, в *любом* пространстве де Бранжа есть целое семейство ортонормированных базисов. Оказывается, что пространства де Бранжа – единственные пространства класса $\mathfrak{R}$, обладающие этим свойством.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathcal{H}$ – пространство целых функций, удовлетворяющих аксиомам (A1) и (A2), а $\{k_t\}_{t\in T_1}$, $\{k_t\}_{t\in T_2}$ – два различных ортогональных базиса из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}$. Тогда либо $T_1 \cup T_2 \subset \mathbb{T}$ и пространство $\mathcal{H}$ конечномерно, либо $T_1 \cup T_2 \subset \mathbb{R}$ и пространство $\mathcal{H}$ совпадает с пространством де Бранжа (с равенством норм).*

Мы докажем эту теорему в главе 11.

В заключение отметим, что без аксиомы (A2) теорема 1.1.1 не верна. Достаточно рассмотреть пространство $\mathcal{H} = \mathcal{P}W_\pi \ominus \mathcal{P}W_{\pi/2}$.

1.2. Малые пространства де Бранжа

В пространствах целых функций особый интерес представляет геометрические свойства систем из воспроизводящих ядер, такие как бесселевость, полнота, базисность и т.д. Например, для классического пространства Пэли–Винера описание базисов Рисса было получено С. Хрущевым, Н. Никольским и Б. Павловым, описание бесселевых последовательностей следует из неравенства Планшереля–Полиа, проблема полноты решена только с точностью до сколь угодно малого возмущения типа (теорема Берлинга-Мальявена о радиусе полноты). Тем не менее, в других пространствах де Бранжа обычно известны лишь некоторые частичные результаты (например, только достаточные условия базисности).

Автором диссертации было обнаружено, что для некоторого класса "малых" пространств де Бранжа эти задачи могут быть полностью решены.

Определение 1.2.1. *Мы будем говорить, что пространство де Бранжа малое, если носитель меры Кларка $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n t_n$ удовлетворяет условию лакунарности*

$$\inf_n \frac{t_{n+1}}{t_n} > 1. \tag{1.2.8}$$

Отметим, что все результаты этой главы остаются верными и в том случае, когда последовательность $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – двухстороняя лакунарная последовательность, т.е.

$$\inf_{n>0} \frac{t_{n+1}}{t_n} > 1, \quad \inf_{n<0} \frac{|t_n|}{|t_{n+1}|} > 1. \tag{1.2.9}$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать оба определения лакунарности в зависимости от контекста.

1.2.1. Меры Карлесона

Один из естественных объектов в пространствах аналитических функций – меры Карлесона. Будем говорить, что $\nu \in M(\mathbb{C})$ – мера Карлесона для пространства $\mathcal{H}$, если выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\nu(z) \le C\|f\|^2_{\mathcal{H}}$$

для некоторой константы C и всех $f \in \mathcal{H}$.

Пользуясь эквивалентным определением пространств де Бранжа из параграфа 1.1.3, мы получаем, что μ – мера Кларка для $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда преобразование $\mathcal{H}_{(T,\mu)}$

$$\mathcal{H}_{(T,\mu)} : \{a_n\} \mapsto \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}$$

ограниченный оператор из ℓ^2 в $L^2(\mathbb{C},\nu)$. Отметим, что $\mathcal{H}_{T,\mu}$ не определено в точках $T=\{t_n\}$. С другой стороны, вопрос о карлесоновости меры μ, сосредоточенной на T, тривиален. Поэтому в дальнейшем всегда будем полагать, что $\nu(T)=\sum_n \nu(\{t_n\})=0$.

Разделим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на следующие множества

$$\Omega_1 := \{z\in\mathbb{C} : |z|<(t_1+t_2)/2\},$$

$$\Omega_n := \{z\in\mathbb{C} : (t_{n-1}+t_n)/2 \ge |z| < (t_n+t_{n+1})/2\}, \quad n>1.$$

$$\mathbb{C}=\bigcup_n \Omega_n.$$

Следующий результат дает полное описание карлесоновых мер для малых пространств де Бранжа.

Теорема 1.2.2. *Пусть носитель меры Кларка $T=\operatorname{supp}\mu$ удовлетворяет условию лакунарности (1.2.8), а мера $\nu\in M^+(\mathbb{C})$ такова, что $\nu(T)=0$. Преобразование $\mathcal{H}_{(T,\mu)}$ – ограниченный оператор из ℓ^2 в $L^2(\mathbb{C},\nu)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\ge1}\int_{\Omega_n}\frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2}<\infty, \tag{1.2.10}$$

$$\sup_{n\ge1}\left(\sum_{m=1}^{n}\mu_m\sum_{l=n+1}^{\infty}\int_{\Omega_l}\frac{d\nu(z)}{|z|^2}+\sum_{m=1}^{n}\nu(\Omega_m)\sum_{l=m+1}^{\infty}\frac{\mu_l}{t_l^2}\right)<\infty. \tag{1.2.11}$$

Отметим, что условия (1.2.10)–(1.2.11) симметричны относительно мер $\mu=\sum_n\mu_n t_n$ и ν. Это неудивительно, так как ограниченность оператора $\mathcal{H}_{(T,\mu)}$ эквивалентна ограниченности сопряженного оператора

$$\mathcal{H}^*_{T,\mu} : f\mapsto \int_{\mathbb{C}}\frac{f(z)d\nu(z)}{\bar z-t_n}.$$

Условие (1.2.11) может быть рассмотрено как аналог классического условия Макенхаупта (A_2).

Последовательности Бесселя. Теорема 1.2.2 позволит нам получить *геометрическое описание* последовательностей Бесселя для малых пространств де Бранжа.

Определение 1.2.3. *Будем говорить, что последовательность Λ бесселева для $\mathcal{H}$, если выполнено неравенство*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{|f(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|_{\mathcal{H}}}\le C\|f\|^2_{\mathcal{H}}$$

для некоторого $C>0$ и всех $f\in\mathcal{H}$.

Таким образом, бесселевость последовательности Λ равносильна карлесоновости меры $\sum_{\lambda\in\Lambda}\delta_\lambda\|k_\lambda\|^{-2}$. Тем не менее геометрическое описание бесселевых последовательностей – важный шаг к описанию *базисов Рисса из воспроизводящих ядер* (или полных интерполяционных последовательностей).

Оказывается, что для малых пространств де Бранжа любая бесселева последовательность может быть разделена на две. Точки из первой последовательности лежат внутри некоторых кругов с центрами в $\{t_n\}$ и не слишком удалены от центров. Точки из второй последовательности расположены где угодно в плоскости, но их общее число не слишком велико (последовательность суперлакунарна).

Положим,

$$M_n = \sum_{l=1}^{n}\mu_l, \qquad P_n = \sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{\mu_l}{t_l^2},$$

$$\Lambda^{(0)} = \left\{\lambda\in\Lambda : \lambda\in\Omega_n \text{ и } \frac{\mu_n}{|\lambda-t_n|^2} \ge \max\left(\frac{M_n}{|\lambda|^2}, P_n\right)\right\},$$

$$\Lambda^{(M)} = \left\{\lambda\in\Lambda : \lambda\in\Omega_n \text{ и } \frac{M_n}{|\lambda|^2} > \max\left(\frac{\mu_n}{|\lambda-t_n|^2}, P_n\right)\right\},$$

$$\Lambda^{(P)} = \left\{\lambda\in\Lambda : \lambda\in\Omega_n \text{ и } P_n > \max\left(\frac{\mu_n}{|\lambda-t_n|^2}, \frac{M_n}{|\lambda|^2}\right)\right\}.$$

Будем говорить, что последовательность Λ M-лакунарна, если

$$\sup_n \#\left(\Lambda\cap\bigcup_{m:2^n\le M_m<2^{n+1}}\Omega_m\right)<\infty.$$

Будем говорить, что последовательность Λ P-лакунарна, если

$$\sup_n \#\left(\Lambda\cap\bigcup_{m:2^{-n-1}\le P_m<2^{-n}}\Omega_m\right)<\infty.$$

Теорема 1.2.4. *Последовательность Λ бесселева для малого пространства де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда $\sup_n(\#\Lambda\cap\Omega_n)<\infty$, последовательность $\Lambda^{(M)}$ M-лакунарна, последовательность $\Lambda^{(P)}$ P-лакунарна и*

$$\sup_n\left(M_n\sum_{m\ge n}\sum_{\lambda\in\Lambda^{(0)}\cap\Omega_m}\frac{|\lambda-t_n|^2}{\mu_m|\lambda|^2}+P_n\sum_{m\le n}\sum_{\lambda\in\Lambda^{(0)}\cap\Omega_m}\frac{|\lambda-t_m|^2}{\mu_m}\right)<\infty. \qquad (1.2.12)$$

Отметим, что для многих конкретных примеров условия теоремы 1.2.4 упрощаются. Например, если мера Кларка $\mu=\sum_{n\ge1}\delta_{2^n}$, то последовательность Λ бесселева тогда и только тогда, когда $\sup_n\#(\Lambda\cap\Omega_n)<\infty$, вне кругов

$D_n = \{z : |z - 2^n| < n^{-1/2}2^n\}$ она суперлакунарна

$$\sup_n \#(\Lambda^{(M)} \cap \bigcup_{n\le m<2n} \Omega_m) < \infty,$$

а внутри кругов выполнено условие балансировки

$$\sum_{m=n}^{2n} \sum_{\lambda\in\Lambda^{(0)}\cap\Omega_m} \frac{|\lambda - 2^n|^2}{|\lambda|^2} \le \frac{C}{n}.$$

Насколько известно автору, наличие суперлакунарных бесселевых последовательностей – феномен, ранее не известный. Как мы увидим позднее, такие последовательности могут быть последовательностями Рисса, но не могут быть включены ни в какой базис Рисса из воспроизводящих ядер (впервые этот феномен обнаружил К. Сейп для пространства Пэли–Винера [92]). Отметим, что в некоторых случаях суперлакунарных последовательностей нет (см. следствия 2.2.1–2.2.2). В работе [42, теорема 1.2] при помощи теоремы 1.2.4 проверено, что для систем из воспроизводящих ядер в малых пространствах де Бранжа выполнена гипотеза Фейхтингера (любую бесселеву последовательность можно разделить на конечное число последовательностей Рисса).

1.2.2. Базисы Рисса из воспроизводящих ядер

Один из важнейших вопросов в теории пространств аналитических функций – возможность восстановления f по ее значениям в дискретной последовательности $\{f(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Определение 1.2.5. *Мы будем говорить, что последовательность Λ – полная интерполяционная последовательность для $\mathcal{H}$, если для любой последовательности $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in \ell^2$ существует единственная $f \in \mathcal{H}$ такая, что*

$$f(\lambda) = (f, k_\lambda)_{\mathcal{H}} = a_\lambda \|k_\lambda\|.$$

Хорошо известно, что это свойство эквивалентно базисности для системы $\{\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Определение 1.2.6. *Будем говорить, что система единичных векторов $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве является базисом Рисса, если она полна и удовлетворяет неравенству Рисса. А именно, для любой конечной последовательности чисел $\{c_n\}$*

$$A\sum_n |c_n|^2 \le \|\sum_n c_n e_n\|^2 \le B\sum_n |c_n|^2$$

для некоторых $A, B > 0$.

Нетрудно видеть, что для пространств де Бранжа свойство базисности эквивалентно *обратимости* оператора $\mathcal{H}_{(T,\mu)}$, рассматриваемого как оператор, действующий из ℓ^2 в весовое пространство последовательностей (с весом $\|k_\lambda\|^{-2}$). Обозначим такой оператор как $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$, где w – бесселев вес, который нетрудно выразить через T, Λ и μ_n. А именно, непосредственно из определения пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ следует формула для воспроизводящего ядра в $\mathcal{H}(T,\mu)$

$$k_\lambda(z) = \sum_n \frac{\mu_n}{(\overline{\lambda - t_n})(z - t_n)}.$$

Таким образом, вес $w = \{w_\lambda\}$ задается формулой

$$w_\lambda = \|k_\lambda\|^{-2} = [k_\lambda(\lambda)]^{-1} = \left[\sum_n \frac{\mu_n}{|\lambda - t_n|^2}\right]^{-1}. \tag{1.2.13}$$

Если последовательность Λ (или, что то же, система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}$) полна и минимальна в $\mathcal{H}(T,\mu)$, то существует единственная последовательность $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}(e_n) = (1,0,0,....)$. Как будет показано в главе 2, в этом случае обратный оператор имеет вид $\mathcal{H}_{(\Lambda,\tilde{w}):(T,\tilde{\mu})}$ (и определен в пространстве $\mathcal{H}(\Lambda,\tilde{w})$). Веса $\tilde{\mu}$ и $\tilde{w}$ задаются формулами

$$\tilde{\mu}_n = |\lambda_1 - t_n|^2 |e_n|^2, \tag{1.2.14}$$

$$\tilde{w}_j = w_j^{-1} |\lambda_j - \lambda_1|^{-2} \left| \sum_n \frac{e_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_j - t_n)^2} \right|^{-2}. \tag{1.2.15}$$

Сходимость рядов в предыдущей формуле следует из полноты и минимальности последовательности Λ (см. главу 2).

Теорема 1.2.7. *Пусть Λ – полная и минимальная последовательность в $\mathcal{H}(T,\mu)$, тогда система $\{\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}\}$ – базис Рисса (или, что то же, Λ полная интерполяционная последовательность) тогда и только тогда, когда ограничены операторы $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ и $\mathcal{H}_{(\Lambda,\tilde{w}):(T,\tilde{\mu})}$.*

Отметим, что теорема 1.2.7 верна для *всех* пространств де Бранжа. Но без дополнительной технической работы эта теорема не дает *геометрического описания* базисов Рисса из воспроизводящих ядер даже для малых пространств де Бранжа. Во-первых, нужно как-то описать полные и минимальные последовательности. Во-вторых, убедиться, что ограниченность оператора $\mathcal{H}_{(\Lambda,\tilde{w}):(T,\tilde{\mu})}$ тоже может быть проверена при помощи теоремы 1.2.2 (т.е. последовательность Λ лакунарна).

Рассмотрим множества

$$D_n(\mu, N) = \left\{ \lambda \in \Omega_n : \frac{N\mu_n}{|\lambda - t_n|^2} \geq \max\left(\frac{M_n}{|\lambda|^2}, P_n\right) \right\}.$$

Если N фиксировано и $\mu_n = o(M_n)$ или $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$, то "диски" D_n имеют диаметр порядка $o(t_n)$ и, следовательно, дизъюнктны (начиная с некоторого номера n). В этом случае разбиение $\Lambda = \Lambda^{(0)} \cup \Lambda^{(M)} \cup \Lambda^{(P)}$ может быть нетривиально, т.е. множество $\Lambda \setminus \cup_n D_n(\mu, N)$ может быть бесконечным для любого N.

Пусть $\mu_n = o(M_n)$. Оказывается, в этом случае любая полная интерполяционная последовательность Λ локализована около точек t_n. Более того, все такие последовательности могут быть явно описаны.

Определение 1.2.8. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ занумерована в соответствии с возрастанием $|\lambda_n|$ и $0 \notin \Lambda$. Будем говорить, что Λ – возмущение последовательности $T = \{t_n\}$, если мы можем выбрать n_0 и N так, что $\lambda_n \in D_n(\mu, N)$ для достаточно больших n. Если $n_0 = 1$, то мы будем говорить, что Λ – точное возмущение последовательности T. Если $n_0 > 1$, то мы будем говорить, что Λ – возмущение T с дефектом $n_0 - 1$.*

Другими словами, Λ – возмущение T с дефектом k, если точки из Λ последовательно попадают в "диски" D_n (с центром t_n), при этом первые k дисков пропущены.

Положим,

$$\rho_n = \prod_{m=n_0}^{n} \frac{t_m}{|\lambda_m|}, \qquad Q_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{w_m}{|\lambda_m|^2},$$

где w_m бесселев вес, соответствующий точке λ_m (см. (1.2.13)).

Теорема 1.2.9. *Предположим, что $\mathcal{H}(E)$ – малое пространство де Бранжа, а мера Кларка такова, что $\mu_n = o(M_n)$ и $M_n \to \infty$. Тогда Λ – полная интерполяционная последовательность тогда и только тогда, когда $\sup_n M_n Q_n < \infty$ и выполнено одно из следующих условий:*

(i) *Λ – точное возмущение T и для некоторых $C, \delta > 0$*

$$\frac{\rho_m}{\rho_n} \le C \left(\frac{M_m}{M_n} \right)^{1-\delta}.$$

(ii) *Λ – возмущение T с дефектом 1 и для некоторых $C, \delta > 0$*

$$\frac{\rho_m}{\rho_n} \ge C \left(\frac{M_m}{M_n} \right)^{1+\delta}.$$

Таким образом, полные интерполяционные последовательности Λ могут быть двух типов: либо точек в Λ столько же, сколько и в T, и они не слишком далеки от точек из T (случай (i)). Либо одной точки в Λ не хватает, но это компенсируется тем, что точки из Λ далеки от точек из T, но все еще лежат внутри дисков D_n (случай (ii)). Этот удивительный эффект появляется и при условии $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$ (в этом случае Λ может содержать лишнюю точку (см. главу 2, теорему 2.3.12)).

Если $\sup_n M_n = \sum_n \mu_n < \infty$, то описание значительно упрощается.

Теорема 1.2.10. *Предположим, что $\mathcal{H}(E)$ – малое пространство де Бранжа, а мера Кларка такова, что $\sup_n M_n < \infty$. Тогда Λ – полная интерполяционная последовательность тогда и только тогда, когда Λ - точное возмущение T и $\sup_n Q_n < \infty$.*

В случае $\mu_n \asymp M_n$ размеры "дисков" D_n становятся соизмеримыми с t_n и локализации точек из Λ около T нет. В работе [36] было получено описание полных интерполяционных последовательностей в духе теоремы 1.2.9 в некотором частном случае при условии $\mu_n \asymp M_n$.

Из теоремы 1.2.9 можно вывести аналог теоремы Кадеца об $\frac{1}{4}$ для малых пространств де Бранжа.

Теорема 1.2.11. *Предположим, что $\mathcal{H}(E)$ – малое пространство де Бранжа, а мера Кларка такова, что $\mu_n = o(M_n)$ и $M_n \to \infty$. Пусть для некоторого $C > 0$ выполнено неравенство*

$$\frac{|\lambda_n - t_n|}{t_n} \le C \frac{\mu_n}{M_n}.$$

(i) Если существует $c < 1/2$ такая, что

$$\frac{t_n}{|\lambda_n|} - 1 \le c \frac{\mu_n}{M_n},$$

то Λ – полная интерполяционная последовательность для $\mathcal{H}(E)$.

(ii) Если существует $c > 1/2$ такая, что

$$\frac{t_n}{|\lambda_n|} - 1 \ge c \frac{\mu_n}{M_n},$$

то $\Lambda \setminus \{\lambda_1\}$ – полная интерполяционная последовательность для $\mathcal{H}(E)$.

Как и в теореме Кадеца, константа $1/2$ – наилучшая из возможных. Более того, всегда существует последовательность Λ такая, что $\frac{t_n}{|\lambda_n|} - 1 = \frac{\mu_n}{2M_n}$ и ни Λ, ни $\Lambda \setminus \{\lambda_1\}$ не являются полными интерполяционными последовательностями.

У теоремы 1.2.11 есть аналог для случая $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$ (см. главу 2, теорему 2.3.13).

В заключение отметим, что геометрическое описание базисов Рисса (полных интерполяционных последовательностей) в пространствах де Бранжа было известно только лишь для пространства Пэли–Винера и некоторых его обобщений – весовых пространств Пэли–Винера [77].

1.3. Свойства биортогональных систем

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Мы будем говорить, что система векторов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *полна*, если $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{Span}}\{x_n\}_{n\in N}$. Если система $\{x_n\}_{n\in N}$ полна и *минимальна* ($\overline{\operatorname{Span}}\{x_n\}_{n\in N\setminus n_0} \neq \mathcal{H}$), то мы будем говорить, что система $\{x_n\}_{n\in N}$ точная. У каждой точной системы $\{x_n\}_{n\in N}$ есть единственная *биортогональная система* $\{y_n\}_{n\in N}$, $(x_n, y_m)_{\mathcal{H}} = \delta_{n,m}$, $n, m \in N$. Таким образом, для любого $x \in \mathcal{H}$ мы можем построить формальный ряд Фурье

$$x \sim \sum_{n\in N} (x, y_n) x_n. \tag{1.3.16}$$

Один из фундаментальных вопросов гармонического анализа – возможность восстановления вектора x по системе "гармоник" $\{x_n\}$. Например, если система $\{x_n\}$ – базис Рисса, то ряд (1.3.16) сходится по норме для любого $x \in \mathcal{H}$. В этом параграфе нас интересует самая слабая форма восстановления – единственность ряда (1.3.16) (т.е полнота биортогональной системы).

В 1981 году Р. Янг доказал следующий результат.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\mathcal{E} := \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система из экспонент в $L^2(a,b)$. Тогда биортогональная система $\{\tilde{e}_\lambda\}$ тоже полна.*

Нетрудно видеть, что для произвольной точной системы $\{x_n\}$ это неверно. Действительно, пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортогональный базис в $\mathcal{H}$. Тогда система $\{e_1 + e_n\}_{n=2}^\infty$ полна в $\mathcal{H}$, а биортогональная система $\{e_n\}_{n=2}^\infty$ неполна.

В начале 2000-х Н.К. Никольский задал следующий вопрос.

Вопрос 1.3.2. *Пусть $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система из воспроизводящих ядер в K_Θ. Верно ли, что биортогональная система всегда полна?*

Результат Р. Янга соответствует случаю пространств Пэли–Винера. Если Θ – мероморфное произведение Бляшке, то этот вопрос превращается в аналогичный вопрос для пространств де Бранжа. В 2002 году Э. Фрикен доказал, что теорема Янга верна, если производная фазовой функции E ограничена [61] (т.е $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$).

Мы покажем, что, вообще говоря, ответ на вопрос Никольского отрицательный даже для класса пространств де Бранжа.

Теорема 1.3.3. *Пусть бесконечномерное пространство дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$ таково, что $\mu(\mathbb{C}) = \sum_n \mu_n < \infty$. Тогда существует точная система из воспроизводящих ядер такая, что биортогональная система неполна.*

Отметим, что мы не накладываем условия $\operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. С другой стороны, если μ_n убывают не слишком быстро, то биортогональная система всегда имеет конечную коразмерность.

Теорема 1.3.4. *Пусть пространство дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$ таково, что*

$$\inf_n \mu_n(1+|t_n|)^N > 0, \tag{1.3.17}$$

для какого-то N. Тогда система, биортогональная к точной системе из воспроизводящих ядер, всегда имеет конечную коразмерность. Если же дополнительно выполнено условие $\sum_n \mu_n = \infty$, то такая система всегда полна.

Отметим, что условие (1.3.17) существенно.

Пример 1.3.5. *Существует пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ такое, что $\sum_n \mu_n = \infty$ и точная система из воспроизводящих ядер в нем такая, что биортогональная система неполна.*

Теорема Янга соотвествует случаю $\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. Нетрудно проверить, что результат Э.Фрикена следует из теоремы 1.3.4. Действительно, пусть $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ – мера Кларка пространства $\mathcal{H}(E)$. Тогда

$$\mu_n = \frac{\|k_{t_n}\|^2}{|A'(t_n)|^2} = \frac{k_{t_n}(t_n)}{|A'(t_n)|^2} = \frac{B(t_n)}{\pi A'(t_n)} = \frac{1}{\pi\varphi'(t_n)}.$$

Если $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$, то $\inf_n \mu_n > 0$ и выполнены условия теоремы 1.3.4.

Отметим следующий неформальный принцип о коразмерности биортогональной системы:

максимальная коразмерность биортогональной системы зависит от малости меры $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$. Коразмерность становится больше, если μ_n стремится к 0 быстрее.

С другой стороны, если последовательность $\{\mu_n\}$ стремится к 0 экстремально быстро, то коразмерность всегда конечна.

Теорема 1.3.6. *Предположим, что* $\operatorname{supp}\mu = \mathbb{Z}$ *и $\{\mu_n\}$ настолько малы, что не существует нетривиальной последовательности c_n такой, что $|c_n| < \mu_n^{1/2}$, $\sum_n c_n n^k = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ любая система, биортогональная к точной системе из воспроизводящих ядер, имеет конечную коразмерность.*

Пример 1.3.7. *Если $\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|}\delta_n$, то любая система, биортогональная к точной системе из воспроизводящих ядер, имеет конечную коразмерность.*

В главе 3 мы введем понятие "размера" для биортогональной системы с бесконечной коразмерностью и докажем, что если $\operatorname{supp}\mu = \mathbb{Z}$, то этот "размер" не слишком велик.

Заключительные замечания

Вопрос о полноте системы, биортогональной к системе из воспроизводящих ядер, представляет интерес для теории операторов. При помощи теорем 1.3.3–1.3.4 А. Баранов и Д. Якубович изучали полноту оператора, сопряженного к одномерному возмущению самосопряженного оператора.

В главе 8 мы докажем теорему Янга для пространства Фока.

В работе [28] также изучался вопрос о полноте биортогональных систем в модельных пространствах K_Θ, где Θ – произвольная (не обязательно мероморфная) внутренняя функция. В частности, был доказан аналог теоремы 1.3.3 для произвольных пространств K_Θ.

1.4. Наследственная полнота систем из воспроизводящих ядер

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\{x_n\}$ – точная система в нем, а $\{y_n\}$ – биортогональная система. Рассмотрим формальный ряд Фурье для элемента x:

$$x \sim \sum_{n\in N}(x, y_n)x_n. \tag{1.4.18}$$

В предыдущем параграфе мы изучали самую слабую форму восстановления вектора x по его ряду Фурье – единственность коэффициентов (x, y_n). В этом параграфе мы будем изучать более сильное свойство – *наследственную полноту* системы $\{x_n\}$. Будем говорить, что система $\{x_n\}$ наследственно полна, если любой вектор x лежит в линейной оболочке членов ряда Фурье, т.е.

$$x \in \overline{\mathrm{Span}}\{(x, y_n)x_n\}. \tag{1.4.19}$$

Другое название таких систем – *сильные базисы Маркушевича*. Существует эквивалентное определение наследственной полноты, которым мы и будем пользоваться в дальнейшем. Будем говорить, что система $\{x_n\}$ наследственно полна, если для любого разбиения множества индексов $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ *смешанная система*

$$\{x_n\}_{n\in N_1} \cup \{y_n\}_{n\in N_2}$$

полна в $\mathcal{H}$.

Сильные базисы Маркушевича могут быть определены и в произвольном банаховом пространстве. Существование базисов Маркушевича и сильных базисов Маркушевича, удовлетворяющих различным требованиям, – важные и интересные проблемы в теории банаховых пространств. Например, недавно П. Теренци показал, что в *любом* сепарабельном банаховом пространстве существует сильный базис Маркушевича [93]. Дальнейшие результаты в этом направлении можно найти в работах П. Теренци, Р. Вершинина и П. Хайека [63, 94, 95].

С другой стороны, в сепарабельном гильбертовом пространстве не так просто привести пример базиса Маркушевича, который не является сильным базисом Маркушевича (иногда такие системы называют ненаследственно полными). Первый пример таких систем был построен Маркусом в 1970 году [13]. Позднее Н. Никольский, Л. Довбыш и В. Судаков подробно изучили структуру ненаследственно полных систем в гильбертовом пространстве и предъявили много примеров таких систем. Еще одна серия примеров была построена Д. Ларсоном и В. Вогеном [75], Е. Азофом и Х. Шехадой [25] и А. Катаволосом, М. Ламбру и М. Пападакисом [70] (эти системы были получены применением 3-х диагональной матрицы к стандартному ортогональному базису в ℓ^2).

В работе [13] было показано, что если $\{x_n\}$ – множество собственных векторов компактного оператора $\mathcal{A}$, то $\{x_n\}$ наследственно полна тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{A}$ допускает *спектральный синтез*. Первые примеры компактных операторов без спектрального синтеза были построены Н. Никольским [17] и А. Маркусом [13], но первая конструкция такого рода (неявно) содержится в замечательной работе Х. Гамбургера [64] (см. также работу [58]).

Очевидно, что наследственная полнота – необходимое условие существования линейного метода суммирования для ряда (1.4.18). С другой стороны, это условие недостаточно. Например, в работе [70] был построен пример наследственно полной системы $\{x_n\}$, удовлетворяющей следующему условию: существуют два вектора $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ такие, что они не могут быть приближены конечными линейными комбинациями векторов $(h_1, y_n)x_n$, $(h_2, y_n)x_n$ с одинаковыми коэффициентами.

1.4.1. Наследственная полнота в пространствах де Бранжа

Мы будем изучать свойство наследственной полноты для точных систем из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа. Этот вопрос восходит к Н.К. Никольскому и представляет интерес по следующим причинам:

- вопрос о наследственной полноте системы экспонент $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве $L^2(-a,a)$ – важный частный случай, так как пространство Пэли–Винера $\mathcal{PW}_a = \mathcal{F}L^2(-a,a)$ – пример пространства де Бранжа;
- системы из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа соответствуют (через подходящую функциональную модель) собственным векторам одномерных возмущений компактных самосопряженных операторов, а свойство наследственной полноты соответствует свойству спектрального синтеза для этих возмущений [35];
- системы из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа соответствуют (при помощи преобразования Вейля–Титчмарша) собственным векторам оператора Шредингера [79].

Определение 1.4.1. *Будем говорить, что пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ обладает свойством наследственной полноты, если любая точная система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ с полной биортогональной (базис Маркушевича) наследственно полна (сильный базис Маркушевича).*

Следующая теорема полностью описывает все такие пространства де Бранжа.

Теорема 1.4.2. *Пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ обладает свойством наследственной полноты тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

(i)

$$\sum_n \mu_n < \infty; \tag{1.4.20}$$

(ii) последовательность $\{t_n\} = \operatorname{supp}\mu$ лакунарна, и для некоторого $C > 0$ и всех n выполнено неравенство

$$\sum_{|t_k|\le|t_n|} \mu_k + t_n^2 \sum_{|t_k|>|t_n|} \frac{\mu_k}{t_k^2} \le C\mu_n. \tag{1.4.21}$$

Отметим, что условия (i) и (ii) выполнены одновременно только в тривиальном случае, когда пространство $\mathcal{H}(E)$ конечномерно. То есть существуют два принципиально различных класса пространств де Бранжа, обладающих свойством наследственной полноты.

- Случай $\sum_n \mu_n < \infty$ может быть объяснен с точки зрения теории операторов. Если мы перейдем (при помощи подходящей модели) к одномерным возмущениям самосопряженных операторов, то возмущения, отвечающие условию (i), будут *слабыми* по Мацаеву. Известно, что такие возмущения более регулярны, чем произвольные возмущения ранга 1.
- С другой стороны, возмущения при условии (ii) большие, но с лакунарным спектром. В этом случае (и только в этом!) пространства де Бранжа совпадают с пространствами фоковского типа (как множества с эквивалентностью норм).

Заметим также, что при условии (ii) пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ мало (если мы включим в определение малых пространств де Бранжа двухсторонние последовательности $\{t_n\}$) и в нем нет локализации для базисов Рисса из воспроизводящих ядер, так как размеры дисков $D_n(\mu, N)$ в этом случае соизмеримы с $|t_n|$. Это неудивительно, так как в пространствах фоковского типа базис Рисса из воспроизводящих ядер всегда можно повернуть на любой угол.

Отметим также, что при условии (ii) любая точная система из воспроизводящих ядер – базис Маркушевича (см. теорему 1.3.4), а при условии (i) всегда существует точная система из воспроизводящих ядер с неполной биортогональной (см. теорему 1.3.3).

1.4.2. Дефекты смешанных систем

Предположим, что пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ не обладает свойством наследственной полноты, т.е существует неполная смешанная система

$$\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2,$$

($\{g_\lambda\}$ – биортогональная система). С точки зрения теории операторов, важно знать коразмерность этой неполной системы. Для каждого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, положим,

$$\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \dim(\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2})^\perp.$$

Определим дефект системы $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и пространства $\mathcal{H}(E)$

$$\operatorname{def}(\Lambda) = \sup\{\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) : \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2\},$$

$$\operatorname{def}(\mathcal{H}(E)) = \sup\{\operatorname{def}(\Lambda) : \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} - \text{ базис Маркушевича}\}.$$

Оказывается, что для многих пространств де Бранжа существуют системы с большим или даже бесконечным дефектом.

Теорема 1.4.3. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа такое, что $\sum_n \mu_n = \infty$.*

(i) Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ последовательности T такая, что $\sum_k t_{n_k}^{2N-2}\mu_{n_k} < \infty$, то $\operatorname{def}(\mathcal{H}(E)) \ge N$ (более того, существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ такой, что $\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) = N$ для некоторого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$).

(ii) Пусть последовательноть T удовлетворяет условию степенной разделенности, $|t_{n+1} - t_n| \gtrsim |t_n|^{-M}$ для некоторого $M > 0$. Тогда следующие условия равносильны:

$$(a) \quad \operatorname{def}(\mathcal{H}(E)) = \infty, \quad (b) \quad \inf_n \mu_n |t_n|^N = 0 \text{ для любого } N > 0.$$

При помощи теоремы 1.4.3 можно получить необходимые и (отдельно) достаточные условия для существования смешанных систем с большим дефектом. Однако доказательство теоремы 1.4.3 не позволяет построить смешанную систему с бесконечным дефектом. Тем не менее такие системы существуют.

Теорема 1.4.4. *Для любой возрастающей последовательности $T = \{t_n\}$, $|t_n| \to \infty$, $|n| \to \infty$ существует мера μ, $\operatorname{supp}\mu = T$ такая, что в пространстве де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ $(= A\mathcal{H}(T, \mu))$ существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ такой, что $\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \infty$ для какого-то разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.*

При помощи теоремы 1.4.4 А. Баранов и Д. Якубович доказали, что у любого компактного самосопряженного оператора с тривиальным ядром в бесконечномерном пространстве есть одномерное возмущение, не допускающее спектрального синтеза [35].

1.4.3. Наследственная полнота для систем из экспонент

Пусть система $\mathcal{E} := \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ точна в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$. Из теоремы Р. Янга следует, что биортогональная система $\{g_\lambda\}$ тоже полна (т.е $\mathcal{E}$ – базис Маркушевича). Вопрос о наследственной полноте такой системы был открыт долгое время, а был решен в работе [29].

При преобразовании Фурье пространство $L^2(-\pi,\pi)$ переходит в пространство Пэли–Винера $\mathcal{P}W_\pi = \mathcal{F}L^2(-\pi,\pi)$,

$$\mathcal{P}W_\pi := \{F : F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{itz}dt, \quad g\in L^2(-\pi,\pi)\}.$$

Более того, преобразование Фурье $\mathcal{F}$ – унитарный оператор из $L^2(-\pi,\pi)$ в $\mathcal{P}W_\pi$, а экспоненты переходят в воспроизводящие ядра в $\mathcal{P}W_\pi$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-i\bar{\lambda}t}\right) = \frac{\sin(\pi(z-\bar{\lambda}))}{\pi(z-\bar{\lambda})} =: k_\lambda(z).$$

Так как пространство Пэли–Винера – пространство класса $\mathfrak{R}$, мы можем написать явный вид системы $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, биортогональной к точной системе из воспроизводящих ядер

$$g_\lambda(z) = \frac{G(z)}{G'(\lambda)(z-\lambda)}, \quad \lambda\in\Lambda.$$

Хорошо известно, что G_Λ – функция экспоненциального типа π с простыми нулями в Λ.

Из теоремы 1.4.2 следует, что существует точная ненаследственно полная система из экспонент в $L^2(-\pi,\pi)$ (воспроизводящих ядер в $\mathcal{P}W_\pi$). С другой стороны, теорема 1.4.3 не позволяет получить нетривиальной оценки дефекта смешанной системы. Поэтому в этом случае вопрос о дефекте смешанной системы требует отдельного рассмотрения.

Теорема 1.4.5. *Пусть $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$. Тогда для любого разбиения $\Lambda = \Lambda_1\cup\Lambda_2$ ортогональное дополнение к смешанной системе*

$$\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}\cup\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \qquad (1.4.22)$$

не более чем одномерно.

Более того, существуют определенные препятствия для существования дефекта у смешанной системы, например, если множество Λ_1 имеет положительную верхнюю плотность. Для последовательности Λ положим

$$D_+(\Lambda) = \limsup_{r\to\infty} \frac{n_r(\Lambda)}{2r},$$

где $n_r(\Lambda)$ – считающая функция последовательности Λ, $n_r(\Lambda) = \#\{\lambda \in \Lambda : |\lambda| \le r\}$.

Теорема 1.4.6. *Пусть $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$. Тогда для любого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ такого, что $D_+(\Lambda_1) > 0$, смешанная система (4.7.36) полна в $\mathcal{P}W_\pi$.*

Таким образом, для ненаследственно полных смешанных систем всегда $D_+(\Lambda_1) = 0$.

Отметим также один результат А. Олевского [84]: существует ортогональный базис $\{\varphi_n\}$ в $L^2(-\pi,\pi)$, состоящий из тригонометрических полиномов, и функция f, которая не может быть приближена конечными суммами вида $\sum_{n:(f,\varphi_n)\ne 0} c_n\varphi_n$ в метрике пространств $L^p[-\pi,\pi]$, $p > 2$.

1.5. Проблема Карлсона–Сандберга

Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$, согласно тауберовой теореме Винера, система сдвигов $\{f(x-t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ полна в $L^1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}f$ не обращается в 0. С другой стороны, в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ система сдвигов $\{f(x-t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ полна тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}f(x) \ne 0$ п.в. на $\mathbb{R}$.

Проблемы полноты для различных семейств сдвигов – классический вопрос гармонического анализа, привлекающий математиков с начала 20-го века и до сих пор [23, 54, 97]. В частности, пусть $f \in L^2(0,\infty)$ и $0 \in \operatorname{supp} f$, тогда система сдвигов $\{f(x-t)\}_{t>0}$ полна в $L^2(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{F}f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ внешняя в $\mathbb{C}_+$. Если же у функции $\mathcal{F}f$ есть внутренний фактор Θ, то Фурье образ замыкания сдвигов равен $\Theta H^2(\mathbb{C}_+)$, а функции, ортогональные Фурье образу замыкания сдвигов, – это в точности функции из модельного подпространства $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$.

В середине 2000-х годов М. Карлсон и К. Сандберг задали следующий вопрос.

Пусть $f \in L^2(0,1)$ такова, что $\operatorname{conv}(\operatorname{supp} f) = [0, 1/2]$, а $\mathcal{F}f$ – целая функция с простыми нулями. Тогда $e^{i\lambda t} \perp \{f(x-t)\}_{0\le t\le 1/2}$, $\lambda \in -\overline{\mathcal{Z}_f}$. Всегда ли смешанная система

$$\{f(x-t)\}_{0\le t\le 1/2} \cup \{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in -\overline{\mathcal{Z}_f}} \tag{1.5.23}$$

полна в $L^2(0,1)$?

Отметим, что множество $\mathcal{Z}_f$ никогда не пусто. Более того, его верхняя плотность равна $\frac{1}{4\pi}$. С другой стороны, если f быстро убывает вблизи точек 0 и 1/2, то система $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in-\overline{\mathcal{Z}_f}}$ имеет бесконечную коразмерность в $L^2(0,1/2)$. Если мы надеемся на положительный ответ, то этот дефект должен компенсироваться системой $\{f(x-t)\}_{0\le t\le 1/2}$.

Следуюший результат дает положительный ответ на вопрос Карлсона–Сандберга.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $f\in L^2(0,1)$ *такова, что* $\operatorname{conv}(\operatorname{supp} f)=[0,a]$, $0<a<1$. *Обозначим за* $\Lambda=\{(\lambda_k,n_k)\}$ *дивизор* $\mathcal{F}f$ *(т.е.* $\mathcal{F}f$ *обращается в* 0 *с кратностью* n_k*). Тогда система*

$$\{f(x-t)\}_{0\le t\le 1-a}\cup\{x^s e^{i\lambda_k x}\}_{(\lambda_k,n_k)\in-\overline{\Lambda},\quad 0\le s<n_k}$$

полна в $L^2(0,1)$.

Доказательство этого результата включает в себя три компонента: технику для исследования полноты смешанных систем [29, 30], разработанную для доказательства теоремы 1.4.2, тонкие результаты из теории Берлинга–Мальявена [79], недавнее решение задачи Полиа [80]. При доказательстве выясняется, что смешанные системы вида (4.7.36) часто бывают полны, даже если одна из систем $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ неполна (более того, имеет бесконечную коразмерность).

Замечание 1.5.1. *Нетрудно проверить, что в крайнем случае* $a=1$ *утверждение теоремы 1.5.1 неверно*[3].

1.6. Суммируемость неклассических рядов Фурье

Рассмотрим формальный ряд Фурье, построенный по точной системе $\{x_n\}_{n\in N}$

$$x\sim\sum_{n\in N}(x,y_n)x_n. \tag{1.6.24}$$

Если система $\{x_n\}$ наследственно полна, то для каждого x и $\varepsilon>0$ существует конечная последовательность $\{c_n\}$ такая, что $\left\|x-\sum_{n\in N}c_n(x,y_n)x_n\right\|<\varepsilon$. В этом параграфе мы будем изучать более узкий класс систем таких, что коэффициенты $\{c_n\}$ *можно выбрать одинаковыми* для всех векторов x.

Определение 1.6.1. *Будем говорить, что матрица* $W=\{W_{m,n}\}_{m\in N,n\in\mathbb{N}}$ *порождает линейный метод суммирования для ряда* (1.6.24)*, если*

$$\lim_{n\to\infty}W_{m,n}=1,\qquad\forall n,\quad W_{m,n}=0\ \textit{для достаточно больших } m,$$

[3] для точной формулировки см. утверждение 5.0.9

$$S_n x := \sum_{m \in N} W_{m,n} \cdot (x, y_m) x_m \underset{n \to \infty}{\to} x,$$

для любого $x \in \mathcal{H}$.

Иногда такие методы суммирования называют *конечнострочными*. Для удобства читателя приведем шкалу свойств системы векторов $\{x_n\}$, в которой каждое следующее свойство сильнее предыдущего.

(i) Система $\{x_n\}$ точна (полна и минимальна).

(ii) Система $\{x_n\}$ – базис Маркушевиича (полнота биортогональной системы).

(iii) Система $\{x_n\}$ – сильный базис Маркушевиича (наследственная полнота).

(iv) Система $\{x_n\}$ – базис суммирования (существование линейного метода суммирования у ряда (1.6.24)).

(v) Система $\{x_n\}$ – базис Рисса.

(vi) Система $\{x_n\}$ – ортогональный базис.

При желании эту шкалу можно дополнить. Например, система $\{x_n\}$ может порождать базис Рисса из конечномерных подпространств. Это свойство сильнее, чем свойство (iv), но слабее, чем свойство (v).

Системы из экспонент

Пусть $\mathcal{E}(\Lambda) := \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda \in \Lambda}$ – точная система в $L^2(-\pi, \pi)$. Для таких систем свойства (i) и (ii) эквивалентны (теорема Янга). Свойства (ii) и (iii) не эквиваленты (см. теорему 1.4.2). Свойство (vi) выполнено тогда и только тогда, когда $\Lambda = \mathbb{Z} + \delta$, $0 \le \delta < 1$. Нас будут интересовать свойства (iv) и (v).

Напомним, что для полных и минимальных систем $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda \in \Lambda}$ (или, что то же, систем из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$), существует порождающая функция

$$G(z) = \lim_{R \to \infty} \prod_{|\lambda| < R, \lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

В дальнейшем процедура суммирования будет построена при помощи этой функции.

Самая простая процедура суммирования будет в случае, когда ряд (1.6.24) сходится безусловно (т.е по норме и при любом порядке членов). Хорошо известно, что это эквивалентно свойству (v). Впервые такие системы были описаны Б. Павловым [19] (см. также [78], где приведено другое доказательство). Для того чтобы избежать ненужных технических условий, мы будем считать, что все точки Λ лежат в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_\delta = \{z : \Im z > \delta\}$, $\delta > 0$.

Теорема 1.6.2. *Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}_\delta$, $\delta > 0$. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ – базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$ тогда и только тогда, когда*

- *порождающая функция G имеет экспоненциальный тип π. Вес $|G(x)|^2$ удовлетворяет условию Макенхаупта (A_2):*

$$\sup_{I=[a,b]} \frac{1}{|I|^2} \int_I |G(x)|^2 dx \int_I |G(x)|^{-2} dx < \infty. \tag{1.6.25}$$

- *Λ удовлетворяет условию Карлесона (C):*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\mu \in \Lambda, \mu \neq \lambda} \frac{(1 + |\Im\lambda|)(1 + |\Im\mu|)}{|\lambda - \mu|^2} < \infty. \tag{1.6.26}$$

Эта теорема была доказана Б. Павловым при дополнительном условии $\sup_{\lambda\in\Lambda} |\Im\lambda| < \infty$. Позднее Н. Никольский [18] доказал аналогичный результат при условии $\inf_{\lambda\in\Lambda} \Im\lambda > -\infty$. Наконец, в 1991 году А. Минкин [15] избавился от всех дополнительных ограничений на Λ.

Условие Карлесона отвечает за индивидуальные углы между векторами, а условие Макенхаупта за "глобальную суммируемость" ряда (1.6.24) для экспонент. Следующая теорема демонстрирует этот неформальный принцип.

Теорема 1.6.3. *Пусть порождающая функция G имеет экспоненциальный тип π и удовлетворяет условию Макенхаупта* (1.6.25). *Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ (ряд* (1.6.24)*) допускает линейный метод суммирования.*

Отметим, что из условий теоремы 1.6.3 нетрудно вывести, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна и минимальна (например, см. [78]).

Ранее Г. Губреев и А. Тарасенко [9] продемонстрировали, что из условий теоремы 1.6.3 следует, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ наследственно полна.

Условия теоремы 1.6.3 запрещают Λ иметь вещественные точки. Тем не менее, теорема 1.6.3 может быть применена для вещественных Λ.

Замечание 1.6.1. *В теореме 1.6.3 условие Макенхаупта* (1.6.25) *может быть заменено на такое же условие для функции $G(x + ia)$, $a \in \mathbb{R}$.*

Матрица W, порождающая линейный метод суммирования, будет предъявлена явно (см. главу 6).

1.7. Локализация нулей преобразования Гильберта

Распределение нулей аналитических и мероморфных функций – один из основополагающих вопросов теории функций. Для данного пространства аналитических функций информация о распределении нулей его элементов важна для понимания структурных свойств пространства.

Пусть $\mathcal{H}$ – бесконечномерное гильбертово пространство аналитических функций в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ такое, что выполнена аксиома деления

$$f \in \mathcal{H}, f(w) = 0 \Rightarrow \frac{f(z)}{z-w} \in \mathcal{H}.$$

Тогда любое конечное множество Λ в Ω не является множеством единственности для $\mathcal{H}$ (существует нетривиальная функция из $\mathcal{H}$, обнуляющаяся на Λ). Более того, в большинстве классических пространств (пространства Харди, Бергмана, Пэли–Винера, Фока и т.д.) распределение нулей еще менее жестко. А именно, любое достаточно "редкое" счетное множество не является множеством единственности (например, для пространства Харди любое множество, удовлетворяющее условию Бляшке).

Тем не менее, оказывается, что есть естественный класс пространств, в которых распределение нулей обладает определенной жесткостью. Это пространства дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T, \mu)$ с быстро убывающей мерой μ

$$\mathcal{H}(T, \mu) := \left\{ f : f(z) = \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \quad a = \{a_n\} \in \ell^2 \right\}.$$

Как мы увидим в дальнейшем, если нагрузки μ_n экстремально малы, то для любого элемента $f \in \mathcal{H}(T, \mu)$ *все* его нули, кроме, быть может, конечного числа, лежат в малой окрестности T.

Локализация и сильная локализация

В этом разделе мы всегда будем предполагать, что $0 \notin T$ и T удовлетворяет условию *степенной разделенности*: существуют числа $C > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|t_{n+1} - t_n| \geq C|t_n|^{-N}. \tag{1.7.27}$$

Отметим, что из условия (1.7.27) следует, что для некоторых $c, \rho > 0$ выполнено $|t_n| > c|n|^\rho$.

Для целой функции f обозначим за $\mathcal{Z}_f$ множество ее нулей. Если же $f \in \mathcal{H}(T, \mu)$, то для нас будет удобно изменить определение $\mathcal{Z}_f$, $\mathcal{Z}_f := \{w \in \mathbb{C} \setminus T : f(w) = 0\} \cup \{t_n \in T : a_n = 0\}$ (т.е $\mathcal{Z}_f$ – нули целой функции Af, где A – каноническое произведение с нулями в T). Положим, $D(z, r) = \{w : |w - z| < r\}$.

Следующий результат показывает, что различные определения локализации эквивалентны для пространств $\mathcal{H}(T, \mu)$.

Теорема 1.7.1. *Пусть $\mathcal{H}(T, \mu)$ – пространство дискретных преобразований Гильберта, а T удовлетворяет условию степенной разделенности* (1.7.27). *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(*i*) *существует неограниченное множество* $S \subset \mathbb{C}$ *такое, что множество* $\mathcal{Z}_f \cap S$ *конечно для любой* $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$*;*

(*ii*) *множество* $\mathcal{Z}_f \setminus \cup_n D(t_n, 1)$ *конечно для любой* $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$*;*

(*iii*) *существует последовательность непересекающихся дисков* $D(t_n, r_n)$ *такая, что для любой* $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ *множество* $\mathcal{Z}_f \setminus \cup_n D(t_n, r_n)$ *конечно, и каждый диск* $D(t_n, r_n)$ *содержит не более одной точки из* $\mathcal{Z}_f$ *для всех индексов* n*, кроме, быть может, конечного числа;*

(*iv*) *не существует* $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ *с бесконечным числом кратных нулей.*

Теорема 1.7.1 подсказывает следующее определение.

Определение 1.7.2. *Будем говорить, что у пространства* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *есть свойство локализации, если* T *удовлетворяет условию степенной разделенности и выполнено одно из 4-х свойств из теоремы 1.7.1.*

Теорема 1.7.1 показывает, что если нули функций из $\mathcal{H}(T,\mu)$ локализуются около нетривиального подмножетсва $\mathbb{C}$, то они локализуются около подмножеств T (каждой функции соответствует свое подмножество). В параграфе 1.7.1 мы изучим структуру этих подмножеств.

Для некоторых пространств нули могут быть локализованы только около всего множества T.

Определение 1.7.3. *Будем говорить, что у пространства* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *есть свойство сильной локализации, если существует непересекающаяся последовательность дисков* $D(t_n, r_n)$ *такая, что для любой* $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ *каждый диск содержит в точности один нуль из* $\mathcal{Z}_f$ *для всех индексов* n*, за исключением, быть может, конечного числа.*

Оказывается, что свойство сильной локализации тесно связано с задачей об аппроксимации полиномами на $\mathbb{R}$.

Теорема 1.7.4. *У пространства* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *есть свойство сильной локализации тогда и только тогда, когда полиномы лежат в пространстве* $L^2(\mu)$ *и плотны в нем.*

Отметим, что если у пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство локализации, то полиномы лежат в пространстве $L^2(\mu)$ (см. главу 7). В дальнейшем мы отождествим пространство $L^2(\mu)$ с пространством весовых последовательностей $\ell^2(\mu)$:

$$\ell^2(\mu) := \{\{a_n\} : \sum_n |a_n|^2 \mu_n < \infty\}.$$

Вопрос о полноте полиномов в весовых пространствах L^p – знаменитая открытая задача в теории аппроксимации. В самой общей постановке этот вопрос изучался М. Риссом, С. Бернштейном, Н. Ахиезером, С. Мергеляном, Л. де Бранжем и другими авторами. Обсуждение результатов можно найти в обзорах [1, 14] и монографии [71].

В случае мер, сосредоточенных на дискретных подмножествах $\mathbb{R}$, эта проблема недавно изучалась А. Боричевым и М. Содиным [46, 47]. Дальнейшие результаты о полноте полиномов были получены А. Баканом [26], А. Боричевым и М. Содиным [48], А. Полторацким [85, 86], А. Барановым и Х. Ворачеком [34].

Теорема 1.7.4 позволяет строить многочисленные примеры пространств со свойством сильной локализации или без него.

Пример 1.7.5. *Пусть $T = \mathbb{Z}$ и $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – четная, убывающая на $\mathbb{N}$ последовательность. Предположим, что существует положительная функция $\mathcal{M}$ на $[1, \infty)$ такая, что $\mu_n = \mathcal{M}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $\log \mathcal{M}(x)$ выпуклая функция от $\log x$. Тогда у пространства $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть свойство сильной локализации тогда и только тогда, когда*

$$\sum_n \frac{\log \mu_n}{1+n^2} = -\infty.$$

Необходимость этого условия следует из [71, глава 8, B11], а достаточность из [71, глава 8, B11] и аргументов из [71, глава 6, D].

Как мы увидим в дальнейшем, существует широкий класс пространств со свойством локализации, но без свойства сильной локализации. Такие пространства появляются естественным образом в контексте канонических систем, соответствующих пространствам де Бранжа $A\mathcal{H}(T, \mu)$. Ниже мы приведем один из простейших возможных примеров.

Пример 1.7.6. *Пусть $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n(n-1)/2} n^2 \delta_{2^n}$. Тогда в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть локализация, но нет сильной локализации.*

Тем не менее, при некоторых условиях на μ_n локализация влечет сильную локализацию (см. главу 7).

1.7.1. Аттракторы

Предположим, в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть свойство локализации. При помощи свойства (iii) теоремы 1.7.1 с каждой функцией $f \in \mathcal{H}(T, \mu) \setminus \{0\}$ свяжем множество $T_f \subset T$ такое, что для некоторого набора дисков $\{D(t_n, r_n)\}_{t_n \in T_f}$ все нули f, за исключением конечного числа, лежат в $\cup_n D(t_n, r_n)$, и каждый из дисков $D(t_n, r_n)$, за исключением конечного числа, содержит ровно один нуль f.

Таким образом, множество T_f построено по функции f с точностью до конечного множества. Отметим, что диски $D(t_n, r_n)$ могут быть взяты так, чтобы $r_n = |t_n|^{-M}$, $M > 0$.

Определение 1.7.7. *Пусть в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть свойство локализации. Будем говорить, что множество $S \subset T$ – аттрактор, если существует функция $f \in \mathcal{H}(T, \mu)$ такая, что $S = T_f$ с точностью до конечного множества.*

Заметим, что само множество T всегда аттрактор, так как $T_f = T$ для $f = \frac{1}{z-t_0}$.

Оказывается, что свойство локализации влечет теорему упорядоченности для аттракторов.

Теорема 1.7.8. *Пусть в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство локализации. Тогда для любых двух аттракторов S_1, S_2 либо $S_1 \subset S_2$, либо $S_2 \subset S_1$ (с точностью до конечных множеств).*

Эта теорема похожа на теорему де Бранжа об упорядоченности подпространств. Мы будем классифицировать пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ в соответствии с количеством аттракторов.

Определение 1.7.9. *Будем говорить, что в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть локализация типа N, если существуют N подмножеств $W_1, W_2, ..., W_N \subset T$ таких, что $W_j \subset W_{j+1}$, $1 \le j \le N-1$, $\#(W_{j+1} \setminus W_j) = \infty$, и для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ мы имеем $T_f = W_j$, точностью до конечного множества. Более того, N – минимальное число с таким свойством.*

Очевидно, что $W_N = T$. Строгая локализация – локализация типа 1.

Будем говорить, что целая функция B нулевого экспоненциального типа принадлежит *классу Гамбургера*, если она вещественна на $\mathbb{R}$, имеет только простые вещественные нули в точках s_k, не является полиномом и для любого $M > 0$ выполнено $|s_k|^M = o(|B'(s_k)|)$, $|s_k| \to \infty$.

В главе 7 мы покажем, что в случае локализации конечного типа N множество $T \setminus W_j$ мало для каждого j. А именно, оно совпадает с множеством нулей функции класса Гамбургера. Следующий результат дает полное описание пространств с локализацией типа 2.

Теорема 1.7.10. *В пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть локализация типа 2 тогда и только тогда, когда существует разбиение $T = T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ такое, что выполены следующие три условия:*

(i) существует функция A_2 класса Гамбургера такая, что $\mathcal{Z}_{A_2} = T_2$;

(ii) полиномы лежат в пространстве $L^2(T_2, \mu\big|_{T_2})$ и не плотны в нем, но их замыкание имеет конечную коразмерность;

(iii) полиномы лежат в пространстве $L^2(T_1, \tilde{\mu})$ и плотны в нем, $\tilde{\mu} = \sum_{t_n \in T_1} \mu_n |A_2'(t_n)|^2 \delta_{t_n}$.

Более того, T_1 и T – аттракторы для $\mathcal{H}(T,\mu)$.

Условия теоремы 1.7.10 означают, что мера μ состоит из двух существенно различных частей $\mu = \mu\big|_{T_1} + \mu\big|_{T_2}$. Множество T_2 всегда не слишком велико (как множество нулей функции класса Гамбургера), а мера $\mu\big|_{T_2}$ находится на границе класса мер, для которых полиномы плотны/не плотны (часто, но не всегда, это верно для мер вида $\sum_n |t_n|^K |A_2'(t_n)|^2 \delta_{t_n}$). С другой стороны, мера $\mu\big|_{T_1}$ гораздо меньше, так как полиномы плотны не только в пространстве $L^2(T_1, \mu\big|_{T_1})$, но еще и в пространстве $L^2(T_1, |A_2'|^2 \mu\big|_{T_1})$, где множитель $|A_2'(t_n)|$ растет быстрее любого полинома. Отметим, что в примере 1.7.6 нам подойдет тривиальное разбиение $T = T_1 \cup T_2$, $T_1 = \emptyset$, $T_2 = T$.

В главе 7 мы докажем аналогичную теорему для локализации типа N. Критерий для плотности полиномов в $L^2(\mu)$ в случае, когда $\operatorname{supp}\mu$ совпадает с нулями функции класса Гамбургера, был найден А. Боричевым и М. Содиным [47]. Этот критерий связан с описанием канонических мер для неопределенной проблемы моментов. Отметим, что, используя критерий Боричева–Содина, можно получить некоторое описание мер, удовлетворяющих условию (ii) из теоремы 1.7.10.

1.7.2. Локализация в пространствах де Бранжа и приложения к каноническим системам

Рассмотрим свойство локализации в пространствах де Бранжа $\mathcal{H}(E)$. Будем говорить, что у пространства $\mathcal{H}(E) = A\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство (сильной) локализации, если свойство (сильной) локализации есть у пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$. Легко показать, что эти свойства не зависят от выбора меры Кларка μ.

Оказывается, что свойство локализации тесно связано со структурой цепочки подпространств де Бранжа. В некоторых пространствах де Бранжа существует подпространство де Бранжа коразмерности 1. Это свойство может быть переформулировано многими способами, в частности, оно эквивалентно конечности меры Кларка, $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Если в пространстве $\mathcal{H}(E)$ есть свойство локализации, то $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Это верно также для любого подпространства де Бранжа, так как свойство локализации сохраняется при переходе к подпространству. Более того, верно и обратное утверждение.

Теорема 1.7.11. *Пусть пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ (или $\mathcal{H}(T,\mu)$) таково, что носитель меры Кларка $\operatorname{supp}\mu = T$ удовлетворяет условию степенной разделенности. Тогда в $\mathcal{H}(E)$ есть локализация тогда и только тогда, когда в любом неодномерном подпространстве де Бранжа $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}(E)$ есть подпространство де Бранжа коразмерности 1.*

Пусть в пространстве $\mathcal{H}(E)$ есть локализация, а $\{\mathcal{H}_j\}_{j=0}^{\infty}$ – цепочка подпространств де Бранжа, начинающаяся с $\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}_0$, $\dim(\mathcal{H}_j \ominus \mathcal{H}_{j+1}) = 1$. Свойство сильной локализации (локализации типа 1) соответствует случаю, когда нет никаких других подпространств де Бранжа, $\cap_j \mathcal{H}_j = \{0\}$.

Теорема 1.7.12. *Пусть пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ (или $\mathcal{H}(T,\mu)$) таково, что носитель меры Кларка $\operatorname{supp}\mu = T$ удовлетворяет условию степенной разделенности. Тогда в $\mathcal{H}(E)$ есть сильная локализация тогда и только тогда, когда любое подпространство де Бранжа $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}(E)$ имеет конечную коразмерность.*

Локализация типа 2 соответствует ситуации, когда подпространство $\mathcal{G} := \cap_j \mathcal{H}_j$ нетривиально и в нем есть локализация типа 1. В таких пространствах есть 2 аттрактора T и $T_{\tilde{A}}$, где $\tilde{A}$ – целая функция из спектрального представления $\mathcal{G} = \tilde{A}\mathcal{H}(\tilde{T},\tilde{\mu})$. Локализация типа N соответствует ситуации, когда в подпространстве $\mathcal{G} := \cap_j \mathcal{H}_j$ есть локализация типа $N-1$.

Неделимые интервалы, сгущающиеся влево

Важный класс пространств де Бранжа возникает в теории канонических систем дифференциальных уравнений (см. дискуссию в параграфе 1.1.4).

Напомним, что с каждым гамильтонианом H ($H \geq 0$, $trH \equiv 1$, $H \in L^1([0,L])$) мы связываем каноническую систему дифференциальных уравнений.

$$Y'(t)J = zY(t)H(t), \qquad t \in [0,L], \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.7.28}$$

где $Y(t)$ – 2×2-матричнозначная функция на $[0,L]$, а $z \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр.

Функция Эрмита–Билера $E_L := A_L - iB_L$ получается следующим образом: $(A_L(z), B_L(z)) = (1,0)Y(L,z)$, где $Y(t,z)$ решение уравнения (1.7.28) с начальными данными $Y(0,z) = I$.

Напомним, что де Бранж установил взаимно однозначное соответствие между всеми каноническими системами на конечном интервале и регулярными пространствами де Бранжа (см. параграф 1.1.4).

Отметим, что $\dim \mathcal{H}(E_{t''})/\mathcal{H}(E_{t'}) = 1$ тогда и только тогда, когда $I = (t', t'')$ – неделимый интервал для H. Благодаря этому регулярные пространства де Бранжа со свойством локализации могут быть полностью описаны в терминах гамильтониана.

Определение 1.7.13. *Будем говорить, что гамильтониан H состоит из неделимых интервалов, сгущающихся влево, если любая точка $x \in (0,L]$ либо принадлежит неделимому интервалу, либо является правым концом неделимого интервала.*

Следующий результат – прямое следствие теорем 1.7.11–1.7.12 для регулярных пространств де Бранжа.

Теорема 1.7.14. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – регулярное пространство де Бранжа такое, что носитель меры Кларка $T = \operatorname{supp}\mu$ удовлетворяет условию степенной разделенности, а H – гамильтониан соответствующей канонической системы.*

(i) В пространстве $\mathcal{H}(E)$ есть локализация тогда и только тогда, когда гамильтониан H состоит из неделимых интервалов, сгущающихся влево.

(ii) В пространстве $\mathcal{H}(E)$ есть сильная локализация тогда и только тогда, когда гамильтониан H состоит из неделимых интервалов, сгущающихся к 0 (т.е. $[0,L] = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} I_n}$, где замыкания неделимых интервалов I_n и I_{n+1} имеют одну общую точку).

Таким образом, сильная локализация соответствует единственной точке накопления неделимых интервалов. Нетрудно доказать, что локализация типа N соответствует ситуации, когда точек накопления ровно N. Вообще говоря, упорядоченная структура точек накопления неделимых интервалов соответствует упорядоченной структуре аттракторов. В частности, мы можем (неявно) построить пример пространства де Бранжа с локализацией и бесконечным числом аттракторов, задав соответствующий гамильтониан.

Отметим, что теорема 1.7.10 дает описание мер таких, что соответствующая каноническая система имеет две цепочки неделимых интервалов, сгущающихся влево.

Замечание 1.7.1. *Нетрудно показать, что гамильтониан состоит из одной цепочки интервалов, сгущающихся только вправо тогда и только тогда, когда полиномы лежат в пространстве $\mathcal{H}(E)$ и полны там.*

1.8. Подпространства $C^\infty(a,b)$, инвариантные относительно дифференцирования

Рассмотрим пространство $C^\infty(a,b)$ с топологией равномерной сходимости производных на компактах. Пусть $(a,b) = \cup_j I_j$, I_j – замкнутые интервалы. Обозначим за $\|\cdot\|_j$ равномерную норму на интервале I_j. Зададим расстояние между f и g по следующей формуле:

$$d(f,g) = \sum_{j,k=0}^{\infty} 2^{-j-k} \frac{\|f-g\|_j}{1+\|f-g\|_j}.$$

Топология в $C^\infty(a,b)$ порождена этой метрикой.

Нас будут интересовать замкнутые подпространства в $C^\infty(a,b)$, инвариантные относительно оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$. Легко видеть, что собственные и корневые вектора оператора дифференцирования – это функции вида $x^n e^{\lambda x}$. Следовательно, любая замкнутая линейная оболочка функций такого вида даст нам D-инвариантное подпространство. В том случае, когда у оператора (или у семейства коммутирующих операторов) других инвариантных подпространств нет, говорят, что оператор допускает *спектральный синтез*.

Хорошо известно, что спектральный синтез есть для семейств сдвигов во многих локально выпуклых пространствах на $\mathbb{R}$ (см. работы Ж. Делсарта [59], Ж.П. Кахана [69], Л. Шварца [89,90]).

Структура D-инвариантных подпространств намного более сложная и частично была изучена недавно в работе А. Алемана и Б. Коренблюма [22]. Пусть $S \subset (a,b)$ – произвольное замкнутое множество. Рассмотрим

$$L_S = \{f \in C^\infty(a,b) : f^{(k)}(S) = \{0\}, k \geq 0\}. \tag{1.8.29}$$

Во многих случаях L_S нетривиально и не содержит ни одного собственного или корневого вектора D. Как было показано в работе [22], D-инвариантные подпространства могут быть классифицированы в терминах спектра суженного оператора $\sigma(D\big|_L)$. А именно, для любого замкнутого D-инвариантного подпространства верна одна из трех альтернатив:

(i) $\sigma(D\big|_L) = \mathbb{C}$;

(ii) $\sigma(D\big|_L) = \emptyset$;

(iii) $\sigma(D\big|_L)$ – непустое дискретное подмножество $\mathbb{C}$, состоящее из собственных значений $D\big|_L$.

Практически ничего не известно о подпространствах из пункта (ii). Конкретный пример можно получить, взяв в качестве S в формуле (1.8.29) два дизъюнктных интервала. Подпространства из пункта 2 называются *резидуальными* и полностью описаны в работе [22]. Главный результат этой работы состоит в том, что такие подпространства имеют вид

$$L_I = \{f \in C^\infty(a,b) : f^{(k)}(I) = 0, k \geq 0\},$$

для некоторого интервала $I \subset (a,b)$, относительно замкнутого в (a,b). Интервал I может сводиться к одной точке.

Мы будем изучать подпространства из пункта (iii). Такие подпространства L могут иметь нетривиальную резидуальную часть

$$L_{res} = \bigcup\{P(D)L : P - \text{ нетривиальный полином }\}.$$

Нетрудно проверить, что $\sigma(D\big|_{L_{res}}) = \emptyset$ и, таким образом, $L_{res} = L_{I_{res}}$ для некоторого интервала I_{res}, причем I_{res} – минимальный интервал такой, что $L_I \subset L$. Будем называть интервал I_{res} резидуальным интервалом для L.

Следующий естественный вопрос был задан в работе [22]:

Верно ли, что любое D-инвариантное подпространство L типа (iii) (с дискретным спектром сужения) порождается своей резидуальной частью и собственными(корневыми) векторами, лежащими в L?

В том случае, когда спектр оператора сужения конечен, $\#\sigma(D\big|_L) < \infty$, положительный ответ был дан в работе [22]. Общий случай намного сложнее, и ответ зависит от соотношения между плотностью множества $\sigma(D\big|_L)$ и длиной резидуального интервала I_{res}. Положим,

$$\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) = \lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#\{\lambda \in i\sigma(D\big|_L) : \Re\lambda \in [x, x+r)\}}{r},$$

причем элементы спектра считаются с учетом кратности. Обозначим за $\mathcal{E}(L)$ набор конечных линейных комбинаций мономов $x^n e^{\lambda x}$, лежащих в L. В дальнейшем L всегда будет D-инвариантным подпространством с дискретным спектром суженного оператора.

Теорема 1.8.1. *Пусть у D-инвариантного подпространства L – компактный резидуальный интервал I. Если*

$$2\pi\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) < |I|,$$

то

$$L = \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Оказывается, что ограничение на плотность спектра $\sigma(D\big|_L)$ существенно. Если $2\pi\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) = |I|$, то подпространство L может не допускать спектрального синтеза. То есть, вообще говоря, ответ на вопрос Алемана–Коренблюма отрицательный.

Теорема 1.8.2. *Существует D-инвариантное подпространство L такое, что*

$$L_{res} = \{f \in C^\infty(-2\pi, 2\pi) : f\big|_{[-\pi,\pi]} \equiv 0\},$$

$$\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) = 1,$$

но

$$L \neq \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда резидуальный интервал I не компактен. Если $I = (a, b)$, то $L_{res} = \{0\}$. Если же $I \neq (a, b)$, то $I = (a, c]$ или $I = [c, b)$, $c \in (a, b)$. Во всех этих случаях спектральный синтез есть.

Теорема 1.8.3. *Если резидуальный интервал I не компактен, то*

$$L = \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Доказательство базируется на технике исследования полноты смешанных систем [29, 30]. Для того чтобы можно было применять эту технику, необходимо свести нашу задачу к задаче в гильбертовом пространстве целых функций.

Идея контрпримера из теоремы 1.8.2 восходит к работе [29], где впервые был построен пример ненаследственно полной системы из экспонент в $L^2(-\pi, \pi)$.

Замечание 1.8.1. *Как будет показано в главе 8, верхнюю равномерную плотность $\mathcal{D}_+$ можно заменить на радиус полноты последовательности $i\sigma(D\big|_L)$ или, что то же, на плотность Берлинга–Мальявена этой последовательности.*

1.9. Пространства фоковского типа

Пусть φ – непрерывная функция на $[0,\infty)$. Распространим ее на $\mathbb{C}$ по формуле $\varphi(z) := \varphi(|z|)$. Положим,

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ F \in Hol(\mathbb{C}) : \|F\| = \|F\|_\varphi = \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\varphi(z)} dm(z) < \infty \right\},$$

где $dm(z)$ – планарная мера Лебега. Легко видеть, что $\mathcal{F}_\varphi$ – гильбертово пространство целых функций с воспроизводящим ядром, удовлетворяющее аксиоме деления. Самый известный пример такого пространства – пространство Фока – получается, если $\varphi(r) = \pi r^2$. В этом случае $\mathcal{F}_\varphi$ – унитарный образ пространства $L^2(\mathbb{R})$ под действием преобразования Баргмана $\mathcal{B}$.

1.9.1. Базисы Рисса из воспроизводящих ядер

Один из естественных вопросов – есть ли в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ базис Рисса из воспроизводящих ядер (т.е. верно ли, что $\mathcal{F}_\varphi \in \mathfrak{R}$). В 1992-м году К. Сейп доказал, что в классическом пространстве Фока нет базиса Рисса из воспроизводящих ядер [91]. Позднее было показано, что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ нет базиса Рисса из воспроизводящих ядер, если функция φ достаточно регулярна и $\varphi(t) >> \log^2(t)$, [44, 45]. С другой стороны, если $\varphi(t) = \log^\alpha(t)$, $1 < \alpha \le 2$, то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ есть базис Рисса из воспроизводящих ядер. Отметим, что при $\alpha \le 1$ пространство $\mathcal{F}_\varphi$ конечномерно, и задача становится тривиальной.

Рассмотрим подробнее случай $\varphi(t) = \log^\alpha(t)$, $1 < \alpha \le 2$. В этом случае А. Боричев и Ю. Любарский показали, что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует базис Рисса из воспроизводящих ядер в *вещественных* точках.

Теорема 1.9.1. *Пусть $\varphi(t) = \log^\alpha(t)$, $1 < \alpha \le 2$. Тогда существует вещественная последовательность $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\log r_n \asymp n^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и для любой последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, $|\lambda_n| = r_n$, система $\{k_\lambda^{\mathcal{F}_\varphi}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – базис Рисса в $\mathcal{F}_\varphi$.*

В частности, это означает, что в этом случае пространство $\mathcal{F}_\varphi$ совпадает с пространством де Бранжа (как множества с эквивалентностью норм). Возникает естественный вопрос:

Какие пространства де Бранжа совпадают с пространствами фоковского типа?

Следующий результат дает полное описание таких пространств.

Теорема 1.9.2. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа с мерой Кларка $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(i) существует пространство фоковского типа $\mathcal{F}_\varphi$ такое, что $\mathcal{H}(E) = \mathcal{F}_\varphi$;

(ii) *оператор поворота* $R_\theta : f(z) \mapsto f(e^{i\theta} z)$ *– ограниченный обратимый оператор в* $\mathcal{H}(E)$ *для всех (одного)* $\theta \in (0, \pi)$*;*

(iii) *последовательность* $\{t_n\} = \operatorname{supp}\mu$ *лакунарна, и для некоторого* $C > 0$ *и всех* n *выполнено неравенство*

$$\sum_{|t_k| \le |t_n|} \mu_k + t_n^2 \sum_{|t_k| > |t_n|} \frac{\mu_k}{t_k^2} \le C\mu_n. \tag{1.9.30}$$

Отметим, что условие (9.2.6) в точности совпадает с условием (1.4.21) из теоремы 1.4.2. Таким образом, пространства де Бранжа фоковского типа очень далеки от классического пространства Фока ($\varphi(r) = \pi r^2$).

Замечания. Не любое пространство фоковского типа обладает свойством наследственной полноты. Недавно А. Баранов показал, что классическое пространство Фока не обладает этим свойством.

Условия на рост функции φ, гарантирующие наличие базиса Рисса из воспроизводящих ядер, и теорема 1.9.2 подсказывают следующую гипотезу:

Если в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ *есть базис Рисса из воспроизводящих ядер, то там есть и базис Рисса из воспроизводящих ядер в вещественных точках (т.е.* $\mathcal{F}_\varphi$ *совпадает с пространством де Бранжа).*

Недавно А. Боричев опроверг эту гипотезу. С другой стороны, он показал, что при некоторых дополнительных условиях на регулярность φ гипотеза верна.

1.9.2. Ряды Габора. Классическое пространство Фока

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим систему Габора в пространстве $L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{G}_\Lambda := \{e^{2\pi y t} e^{-\pi(t-x)^2}\}_{(x,y)\in\Lambda}.$$

Функции $e^{2\pi y t} e^{-\pi(t-x)^2}$ могут быть интерпретированы как сдвиги по времени и частоте гауссовой функции $e^{-\pi t^2}$. Как мы увидим позднее, система $\mathcal{G}_\Lambda$ унитарно эквивалентна системе из воспроизводящих ядер в классическом пространстве Фока $\mathcal{F}_{\pi r^2}$. Таким образом, система $\mathcal{G}_\Lambda$ не может быть базисом Рисса ни при каком Λ.

Тем не менее, оказывается, что для систем вида $\mathcal{G}_\Lambda$ верен результат, аналогичный теореме Янга.

Теорема 1.9.3. *Пусть* $\mathcal{G}_\Lambda$ *– полная и минимальная система Габора в* $L^2(\mathbb{R})$*, а* $\{g_{(x,y)}\}$ *– биортогональная к ней система. Тогда любая функция* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *однозначно определяется коэффициентами своего формального ряда Фурье* $(f, g_{(x,y)})_{L^2(\mathbb{R})}$ *(т.е. биортогональная система* $\{g_{(x,y)}\}$ *всегда полна).*

Отметим, что существует широкий класс полных и минимальных систем Габора $\mathcal{G}_\Lambda$ [24].

С любой функцией $f \in L^2(\mathbb{R})$ свяжем ее *преобразование Баргмана* $\mathcal{B}f$

$$\mathcal{B}f(z) := 2^{1/4} e^{-i\pi xy} e^{\frac{\pi}{2}|z|^2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi i y t} e^{-\pi(t-x)^2} dt$$

$$= 2^{1/4} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\pi t^2} e^{2\pi t z} e^{-\frac{\pi}{2} z^2} dt, \quad z = x + iy.$$

Хорошо известно, что преобразование Баргмана – унитарный оператор, действующий из $L^2(\mathbb{R})$ в $\mathcal{F}_{\pi r^2}$ (см. [60, 62]). Более того, при этом преобразовании элементы системы Габора переходят в воспроизводящие ядра в пространстве Фока

$$2^{1/4}\mathcal{B}(e^{2\pi i u t} e^{-\pi(t-v)^2})(z) = e^{-\pi|w|^2/2} e^{\pi \overline{w} z} = \frac{k_w(z)}{\|k_w\|_{\mathcal{F}}},$$

$$w = u - iv, \quad k_w(z) := e^{\pi \overline{w} z}. \tag{1.9.31}$$

Существование такого преобразования позволяет нам применять теорию целых функций для изучения систем Габора. Отметим, что по этой причине известно довольно много результатов про сдвиги (по времени и частоте) гауссовой функции $e^{-\pi t^2}$, в то время как свойства систем из сдвигов других функций изучены гораздо хуже.

Поскольку пространство Фока удовлетворяет аксиоме деления, мы можем повторить рассуждения из параграфа 1.1.5 и показать, что у любой полной и минимальной системы из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве Фока есть порождающая функция F (т.е функция, обращающаяся в 0 в точности в точках Λ).

Следующий результат – переформулировка теоремы 1.9.3 для пространства Фока.

Теорема 1.9.4. *Если $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – полная и минимальная система в пространстве Фока, а F – ее порождающая функция, то система $\left\{\frac{F(z)}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ тоже полна.*

Еще раз отметим, что в пространстве Фока нет базиса Рисса из воспроизводящих ядер, поэтому методы, которые работают при доказательстве теоремы 1.4.2, здесь неприменимы.

1.10. Бесселевы последовательности в пространствах де Бранжа с равномерной верхней плотностью

Напомним определение бесселевой последовательности. Будем говорить, что последовательность Λ *бесселева*, если выполнено неравенство

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\left(f, \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}\right)\right|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{|f(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2} \le C_\Lambda \|f\|^2. \tag{1.10.32}$$

Одна из классических задач комплексного анализа состоит в поиске описаний бесселевых последовательностей Λ в геометрических терминах. Например, для вещественных бесселевых последовательностей в пространстве Пэли–Винера есть такое описание.

Теорема 1.10.1. *Последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *бесселева в пространстве* $\mathcal{P}W_\pi$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \#\{\Lambda \cap [n, n+1]\} < \infty. \tag{1.10.33}$$

Достаточность условия (1.10.33) следует из неравенства Планшереля–Полиа, а необходимость можно получить, подставив в неравенство (1.10.32) функции $k_n(z) = \frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, для бесселевости последовательности Λ в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$ *необходима* конечность некоторой *верхней плотности*. Далее мы опишем пространства де Бранжа, в которых неравенство типа (1.10.33) необходимо для бесселевости вещественной последовательности Λ.

Пусть $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ – мера Кларка пространства $\mathcal{H}(E)$. Мы будем сравнивать количество точек в Λ на вещественном интервале I с количеством точек t_n, лежащих в I. Можно предположить, что конечность соответствующей плотности равносильна бесселевости (см. теорему 1.10.1).

Предположение. *Последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *бесселева в пространстве* $\mathcal{H}(E)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{UD}(\Lambda) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \#\{\Lambda \cap [t_n, t_{n+1}]\} < \infty^4. \tag{1.10.34}$$

К сожалению, условие (1.10.34) не необходимо и недостаточно для бесселевости. Пример небесселевой последовательности, удовлетворяющей условию (1.10.34), был построен в [27]. Первый пример бесселевой последовательности с бесконечной верхней плотностью (относительно последовательности $T = \{t_n\}$) был предъявлен в работе [42].

[4] Мы неявно предполагаем, что супремум берется по тем индексам n, для которых существует t_n

Тем не менее, для многих *классов* пространств условие (1.10.34) необходимо. Например, если множество $\{z : |E(\bar{z})| < (1-\varepsilon)|E(z)|\}$ связно для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$, то условие (1.10.34) необходимо и достаточно (см. работу [57], где это свойство проверено для соответствующих модельных пространств $K_\Theta = \mathcal{H}(E)/E$). Такие функции E (из класса Эрмита–Билера) и соответствующие им внутренние функции Θ $(= E^*/E)$ называют *однокомпонентными.*

С другой стороны, если последовательность $\{t_n\}_{n>0}$ *лакунарна*, $\inf_n t_{n+1}/t_n > 1$, то условие (1.10.34) также необходимо для бесселевости (см. теорему 1.2.4).

Мы полностью опишем пространства де Бранжа, в которых условие (1.10.34) необходимо для бесселевости.

Для простоты будем считать, что $\{t_n\}$ существует для всех $n \in \mathbb{Z}$. Положим,

$$I_n = [t_n, t_{n+1}], \quad I_n^- = [t_n, (t_n + t_{n+1})/2), \quad I_n^+ = [(t_n + t_{n+1})/2, t_{n+1}),$$

$$M_n^-(x) = \mu([t_n - (x - t_n), t_n]),$$

$$P_n^-(x) = \int_{|y-t_n|>|x-t_n|} \frac{d\mu(y)}{|y-t_n|^2}, \quad x \in I_n^-.$$

$$M_n^+(x) = \mu([t_{n+1}, t_{n+1} + (t_{n+1} - x)]),$$

$$P_n^+(x) = \int_{|y-t_{n+1}|>|x-t_{n+1}|} \frac{d\mu(y)}{|y-t_{n+1}|^2}, \quad x \in I_n^+.$$

Ясно, что $M_n^-(t_n) = \mu(\{t_n\}) = \mu_n$, $M_n^+(t_{n+1}) = \mu(\{t_{n+1}\}) = \mu_{n+1}$. Нам понадобится понятие *диадического размера.*

Определение 1.10.2. *Будем говорить, что положительная последовательность $\{d_n\}$ (конечная или бесконечная) имеет диадический размер m, если она лежит в объединении m диадических ячеек вида $[2^l, 2^{l+1})$, $l \in \mathbb{Z}$ и m – наименьшее число с таким свойством.*

Обозначим диадический размер последовательности $\{d_n\}$ за $\mathcal{D}(\{d_n\})$ (он может быть и бесконечным). Например, $\mathcal{D}(n, n+1, ..., n+k) = [\log_2 \frac{n+k}{n}] + 1$.

Рассмотрим разбиение вещественной оси на четыре множества:

$$\mathbb{R} = \mathcal{R}_M^- \cup \mathcal{R}_M^+ \cup \mathcal{R}_P^- \cup \mathcal{R}_P^+,$$

$$\mathcal{R}_M^- = \{x : x \in I_n^-, M_n^-(x) \ge |x - t_n|^2 P_n^-(x)\},$$

$$\mathcal{R}_M^+ = \{x : x \in I_n^+, M_n^+(x) \ge |x - t_{n+1}|^2 P_n^+(x)\},$$

$$\mathcal{R}_P^- = \{x : x \in I_n^-, M_n^-(x) < |x - t_n|^2 P_n^-(x)\},$$

$$\mathcal{R}_P^+ = \{x : x \in I_n^+, M_n^+(x) < |x - t_{n+1}|^2 P_n^+(x)\}.$$

Положим,

$$\mathcal{A}_n^\pm = \{M_n^\pm(x) : x \in \mathcal{R}_M^\pm, x \in I_n\}, \qquad \mathcal{B}_n^\pm = \{P_n^\pm(x) : x \in \mathcal{R}_P^\pm, x \in I_n\}.$$

Отметим, что для каждого n множества $\mathcal{A}_n^\pm$, $\mathcal{B}_n^\pm$ конечны.

Теорема 1.10.3. *В пространстве $\mathcal{H}(E)$ все вещественные последовательности Λ имеют конечную верхнюю плотность* $\mathrm{UD}(\Lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^-) < \infty \qquad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^+) < \infty, \\ &\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^-) < \infty \qquad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^+) < \infty, \end{aligned} \tag{1.10.35}$$

где последовательности $\mathcal{A}_n^\pm$, $\mathcal{B}_n^\pm$ построены по спектральной мере μ.

В случае, если функция E однокомпонентна или $\sup_n \frac{t_{n+1}}{t_n} > 1$, последовательности $\mathcal{A}_n^\pm$ равномерно конечны, $\sup_n \#\mathcal{A}_n^\pm < \infty$. Следовательно, условие (1.10.35) выполнено автоматически.

Следствие 1.10.4. *Если спектральная мера $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ такова, что $C^{-1}|t_n - t_{n-1}| \le |t_{n+1} - t_n| \le C|t_n - t_{n-1}|$, то любая бесселева последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность* $\mathrm{UD}(\Lambda)$.

При помощи теоремы 1.10.3 легко проверить существование бесселевой последовательности с бесконечной верхней плотностью. Положим, $\mu = \sum_{k=2}^\infty \nu_k$, $\nu_k = \sum_{l=0}^k \delta_{2^k+l}$. Легко проверить, что диадический размер последовательности $\mathcal{A}_{m(k)}^+$, соответствующей точке 2^k, – величина порядка $\log k$.

1.11. Дополняемость систем из воспроизводящих ядер

В 2007 году А. Накамура поставил следующий вопрос:

Пусть система из экспонент $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – последовательность Рисса в $L^2(-\pi,\pi)$. Верно ли, что она может быть дополнена до полной и минимальной системы из экспонент в $L^2(-\pi,\pi)$?

Отметим, что ранее К. Сейп [92] доказал, что последовательность $\{e^{\pm i(n+\sqrt{n})t}\}_{n>1}$ – последовательность Рисса, которая не может быть дополнена до базиса Рисса из экспонент. Таким образом, дополненная последовательность не всегда может быть выбрана из базисов Рисса. Тем не менее, автору диссертации удалось показать, что ответ на вопрос Накамуры положительный. Более того, это верно для *всех* неполных последовательностей Λ.

Теорема 1.11.1. *Если $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – неполная система в $L^2(-\pi,\pi)$, то существует последовательность $S \subset \mathbb{R}$, $\Lambda \cap S = \emptyset$ такая, что система $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda\cup S}$ полна и минимальна в $L^2(-\pi,\pi)$.*

В работе [81] это было доказано лишь для вещественных последовательностей Λ специального вида $\Lambda = \{n + \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, δ_n – возрастающая последовательность. Заметим, что очень легко построить переполненную последовательность Λ, из которой нельзя выбрать полную и минимальную подпоследовательность (подходит любая последовательность $\{\lambda_n\}$ такая, что $|\lambda_n| \to 0$ или такая, что $\{\lambda_n\} \subset i\mathbb{R}$ и $\{\lambda_n\}$ не удовлетворяет условию Бляшке).

Более того, оказывается, что теорема 1.11.1 верна для *всех* пространств де Бранжа.

Теорема 1.11.2. *Если $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – неполная система в пространстве де Бранжа $\mathcal{H}(E)$, то существует последовательность $S \subset \mathbb{R}$, $\Lambda \cap S = \emptyset$ такая, что система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\cup S}$ полна и минимальна в $\mathcal{H}(E)$.*

Доказательства теорем 1.11.1, 1.11.2 неконструктивны и опираются на теорию де Бранжа.

Глава 2. Малые пространства де Бранжа

В этой главе мы будем рассматривать пространства де Бранжа с лакунарным носителем меры Кларка. Оказывается, что в таких пространствах многие объекты (меры Карлесона, последовательности Бесселя, базисы Рисса) можно описать явно. Доказательства чаще всего опираются на метод двойственности при оценке весового преобразования Гильберта и точные оценки целых функций с лакунарным множеством нулей.

2.1. Доказательство теоремы 1.2.2

Для удобства мы продублируем формулировку теоремы 1.2.2.

Теорема 2.1.1. (*теорема 1.2.2*) *Пусть носитель меры Кларка* $T = \operatorname{supp}\mu$ *удовлетворяет условию лакунарности* (1.2.8)*, а мера* $\nu \in M^+(\mathbb{C})$ *такова, что* $\nu(T) = 0$*. Преобразование* $\mathcal{H}_{(T,\mu)}$ *– ограниченный оператор из* ℓ^2 *в* $L^2(\mathbb{C},\nu)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\ge1}\int_{\Omega_n}\frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2}<\infty, \tag{2.1.1}$$

$$\sup_{n\ge1}\left(\sum_{m=1}^{n}\mu_m\sum_{l=n+1}^{\infty}\int_{\Omega_l}\frac{d\nu(z)}{|z|^2}+\sum_{m=1}^{n}\nu(\Omega_m)\sum_{l=m+1}^{\infty}\frac{\mu_l}{t_l^2}\right)<\infty. \tag{2.1.2}$$

Нам понадобятся следующие обозначения

$$M_1=1,\quad M_n=\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j \quad \text{и} \quad P_n=\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\mu_j}{t_j^2}. \tag{2.1.3}$$

Необходимость условий из теоремы 2.1.1. Прежде всего отметим, что необходимость условий (2.1.1) очевидна: применим оператор $H_{(T,\mu)}$ к последовательности $e^{(n)} = (e^{(n)}_m)$, $e^{(n)}_n = 1$, $e^{(n)}_m = 0$ для $m \ne n$.

Для того чтобы показать, что условия (2.1.2) тоже необходимы, мы рассмотрим последовательность $c^{(n)} = (c^{(n)}_m)$ такую, что $c^{(n)}_m = \mu_m^{\frac12}$ для $m < n$ и $c^{(n)}_m = 0$ для $m \ge n$. Отметим, что $\|c^{(n)}\|_2^2 = M_n$, а для $z \in \Omega_l$ и $l \ge n$ мы имеем оценку

$$|H_{(T,\mu)}c^{(n)}(z)|^2=\left|\sum_{m=1}^{n}\frac{\mu_m}{z-t_m}\right|^2\gtrsim\frac{M_n^2}{|z|^2}.$$

Используя ограниченность оператора $H_{(T,\mu)}$, мы получаем, что

$$M_n\gtrsim\int_{\mathbb{C}}|H_{(T,\mu)}c^{(n)}(z)|^2d\nu(z)\gtrsim M_n^2\sum_{m\ge n}\int_{\Omega_n}\frac{d\nu(z)}{|z|^2}.$$

С другой стороны, рассмотрим последовательность $a^{(n)} = (a_m^{(n)})$ такую, что $a_m^{(n)} = \mu_m^{\frac{1}{2}}/t_m$ для $m > n$, $a_m^{(n)} = 0$ для $m \le n$. Тогда $\|a^{(n)}\|_2^2 = P_n$. Если $z \in \Omega_l$ и $l \le n$, мы получаем оценку

$$|H_{(T,\mu)}a^{(n)}(z)|^2 = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\mu_m}{t_m(z - t_m)} \right|^2 \gtrsim P_n^2.$$

Следовательно,

$$P_n \gtrsim \int_{\mathbb{C}} |H_{(T,\mu)}a^{(n)}(z)|^2 d\nu(z) \gtrsim P_n^2 \sum_{m \le n} \nu(\Omega_m).$$

Доказательство достаточности условий теоремы 2.1.1. Пусть $a = (a_n)$ – произвольная последовательность из ℓ^2. При помощи неравенства Коши–Шварца и условий (2.1.1) получаем, что

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_n} |H_{(T,\mu)}a(z)|^2 d\nu(z) \\ &\le 3 \int_{\Omega_n} \left[\left| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_m \mu_m^{\frac{1}{2}}}{z - t_m} \right|^2 + \frac{|a_n|^2 \mu_n}{|z - t_n|^2} + \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{a_m \mu_m^{\frac{1}{2}}}{z - t_m} \right|^2 \right] d\nu(z) \\ &\lesssim \int_{\Omega_n} \left[|z|^{-2} \left(\sum_{m=1}^{n-1} |a_m| \mu_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|a_m| \mu_m^{\frac{1}{2}}}{t_m} \right)^2 \right] d\nu(z) + |a_n|^2. \end{aligned}$$

Нам нужно проверить два неравенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n-1} |a_m| \mu_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \int_{\Omega_n} |z|^{-2} d\nu(z) \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \tag{2.1.4}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|a_m| \mu_m^{\frac{1}{2}}}{t_m} \right)^2 \nu(\Omega_n) \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2. \tag{2.1.5}$$

Рассмотрим неравенство (2.1.4). Положим,

$$\tau_n^2 = \int_{\Omega_n} |z|^{-2} d\nu(z).$$

Используя двойственность, получаем, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^2 \left(\sum_{m=1}^{n-1} |a_m| \mu_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|(c_n)\|_{\ell^2}=1} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \tau_n \sum_{m=1}^{n-1} |a_m| \mu_m^{\frac{1}{2}}.$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\tau_n\sum_{m=1}^{n-1}|a_m|\mu_m^{\frac{1}{2}}=\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|\mu_m^{\frac{1}{2}}\sum_{n=m+1}^{\infty}|c_n|\tau_n.$$

Нам осталось доказать, что ℓ^2-норма последовательности α_m

$$\alpha_m:=\mu_m^{\frac{1}{2}}\sum_{n=m+1}^{\infty}|c_n|\tau_n$$

ограничена ℓ^2-нормой последовательности (c_n) (с абсолютной константой).

Используя неравенство Коши–Шварца, получаем, что

$$|\alpha_m|^2\le\mu_m\sum_{n=m+1}^{\infty}|c_n|^2M_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=m+1}^{\infty}\tau_j^2M_j^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя неравенство (2.1.2), получаем, что

$$\sum_{j:2^lM_m<M_j\le 2^{l+1}M_m}\tau_j^2M_j^{\frac{1}{2}}\lesssim\frac{1}{2^{\frac{l}{2}}M_{m+1}^{\frac{1}{2}}},$$

для $l\ge 0$. Просуммируем полученные неравенства

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\tau_j^2M_j^{\frac{1}{2}}\lesssim\frac{1}{M_{m+1}^{\frac{1}{2}}}.$$

Следовательно,

$$|\alpha_n|^2\lesssim\frac{\mu_m}{M_{m+1}^{\frac{1}{2}}}\sum_{n=m+1}^{\infty}|c_n|^2M_n^{-\frac{1}{2}}.$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\lesssim\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2M_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\mu_m}{M_{m+1}^{\frac{1}{2}}},$$

откуда легко получить неравенства (2.1.4). Действительно,

$$M_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\mu_m}{M_{m+1}^{\frac{1}{2}}}\le M_n^{-\frac{1}{2}}\int_0^{M_n}x^{-\frac{1}{2}}dx=2.$$

Рассмотрим неравенства (2.1.5). Применяя неравенство Коши–Шварца, получаем, что

$$\Big(\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|a_m|\mu_m^{\frac{1}{2}}}{t_m}\Big)^2\le\sum_{m=n+1}^{\infty}|a_m|^2P_{m-1}^{\frac{1}{2}}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\mu_j}{P_{j-1}^{\frac{1}{2}}t_j^2}.$$

Из неравенства

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\mu_j}{P_{j-1}^{\frac{1}{2}}t_j^2}\le\int_0^{P_n}x^{-\frac{1}{2}}dx\le 2P_n^{\frac{1}{2}}$$

следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\nu(\Omega_n)\Big(\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|a_m|\mu_m^{\frac{1}{2}}}{t_m}\Big)^2\lesssim\sum_{n=1}^{\infty}\nu(\Omega_n)P_n^{\frac{1}{2}}\sum_{m=n+1}^{\infty}|a_m|^2P_m^{\frac{1}{2}}.$$

Поменяем порядок суммирования

$$\sum_{n=1}^{\infty}\nu(\Omega_n)\Big(\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|a_m|\mu_m^{\frac{1}{2}}}{t_m}\Big)^2\lesssim\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2P_{m-1}^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{m-1}\nu(\Omega_n)P_n^{\frac{1}{2}}.$$

Из неравенства (2.1.2) следует, что

$$\sum_{n=1}^{m-1}\nu(\Omega_n)P_n^{\frac{1}{2}}\lesssim\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n:2^lP_{m-1}\le P_n\le 2^{l+1}P_{m-1}}\nu(\Omega_n)P_n^{\frac{1}{2}}\lesssim$$

$$\frac{1}{P_{m-1}^{\frac{1}{2}}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{l}{2}}}\lesssim\frac{1}{P_{m-1}^{\frac{1}{2}}}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (2.1.5).

2.2. Частные случаи теоремы 1.2.2, последовательности Бесселя

Условия (2.1.1) теоремы 2.1.1 имеют локальный характер, в то время как условия (2.1.2) носят глобальный характер. Легко видеть, что следующее глобальное условие влечет все условия теоремы 2.1.1:

$$\sup_{n\ge1}\int_{\mathbb{C}}\frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-\gamma_n|^2}<\infty.$$

Мы выделим два случая, когда условия (2.1.2) автоматические следуют либо из условия выше, либо из условий (2.1.1).

Следствие 2.2.1. *Предположим, что последовательность T лакунарна, последовательность μ_n растет как геометрическая прогрессия* ($\inf_n \mu_{n+1}/\mu_n > 1$), *а последовательность μ_n/t_n^2 убывает, как геометрическая прогрессия. Если ν мера на $\mathbb{C}$ такова, что $\nu(T) = 0$, то $H_{(T,\mu)}$ – ограниченный оператор из ℓ^2 в $L^2(\mathbb{C},\nu)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\geq 1}\int_{\Omega_n}\frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2} < \infty.$$

Следствие 2.2.2. *Предположим, что последовательность T лакунарна и $\sum_n \mu_n < \infty$. Если ν мера на $\mathbb{C}$ такова, что $\nu(T) = 0$, то $H_{(T,\mu)}$ – ограниченный оператор из ℓ^2 в $L^2(\mathbb{C},\nu)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\geq 1}\int_{\mathbb{C}}\frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2} < \infty.$$

Оба следствия легко выводятся из теоремы 2.1.1. Действительно, нам нужно проверить только условия (2.1.2)

$$M_n \sum_{M_n\leq M_m\leq 2M_n}\nu(\Omega_m) \lesssim \sum_{M_n\leq M_m\leq 2M_n} M_m\nu(\Omega_m) \lesssim$$

$$\sum_{m\geq n}\frac{\nu(\Omega_m)}{t_{m+1}^2} \lesssim \int_{\mathbb{C}}\frac{d\nu(\lambda)}{1+|\lambda|^2}.$$

Рассмотрим теперь случай дискретных преобразований Гильберта вида $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ (в этом случае $\nu = \sum_{\lambda\in\Lambda} w_\lambda\delta_\lambda$), то есть когда преобразование Гильберта действует в пространство весовых последовательностей. Вес w_λ – бесселев вес

$$w_\lambda = \|k_\lambda\|^{-2} = \left[\sum_n \frac{\mu_n}{|\lambda-t_n|^2}\right]^{-1}.$$

Как объяснено в параграфе 1.2.2, ограниченность оператора $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ в точности соответствует бесселевости последовательности Λ. При помощи теоремы 2.1.1 легко получить *геометрическое описание* бесселевых последовательностей.

Теорема 2.2.3. *Последовательность Λ бесселева для малого пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ тогда и только тогда, когда $\sup_n(\#\Lambda\cap\Omega_n) < \infty$, последовательность $\Lambda^{(M)}$[1] M-лакунарна, последовательность $\Lambda^{(P)}$ P-лакунарна и*

$$\sup_n\left(M_n\sum_{m\geq n}\sum_{\lambda\in\Lambda^{(0)}\cap\Omega_m}\frac{|\lambda-t_n|^2}{\mu_m|\lambda|^2} + P_n\sum_{m\leq n}\sum_{\lambda\in\Lambda^{(0)}\cap\Omega_m}\frac{|\lambda-t_m|^2}{\mu_m}\right) < \infty. \qquad (2.2.6)$$

[1]определения последовательностей $\Lambda^{(M)}$, $\Lambda^{(P)}$ и $\Lambda^{(0)}$ даны в параграфе 1.2.1

Отметим, что условие балансировки 2.2.6 разрешает некоторым точкам из последовательности $\Lambda^{(0)}$ быть на границе "дисков"

$$\left\{z : z \in \Omega_n \text{ и } \frac{M_n}{|z|^2} \leq \frac{\mu_n}{|z - t_n|^2}\right\}.$$

В этом случае условие балансировки "сращивается" с условием M-лакунарности.

2.3. Обратимость дискретных преобразований Гильберта

В этом параграфе мы изучим обратимость операторов $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$. Особое внимание будет уделено двум случаям $\mu_n = o(M_n)$ и $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$. В обоих случаях удается получить явное геометрическое описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ (или $\mathcal{H}(E)$).

2.3.1. Доказательство теоремы 1.2.7

Напомним формулировку теоремы 1.2.7.

Теорема 2.3.1. *Пусть Λ – полная и минимальная последовательность в $\mathcal{H}(T, \mu)$, тогда система $\{\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}\}$ – базис Рисса (или, что то же, Λ – полная интерполяционная последовательность) тогда и только тогда, когда ограничены операторы $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ и $\mathcal{H}_{(\Lambda,\tilde{w}):(T,\tilde{\mu})}$ (веса $\tilde{w}$ и $\tilde{\mu}$ задаются формулами* (1.2.14)–(1.2.15)*).*

Доказательство. Рассмотрим (единственный) вектор $e = (e_n)$ в ℓ^2_v такой, что функция $H_{(T,\mu)}e$ обнуляется на $\Lambda \setminus \{\lambda_1\}$ и $[H_{(T,\mu)}e](\lambda_1) = 1$.

Положим,

$$G(z) = (z - \lambda_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{z - t_n}.$$

Легко видеть, что G - порождающая функция последовательности Λ. В частности, $G(\lambda_j) = 0$, $j \neq 1$. Вычитая ряды, задающие $G(z)$ и $G(\lambda_j)$, получаем, что

$$G(z) = G(z) - G(\lambda_j) = (z - \lambda_j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n \mu_n^{\frac{1}{2}} (t_n - \lambda_1)}{(t_n - \lambda_j)(z - t_n)}.$$

Таким образом, (квадратично суммируемые) коэффициенты в разложении функции $\frac{G(z)}{z-\lambda_j}$ по базису $\frac{\mu_n^{\frac{1}{2}}}{z-t_n}$ равны $\frac{e_n(t_n-\lambda_1)}{t_n-\lambda_j}$. В частности, последовательность

$$e^{(j)} = \left(e_n \frac{t_n - \lambda_1}{t_n - \lambda_j} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m \mu_m^{\frac{1}{2}} (\lambda_1 - t_m)}{(\lambda_j - t_m)^2} \right)^{-1} \right)_n$$

- единственный вектор в ℓ^2 такой, что $[H_{(T,\mu)}e^{(j)}](\lambda_l) = 0$ для $l \neq j$ и $[H_{(T,\mu)}e^{(j)}](\lambda_j) = 1$.

Для удобства записи введем обозначение

$$\alpha_j := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m \mu_m^{\frac{1}{2}}(\lambda_1 - t_m)}{(\lambda_j - t_m)^2} \right)^{-1}.$$

Таким образом, если $b = (b_1, b_2, ..., b_l, 0, 0, ...)$ – финитная последовательность, то последовательность

$$a = \left(e_n(t_n - \lambda_1) \sum_{j=1}^{l} \frac{b_j \alpha_j}{t_n - \lambda_j} \right)_n \tag{2.3.7}$$

– единственный вектор из ℓ^2 такой, что $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}a = b$.

Это означает, что мы задали отображение, обратное к $H_{(T,\mu);(\Lambda,w)}$ на плотном подмножестве в ℓ^2_w. Следовательно, при условии, что Λ – точная последовательность для $H_{(T,\mu)}$, для обратимости оператора $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ необходимо и достаточно, чтобы оператор, заданный формулой (3.2.3), мог быть расширен до линейного оператора в ℓ^2_w.

То есть оператор $H_{(\Lambda,\tilde{w}):(T,\tilde{\mu})}$ должен быть ограничен,

$$\tilde{\mu}_n = |\lambda_1 - t_n|^2 |e_n|^2$$

и

$$\tilde{w}_j = w_j^{-1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n \mu_n^{\frac{1}{2}}(\lambda_1 - t_n)}{(\lambda_j - t_n)^2} \right|^{-2} = w_j^{-1} |\lambda_j - \lambda_1|^{-2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_j - t_n)^2} \right|^{-2}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $[H_{(T,\mu)}e](\lambda_j) = 0$, $j \neq 1$. $\square$

Отметим, что теорема 2.3.1 верна и для пространств $\mathcal{H}(T,\mu)$ с произвольным атомарным носителем $\operatorname{supp}\mu$. В частности, ее можно применять для пространств K_Θ, где мера Кларка внутренней (не обязательно мероморфной) функции Θ состоит из атомов.

Отметим, что формулы, задающие веса $\tilde{\mu}$ и $\tilde{w}$, могут быть интерпретированы следующим образом. Положим,

$$\Psi = \frac{1}{G}.$$

Тогда

$$\tilde{\mu}_n = \mu_n |\Psi'(t_n)|^{-2}, \quad \tilde{w}_j = w_j^{-1} |G'(\lambda_j)|^{-2}.$$

2.3.2. Локализация точек из Λ в случае лакунарной последовательности T

Последние 3 параграфа главы 2 будут посвящены двум специальным классам малых пространств де Бранжа $\mu_n = o(M_n)$ и $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$. В этом параграфе мы покажем, что несмотря на то, что бесселева последовательность Λ может иметь нетривиальное разбиение на последовательности $\Lambda^{(0)}$, $\Lambda^{(M)}$ и $\Lambda^{(P)}$, условие обратимости оператора $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ влечет тривиальность последовательностей $\Lambda^{(M)}$ и $\Lambda^{(P)}$.

Пусть последовательность $T = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ лакунарна (т.е. удовлетворяет условию (1.2.8)). Напомним обозначения, введенные в главе 1,

$$M_n = \sum_{m=1}^{n-1} \mu_m \quad \text{и} \quad P_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\mu_m}{t_m^2},$$

$$D_n(\mu, N) = \left\{ \lambda \in \Omega_n : \ \frac{N\mu_n}{|\lambda - t_n|^2} \geq \max\left(\frac{M_n}{|\lambda|^2}, P_n \right) \right\}.$$

В дальнейшем выбор числа N будет играть существенную роль. Напомним, что если $\mu_n = o(M_n)$ или $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$, то для любого N множества $D_n(\mu, N)$ дизъюнктны, начиная с некоторого n.

В этом параграфе мы покажем, что в этом случае из обратимости оператора $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ следует, что диски $D_n(\mu, N)$, начиная с некоторого места, содержат в точности по одной точке из Λ. Более того, число точек в Λ и T почти совпадает (см. дискуссию в главе 1).

Нам понадобится определение, двойственное к определению 1.2.8.

Определение 2.3.2. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ занумерована в соответствии с возрастанием $|\lambda_n|$ и $0 \notin \Lambda$. Будем говорить, что Λ – возмущение последовательности $T = \{t_n\}$, если мы можем выбрать n_0 и N так, что $\lambda_n \in D_n(\mu, N)$ для достаточно больших n. Если $n_0 < 1$, то мы будем говорить, что Λ – возмущение T с избытком $1 - n_0$.*

Главные результаты этого параграфа – леммы 2.3.3, 2.3.4.

Лемма 2.3.3. *Пусть w – бесселев вес для последовательности Λ по отношению к паре (T, μ) и $\mu_n = o(M_n)$, $n \to \infty$. Если оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ обратим, то Λ – либо точное возмущение T, либо возмущение с дефектом 1.*

Лемма 2.3.4. *Пусть w – бесселев вес для последовательности Λ по отношению к паре (T, μ) и $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$, $n \to \infty$. Если оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ обратим, то Λ – либо точное возмущение T, либо возмущение с избытком 1.*

Отметим, что из лемм 2.3.3, 2.3.4 следует, что последовательности $\Lambda^{(M)}$ и $\Lambda^{(P)}$ тривиальны, если оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ обратим. В дальнейшем мы увидим, что все три случая могут иметь место.

Доказательство лемм 2.3.3, 2.3.4 состоит из нескольких шагов. Мы начнем с простой оценки, которая будет применяться неоднократно.

Положим,

$$\varrho_n = \prod_{m=\max(1,n_0)}^{n} \frac{t_m^2}{|\lambda_m|^2}.$$

(В случае $n_0 \geq 1$ это определение совпадает с определением ϱ_n из главы 1). Нам понадобятся величины, двойственные M_n и P_n,

$$W_n = \sum_{m=n_0}^{n-1} w_m \quad \text{и} \quad Q_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{w_m}{|\lambda_m|^2}.$$

Лемма 2.3.5. *Если Λ – точное возмущение T и $t_n \simeq |\lambda_n|$, то верны следующие неравенства:*

$$\left|\log \frac{\varrho_m}{\varrho_n}\right|^2 \lesssim (M_{m+1} - M_{n+1})(Q_n - Q_m) \tag{2.3.8}$$

и

$$\left|\log \frac{\varrho_m}{\varrho_n}\right|^2 \lesssim (W_{m+1} - W_{n+1})(P_n - P_m) \tag{2.3.9}$$

для $m > n$. Если дополнительно $\mu_n = o(M_n)$ или $\mu_n/t_n^2 = o(P_n)$, $n \to \infty$, то $\log \varrho_n = o(n)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пользуясь оценкой $t_n \simeq |\lambda_n|$, мы получаем

$$\left|\log \frac{\varrho_m}{\varrho_n}\right| = 2\left|\sum_{l=n+1}^{m} \log \frac{t_l}{|\lambda_l|}\right| \lesssim \sum_{l=n+1}^{m} \left|1 - \frac{t_l}{|\lambda_l|}\right|. \tag{2.3.10}$$

Применяя неравенство Коши–Шварца, мы получаем

$$\left|\log \frac{\varrho_m}{\varrho_n}\right|^2 \lesssim \sum_{l=n+1}^{m} \mu_l \sum_{j=n+1}^{m} \frac{|t_j - \lambda_j|^2}{\mu_j |\lambda_j|^2}.$$

Последнее неравенство совпадает с неравенством (2.3.8).

По-другому разбив сомножители и применяя неравенство Коши–Шварца, получаем, что

$$\left|\log \frac{\varrho_m}{\varrho_n}\right|^2 \lesssim \sum_{l=n+1}^{m} \frac{|t_l - \lambda_l|^2}{\mu_l} \sum_{j=n+1}^{m} \frac{\mu_j}{t_j^2}.$$

Следовательно, выполнено неравенство (2.3.9).

Наконец, применяя неравенство Коши–Шварца к (2.3.10) в третий раз, мы получаем, что

$$|\log \varrho_n|^2 \lesssim n \sum_{l=\max(1,n_0)}^{n} \frac{|t_l-\lambda_l|^2}{|\lambda_l|^2} \lesssim n \sum_{l=\max(1,n_0)}^{n} \min\left(\frac{\mu_l}{M_l}, \frac{\mu_l}{t_l^2 P_l}\right).$$

Для доказательства последнего неравенства мы воспользовались тем, что Λ – точное возмущение T. Это дает нам последнее утверждение леммы. А именно, оценку $\log \varrho_n = o(n)$ при условии $\mu_n = o(M_n)$ или $\mu_n/t_n^2 = o(P_n)$ при $n \to \infty$. □

Теперь мы докажем лемму, которая является следствием теоремы 2.1.1.

Лемма 2.3.6. *Предположим, что $\mu_n = o(M_n)$ или $\mu_n/t_n^2 = o(P_n)$ при $n \to \infty$.*

Если ν – мера на $\mathbb{C}$ такая, что $\nu(T) = 0$ и отображение $H_{(T,\mu)}$ ограничено и ограничено снизу как оператор из ℓ^2 в $L^2(\mathbb{C}, \nu)$, то существуют положительные числа N и δ такие, что

$$\int_{D_n(\mu,N)} \frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2} \geq \delta$$

для всех n, кроме, быть может, конечного числа.

Доказательство. Применяя оператор $H_{(T,\mu)}$ к последовательностям $\{a_n^{(m)}\} = \{\delta_{n,m}\}$ и пользуясь тем, что $H_{(T,\mu)}$ ограничен снизу, получаем,

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2} \geq \sigma$$

для всех n и некоторого $\sigma > 0$, независимого от n.

С другой стороны, так как t_n растет как геометрическая прогрессия, а оператор $H_{(T,\mu)} : \ell^2 \mapsto L^2(\mathbb{C}, \nu)$ ограничен, получаем, что

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{\Omega_m} \frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2} \lesssim \mu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{\Omega_m} \frac{d\nu(z)}{|z|^2} \lesssim \min\left(\frac{\mu_n}{M_n}, \frac{\mu_n}{t_n^2 P_n}\right)$$

и

$$\sum_{m=1}^{n-1} \int_{\Omega_m} \frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2} \lesssim \frac{\mu_n}{t_n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\Omega_m} d\nu(z) \lesssim \min\left(\frac{\mu_n}{M_n}, \frac{\mu_n}{t_n^2 P_n}\right).$$

Также верна следующая оценка

$$\int_{\Omega_n \setminus D_n(\mu,N)} \frac{\mu_n d\nu(z)}{|z-t_n|^2} \leq \frac{1}{N} \int_{\Omega_n} \max\left(\frac{M_n}{|\lambda|^2}, P_n\right) d\nu(z) \lesssim \frac{1}{N}.$$

Мы опять воспользовались ограниченностью оператора $H_{(T,\mu)} : \ell^2 \mapsto L^2(\mathbb{C},\nu)$. Утверждение леммы следует из последнего неравенства, если мы положим $\delta = \sigma/2$ и выберем достаточно большое число N. $\square$

Лемма 2.3.6 показывает, что если оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ обратим, то последовательность Λ должна содержать подпоследовательность, являющуюся возмущением T. Следующие две леммы показывают, что сама Λ должна быть возмущением T.

Лемма 2.3.7. *Предположим, что $\mu_n = o(M_n)$ при $n \to \infty$. Если Λ – точное возмущение T, то Λ – множество единственности для $H_{(T,\mu)}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует нетривиальная последовательность $\{a_n\} \in \ell^2$ такая, что $H_{(T,\mu)}a$ обнуляется на Λ. Следовательно, существует целая функция J такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{z - t_n} = J(z) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - z/\lambda_m}{1 - z/t_m}$$

для каждого $z \in \mathbb{C} \setminus T$.

Если мы выберем N достаточно большим, то мы получим неравенство

$$\frac{M_n}{|z|^2} \gtrsim |J(z)|^2 \varrho_n$$

для $z \in \Omega_n \setminus D_n(\mu, N)$. Так как $\mu_n = o(M_n)$ при $n \to \infty$, левая часть неравенства ограничена сверху величиной $e^{-\delta n}$ для некоторого $\delta > 0$. С другой стороны, из леммы 2.3.5 следует, что $\varrho_n = e^{o(n)}$ при $n \to \infty$. Таким образом, максимум $|J(z)|$ в области $\Omega_n \setminus D_n(\mu, N)$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, $J(z) \equiv 0$. $\square$

Лемма 2.3.8. *Предположим, что $\mu_n/t_n^2 = o(P_n)$ при $n \to \infty$. Если Λ – возмущение Γ с избытком 1, то Λ – множество единственности для $H_{(T,\mu)}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует нетривиальная последовательность $\{a_n\} \in \ell^2$ такая, что $H_{(T,\mu)}a$ обнуляется на Λ. Следовательно, существует целая функция J такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{z - t_n} = J(z)(z - \lambda_0) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - z/\lambda_m}{1 - z/t_m}$$

для каждого $z \in \mathbb{C} \setminus T$.

Если мы выберем N достаточно большим, то мы получим неравенство

$$P_n \gtrsim |J(z)|^2 |z|^2 \varrho_n$$

для $z \in \Omega_n \setminus D_n(\mu, N)$. Так как $\mu_n/t_n^2 = o(P_n)$ при $n \to \infty$, величина $P_n/|z|^2$ не превосходит $e^{-\delta n}$ для некоторого $\delta > 0$. С другой стороны, из леммы 2.3.5 следует, что $\varrho_n = e^{o(n)}$ при $n \to \infty$. Таким образом, максимум $|J(z)|$ в области $\Omega_n \setminus D_n(\mu, N)$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, $J(z) \equiv 0$. $\square$

Теперь мы докажем еще две леммы, которые вместе с предыдущими тремя леммами в точности дадут утверждения леммы 2.3.3 и леммы 2.3.4.

Лемма 2.3.9. *Пусть $\mu_n = o(M_n)$ при $n \to \infty$. Если Λ – возмущение T с дефектом 2, то Λ не является множеством единственности для $H_{(T,\mu)}$.*

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\frac{c}{(z-t_1)(z-t_2)} \prod_{m=3}^{\infty} \frac{1 - z/\lambda_m}{1 - z/t_m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{z - t_n} + h(z),$$

где h – некоторая целая функция и

$$|a_n|^2 \simeq \frac{|t_n - \lambda_n|^2}{t_n^4} \varrho_n.$$

Так как Λ – точное возмущение T, мы получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_n}{t_n^2 M_n} < \infty.$$

Мы воспользовались тем, что отношение ϱ_n/M_n растет медленнее, чем геометрическая прогрессия. Следовательно,

$$|h(z)|^2 \lesssim \frac{\varrho_n}{|z|^4} + \frac{M_n}{|z|^2},$$

для любого $z \in \Omega_n \setminus D_n(\mu, N)$, где N достаточно велико. Еще раз воспользовавшись тем, что ϱ_n и M_n растут медленнее, чем геометрическая прогрессия, мы получаем, что $h(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Следовательно, $h \equiv 0$. $\square$

Лемма 2.3.10. *Предположим, что $\mu_n/t_n^2 = o(P_n)$ при $n \to \infty$. Если Λ – возмущение T с дефектом 1, то Λ не является множеством единственности для $H_{(T,\mu)}$.*

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\frac{c}{z-t_1} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1 - z/\lambda_m}{1 - z/t_m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{z - t_n} + h(z),$$

где h – некоторая целая функция и

$$|a_n|^2 \simeq \frac{|t_n - \lambda_n|^2}{t_n^2} \varrho_n.$$

Так как Λ – возмущение T, мы получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_n}{t_n^2 P_n} < \infty.$$

Мы воспользовались тем, что отношение ϱ_n / P_n растет медленнее, чем геометрическая прогрессия. Следовательно,

$$|h(z)|^2 \lesssim \frac{\varrho_n}{|z|^2} + P_n,$$

для любого $z \in \Omega_n \setminus D_n(\mu, N)$, где N достаточно велико. Мы доказали, что $h(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Следовательно, $h \equiv 0$. □

2.3.3. Геометрические критерии обратимости $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ при условии лакунарности T

В этом параграфе мы сформулируем геометрические условия обратимости при условии $\mu_n = o(M_n)$ или $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$ (т.е. когда есть локализация точек из Λ). Мы начнем со случая $\mu_n = o(M_n)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2.3.11. (*теорема 1.2.9*) *Предположим, что w – бесселев вес для последовательности Λ по отношению к паре (T, μ), $M_n \to \infty$ и $\mu_n = o(M_n)$ при $n \to \infty$. Тогда оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ обратим тогда и только тогда, когда $\sup_n M_n Q_n < \infty$ и выполнено одно из следующих условий:*

(0) Λ – точное возмущение T и для некоторых $C, \delta > 0$

$$\frac{\rho_m}{\rho_n} \le C \left(\frac{M_m}{M_n} \right)^{1-\delta}. \tag{2.3.11}$$

(1) Λ – возмущение T с дефектом 1 и для некоторых $C, \delta > 0$

$$\frac{\rho_m}{\rho_n} \ge C \left(\frac{M_m}{M_n} \right)^{1+\delta}. \tag{2.3.12}$$

Это удивительно, что в основном условия базисности Λ (обратимости $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$) зависят только от *модулей* комплексных чисел $\frac{t_n}{\lambda_n}$.

Еще раз отметим, что в случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty,$$

условия обратимости гораздо проще (см. теорему 1.2.10). Эти условия могут быть рассмотрены как специальный случай условий (0). Доказательство теоремы 1.2.10 будет аналогично доказательству части (0) теоремы 2.3.11.

Выведем теорему 1.2.11 из теоремы 2.3.11.

Доказательство. Из неравенства

$$\frac{|t_n - \lambda_n|}{|\lambda_n|} \lesssim \frac{\mu_n}{M_n}$$

следует, что

$$Q_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{w_m}{|\lambda_m|^2} \lesssim \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\mu_m}{M_{m+1}^2} \leq \frac{1}{M_{n+1}}.$$

В последнем неравенстве мы оценили интегральную сумму для функции $\frac{1}{x^2}$ на промежутке от M_{n+1} до ∞.

Заметим, что неравенство

$$t_n/|\lambda_n| - 1 \leq c\mu_n/M_n$$

влечет оценку

$$\log \frac{\varrho_m}{\varrho_n} \leq 2c\,(1 + o(1)) \sum_{j=n+1}^{m} \frac{\mu_l}{M_l} = 2c(1 + o(1)) \log \frac{M_m}{M_n}, \qquad (2.3.13)$$

если $m > n$, а $n \to \infty$.

Пользуясь теоремой 2.3.11, мы получаем случай (0) теоремы 1.2.11. Случай (1) доказывается аналогично, если мы рассмотрим неравенство, противоположное неравенству (2.3.13). □

Обратимся теперь к случаю $\mu_n/t_n^2 = o(P_n)$. В этом случае верна теорема, аналогичная теореме 2.3.11.

Теорема 2.3.12. *Предположим, что w – бесселев вес для последовательности Λ по отношению к паре (T, μ), $M_n \to \infty$ и $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$ при $n \to \infty$. Тогда оператор $H_{(T,\nu):(\Lambda,w)}$ обратим тогда и только тогда, когда $\sup_n W_n P_n < \infty$ и выполнено одно из следующих условий:*

(0) Λ – точное возмущение T и для некоторых $C, \delta > 0$

$$\frac{\varrho_m}{\varrho_n} \geq C \left(\frac{P_m}{P_n}\right)^{1-\delta} \qquad (2.3.14)$$

для $m > n$.

(1) Λ – возмущение T с избытком 1 и для некоторых $C, \delta > 0$

$$\frac{\varrho_m}{\varrho_n} \leq C \left(\frac{P_m}{P_n}\right)^{1+\delta} \qquad (2.3.15)$$

для $m > n$.

Отметим, что есть небольшая асимметрия между теоремами 2.3.11 и 2.3.12. С одной стороны, может случиться, что $\sup_n M_n < \infty$, а с другой стороны, условие $P_n \to 0$ выполнено автоматически. То есть во втором случае нам не требуется дополнительных предположений про P_n.

Следующий результат – аналог теоремы 1.2.11. Доказательство полностью аналогично, поэтому мы его опускаем.

Теорема 2.3.13. *Предположим, что $\mu_n/t_n^2 = o(P_n)$ при $n \to \infty$ и $\sup_n W_n P_n < \infty$.*

(0) Если Λ – точное возмущение T, и существует константа $c < 1/2$ такая, что

$$\frac{|\lambda_n|}{t_n} - 1 \le c\,\frac{\mu_n}{t_n^2 P_n}$$

для достаточно больших n, то оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ обратим.

(1) Если Λ – возмущение T с избытком 1, и существует константа $c > 1/2$ такая, что

$$\frac{|\lambda_n|}{t_n} - 1 \ge c\,\frac{\mu_n}{t_n^2 P_n}$$

для достаточно больших n, то оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ обратим.

Последние 2 параграфа этой главы посвящены доказательству теоремы 2.3.11 (1.2.9). Доказательство теоремы 2.3.12 полностью аналогично и поэтому мы его не приводим.

2.3.4. Доказательство необходимости условий теоремы 1.2.9

В дополнение к результатам параграфа 2.3.2 нам понадобится несколько простых фактов.

Лемма 2.3.14. *Пусть $c = \{c_n\}$ – последовательность положительных чисел.*

(i) Если существует константа C такая, что

$$\sum_{m=1}^{n-1} c_m \le C c_n$$

для $n > 1$, то существует положительная константа δ такая, что $c_m/c_n \ge C2^{\delta(m-n)}$ для $m > n$.

(ii) Если существует константа C такая, что $\sum_{m=n+1}^{\infty} c_m \le C c_n$ для $n > 1$, то существует положительная константа δ такая, что

$$c_m/c_n \le C2^{-\delta(m-n)}$$

для $m > n$.

Доказательство. Рассмотрим случай (i). Из условий леммы следует, что

$$Nc_{n-1} \leq N \sum_{m=1}^{n-1} c_m \leq C \sum_{m=n}^{n+N-1} c_m \leq C^2 c_{n+N}.$$

Если мы выберем N так, чтобы $N > 2C^2$, то $c_{n+j(N+1)} \geq 2^j c_n$. Требуемое неравенство получится, если мы положим $\delta = 1/(N+2)$. Доказательство случая (ii) аналогично. $\square$

Мы возвращаемся к доказательству необходимости условий теоремы 1.2.9. Мы знаем, что оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ обратим. В частности, это означает, что оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ ограничен. Из теоремы 2.1.1 мы получаем, что $\sup_n M_n Q_n < \infty$. Из леммы 2.3.3 следует, что Λ либо точное возмущение T, либо возмущение с дефектом 1. Следовательно, осталось доказать необходимость условий из (0) и (1) в соответствующих случаях.

Мы рассмотрим эти два случая отдельно:

(0) Λ *точное возмущение* T. Так как $\mu_n = o(M_n)$, бесселев вес $w = \{w_n\}$, определенный формулой (1.2.13), удовлетворяет неравенству

$$w_n \simeq \frac{|t_n - \lambda_n|^2}{\mu_n}. \tag{2.3.16}$$

Из этого неравенства мы выведем оценку на веса $\tilde{\mu}_n$ и $\tilde{w}_j$, появляющиеся в теореме 1.2.7.

Заметим, что если Λ – точное возмущение T и точная (полная и минимальная) последовательность для $H_{(T,\mu)}$, то существует константа c такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{z - t_n} = \frac{c}{z - t_1} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1 - z/\lambda_m}{1 - z/t_n} \tag{2.3.17}$$

для $z \in \mathbb{C} \setminus T$, где $e = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ вектор в ℓ^2 такой, что $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)} e = (1, 0, 0, ...)$.

Действительно, выражение в левой части имеет простые нули только в точках λ_m, $m > 1$, так как Λ – полная и минимальная последовательность для $H_{(T,\mu)}$.

Пользуясь (2.3.17), мы получаем, что

$$|e_n|^2 \simeq \frac{|\lambda_n - t_n|^2}{\mu_n |\lambda_n|^2} \varrho_n.$$

Следовательно, пользуясь (1.2.14) и (1.2.15), мы доказали оценку

$$\tilde{\mu}_n \simeq w_n \varrho_n. \tag{2.3.18}$$

С другой стороны, дифференцируя (2.3.17) в точке $z = \lambda_n$, мы получаем

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e_l \mu_l^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_n - t_l)^2}\right| \simeq \frac{t_n}{|\lambda_n|^2 |\lambda_n - t_n|} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{t_m}{|\lambda_m|}.$$

Следовательно, пользуясь (1.2.15) и (2.3.16), мы получаем

$$\tilde{w}_n \simeq \mu_n \varrho_n^{-1}. \tag{2.3.19}$$

Для удобства записи мы положим

$$M_n^{(\varrho,0)} = \sum_{m=1}^{n-1} \mu_m \varrho_m^{-1} \quad \text{и} \quad P_n^{(\varrho,0)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu_m |\lambda_m|^{-2} \varrho_m^{-1}.$$

Также положим

$$W_n^{(\varrho,0)} = \sum_{m=1}^{n-1} w_n \varrho_n \quad \text{и} \quad Q_n^{(\varrho,0)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} w_n \varrho_n |\lambda_n|^{-2}.$$

Из теорем 1.2.2 и 1.2.7 следует, что $\sup_n M_n^{(\varrho,0)} Q_n^{(\varrho,0)} < \infty$. Далее мы покажем, что из этого условия следует необходимость условий (0).

Положим, $n_1 = 2$, а индексы n_j определим последовательно при помощи неравенства $M_{n_{j+1}-1}/M_{n_j} < 2 \leq M_{n_{j+1}}/M_{n_j}$.

Пользуясь оценкой (2.3.8) из леммы 2.3.5 и равномерной ограниченностью величины $M_n Q_n$, мы заключаем, что существуют константы c и C такие, что $c < \varrho_n/\varrho_m \leq C$, где оба индекса n и m лежат в интервале $[n_j, n_{j+1}]$. Следовательно, мы получаем, что

$$M_{n_j}^{(\varrho,0)} \simeq \sum_{l=1}^{j} M_{n_l} \varrho_{n_l}^{-1}. \tag{2.3.20}$$

Предположим, что

$$Q_{n_j} - Q_{n_{j+1}} \geq \frac{\varepsilon}{M_{n_{j+1}}}. \tag{2.3.21}$$

Тогда наше условие $\sup_n M_n^{(\varrho,0)} Q_n^{(\varrho,0)} < \infty$ и (2.3.20) влечет существование константы C такой, что

$$\sum_{l=1}^{j} M_{n_l} \varrho_{n_l}^{-1} \leq C M_{n_{j+1}} \varrho_{n_{j+1}}^{-1}. \tag{2.3.22}$$

С другой стороны, если

$$Q_{n_j} - Q_{n_{j+1}} < \frac{\varepsilon}{M_{n_{j+1}}},$$

то оценка (2.3.3) из леммы 2.3.5 влечет неравенство $\varrho_{n_{j+1}}/\varrho_{n_j} \le 5/4$ для достаточно малых ε. Следовательно, мы имеем

$$\frac{M_{n_{j+1}}\varrho_{n_j}}{M_{n_j}\varrho_{n_{j+1}}} \ge \frac{8}{5}.$$

Это значит, что $M_{n_j}\varrho_{n_j}^{-1}$, возрастает как геометрическая прогрессия, на любом множестве последовательных индексов j, для которых неверна оценка (2.3.21). Комбинируя (2.3.22) с последней оценкой, мы получаем, что

$$\sum_{l=1}^{j} M_{n_l}\varrho_{n_l}^{-1} \le \left(\frac{5}{8}C + \frac{8}{3}\right) M_{n_{j+1}}\varrho_{n_{j+1}}^{-1},$$

когда условие (2.3.21) не выполнено, а ε достаточно мало. Следовательно, (2.3.22) выполнено для каждого индекса j при подходящем выборе константы C.

При помощи утверждения (i) леммы 2.3.14 мы получаем, что для некоторой константы C выполнено

$$\frac{\varrho_{n_{j+l}}}{\varrho_{n_j}} \le C\frac{M_{n_{j+l}}}{M_{n_j}}2^{-\delta l} \le C\left(\frac{M_{n_{j+l}}}{M_{n_j}}\right)^{1-\delta/2}.$$

Для доказательства последнего неравенства мы воспользовались тем, что $M_{n_{j+1}}/M_{n_j} \le 4$ для достаточно больших j. Мы доказали необходимость условий из пункта (0), так как достаточно доказать (2.3.11) для $n = n_j$ и $m = n_{j+l}$.

(1) Λ – *возмущение* T *с дефектом* 1. Так же, как и в предыдущем случае, мы начнем с оценок весовых последовательностей $\tilde{\mu} = \{\tilde{\mu}_n\}$ и $\tilde{w} = \{\tilde{w}_j\}$ из теоремы 1.2.7. Если Λ – возмущение T с дефектом 1 и точная (полная и минимальная) последовательность для $H_{(T,\mu)}$, то существует константа c такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n\mu_n^{\frac{1}{2}}}{z-t_n} = \frac{c}{(z-t_1)(z-t_2)}\prod_{m=3}^{\infty}\frac{1-z/\lambda_m}{1-z/t_n}$$

для $z \in \mathbb{C}\setminus T$, где $e = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ вектор в ℓ^2 такой, что $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}e = (1,0,0,...)$.

При помощи аналогичных рассуждений мы получаем оценки

$$\tilde{\mu}_n \simeq w_n\varrho_n t_n^{-2} \tag{2.3.23}$$

и

$$\tilde{w}_n \simeq \mu_n \varrho_n^{-1} t_n^2. \tag{2.3.24}$$

Положим,

$$M_n^{(\varrho,1)} = \sum_{m=1}^{n-1} \mu_n t_n^2 \varrho_n^{-1} \quad \text{и} \quad P_n^{(\varrho,1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu_n \varrho_n.$$

Также положим,

$$W_n^{(\varrho,1)} = \sum_{m=1}^{n-1} w_n t_n^{-2} \varrho_n \quad \text{и} \quad Q_n^{(\varrho,1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} w_n t_n^{-4} \varrho_n.$$

Из теорем 1.2.2 и 1.2.7 следует, что $\sup_n W_n^{(\varrho,1)} P_n^{(\varrho,1)} < \infty$. Далее мы покажем, что из этого условия следует необходимость условий (1).

Определим последовательность $\{n_j\}_j$ так же, как в прошлый раз. Мы имеем

$$P_{n_j}^{(\varrho,1)} \simeq \sum_{l=j+1}^{\infty} M_{n_l} \varrho_{n_l}^{-1} \tag{2.3.25}$$

при $j \geq 1$. Предположим, что

$$Q_{n_{j+1}} - Q_{n_j} \geq \frac{\varepsilon}{M_{n_{j+1}}}. \tag{2.3.26}$$

Тогда из условий $\sup_n W_n^{(\varrho,1)} P_n^{(\varrho,1)} < \infty$ и (2.3.25) следует, что

$$\sum_{l=j+1}^{\infty} M_{n_l} \varrho_{n_l}^{-1} \lesssim M_{n_j} \varrho_{n_j}^{-1}. \tag{2.3.27}$$

Как и в предыдущем случае, мы найдем настолько малое ε, что $M_{n_j} \varrho_{n_j}^{-1}$ растет, как геометрическая прогрессия, на любом множестве последовательных индексов j, для которых не выполнено (2.3.26). Оценка (2.3.25) влечет, что каждое такое множество конечно. Следовательно, существует возрастающая последовательность индексов n_j, для которых (2.3.27) выполнено и, на самом деле, число последовательных индексов j, для которых (2.3.26) не выполнено, равномерно ограничено. Следовательно, (2.3.27) выполнено для любого индекса $n_j \geq 1$.

Наконец, воспользовавшись частью (ii) леммы 2.3.14, мы получаем, что

$$\frac{\varrho_{n_{j+l}}}{\varrho_{n_j}} \geq C \frac{M_{n_{j+l}}}{M_{n_j}} 2^{\delta l} \geq C \left(\frac{M_{n_{j+l}}}{M_{n_j}} \right)^{1+\delta}$$

для некоторой константы C. Мы доказали необходимость условий из пункта (1), так как достаточно доказать (2.3.12) для $n = n_j$ и $m = n_{j+l}$.

2.3.5. Доказательство достаточности условий теоремы 1.2.9

Прежде всего, докажем, что условие $\sup_n M_n Q_n < \infty$ влечет ограниченность оператора $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$. Действительно, условие (1.2.10) теоремы 1.2.2 выолнено для меры $\nu = \sum_n w_n \delta_{\lambda_n}$.

Пользуясь условиями $\mu_n = o(M_n)$ и $\sup_n M_n Q_n < \infty$, мы получаем, что

$$W_n \lesssim \frac{t_n^2}{M_n} \quad \text{и} \quad P_n \lesssim \frac{\mu_n}{t_n^2}.$$

Следовательно, теорема 1.2.2 влечет, что оператор $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ ограничен.

Теперь мы хотим воспользоваться теоремой 1.2.7 для доказательства обратимости $H_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$. Нам осталось проверить, что Λ – полная и минимальная последовательность, а также, что условия (0) и (1) теоремы 1.2.9 влекут условия теоремы 1.2.2 для весов $\tilde{\mu}$ и $\tilde{w}$. Последовательность $\{n_j\}_j$ определена так же, как в предыдущем параграфе.

(0) Λ – *точное возмущение* T. Из леммы 2.3.7 мы знаем, что если Λ – точное возмущение T, то Λ – множество единственности для $H_{(T,\mu)}$. Проверим минимальность Λ. Рассмотрим тождество

$$\frac{c}{z - t_1} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1 - z/\lambda_m}{1 - z/t_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n v_n}{z - t_n} + h(z),$$

где h – некоторая целая функция и

$$|a_n| \simeq \frac{w_n}{t_n^2} \varrho_n.$$

Пользуясь условием $\sup_n M_n Q_n < \infty$, мы получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varrho_{n_j}}{M_{n_j}}.$$

Следовательно, (2.3.11) влечет, что $\{a_n\} \in \ell^2$.

В частности, мы получаем оценку

$$|h(z)|^2 \lesssim \frac{\varrho_n}{|z|^2} + \frac{M_n}{|z|^2},$$

если $z \in \mathbb{C} \setminus D_n(\mu, N)$ при достаточно большом N. Следовательно, $h(z) \to 0$ при $z \to \infty$, откуда мы заключаем, что $h \equiv 0$.

Осталось проверить, что оператор $H_{(\Lambda,\tilde{w}):(T,\tilde{\mu})}$ обратим.

Нам достаточно показать, что выполнены две оценки: $\sup_n W_n^{(\varrho,0)} P_n^{(\varrho,0)} < \infty$ и $\sup_n M_n^{(\varrho,0)} Q_n^{(\varrho,0)} < \infty$.

Так как последовательность ϱ_n растет медленнее, чем геометрическая прогрессия, мы получаем, что $\sup_n W_n^{(\varrho,0)} P_n^{(\varrho,0)} < \infty$ при помощи тех же рассуждений, которыми мы доказывали неравенство $\sup_n W_n P_n < \infty$.

Из условия $\sup_n M_n Q_n < \infty$ мы получаем, что

$$M_n^{(\varrho,0)} Q_n^{(\varrho,0)} \lesssim \sum_{n_j<n} \frac{M_{n_j}}{\varrho_{n_j}} \frac{\varrho_n}{M_n}.$$

Легко видеть, что правая часть неравенства равномерна ограничена при условии (2.3.11).

(1) Λ *возмущение* T *с дефектом* 1.

Из леммы 2.3.9 мы заключаем, что Λ – полная и минимальная последовательность для $H_{(T,\mu)}$, если мы покажем, что не существует нетривиальной последовательности $a \in \ell^2_v$ такой, что $H_{(T,\mu)} a$ обнуляется на Λ. Предположим противное. Тогда существует константа c такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \mu_n^{\frac{1}{2}}}{z - t_n} = \frac{c}{z - t_1} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1 - z/\lambda_m}{1 - z/t_n}. \tag{2.3.28}$$

Оценивая правую и левую часть формулы (2.3.28) для $z \in \Omega_n \setminus D_n(\mu, N)$ для достаточно больших N, мы получим

$$M_n \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 \gtrsim \varrho_n.$$

Это неравенство дает нам противоречие, так как (2.3.12) влечет, что последовательность ϱ_n / M_n возрастает.

Нам осталось проверить, что оператор $H_{(\Lambda,\tilde{w}):(T,\tilde{\mu})}$ ограничен. Заметим, что условие $\sup_n M_n^{(\varrho,1)} Q_n^{(\varrho,1)} < \infty$ выполнено, так как последовательность $\frac{1}{\varrho_n}$ растет не быстрее геометричской прогрессии. С другой стороны,

$$W_n^{(\varrho,1)} P_n^{(\varrho,1)} \lesssim \sum_{n_j<n} \frac{P_{n_j}}{\varrho_{n_j}} \frac{\varrho_n}{P_n}.$$

Легко видеть, что правая часть неравенства равномерна ограничена при условии (2.3.12).

Глава 3. Системы, биортогональные к системам из воспроизводящих ядер

В этой главе мы будем изучать полноту систем, биортогональных к точным системам из воспроизводящих ядер в пространствах дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$ ($\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$, $|t_n| \to \infty$). Как было показано в параграфе 1.1.5, такие пространства унитарно эквивалентны (с сохранением структуры воспроизводящих ядер) пространствам целых функций класса $\mathfrak{R}$ (т.е пространствам с базисом Рисса из воспроизводящих ядер и удовлетворяющим аксиоме деления). В дальнейшем мы не будем различать пространство дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$ и соответствующего пространства целых функций.

Оказывается, что наличие точной системы с неполной биортогональной зависит от малости нагрузок μ_n и, в некоторых случаях, связано с классической задачей о полноте полиномов.

3.1. Доказательства теорем 1.3.3 и 1.3.4

Мы напомним формулировки теорем 1.3.3 и 1.3.4.

Теорема 3.1.1. (*теорема 1.3.3*) *Пусть бесконечномерное пространство дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$ таково, что $\mu(\mathbb{C}) = \sum_n \mu_n < \infty$. Тогда существует точная система из воспроизводящих ядер такая, что биортогональная система неполна.*

Теорема 3.1.2. (*теорема 1.3.4*) *Пусть пространство дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$ таково, что*

$$\inf_n \mu_n (1 + |t_n|)^N > 0, \tag{3.1.1}$$

для какого-то N. Тогда система, биортогональная к точной системе из воспроизводящих ядер, всегда имеет конечную коразмерность. Если же, дополнительно, выполнено условие $\sum_n \mu_n = \infty$, то такая система всегда полна.

Мы начнем с некоторых замечаний, которые пригодятся при доказательстве обеих теорем.

Пусть $\{k_{\lambda_n}\}$ – точная система из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(T,\mu)$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\{\lambda_n\} \cap \{t_m\} = \emptyset$, так как мы всегда можем заменить последовательность $T = \{t_m\}$ на близкую к ней так, чтобы система $\{k_{t_m}/\|k_{t_m}\|_{\mathcal{H}(T,\mu)}\}$ осталась базисом Рисса. Предположим, что F и G – порождающие функции систем $\{k_{t_m}\}$ и $\{k_{\lambda_n}\}$ соответственно. Тогда система $\frac{G(z)}{G'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}$ биортогональна к системе $\{k_{\lambda_n}\}$ (см. параграф 1.1.5).

Любой вектор $h \in F\mathcal{H}(T,\mu)$ может быть разложен по базису Рисса $\{k_{t_m}/\|k_{t_m}\|\}$:

$$h = \sum_m \overline{a}_m \frac{k_{t_m}}{\|k_{t_m}\|}, \qquad \{a_m\} \in \ell^2. \tag{3.1.2}$$

Этот ряд сходится по норме и поточечно.

Функция h ортогональна биортогональной системе $\frac{G(z)}{z-\lambda_n}$ тогда и только тогда, когда для всех n выполнено

$$\left\langle \frac{G}{z-\lambda_n}, h \right\rangle = \sum_m \frac{a_m}{\|k_{t_m}\|} \cdot \frac{G(t_m)}{t_m - \lambda_n} = 0.$$

Рассмотрим мероморфную функцию

$$L(z) := \sum_m \frac{a_m}{\|k_{t_m}\|} \cdot \frac{G(t_m)}{t_m - z}.$$

Ряд в правой части сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}\backslash T$, так как $\frac{G}{z-\lambda_n} \in F\mathcal{H}(T,\mu)$ и, следовательно, $\left\{\frac{G(t_m)}{t_m\|k_{t_m}\|}\right\} \in \ell^2$.

Функция LF – целая с нулями в точках $\{\lambda_n\}$. Следовательно, $S := LF/G$ – целая функция, и

$$\frac{G(z)S(z)}{F(z)} = \sum_m \frac{a_m}{\|k_{t_m}\|} \cdot \frac{G(t_m)}{t_m - z}. \tag{3.1.3}$$

Приравнивая вычеты, мы получаем, что $a_m = S(t_m)\frac{\|k_{t_m}\|}{F'(t_m)} = \frac{|F'(t_m)|}{F'(t_m)} S(t_m)\mu_m^{1/2}$. Следовательно,

$$\sum_m |S(t_m)|^2 \mu_m < \infty. \tag{3.1.4}$$

Мы можем рассматривать функции S из уравнения (3.1.3) и удовлетворяющие неравенству (3.1.4) как параметризацию функций h, ортогональных к биортогональной системе $\{\frac{G(z)}{z-\lambda_n}\}$. Обозначим класс всех таких функций за $\mathcal{S}$. Это гильбертово пространство с нормой, заданной квадратным корнем выражения в левой части (3.1.4). Более того, отображение

$$S \mapsto \sum_m \frac{|F'(t_m)|}{\overline{F'(t_m)}} \cdot \overline{S(t_m)}\, \mu_m^{1/2} \cdot \frac{k_{t_m}}{\|k_{t_m}\|} -$$

унитарный оператор, действующий из $\mathcal{S}$ в ортогональное дополнение системы $\left\{\frac{G(z)}{z-\lambda_n}\right\}$.

Мы готовы доказать теорему 3.1.1.

Доказательство. (теоремы 3.1.1) Мы хотим построить порождающую функцию G точной системы из воспроизводящих ядер, подобрав нужные коэффициенты d_n в формуле $\frac{G(z)}{F(z)} = \sum_n \frac{d_n}{z-t_n}$. Ряд должен сходиться равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus T$.

Если такая функция G построена, то мы можем положить $S \equiv 1$ в формуле (3.1.3). Тогда функция

$$h = \sum_n \mu_n^{1/2} \cdot \frac{|F'(t_n)|}{\overline{F'(t_n)}} \cdot \frac{k_{t_n}}{\|k_{t_n}\|}$$

лежит в пространстве и ортогональна системе $\left\{\frac{G(z)}{z-\lambda_n}\right\}$.

Выберем коэффициенты c_n так, что $c_n t_n > 0$,

$$(1) \ \sum_n \frac{|c_n|^2}{\mu_n} < \infty; \qquad (2) \ \sum_n \frac{(c_n t_n)^2}{\mu_n} = \infty, \tag{3.1.5}$$

и положим $G(z) = F(z) \sum_n \frac{c_n t_n}{z-t_n}$. Из условия (3.1.5) мы знаем, что $G \notin F\mathcal{H}(T,\mu)$ и $\frac{G(z)}{z-\lambda_n} \in F\mathcal{H}(T,\mu)$ для любого нуля λ_n функции G.

Не умаляя общности, мы можем считать, что у G нет кратных корней, так как мы всегда можем немного поменять коэффициент c_0. Действительно, положим,

$$G(z) = c_0 \frac{F(z)}{z-t_0} + H(z) = c_0 F_1(z) + H(z).$$

Заметим, что функции F_1 и H не имеют общих нулей. Таким образом, если G и G' имеют общий нуль в точке z, то $F_1'(z)H(z) - H'(z)F_1(z) = 0$ и $c_0 F_1(z) + H(z) = 0$, но это возможно лишь для счетного набора коэффициентов c_0.

Для доказательства полноты системы $\{k_{\lambda_n}\}$ мы должны показать, что не существует нетривиальной целой функции U такой, что $UG \in F\mathcal{H}(T,\mu)$. Для того чтобы это доказать, мы добавим условия на c_n. Выберем подпоследовательность индексов $\{n_k\}$ настолько редкой, чтобы $|t_{n_{k+1}}| > 2|t_{n_k}|$. Следовательно, диски $D_k^1 = \{z : |z - t_{n_k}| \le \frac{|t_{n_k}|}{10}\}$ будут попарно дизъюнктны. Для других индексов $n \notin \{n_k\}$ мы выберем последовательность положительных чисел h_n такую, что $\sum_n h_n < 1$, а диски $D_n^2 = \{|z - t_n| \le h_n\}, n \notin \{n_k\}$ попарно дизъюнктны.

Предположим, дополнительно к (3.1.5), что

$$\sum_k c_{n_k} t_{n_k} < \infty.$$

Это условие может быть достигнуто, если мы положим $c_{n_k} := \mu_{n_k}^{1/2} t_{n_k}^{-1}$ и наложим дополнительное условие на $\{n_k\}$. А именно, $\sum_k \mu_{n_k}^{1/2} < \infty$. Отметим, что условие $\sum_k |t_{n_k}|^{-2} < \infty$ выполнено автоматически. Выберем теперь c_n для $n \notin \{n_k\}$ настолько малыми, что

$$\sum_{n \notin \{n_k\}} \frac{|c_n t_n^2|}{h_n} < \frac{1}{10} \sum_k c_{n_k} t_{n_k}, \qquad \sum_{n \notin \{n_k\}} c_n t_n < \frac{1}{10} \sum_k c_{n_k} t_{n_k}.$$

Предположим, что $UG \in F\mathcal{H}(T, \mu)$. Тогда $\frac{UG}{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{U(z)G(z)}{F(z)} = \sum_n \frac{c_n t_n U(t_n)}{z - t_n}, \qquad \sum_n \frac{|c_n t_n U(t_n)|^2}{\mu_n} < \infty. \tag{3.1.6}$$

Оценим фунцкию $G(z)/F(z)$ снизу для $z \notin (\cup D_k^1) \cup (\cup D_n^2)$:

$$\frac{|G(z)|}{|F(z)|} = \Big| \sum_n \frac{c_n t_n}{z - t_n} \Big| \geq$$

$$\frac{1}{|z|} \sum_n c_n t_n - \sum_{n \notin \{n_k\}} \frac{|c_n t_n^2|}{|z(z - t_n)|} - \sum_{n \in \{n_k\}} \frac{|c_n t_n^2|}{|z(z - t_n)|} \geq$$

$$\frac{1}{|z|} \sum_n c_n t_n - \sum_{n \notin \{n_k\}} \frac{|c_n t_n^2|}{|z| h_n} - \sum_{n \in \{n_k\}, |t_n| < |z|/3} \frac{c_n t_n}{2|z|} - 10 \sum_{n \in \{n_k\}, |t_n| \geq |z|/3} \frac{c_n t_n}{|z|}.$$

Заметим, что последняя сумма равна $o(|z|^{-1})$ при $|z| \to \infty$. Следовательно, для достаточно больших $|z|$

$$\frac{|G(z)|}{|F(z)|} \geq \frac{1}{4|z|} \sum_k c_{n_k} t_{n_k} \gtrsim \frac{1}{|z|}, \qquad z \notin (\cup D_k^1) \cup (\cup D_n^2).$$

Используя аналогичные рассуждения, мы можем получить, что

$$\frac{|U(z)G(z)|}{|F(z)|} \lesssim 1, \qquad z \notin (\cup D_k^1) \cup (\cup D_n^2).$$

Следовательно, $|U(z)| \lesssim 1 + |z|$ для $z \notin (\cup D_k^1) \cup (\cup D_n^2)$. Благодаря выбору t_{n_k} и h_n существуют окружности $\Gamma_n = \{z : |z| = r_n\}$, $r_n \to \infty$, такие, что $\Gamma_n \cap \big((\cup D_k^1) \cup (\cup D_n^2)\big) = \emptyset$. Следовательно, $U(z) = az + b$. Это противоречит условиям (3.1.6) и (2) в (3.1.5) при $T \neq 0$. □

Замечание 3.1.1. Отметим, что благодаря выбору коэффициентов $d_n = c_n t_n > 0$, все нули порождающей функции G (построенной в доказательстве теоремы 3.1.1) будут вещественны, если $\{t_n\}$ вещественны.

Для доказательства теоремы 3.1.2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1.3. *Если $S \in \mathcal{S}$, то $\frac{S(z)-S(w)}{z-w} \in \mathcal{S}$ для любого $w \in \mathbb{C}$. В частности, если $\mathcal{S}$ имеет конечную размерность $n+1$, то $\mathcal{S}$ совпадает с множеством $\mathcal{P}_n$ всех полиномов степени не выше n.*

Доказательство. Пусть λ_0 – корень функции G. Тогда $\frac{G(z)}{z-\lambda_0} \in F\mathcal{H}(T,\mu)$ и

$$\frac{G(z)}{(z-\lambda_0)F(z)} = \sum_m \frac{G(t_m)}{(t_m-\lambda_0)F'(t_m)(z-t_m)}. \tag{3.1.7}$$

Рассмотрим тождество

$$\frac{G(z)(S(z)-S(w))}{F(z)(z-w)} = \frac{1}{z-w}\left(\frac{G(z)S(z)}{F(z)} - \frac{G(w)S(w)}{F(w)}\right)$$

$$+\frac{(w-\lambda_0)S(w)}{z-w}\left(\frac{G(w)}{(w-\lambda_0)F(w)} - \frac{G(z)}{(z-\lambda_0)F(z)}\right) - S(w)\frac{G(z)}{(z-\lambda_0)F(z)}.$$

При помощи (3.1.3) и (3.1.7) получаем, что

$$\frac{1}{z-w}\left(\frac{G(z)S(z)}{F(z)} - \frac{G(w)S(w)}{F(w)}\right) = \sum_m \frac{a_m}{(t_m-w)\|k_{t_m}\|_{\mathcal{H}}} \cdot \frac{G(t_m)}{t_m-z},$$

$$\frac{1}{z-w}\left(\frac{G(z)}{(z-\lambda_0)F(z)} - \frac{G(w)}{(w-\lambda_0)F(w)}\right) = \sum_m \frac{a_m}{(t_m-\lambda_0)(t_m-w)F'(t_m)} \cdot \frac{G(t_m)}{t_m-z}.$$

Следовательно, мы показали, что функция $\frac{G(z)}{F(z)} \cdot \frac{S(z)-S(w)}{z-w}$ представима в виде ряда (3.1.3). Условие (3.1.4) для функции $\frac{S(z)-S(w)}{z-w}$ следует из сходимости ряда $\sum_n \frac{\mu_n}{1+|t_n|^2}$. □

Доказательство. (теоремы 3.1.2) Предположим, что система $\{\frac{G(z)}{z-\lambda_n}\}$ неполна. Зафиксируем функцию h из уравнения (3.1.2), которая ортогональна всем векторам $\frac{G(z)}{z-\lambda_n}$. Рассмотрим соответствующее пространство $\mathcal{S}$. Если $\mathcal{S}$ бесконечномерно, то мы можем найти функцию $S \in \mathcal{S}$, у которой есть как минимум $N+1$ нуль $w_1, ..., w_{N+1}$, не лежащий в $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и в $T = \{t_n\}$.

Из леммы 3.1.3 следует, что $U(z) := \frac{S(z)}{\prod_{l=1}^{N+1}(z-w_l)} \in \mathcal{S}$. Более того, коэффициенты из (3.1.3) для U равны $\frac{a_m}{\prod_{l=1}^{N+2}(t_m-w_l)}$.

Напомним, что система

$$f_m(z) := \frac{\|k_{t_m}\|_{\mathcal{H}}}{F'(t_m)} \cdot \frac{F(z)}{z-t_m} = \mu_m^{1/2} \cdot \frac{|F'(t_m)|}{\overline{F'(t_m)}} \cdot \frac{F(z)}{z-t_m}$$

биортогональна к базису Рисса $\{k_{t_m}/\|k_{t_m}\|\}$ и, следовательно, сама является базисом Рисса.

Тогда

$$G(z)U(z) = F(z)\sum_m \frac{a_m}{\prod_{l=1}^{N+1}(t_m - w_l)} \cdot \frac{G(t_m)}{\|k_{t_m}\|(z - t_m)} =$$

$$\sum_m \frac{a_m}{\mu_m^{1/2}\prod_{l=1}^{N}(t_m - w_l)} \cdot \frac{G(t_m)}{(t_m - w_{N+1})\|k_{t_m}\|} \cdot \mu_m^{1/2}\frac{F(z)}{z - t_m} =$$

$$=: \sum_m d_m f_m(z).$$

Заметим, что $\inf_m |\mu_m^{1/2}\prod_{l=1}^{N}(t_m - w_l)| > 0$. Если мы зафиксируем нуль λ_0 функции G, то

$$\Big|\frac{G(t_m)}{t_m - \lambda_0}\Big| \le \Big\|\frac{G(z)}{z - \lambda_0}\Big\| \cdot \|k_{t_m}\|.$$

Таким образом, $\{d_m\} \in \ell^2$ и, следовательно, $GU \in F\mathcal{H}(T,\mu)$. Это противоречит полноте системы $\{k_{\lambda_n}\}$.

Докажем последнее утверждение теоремы 3.1.2. Пусть $\sum_n \mu_n = \infty$. Если пространство $\mathcal{S}$ конечномерно, то, согласно лемме 3.1.3, $\mathcal{S}$ – пространство полиномов $\mathcal{P}_N$ для некоторого N. Это дает нам противоречие, так как $\sum_n |S(t_n)|^2\mu_n = \infty$ для любой $S \in \mathcal{S}\setminus\{0\}$. Следовательно, биортогональная система полна. □

В конце параграфа мы докажем пример 1.3.5. Напомним его формулировку.

Пример 3.1.4. (*пример 1.3.5*) *Существует пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ такое, что $\sum_n \mu_n = \infty$ и точная система из воспроизводящих ядер в нем такая, что биортогональная система неполна.*

Доказательство. Мы будем строить пространство в виде $\mathcal{H}(\mathbb{Z},\mu)$. То есть $t_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Соответствующая порождающая функция $F(z)$ совпадает с $\sin(\pi z)$. Положим,

$$S(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{(2^k + 1/2)^2}\right), \qquad G(z) = \cos(\pi z)/S(z).$$

Тогда

$$\frac{G(z)}{\sin(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{S^{-1}(n)}{\pi(z-n)}. \tag{3.1.8}$$

Действительно, разница между правой и левой частью в (3.1.8) должна быть целой функцией конечного экспоненциального типа. Так как $\lim_{|z|\to\infty}\frac{G(z)}{\sin \pi z} =$

0 вдоль любого негоризонтального луча в $\mathbb{C}_+$ или $\mathbb{C}_-$, эта разница равна нулю.

Положим, $\mu_n = |S(n)|^{-2}$ для $n \neq \pm 2^k$ и $\mu_n = 1$ в противном случае. Рассмотрим пространство $\mathcal{H} \in \mathfrak{R}$, соответствующее пространству $\mathcal{H}(\mathbb{Z}, \mu)$. Вначале мы покажем, что G – порождающая функция полной и минимальной системы из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}$. Из условия (3.1.8) мы заключаем, что $\frac{G(z)}{z-\lambda_0} \in \mathcal{H}$ для любого ноля λ_0 функции G. Нам осталось доказать, что не существует нетривиальной целой функции U такой, что $UG \in \mathcal{H}$. Предположим, что такая функция есть. Тогда

$$\frac{G(z)U(z)}{\sin(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S^{-1}(n)U(n)}{\pi(z-n)}, \qquad \sum_n \frac{|S^{-1}(n)U(n)|^2}{\mu_n} < \infty. \tag{3.1.9}$$

Из условия (3.1.9) следует, что U имеет экспоненциальный тип 0, и, в то же время, $\sum_k |U(2k+1)|^2 < \infty$. Следовательно, $U \equiv 0$ (см., например, [76, лекция 21]).

Из конструкции видно, что $\sum_n \mu_n = \infty$. Нам осталось показать, что существует нетривиальная $S_1 \in \mathcal{S}$. Положим,

$$S_1(z) = \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(2^k+\delta_k)^2}\right)$$

и выберем $\delta_k \in (0,1)$ настолько малыми, что $\sum_{k=1}^{\infty} |S_1(2^k)|^2 < \infty$. Заметим, что t $|S_1(n)| \lesssim |S(n)|$. Таким образом, $\sum_n |S_1(n)|^2 \mu_n < \infty$. С другой стороны, $\lim_{y\to\pm\infty} \frac{|S_1(iy)|}{|S(iy)|} = 0$, и мы получаем представление (3.1.3), в котором выполнено условие (3.1.4) для S_1.

Так как S_1 не является полиномом, пространство $\mathcal{S}$ бесконечномерно. Следовательно, в нашем случае, ортогональное дополнение к биортогональной системе бесконечномерно. □

3.2. Размер ортогонального дополнения к биортогональной системе

В этом параграфе мы подробно рассмотрим пространство $\mathcal{S}$, элементы которого соответствуют функциям, ортогональным биортогональной системе (см. формулу (3.1.3)). Прежде всего заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ пространство $\mathcal{S}$ может совпадать с множеством полиномов $\mathcal{P}_k$ степени не выше k. С другой стороны, мы показали в доказательстве примера 1.3.5, что $\mathcal{S}$ может быть бесконечномерно. Мы введем понятие размера для ортогонального дополнения к биортогональной системе.

Определение 3.2.1. *Пусть $\{k_\lambda\}$ – точная система из воспроизводящих ядер в пространстве $\mathcal{H} \in \mathfrak{R}$ с порождающей функцией G, а $\mathcal{S}$ – простран-*

ство, параметризирующее ортогональное дополнение к биортогональной системе. Пусть M – положительная возрастающая функция на $\mathbb{R}_+$. Мы будем говорить, что ортогональное дополнение к биортогональной системе имеет размер M, если существует $S \in \mathcal{S}$ такая, что для некоторого $y_0 > 0$,

$$\log |S(iy)| \geq M(|y|), \qquad |y| > y_0.$$

В этом параграфе мы будем рассматривать только вещественные последовательности $T = \{t_n\} \subset \mathbb{R}$. То есть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа. Следовательно, порождающая функция F совпадает с $A = \frac{E+E^*}{2}$.

Мы покажем, что, при некоторых незначительных ограничениях на $\{t_n\}$, любая функция из $\mathcal{S}$ имеет экспоненциальный тип 0. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ ортогональное дополнение к биортогональной системе не может иметь размер $M(r) = \varepsilon r$.

Теорема 3.2.2. *Пусть $t_n \in \mathbb{R}$, если G – порождающая функция точной системы из воспроизводящих ядер, а $\mathcal{S}$ – соответствующее пространство. Тогда любая функция $S \in \mathcal{S}$ имеет нулевой экспоненциальный тип.*

Мы получаем простое следствие предыдущей теоремы.

Следствие 3.2.3. *Пусть $t_n \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ ортогональное дополнение к биортогональной системе не может иметь размер $M(r) = \varepsilon r$.*

В дальнейшем мы будем использовать разложение функций из класса Харди H^2 на внутреннюю и внешнюю часть (см., например, [7,8,12]). Напомним, что функция f принадлежит *классу Смирнова*, если $f = g/h$, где g, h – ограниченные аналитические функции в $\mathbb{C}_+$, причем h внешняя.

Доказательство. Если λ_0 – нуль функции G, то $\frac{G}{z-\lambda_0} \in \mathcal{H}(E)$. Следовательно, $h := \frac{G}{(z-\lambda_0)E} \in H^2$. Докажем, что функция h не имеет сингулярного сомножителя вида e^{2iaz}, $a > 0$ (отметим, что h не имеет других сингулярных сомножителей, так как h аналитична на $\mathbb{R}$). Действительно, если $e^{-2iaz}h \in H^2$, то положим,

$$H(z) = e^{-iaz}\frac{\sin az}{z}G(z).$$

Тогда $H/E \in H^2$ и к тому же $H^*/E \in H^2$. Таким образом, $H \in \mathcal{H}(E)$. Это противоречит тому, что $\{\lambda : G(\lambda) = 0\}$ – множество единственности для $\mathcal{H}(E)$.

Рассмотрим внутреннюю функцию $\Theta = E^*/E$. Тогда $2F = E(1 + \Theta)$ и мы получаем, что

$$\frac{G(z)S(z)}{E(z)} = \sum_m \frac{a_m}{\|k_{t_m}\|_{\mathcal{H}}} \cdot \frac{1+\Theta(z)}{t_m - z} G(t_m) =: f.$$

Мы покажем, что функция f справа лежит в классе Смирнова в $\mathbb{C}_+$. Прежде всего, заметим, что если $v_m \geq 0$ и $\{v_m\} \in \ell^1$, то

$$\operatorname{Im} \sum_m \frac{v_m}{t_m - z} > 0, \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}_+.$$

Эта сумма лежит в классе Смирнова. Очевидно, что это верно и для произвольной последовательности $\{v_m\} \in \ell^1$.

Так как $\frac{G}{z-\lambda_0} \in \mathcal{H}(E)$, мы имеем $\{\|k_{t_m}\|^{-1} t_m^{-1} G(t_m)\} \in \ell^2$. Следовательно, $\{v_m\} \in \ell^1$, где

$$v_m = \frac{a_m}{\|k_{t_m}\|} \cdot \frac{G(t_m)}{t_m}.$$

Таким образом,

$$\frac{f(z)}{1 + \Theta(z)} = \sum_m v_m \frac{t_m}{t_m - z} = \sum_m v_m + z \sum_m \frac{v_m}{t_m - z}.$$

Следовательно, f лежит в классе Смирнова.

Мы доказали, что функция $S = f\left(\frac{G}{E}\right)^{-1}$ – отношение двух функций ограниченного вида и, следовательно, сама является функцией ограниченного вида (нули произведений Бляшке сокращаются). Более того, так как функция S аналитична на $\mathbb{R}$, она лежит в классе Смирнова, если у нее нет сомножителя вида e^{-2iaz} в стандартной внутренне-внешней факторизации. Этого сомножителя нет, так как мы показали, что функция $\frac{G}{E}$ не имеет сингулярного внутреннего сомножителя.

Используя те же аргументы, можно показать, что S лежит в классе Смирнова в нижней полуплоскости $\mathbb{C}^-$. Так как функция S лежит в классе Смирнова в обеих полуплоскостях $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$, она должна быть нулевого экспоненциального типа по теореме М. Крейна (см., например, [66, глава 1, Секция 6]). $\square$

Как мы показали в следствии 3.2.3, линейный рост функции M (который определяет размер ортогонального дополнения) невозможен. Следующее утверждение, которое относится к случаю $\mathcal{H}(\mathbb{Z}, \mu)$ (то есть $t_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$), показывает, что следствие 3.2.3 точно: для любого более медленного роста размер M может достигаться при подходящем выборе μ_n.

Утверждение 3.2.4. *Пусть $M(r)/r$ – убывающая функция, стремящаяся к 0 при $r \to \infty$. Тогда существует последовательность $\{\mu_n\}$ и точная система $\{k_\lambda\}$ в пространстве целых функций $\sin(\pi z)\mathcal{H}(\mathbb{Z}, \mu)$ такая, что ортогональное дополнение к биортогональной системе имеет размер M.*

Доказательство. Прежде всего, мы "атомизируем" функцию M. Существует возрастающая целозначная функции ν со скачками в полуцелых точках такая, что $M - \nu \in L^\infty$.

Мы будем полагать, что $\nu(0) = 0$, $\nu(1) = 1$. Пусть $S(z) = \prod_{t\in \operatorname{supp} d\nu}\big(1 - \frac{z^2}{t^2}\big)$. Мы хотим оценить $|S(iy)|$ для больших $|y|$:

$$\log|S(iy)| = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right)d\nu(t) = 2y^2\int_0^\infty \frac{\nu(t)dt}{t(y^2+t^2)}$$
$$\geq y\Big(\inf_{t\in[1/2,y]}\frac{\nu(t)}{t}\Big)\cdot\int_{1/2}^y \frac{y}{y^2+t^2}dt \gtrsim \nu(y), \qquad |y|\to\infty.$$

Теперь положим, $G(z) = \cos(\pi z)/S(z)$, $\mu_n = S^{-1}(n)$. Функция G имеет экспоненциальный тип π, и мы можем проверить, что G – порождающая функция некоторой точной системы, при помощи рассуждений из примера 3.1.4. Действительно, если $UG \in \sin(\pi z)\mathcal{H}(\mathbb{Z}$, то U имеет экспоненциальный тип 0 и $\sum_n |U(n)|^2 < \infty$. Следовательно, $U \equiv 0$. Осталось только заметить, что $(z-1/2)^{-1}S(z) \in \mathcal{S}$. □

Как мы видели при доказательстве утверждения 3.2.4, размер ортогонального дополнения биортогональной системы зависит от скорости убывания коэффициентов μ_n. Этот размер становится больше при увеличении скорости убывания μ_n. Тем не менее, теорема 1.3.6 показывает, что для экстремально малых μ_n биортогональная система всегда имеет конечную коразмерность. Это соответствует полиномиальному размеру $M(r) = n\log r$.

Теорема 3.2.5. (*теорема 1.3.6*) *Предположим, что* $\operatorname{supp}\mu = \mathbb{Z}$ *и* $\{\mu_n\}$ *настолько малы, что не существует нетривиальной последовательности* c_n *такой, что* $|c_n| < \mu_n^{1/2}$, $\sum_n c_n n^k = 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда в пространстве* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *любая система, биортогональная к точной системе из воспроизводящих ядер, имеет конечную коразмерность.*

Доказательство. Предположим, что G – порождающая функция точной системы, а λ_0 – нуль функции G. Следовательно,

$$\frac{G(z)}{(z-\lambda_0)F(z)} = \sum_n \frac{c_n}{z-t_n}, \qquad \sum_n \frac{|c_n|^2}{\mu_n} < \infty.$$

В частности, $\{c_n/\mu_n\} \in \ell^2(T,\mu)$. Так как полиномы плотны в $\ell^2(T,\mu)$, существует $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ такое, что $\langle\{c_n/\mu_n\}, t_n^N\rangle_{\ell^2(T,\mu)} = \sum_n c_n t_n^N \neq 0$.

Рассмотрим наименьшее такое N. Оценим функцию G/F снизу на мнимой оси. Рассмотрим тождество

$$\sum_n \frac{c_n}{iy-t_n} = \sum_{|t_n|\leq|y|/2}\frac{c_n}{iy-t_n} + \sum_{|t_n|>|y|/2}\frac{c_n}{iy-t_n}.$$

Так как $\sum_n |c_n| \cdot |t_n|^k < \infty$ для любого k, мы получаем, что

$$\Big| \sum_{|t_n|>|y|/2} \frac{c_n}{iy - t_n} \Big| = O\Big(\frac{1}{y^{N+2}}\Big), \qquad |y| \to \infty.$$

Для $|t_n| \le |y|/2$ верна оценка

$$(iy - t_n)^{-1} = \sum_{k\ge 0} \frac{t_n^k}{(iy)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{t_n^k}{(iy)^{k+1}} + r_n(y)\frac{t_n^{N+1}}{(iy)^{N+2}},$$

где $|r_n(y)| \le 2$. Следовательно,

$$\sum_{|t_n|\le|y|/2} \frac{c_n}{iy - t_n} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(iy)^{k+1}} \sum_n c_n t_n^k - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(iy)^{k+1}} \sum_{|t_n|>|y|/2} c_n t_n^k$$
$$+ \frac{1}{(iy)^{N+2}} \sum_n c_n r_n(y) t_n^{N+1} = \frac{1}{(iy)^{N+1}} \sum_n c_n t_n^N + O\Big(\frac{1}{y^{N+2}}\Big).$$

Мы получаем, что $|G(iy)|/|F(iy)| \ge c|y|^{-N-1}$, $|y| \to \infty$.

Пусть $S \in \mathcal{S}$ и, следовательно, для какой-то последовательности $\{a_m\} \in \ell^2$,

$$\frac{S(z)G(z)}{F(z)} = \sum_m \frac{a_m}{\|k_{t_m}\|} \cdot \frac{G(t_m)}{t_m - z}.$$

Мы получили, что

$$\Big| \sum_m \frac{a_m}{\|k_{t_m}\|} \cdot \frac{G(t_m)}{t_m - iy} \Big| \le \sum_m |a_m| \frac{|G(t_m)|}{\|k_{t_m}\|_{\mathcal{H}} |t_m|} =: A < \infty,$$

так как $\{\|k_{t_m}\|^{-1}|t_m|^{-1}G(t_m)\} \in \ell^2$. Следовательно,

$$|S(iy)| \le A\frac{|F(iy)|}{|G(iy)|} \le C|y|^{N+1}, \qquad |y| \to \infty.$$

Из теоремы 3.2.2 следует, что S имеет нулевой экспоненциальный тип. Следовательно, S - полином степени не выше $N+1$. Таким образом, пространство $\mathcal{S}$ конечномерно. □

Используя известные результаты о плотности полиномов, мы можем привести много примеров пространств, в которых биортогональная система имеет конечную коразмерность. Пример ниже относится к ситуации односторонней последовательности $\{t_n\}$ со степенным ростом нагрузок μ_n.

Пример 3.2.6. 1. Пусть $t_n = n^{1/\beta}$, $n \in \mathbb{N}$, а $\mu_n = \exp(-At_n^\alpha)$, где $A, \alpha > 0$. Если $\beta \ge 1/2$, то полиномы плотны в $\ell^2(T, \mu)$ тогда и только тогда, когда

$\alpha \geq 1/2$. Если $\beta < 1/2$, то полиномы плотны в $\ell^2(T, \mu)$ для $\alpha > \beta$ и не плотны для $\alpha < \beta$; если $\alpha = \beta$, то полиномы плотны тогда и только тогда, когда $A \geq \pi \cot \pi\beta$ (см. [47]).

2. Ситуация меняется, если мы добавим редкую последовательность на отрицательной полуоси. Положим,

$$t_n = \begin{cases} n^{1/\beta}, & n > 0,\ n \in \mathbb{Z}, \\ -|n|^{1/(\beta-1)}, & n < 0,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пусть $\mu_n = \exp(-t_n^\alpha)$, $\alpha > 0$. Используя результаты работы [33], можно показать, что для $1 < \beta < 3/2$, полиномы плотны в $\ell^2(T, \mu)$ для $\alpha > 1/2$ и не плотны для $\alpha < 1/2$. Для $3/2 \leq \beta < 2$ полиномы плотны в $\ell^2(T, \mu)$ для $\alpha > \beta - 1$ и не плотны для $\alpha < \beta - 1$.

Глава 4. Наследственная полнота систем из воспроизводящих ядер

В этой главе мы будем изучать свойство наследственной полноты для точных систем из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа. Главный результат – теорема 1.4.2 – состоит в *полной* характеризации пространств де Бранжа, в которых *любая* точная система из воспроизводящих ядер наследственно полна. Удивительным образом оказывается, что наследственная полнота в пространстве де Бранжа обычно отсутствует. С другой стороны, во многих конкретных примерах размер дефекта (т.е то, насколько далека система от наследственно полной) не слишком велик. Например, в пространстве Пэли–Винера дефект не более чем одномерен.

Случай пространства Пэли–Винера исследован подробнее ввиду его важности. В частности, мы докажем, что в пространстве Пэли–Винера дефектная смешанная система всегда содержит не слишком много элементов биортогональной системы.

4.1. План доказательства теоремы 1.4.2

В этом параграфе мы обсудим первые шаги доказательства (сведение проблемы о сильном базисе Маркушевича к системе интерполяционных уравнений) и дадим подробный план всего доказательства.

Напомним формулировку теоремы 1.4.2.

Теорема 4.1.1. (*теорема 1.4.2*) *Пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ обладает свойством наследственной полноты тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

(i)

$$\sum_n \mu_n < \infty; \tag{4.1.1}$$

(ii) последовательность $\{t_n\} = \operatorname{supp} \mu$ лакунарна, и для некоторого $C > 0$ и всех n выполнено неравенство

$$\sum_{|t_k| \le |t_n|} \mu_k + t_n^2 \sum_{|t_k| > |t_n|} \frac{\mu_k}{t_k^2} \le C \mu_n. \tag{4.1.2}$$

4.1.1. Сведение к интерполяционной проблеме

Мы будем использовать следующий критерий сильной базисности Маркушевича. *Пусть $\{x_n\}_{n \in N}$ – базис Маркушевича в гильбертовом пространстве H. Тогда $\{x_n\}_{n \in N}$ – сильный базис Маркушевича тогда и только тогда,* *когда любые два вектора $h, \tilde{h} \in H$ такие, что $(h, x_n) \cdot (\tilde{x}_n, \tilde{h}) = 0$ ортогональны* $(h, \tilde{h}) = 0$ (см., например, [70]).

Действительно, рассмотрим следующую переформулировку сильной базисности Маркушевича: для любого разбиения $N = N_1 \cup N_2$ выполнено $\overline{\mathrm{Span}}\{x_n : n \in N_1\} = \{\tilde{x}_n : n \in N_2\}^{\perp}$.

Условие $(h, x_n) \cdot (\tilde{x}_n, \tilde{h}) = 0$ значит, что для некоторого разбиения $N = N_1 \cup N_2$ мы имеем $h \in \{x_n : n \in N_1\}^{\perp}$ и $\tilde{h} \in \{\tilde{x}_n : n \in N_2\}^{\perp}$, в то время как $(h, \tilde{h}) = 0$. Обратное включение доказывается аналогично.

Мы будем применять этот критерий для базисов Маркушевича из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Напомним, что система $\left\{\frac{G(z)}{G'(\lambda)(z-\lambda)}\right\}$ биортогональна к $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Функция G – порождающая функция множества Λ, то есть целая функция с простыми нулями в Λ. Мы знаем, что $G \notin \mathcal{H}(E)$ (более того, условие $UG \in \mathcal{H}(E)$ для целой функции U влечет $U = 0$), а $g_\lambda := \frac{G(z)}{z-\lambda} \in \mathcal{H}(E)$ для любой точки $\lambda \in \Lambda$.

В дальнейшем мы всегда будем опускать нормализирующий фактор $G'(\lambda)$ и говорить, что $\{g_\lambda\}$ – система, биортогональная к $\{k_\lambda\}$. Тогда система $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – сильный базис Маркушевича тогда и только тогда, когда любые два вектора $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ такие, что

$$(h, k_\lambda) \cdot (g_\lambda, \tilde{h}) = 0, \qquad \lambda \in \Lambda, \tag{4.1.3}$$

ортогональны $(h, \tilde{h}) = 0$.

Не умаляя общности, мы можем считать, что $\Lambda \cap T = \emptyset$ (если необходимо, мы всегда можем выбрать другой ортогональный базис в $\mathcal{H}(E)$). Теперь перепишем условия (4.1.3).

Рассмотрим разложения векторов $h, \tilde{h}$ по ортогональному базису в пространстве де Бранжа $\frac{k_{t_n}(z)}{\|k_{t_n}\|_E} = \frac{(-1)^n \mu_n^{1/2}}{\pi} \cdot \frac{A(z)}{z-t_n}$,

$$h(z) = \pi \sum_n \overline{a_n}(-1)^n \cdot \frac{k_{t_n}(z)}{\|k_{t_n}\|} = A(z) \sum_n \frac{\overline{a_n} \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \qquad \{a_n\} \in \ell^2,$$

$$\tilde{h}(z) = \pi \sum_n \overline{b_n}(-1)^n \cdot \frac{k_{t_n}(z)}{\|k_{t_n}\|} = A(z) \sum_n \frac{\overline{b_n} \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \qquad \{b_n\} \in \ell^2.$$

Тогда $(h, \tilde{h}) = \sum_n \overline{a_n} b_n$. Уравнение (4.1.3) означает, что существует разбиение $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, такое, что $(g_\lambda, \tilde{h}) = 0$ для $\lambda \in \Lambda_1$ и $(h, k_\lambda) = 0$ для $\lambda \in \Lambda_2$.

Второе из этих уравнений означает, что $h(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Lambda_2$, в то время как первое уравнение может быть переписано как

$$\left(\frac{G(z)}{z - \lambda}, \tilde{h}\right) = \pi \sum_n \frac{b_n G(t_n)}{A'(t_n) \mu_n^{1/2} (t_n - \lambda)} = 0, \qquad \lambda \in \Lambda_1.$$

Следовательно, мы имеем систему интерполяционных уравнений

$$A(z)\sum_n \frac{b_n G(t_n)}{\mu_n^{1/2} A'(t_n)(z-t_n)} = G_1(z)S_1(z), \tag{4.1.4}$$

$$A(z)\sum_n \frac{\overline{a_n}\mu_n^{1/2}}{z-t_n} = G_2(z)S_2(z), \tag{4.1.5}$$

где G_1, G_2 – *некоторые* целые функции с простыми нулями в множествах Λ_1, Λ_2 соответственно такие, что $G = G_1G_2$, а S_1, S_2 – целые функции. Так как G – порождающая функция полной и минимальной системы из воспроизводящих ядер, мы знаем, что $G/G^* = B_1/B_2$ для каких-то произведений Бляшке B_1, B_2. В дальнейшем мы будем полагать, что функции G_1/G_1^*, G_2/G_2^* тоже представимы в виде отношения двух произведений Бляшке. Тогда функции S_1 и S_2 тоже удовлетворяют этому условию.

Отметим, что наша система уравнений также описывает случай неполноты биортогональной системы $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. В этом случае мы положим $G_1 = G$, $G_2 = 1$, а уравнение (4.1.5) становится тривиальным.

Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 4.1.2. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа. Тогда $\mathcal{H}(E)$ не обладает свойством наследственной полноты тогда и только тогда, когда существует базис Маркушевича $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(E)$ с порождающей функцией G такой, что для некоторого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ и ортогонального базиса $\{k_t\}_{t\in T}$ такого, что $\Lambda_1 \cap T = \emptyset$, существуют последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in \ell^2$ такие, что $\sum_n \overline{a}_n b_n \neq 0$, и выполнены уравнения* (4.1.4)–(4.1.5) *для некоторых целых функций S_1 и S_2.*

Приравнивая вычеты в точках t_n в (4.1.4)–(4.1.5), мы получаем следующее важное соотношение: если $S = S_1S_2$, то

$$S(t_n) = A'(t_n)\overline{a}_n b_n. \tag{4.1.6}$$

Замечание 4.1.1. 1. Отметим, что для того чтобы найти базис Маркшевича, не являющийся сильным базисом Маркушевича, достаточно найти две неортогональные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, удовлетворяющие уравнениям (4.1.4)–(4.1.5).

С другой стороны, из нашей конструкции видно, что если функция h ортогональна к системе $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$, то уравнения (4.1.4)–(4.1.5) выполнены для совпадающих последовательностей $\{a_n\} = \{b_n\}$.

2. Если $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – базис Маркушевича, то смешанная система $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ всегда полна в случае, если Λ_1 или Λ_2 – конечное множество. Таким

образом, мы можем рассматривать разбиения на бесконечные множества. Отметим, что в некоторых случаях есть асимметрия между множествами Λ_1 и Λ_2. Если $\mathcal{H}(E) = \mathcal{P}W_\pi$, а смешанная система $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ неполна, то Λ_1 – всегда малая часть Λ (см. параграф 4.7.3).

Следующее важное замечание показывает, что в Утверждении 4.1.2 мы всегда можем *зафиксировать спектральные данные* (T, μ) и рассматривать только системы $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ с дополнительным условием $\Lambda_1 \cap T = \emptyset$.

Замечание 4.1.2. Предположим, что $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – базис Маркушевича, который не является сильным базисом Маркушевича. Пусть набор (T_α, μ_α) – другие спектральные данные для $\mathcal{H}(E)$ такие, что $\Lambda_1 \cap T_\alpha \neq \emptyset$. Тогда, немного изменив последовательность Λ_1, мы можем построить новую последовательность $\tilde{\Lambda}_1$, $\tilde{\Lambda}_1 \cap T_\alpha = \emptyset$, такую, что система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\tilde{\Lambda}_1\cup\Lambda_2}$ – базис Маркушевича, а система $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\tilde{\Lambda}_1} \cup \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ неполна в $\mathcal{H}(E)$.

Действительно, пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_j^1\}$, а $\tilde{\lambda}_j^1 \notin T \cup T_\alpha$ – настолько малое возмущение λ_j^1, что $1/2 \le \prod_j \left|\frac{t_n - \tilde{\lambda}_j^1}{t_n - \lambda_j^1}\right| \le 2$ для любого n. Нетрудно проверить, что для достаточно малых возмущений уравнение (4.1.4) остается верным после умножения на $\prod_j \frac{z-\tilde{\lambda}_j^1}{z-\lambda_j^1}$:

$$\frac{G_1(z)S_1(z)}{A(z)} \cdot \prod_j \frac{z - \tilde{\lambda}_j^1}{z - \lambda_j^1} = \sum_n \frac{G(t_n)b_n}{\mu_n^{1/2}A'(t_n)(z - t_n)} \cdot \prod_j \frac{t_n - \tilde{\lambda}_j^1}{t_n - \lambda_j^1}.$$

Таким образом, мы получили уравнение вида (4.1.4) с функцией $\tilde{G}_1(z) = G_1(z)\prod_j \frac{z-\tilde{\lambda}_j^1}{z-\lambda_j^1}$ вместо G_1, с той же самой функцией S_1 и последовательностью $\{b_n\}$. Следовательно, система $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\tilde{\Lambda}_1} \cup \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ неполна в $\mathcal{H}(E)$. С другой стороны, легко показать, что достаточно малые возмущения сохраняют свойство базисности Маркушевича.

4.1.2. План доказательства

В параграфе 4.2 мы докажем достаточность условий (i) и (ii). Как было показано ранее, мы должны доказать, что уравнения (4.1.4)–(4.1.5) не имеют нетривиальных решений с дополнительным условием $\{a_n\} = \{b_n\}$. Достаточность условия (i) получается, когда мы сравниваем асимптотику правых частей и левых частей (4.1.4)–(4.1.5) вдоль мнимой оси. Доказать достаточность (ii) несколько сложнее. Нам понадобится информация о распределении нулей функций h и S.

Доказать необходимость условия (i) или (ii) гораздо труднее. Мы разделим все возможные ситуации на четыре случая, с каждым из которых будем разбираться отдельно:

(I) $\inf_n \mu_n = 0$ и $\sum_n \mu_n = \infty$;

(II) $\inf_n \mu_n > 0$ и существует подпоследовательность n_k такая, что $d_{n_k} := t_{n_k+1} - t_{n_k} = o(|t_{n_k}|)$, $k \to \infty$ и $d_{n_k} \gtrsim |t_{n_k}|^{-N}$ для некоторого $N > 0$;

(III) $\inf_n \mu_n > 0$ и существует подпоследовательность n_k такая, что $d_{n_k} = o(|t_{n_k}|^{-N})$ для любого $N > 0$ при $k \to \infty$;

(IV) $\inf_n \mu_n > 0$, $\inf_n \frac{d_n}{|t_n|} > 0$ и существует подпоследовательность n_k такая, что верна оценка, противоположная (4.1.2):

$$\mu_{n_k} = o\Big(\sum_{|t_l| \le |t_{n_k}|} \mu_l + t_{n_k}^2 \sum_{|t_l| > |t_{n_k}|} \frac{\mu_l}{t_l^2}\Big), \qquad k \to \infty.$$

Случай (I) разобран в параграфе 4.3. Один из ингредиентов доказательства – теорема 3.1.1: *если $\sum_n \mu_n < \infty$, то пространство де Бранжа с мерой Кларка μ содержит точную систему из воспроизводящих ядер с неполной биортогональной.* Мы будем пользоваться небольшим усилением этого результата (см. параграф 4.6).

Другой ингредиент доказательства – следующее наблюдение: свойство наследственной полноты для пространства де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ влечет то же самое свойство для всех *меньших* пространств де Бранжа, построенных по части спектральных данных $\mathcal{H}(E)$. Это наблюдение окажется полезным и при разборе других случаев.

Утверждение 4.1.3. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа с спектральными данными (T, μ) и $\sum_n \mu_n = \infty$. Предположим, что $T^\circ \subset T$, $\#(T \setminus T^\circ) = \infty$. Пусть $\mu^\circ = \mu|_{T^\circ}$, а $\mathcal{H}(E^\circ)$, $E^\circ = A^\circ - iB^\circ$, – пространство де Бранжа, построенное по спектральным данным (T°, μ°). Если существует точная система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda^\circ\}_{\lambda \in \Lambda^\circ}$ в $\mathcal{H}(E^\circ)$, которая не является сильным базисом Маркушевича, а порождающая функция G° удовлетворяет условию*

$$|G^\circ(iy)| \gtrsim |y|^{-N} |A^\circ(iy)|, \qquad |y| \to \infty, \tag{4.1.7}$$

для некоторого $N > 0$, то существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(E)$, который не является сильным базисом Маркушевича.

Отметим, что в утверждении 4.1.3 у системы $\{k_\lambda^\circ\}_{\lambda \in \Lambda^\circ}$ может быть неполная биортогональная система (именно этот случай нам понадобится при разборе случая (I)). С другой стороны, система $\{k_\lambda^\circ\}_{\lambda \in \Lambda^\circ}$ может быть базисом Маркушевича.

Доказательства в случаях (II)–(IV) состоят из двух шагов. Вначале (параграф 4.4) мы построим две вещественные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что:

(a) $\{a_n\} \in \ell^1$, $\{b_n\} \in \ell^1$, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$;

(b) $\sum_n a_n b_n > 0$;

(c) целые функции h и S, определенные по формулам

$$\frac{h(z)}{A(z)} = \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \qquad \frac{S(z)}{A(z)} = \sum_n \frac{a_n b_n}{z - t_n}, \tag{4.1.8}$$

имеют бесконечное число общих вещественных нулей $\{s_k\}$ таких, что $\operatorname{dist}(s_k, T) \gtrsim |s_k|^{-N}$, для некоторого $N > 0$.

(d) функция h такова, что $|h(iy)| \gtrsim |y|^{-1}|A(iy)|$ (отметим, что это условие всегда выполнено, если $a_n > 0$ для любого n).

Существование общих нулей – один из ключевых шагов доказательства. После того, как такие последовательности построены, мы получаем базис Маркушевича, не являющийся сильным, при помощи некоторого возмущения нулей функции h. Этот метод впервые был применен в статье [29] для конструкции такого базиса в пространстве Пэли–Винера.

Следующее утверждение (которое мы докажем в параграфе 4.5) завершает доказательство теоремы 4.1.1.

Утверждение 4.1.4. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа со спектральными данными (T, μ) такое, что $\sum_n \mu_n = \infty$. Предположим, что существуют две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, удовлетворяющие условиям (a)–(d). Тогда существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер, не являющийся сильным, и такой, что порождающая функция G удовлетворяет оценке $|G(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A(iy)|$ для некоторого $N > 0$.*

4.2. Достаточность условий (i) и (ii) теоремы 1.4.2

В этом параграфе мы покажем, что каждое из условий (i) и (ii) влечет утверждение, что любой базис Маркушевича из воспроизводящих ядер в соответствующем пространстве де Бранжа является сильным базисом. Доказательства в этих двух случаях будут существенно различаться.

Предположим, что пространство $\mathcal{H}(E)$ не обладает свойством наследственной полноты. Тогда из утверждения 4.1.2 следует, что существует разбиение $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ и нетривиальная последовательность $\{a_n\} \in \ell^2$ такая, что для некоторых целых функций S_1 и S_2 верны уравнения (4.1.4)–(4.1.5) при $b_n = a_n$.

Рассмотрим произведение уравнений (4.1.4)–(4.1.5),

$$A^2(z)\left(\sum_n \frac{\overline{a_n}\mu_n^{1/2}}{z - t_n}\right)\left(\sum_n \frac{a_n G(t_n)}{\mu_n^{1/2} A'(t_n)(z - t_n)}\right) = G(z)S(z) \tag{4.2.9}$$

Из соотношения (4.1.6) мы получаем, что $S(t_n) = A'(t_n)|a_n|^2$ и

$$\frac{S(z)}{A(z)} = R(z) + \sum_n \frac{|a_n|^2}{z - t_n}, \qquad (4.2.10)$$

где R – некоторая целая функция.

4.2.1. (i)$\Longrightarrow$ свойство наследственной полноты

Ряд

$$\sum_n \frac{G(t_n)}{A'(t_n)(z - t_n)}$$

сходится, так как $\left\{\frac{G(t_n)}{\mu_n^{1/2} A'(t_n) t_n}\right\} \in \ell^2$ и $\{\mu_n^{1/2}\} \in \ell^2$. Пусть λ_0 – произвольный нуль функции G. Пользуясь включением $\frac{G(z)}{z-\lambda_0} \in \mathcal{H}(E)$, мы получаем, что

$$\frac{G(z)}{A(z)} = c + \sum_n \frac{G(t_n)}{A'(t_n)(z - t_n)}. \qquad (4.2.11)$$

Теперь мы можем переписать уравнение (4.2.9) как

$$\sum_n \frac{a_n G(t_n)}{\mu_n^{1/2} A'(t_n)(z - t_n)} \cdot \sum_n \frac{\overline{a_n} \mu_n^{1/2}}{z - t_n} = \qquad (4.2.12)$$

$$\left(c + \sum_n \frac{G(t_n)}{A'(t_n)(z - t_n)}\right) \cdot \left(R(z) + \sum_n \frac{|a_n|^2}{z - t_n}\right).$$

Предположим, что $c = 0$ в (4.2.11). Покажем, что в этом случае система $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ортогональна к функции $B_0 \in \mathcal{H}(E)$,

$$B_0 = \sum_n \mu_n^{1/2} (-1)^n \cdot \frac{k_{t_n}}{\|k_{t_n}\|}. \qquad (4.2.13)$$

Действительно,

$$\left(\frac{G(z)}{z - \lambda}, B_0\right) = \pi \sum_n \frac{G(t_n)}{A'(t_n)(t_n - \lambda)} = 0, \qquad \lambda \in \Lambda,$$

и, следовательно, система $\{g_\lambda\}$ неполна. Таким образом, $c \neq 0$.

Мы будем использовать хорошо известный факт: если $\sum_n \frac{|c_n|}{1+|t_n|} < \infty$, то преобразование Коши $\sum_n \frac{c_n}{z-t_n}$ – функция класса Смирнова (т.е. отношение g/h двух ограниченных аналитических функций, причем функция h внешняя) в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ (см., например, [66, часть II, глава 1, §5] или обсуждение в парагафе 3.2).

Мы получаем, что S/A и, следовательно, R – функции класса Смирнова в $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$. При помощи теоремы М. Крейна (см., например, [66, часть II, глава 1]) мы получаем, что R имеет нулевой экспоненциальный тип. С другой стороны, левая часть (4.2.12) стремится к 0 вдоль мнимой оси. Следовательно, $R \equiv 0$.

Используем еще раз условие $\sum_n \mu_n < \infty$, мы получаем, что

$$\sum_n \frac{\overline{a_n}\mu_n^{1/2}}{iy - t_n} = O(|y|^{-1}), \qquad |y| \to \infty.$$

Мы знаем, что $1 \lesssim |(G/A)(iy)|$, $|y|^{-1} \lesssim |(S/A)(iy)|$. С другой стороны,

$$\sum_n \frac{a_n G(t_n)}{\mu_n^{1/2} A'(t_n)(iy - t_n)} = o(1), \qquad |y| \to \infty.$$

Это противоречит уравнению (4.2.12), так как правая часть имеет асимптотику $\asymp |y|^{-1}$, в то время как левая часть имеет асимптотику $o(|y|^{-1})$ при $|y| \to \infty$.

4.2.2. (ii)$\Longrightarrow$ свойство наследственной полноты

Доказательство будет состоять из нескольких шагов.

Шаг 1. Как и в предыдущем доказательстве, мы вначале (используя другое рассуждение) докажем, что $R \equiv 0$ в уравнении (4.2.10). Пусть 2φ – гладкая возрастающая ветвь аргумента функции Θ_E на $\mathbb{R}$ (фазовая функция E, см. главу 1, параграф 1.1.2). При помощи (1.1.4) и леммы 2.3.14 мы получаем, что производная φ' ограничена на $\mathbb{R}$.

Легко проверить, что R – полином. Если полином R нетривиален, то из (4.2.10) легко вывести, что нули s_n функции S таковы, что $\operatorname{dist}(s_n, T) \to 0$ при $|s_n| \to \infty$. Отметим, что нули функции S_2 не зависят от выбора спектральных данных (меры Кларка). Таким образом, для любых других спектральных данных мы имеем $\operatorname{dist}(s_n, \tilde{T}) \to 0$ при $|s_n| \to \infty$. С другой стороны, так как функция φ' ограничена на $\mathbb{R}$, мы получаем, что $\operatorname{dist}(T, \tilde{T}) \gtrsim 0$ (напомним, что $T = \{\Theta = -1\}$ и $\tilde{T} = \{\Theta = \alpha\}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$, $\alpha \neq -1$). Мы заключаем, что $R \equiv 0$.

Шаг 2. Пользуясь рассуждением из доказательства [29, лемма 2.4], мы можем показать, что можно считать, что функции S_1, S_2 – вещественны на вещественной оси. Покажем, что у функции S_2 бесконечно много вещественных нулей. Действительно, так как $S(t_n) = A'(t_n)|a_n|^2$, функция S меняет знак между любыми двумя последовательными точками t_n и, таким образом, S

имеет нуль в каждом интервале (t_{n-1}, t_n). Отметим, что $|S(iy)| \gtrsim |y|^{-1}|A(iy)|$. Если функция S_2 имеет только конечное число вещественных нулей, то $|S_1(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A(iy)|$ для некоторого $N > 0$. Это означает, что функция G_1 – полином (этот случай исключается при помощи замечания 4.1.1).

Шаг 3. Таким образом, мы показали, что преобразования Коши $\sum_n \frac{\overline{a_n}\mu_n^{1/2}}{z-t_n}$ и $\sum_n \frac{|a_n|^2}{z-t_n}$ имеют общие нули в точках $s_n \in (t_{n-1}, t_n)$ для n из некоторого *бесконечного* множества $\mathcal{N}$. Мы будем полагать, что $s_n \to \infty$. Таким образом,

$$\sum_{t_k<t_n} \frac{|a_k|^2}{s_n - t_k} + \frac{|a_n|^2}{s_n - t_n} + \sum_{t_k>t_n} \frac{|a_k|^2}{s_n - t_k} = 0.$$

Первая сумма не больше, чем $\frac{C}{t_n}$ для некоторого $C > 0$. Последняя сумма имеет асимптотику $o(t_n^{-1})$. Таким образом, $\frac{|a_n|^2}{\Delta_n} \geq \frac{C}{t_n}$, где $\Delta_n = t_n - s_n$. То есть $\Delta_n \leq \frac{|a_n|^2 t_n}{C}$. С другой стороны,

$$\sum_{k\neq n} \frac{\overline{a_k}\mu_k^{1/2}}{s_n - t_k} + \frac{\overline{a_n}\mu_n^{1/2}}{s_n - t_n} = 0.$$

Следовательно,

$$\Big|\sum_{|t_k|\leq t_n, k\neq n} \frac{\overline{a_k}\mu_k^{1/2}}{s_n - t_k}\Big| \lesssim$$

$$\frac{1}{t_n}\Big(\sum_{|t_k|\leq t_n} \mu_k\Big)^{1/2} \cdot \|\{a_n\}\|_{\ell^2} \lesssim \frac{\mu_n^{1/2}}{t_n},$$

и

$$\Big|\sum_{|t_k|>t_n} \frac{\overline{a_k}\mu_k^{1/2}}{s_n - t_k}\Big| \lesssim \sum_{|t_k|>t_n} \frac{\mu_k^{1/2}}{|t_k|} \cdot |a_k| \leq$$

$$\Big(\sum_{|t_k|>t_n} \frac{\mu_k}{t_k^2}\Big)^{1/2} \cdot \|\{a_n\}\|_{\ell^2} \lesssim \frac{\mu_n^{1/2}}{t_n}.$$

Мы получили, что $\frac{|a_n|\mu_n^{1/2}}{\Delta_n} \lesssim \frac{\mu_n^{1/2}}{t_n}$. С другой стороны, $\frac{\mu_n^{1/2}}{t_n|a_n|} \lesssim \frac{|a_n|\mu_n^{1/2}}{\Delta_n}$. Следовательно, неравенство $\frac{1}{|a_n|} \lesssim 1$ выполнено для бесконечного множества индексов n. Мы получили противоречие.

4.3. Примеры базисов Маркушевича, не являющихся сильными: случай I

В этом параграфе мы построим первые примеры ненаследственно полных систем (базисов Маркушевича, не являющихся сильными) в самом простом случае, когда $\sum_n \mu_n < \infty$.

4.3.1. Доказательство утверждения 4.1.3

Пусть$\{k_\lambda^\circ\}_{\lambda\in\Lambda^\circ}$ – точная система из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(E^\circ)$, которая не является сильным базисом Маркушевича, а G° – ее производящая функция. При помощи утверждения 4.1.2 и замечания 4.1.2 мы заключаем, что существует разбиение $\Lambda^\circ = \Lambda_1^\circ \cup \Lambda_2^\circ$ такое, что $\Lambda_1^\circ \cap T^\circ = \emptyset$ и

$$\begin{aligned} \frac{G_1^\circ(z)S_1^\circ(z)}{A^\circ(z)} &= \sum_{t_n\in T^\circ} \frac{b_n^\circ G^\circ(t_n)}{\mu_n^{1/2}(A^\circ)'(t_n)(z-t_n)}, \\ \frac{G_2^\circ(z)S_2^\circ(z)}{A^\circ(z)} &= \sum_{t_n\in T^\circ} \frac{\overline{a_n^\circ}\mu_n^{1/2}}{z-t_n} \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

для некоторых последовательностей $\{a_n^\circ\}$, $\{b_n^\circ\} \in \ell^2$ и целых функций S_1°, S_2°. Отметим, что здесь мы не исключаем случая неполноты системы $\{g_\lambda^\circ\}_{\lambda\in\Lambda^\circ}$ в $\mathcal{H}(E^\circ)$. В этом случае $G_1^\circ = G$, а $G_2^\circ \equiv 1$.

Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа со спектральными данными (T,μ). Тогда $E = A - iB$, где $\mathcal{Z}_A = T$, и мы можем записать функцию A как $A = A^\circ\tilde{A}$, причем $\mathcal{Z}_{\tilde{A}} = \tilde{T} = T\setminus T^\circ$. Положим, $a_n = a_n^\circ$, $t_n \in T^\circ$, а $a_n = 0$, $t_n \in \tilde{T}$. Определим последовательность b_n аналогично.

Тогда, умножая уравнения (4.3.14) на $\tilde{A}$ и используя тот факт, что $A'(t_n) = (A^\circ)'(t_n)\tilde{A}(t_n)$, $t_n \in T^\circ$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{G_1^\circ(z)S_1^\circ(z)\tilde{A}(z)}{A(z)} &= \sum_{t_n\in T} \frac{b_n G^\circ(t_n)\tilde{A}(t_n)}{\mu_n^{1/2}A'(t_n)(z-t_n)}, \\ \frac{G_2^\circ(z)\tilde{A}(z)S_2^\circ(z)}{A(z)} &= \sum_{t_n\in T} \frac{\overline{a_n}\mu_n^{1/2}}{z-t_n}. \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Положим, $G_1 = G_1^\circ$, $G_2 = G_2^\circ\tilde{A}$, $G = G_1G_2$, $\Lambda = \Lambda^\circ \cup \tilde{T}$. Тогда уравнения (4.3.15) имеют тот же вид, что и уравнения (4.1.4)–(4.1.5) для разбиения $\Lambda_1 = \Lambda_1^\circ$, $\Lambda_2 = \Lambda_2^\circ \cup \tilde{T}$ множества Λ. Следовательно, смешанная система $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ неполна.

Нам осталось показать, что система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – базис Маркушевича в $\mathcal{H}(E)$. Если система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ неполна, то существует целая функция H такая, что $GH = G^\circ \tilde{A} H \in \mathcal{H}(E)$. Следовательно, мы получаем, что

$$G^\circ(z)\tilde{A}(z)H(z) = A(z)\sum_n \frac{c_n\mu_n^{1/2}}{z-t_n},$$

где $\{c_n\} \in \ell^2$ и $c_n = 0$ если $t_n \in \tilde{T}$. Разделив обе части на $\tilde{A}$, мы получим $G^\circ(z)H(z) = A^\circ(z)\sum_{t_n\in T^\circ}\frac{c_n\mu_n^{1/2}}{z-t_n}$. Таким образом, $G^\circ H \in \mathcal{H}(E^\circ)$. Это противоречит полноте системы $\{k_\lambda^\circ\}_{\lambda\in\Lambda^\circ}$. Из конструкции выше видно, что $G/(\cdot - \lambda) \in \mathcal{H}(E)$ для любой $\lambda \in \Lambda$. Таким образом, G – порождающая функция точной системы в $\mathcal{H}(E)$.

Теперь предположим, что биортогональная система $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ неполна в $\mathcal{H}(E)$. Пусть (U,ν), $U = \{u_n\}$ – другие спектральные данные для $\mathcal{H}(E)$, соответствующие функции $E_\alpha = (\alpha E - E^*)/2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$, $\alpha \neq -1$.

При помощи замечаний из параграфа 1.1.2 мы получаем, что условия $A \notin \mathcal{H}(E)$ и $\mu(\mathbb{R}) = \infty$ влекут несуществование исключительного значения α и, следовательно, $\nu(\mathbb{R}) = \infty$.

При помощи рассуждений из параграфа 4.1.1 мы получаем, что существует последовательность $\{c_n\} \in \ell^2$ и ненулевая целая функция V такая, что

$$\frac{G(z)V(z)}{E_\alpha(z)} = \sum_n \frac{c_n G(u_n)}{\nu_n^{1/2}E_\alpha'(u_n)(z-u_n)}. \tag{4.3.16}$$

Сравнивая вычеты, мы получаем, что $V(u_n) = \nu_n^{-1/2}c_n$ и, следовательно, $V \in L^2(\nu)$. Функция E_α/A лежит в классе Смирнова в $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$. Мы знаем, что $|A(iy)/E_\alpha(iy)| \gtrsim |y|^{-1}$ (напомним, что $\frac{E_\alpha}{A} = \frac{\alpha-\Theta_E}{1+\Theta_E}$). Так как $|G^\circ(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A^\circ(iy)|$, мы получаем оценку

$$|G(iy)| = |G^\circ(iy)\tilde{A}(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A(iy)| \gtrsim |y|^{-N-1}|E_\alpha(iy)|.$$

Пользуясь теоремой М. Крейна, мы получаем, что V – полином. Так как $V \in L^2(\nu)$ и $\nu(\mathbb{R}) = \infty$, мы получаем, что $V \equiv 0$. $\square$

Замечание 4.3.1. Из доказательства утверждения 4.1.3 видно, что размерность ортогонального дополнения к системе $\{g_\lambda^\circ\}_{\lambda\in\Lambda_1^\circ} \cup \{k_\lambda^\circ\}_{\lambda\in\Lambda_2^\circ}$ в $\mathcal{H}(E^\circ)$ совпадает с размерностью ортогонального дополнения к $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ в $\mathcal{H}(E)$. Действительно, существует взаимно однозначное соответствие между последовательностями $a_n^\circ = b_n^\circ$, удовлетворяющими (4.3.14), и последовательностями $a_n = b_n$, удовлетворяющими (4.3.15).

Замечание 4.3.2. Заметим, что условие $|G^\circ(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A^\circ(iy)|$ было использовано только для доказательства полноты системы, биортогональной к $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Оба уравнения (4.1.4)–(4.1.5) для некоторого разбиения Λ и полнота системы $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ следуют без этого предположения.

4.3.2. (I)$\Longrightarrow \mathcal{H}(E)$ не обладает свойством наследственной полноты

Так как $\liminf_{|n|\to\infty} \mu_n = 0$, мы можем выбрать подпоследовательность $T^\circ = \{t_{n_k}\}$ такую, что $\sum_k \mu_{n_k} < \infty$. Пусть $\mathcal{H}(E^\circ)$ – пространство де Бранжа со спектральными данными (T°, μ°), $\mu^\circ = \mu|_{T^\circ}$ (следовательно, $\mu^\circ(\mathbb{R}) < \infty$).

При помощи теоремы 1.3.3 (и ее доказательства) мы можем получить, что существует точная система из воспроизводящих ядер $\{k^\circ_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda^\circ}$ в $\mathcal{H}(E^\circ)$, чья порождающая функция G° удовлетворяет условию $|G^\circ(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A^\circ(iy)|$ для некоторого $N > 0$ и такая, что биортогональная система $\{g^\circ_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda^\circ}$ неполна в $\mathcal{H}(E^\circ)$. Для доказательства этого (и немного более общего) факта см. утверждение 4.6.1. Таким образом, из утверждения 4.1.3 следует, что существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(E)$, не являющийся сильным. $\square$

4.4. Случаи II, III и IV: построение общих нулей

Как было объяснено в параграфе 4.1.1, мы должны сконструировать последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in \ell^2$ (или, что то же самое, два вектора h, $\tilde{h}$) и порождающую функцию G базиса Маркушевича из воспроизводящих ядер такую, что уравнения (4.1.4)–(4.1.5) выполнены и $\sum_n a_n\overline{b_n} = (h_1, h_2) \neq 0$.

Из утверждения 4.1.3 видно, что достаточно построить такой пример для любого сужения $\mu^\circ = \mu|_{T^\circ}$, $T^\circ \subset T$, $\#(T \setminus T^\circ) = \infty$ с дополнительным условием (4.1.7).

В этом параграфе мы сделаем первый шаг и построим, в каждом из случаев (II)–(IV), последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, удовлетворяющие условиям (a)–(d) из параграфа 4.1.2. В каждом из этих случаев существование общих нулей будет следовать из подходящей теоремы о неподвижной точке.

4.4.1. Случай (II)

Не умаляя общности, мы можем считать, что T – положительная последовательность. Переходя (если нужно) к подпоследовательности, мы будем считать, что

$$|t_{n_k}|^{-N} \lesssim d_{n_k} \lesssim |t_{n_k}|k^{-6} \text{ и } t_{n_{k+1}} > 2t_{n_k}.$$

Пусть множество индексов $\mathcal{N} = \{n_k\} \cup \{n_k + 1\}$. Let $s_k \in (t_{n_k}, t_{n_{k+1}})$ таково, что

$$\frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{\Delta_k^l} = \frac{\mu_{n_k+1}^{1/2}}{\Delta_k^r}, \qquad \Delta_k^l = s_k - t_{n_k}, \qquad \Delta_k^r = t_{n_k+1} - s_k.$$

Мы хотим выбрать коэффициенты таким образом, чтобы преобразования Коши

$$\sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z-t_n}, \qquad \sum_n \frac{a_n b_n}{z-t_n}$$

обращались в 0 в точках s_k. Предположим, что $\mu_{n_k+1} \geq \mu_{n_k}$ (в противном случае конструкцию нужно изменить понятным образом). Положим,

$$a_{n_k} = \frac{r_k}{k^2}, \qquad a_{n_k+1} = \frac{1}{k^2},$$

$$b_{n_k} = \frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{\mu_{n_k+1}^{1/2}} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{\Delta_k^l}{\Delta_k^r k^2}, \qquad b_{n_k+1} = \frac{q_k}{k^2}.$$

Числа $r_k, q_k \in (1/2, 3/2)$ будут свободными параметрами. У нас есть система уравнений

$$\begin{cases} \frac{r_k \mu_{n_k}^{1/2}}{k^2 \Delta_k^l} - \frac{\mu_{n_k+1}^{1/2}}{k^2 \Delta_k^r} + \sum\limits_{n \neq n_k, n_k+1} \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{s_k - t_n} = 0 \\ \frac{r_k}{k^2} \cdot \frac{\Delta_k^l}{\Delta_k^r k^2} \cdot \frac{1}{\Delta_k^l} - \frac{q_k}{k^2} \cdot \frac{1}{k^2 \Delta_k^r} + \sum\limits_{n \neq n_k, n_k+1} \frac{a_n b_n}{s_k - t_n} = 0. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ будет малым параметром, который мы зафиксируем позднее. Выберем $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n \notin \mathcal{N}$ настолько малыми положительными числами, чтобы

$$\sum_{n \notin \mathcal{N}} \left| \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{s_k - t_n} \right| + \sum_{n \notin \mathcal{N}} \left| \frac{a_n b_n}{s_k - t_n} \right| < \frac{\varepsilon}{t_{n_k}}.$$

С другой стороны, так как $\frac{t_{n_k}}{k^5 d_{n_k}} \to \infty$, мы можем начать с последовательности $\{t_{n_k}\}$ настолько редкой, что $\sum_{l<k} \mu_{n_l}^{1/2} < \frac{\varepsilon t_{n_k}}{k^5 d_{n_k}}$ и, следовательно,

$$\sum_{l \neq k} \frac{\mu_{n_l}^{1/2} + \mu_{n_l+1}^{1/2}}{|s_k - t_{n_l}|} \lesssim \frac{\varepsilon}{k^5 d_{n_k}}.$$

Теперь мы можем переписать нашу систему в удобной форме

$$\begin{cases} r_k + \frac{\Delta_k^r k^2}{\mu_{n_k+1}^{1/2}} \cdot \sum\limits_{j \neq k} \left(\frac{r_j \mu_{n_j}^{1/2}}{j^2 (s_k - t_{n_j})} + \frac{\mu_{n_{j+1}}^{1/2}}{j^2 (s_k - t_{n_{j+1}})} \right) + \frac{\Delta_k^r k^2}{\mu_{n_k+1}^{1/2}} \cdot \sum\limits_{n \notin \mathcal{N}} \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{s_k - t_n} = 1, \\ r_k - q_k + \Delta_k^r k^4 \sum\limits_{j \neq k} \left(\frac{r_j \mu_{n_j}^{1/2}}{j^4 \mu_{n_{j+1}}^{1/2} (s_k - t_{n_j})} + \frac{q_j}{j^4 (s_k - t_{n_{j+1}})} \right) + \Delta_k^r k^4 \sum\limits_{n \notin \mathcal{N}} \frac{a_n b_n}{s_k - t_n} = 0. \end{cases}$$

Невозмущенная система
$$\begin{cases} r_k = 1, \\ r_k - q_k = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение $r_k = q_k = 1$. С другой стороны,
$$\frac{\Delta_k^r k^2}{\mu_{n_k+1}^{1/2}}\Big[\sum_{n\notin\mathcal{N}} \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{|s_k - t_n|} + \sum_{j\neq k}\Big(\frac{\mu_{n_j}^{1/2}}{j^2|s_k - t_{n_j}|} + \frac{\mu_{n_j+1}^{1/2}}{j^2|s_k - t_{n_j+1}|}\Big)\Big] \lesssim \varepsilon,$$
$$\Delta_k^r k^4 \sum_{n\notin\mathcal{N}} \frac{a_n b_n}{|s_k - t_n|} \lesssim \varepsilon,$$

и

$$\Delta_k^r k^4 \sum_{j\neq k} \frac{1}{j^4}\Big(\frac{\mu_{n_j}^{1/2}}{\mu_{n_{j+1}}^{1/2}|s_k - t_{n_j}|} + \frac{1}{|s_k - t_{n_{j+1}}|}\Big) \lesssim \varepsilon.$$

Причем последние неравенства выполнены равномерно при $r_j, q_j \in (1/2, 3/2)$. Это значит, что для достаточно малого ε наша система имеет единственное решение $r_k, q_k \in (1/2, 3/2)$.

Так как числа a_n и b_n положительны, условия (a), (b) и (d) выполнены. Осталось заметить, что $1 \lesssim \mu_n \lesssim t_n^2$ (напомним, что $\sum \mu_n t_n^{-2} < \infty$). Так как $d_{n_k} \geq c|t_{n_k}|^{-N}$ для некоторых c, $N > 0$, мы получаем, что $s_k - t_{n_k} \gtrsim s_k^{-N-1}$. То же самое верно для $t_{n_k+1} - s_k$, причем $\operatorname{dist}(s_k, T) \gtrsim |s_k|^{-N-1}$. □

4.4.2. Случай (III)

Доказательство из предыдущего параграфа работает, если у нас есть подпоследовательность интервалов длины d_{n_k}, где $d_{n_k} = o(|t_{n_k}|)$ и $d_{n_k} \gtrsim |t_{n_k}|^{-N}$ для некоторого $N > 0$.

Трудности возникают, когда все короткие интервалы очень (сверхполиномиально) короткие. В этом случае мы не можем построить общий нуль в таких интервалах, если мы хотим сохранить условие степенной разделенности $\operatorname{dist}(s_k, T) \gtrsim |s_k|^{-N}$. Следовательно, мы должны строить общие нули вне интервалов и, следовательно, a_n и b_n не могут быть положительными для всех n.

При помощи утверждения 4.1.3 мы можем проредить нашу последовательность T. Таким образом, не умаляя общности, мы можем считать, что существует последовательность индексов $\{n_k\}$ такая, что
$$\mu_{n_k} \gtrsim 1, d_{n_k} \leq 1, t_{n_k-1} < t_{n_k}/2, \text{ и } t_{n_k+2} > 2t_{n_k+1}.$$

Более того, пусть t_{n_k} растет быстрее геометрической прогрессии. А именно, пусть $k^6 t_{n_j} < \varepsilon t_{n_k}$ при $j < k$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Дополнительно предположим, что $\mu_{n_k} \le \mu_{n_k+1}$. Тогда мы будем строить общие нули s_k в точках $t_{n_k} - 1$ (если $\mu_{n_k} > \mu_{n_k+1}$, то точки $t_{n_k+1} + 1$ должны быть взяты в качестве общих нулей). Положим,

$$\begin{cases} a_{n_k} = \frac{r_k}{k^2}, \quad a_{n_k+1} = -\frac{1}{k^2} \cdot \frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{\mu_{n_k+1}^{1/2}}(d_{n_k} + 1), \\ b_{n_k} = \frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{\mu_{n_k+1}^{1/2}} \cdot \frac{1}{k^2}, \quad b_{n_k+1} = \frac{q_k}{k^2}. \end{cases} \tag{4.4.17}$$

Мы выберем a_0, b_0 достаточно большими, а a_n, b_n, $n \ne n_k, n_k + 1, 0$ положительными и малыми (точные условия будут предъявлены позднее). У нас есть система уравнений

$$\sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{s_k - t_n} = \sum_n \frac{a_n b_n}{s_k - t_n} = 0,$$

и мы пытаемся найти решение (r_k, q_k) этой системы такое, что $r_k, q_k \in (1/2, 3/2)$.

Перепишем нашу систему, используя (4.4.17):

$$\begin{cases} \sum\limits_{l<n_k} \frac{a_l \mu_l^{1/2}}{s_k - t_l} - \frac{r_k}{k^2}\mu_{n_k}^{1/2} + \frac{1}{k^2}\mu_{n_k}^{1/2} + \sum\limits_{l>n_k+1} \frac{a_l \mu_l^{1/2}}{s_k - t_l} = 0 \\ \sum\limits_{l<n_k} \frac{a_l b_l}{s_k - t_l} - \frac{r_k}{k^4} \cdot \frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{\mu_{n_k+1}^{1/2}} + \frac{q_k}{k^4} \cdot \frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{\mu_{n_k+1}^{1/2}} + \sum\limits_{l>n_k+1} \frac{a_l b_l}{s_k - t_l} = 0, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} r_k = 1 + \frac{k^2}{\mu_{n_k}^{1/2}} \cdot \left(\sum\limits_{j \ne k} \frac{r_j}{j^2} \frac{\mu_{n_j}^{1/2}}{s_k - t_{n_j}} - \sum\limits_{j \ne k} \frac{1}{j^2} \frac{\mu_{n_j}^{1/2}(d_{n_j}+1)}{s_k - t_{n_j+1}} \right) + \frac{k^2}{\mu_{n_k}^{1/2}} \cdot \sum\limits_{l \notin \mathcal{N}} \frac{a_l \mu_l^{1/2}}{s_k - t_l} \\ r_k - q_k = \frac{k^4 \mu_{n_k+1}^{1/2}}{\mu_{n_k}^{1/2}} \cdot \left(\sum\limits_{j \ne k} \frac{r_j}{j^4} \frac{\mu_{n_j}^{1/2}}{\mu_{n_j+1}^{1/2}(s_k - t_{n_j})} - \sum\limits_{j \ne k} \frac{q_j}{j^4} \frac{\mu_{n_j}^{1/2}(d_{n_j}+1)}{\mu_{n_j+1}^{1/2}(s_k - t_{n_j})} \right) + \\ \qquad \frac{k^4 \mu_{n_k+1}^{1/2}}{\mu_{n_k}^{1/2}} \cdot \sum\limits_{l \notin \mathcal{N}} \frac{a_l b_l}{s_k - t_l} \end{cases} \tag{4.4.18}$$

где $\mathcal{N} = \{n_k\} \cup \{n_k + 1\}$. Мы хотим думать, что эта система – малое возмущение линейной системы $r_k = 1$, $r_k - q_k = 0$.

Все суммы с индексами $l \notin \mathcal{N} \cup \{0\}$ могут быть сделаны сколь угодно малыми подходящим выбором коэффициентов a_l, b_l. То же самое верно для $l = 0$, так как $\mu_n^{1/2} = o(t_n)$.

Дополнительно мы будем предполагать, что

$$\frac{k^4\mu_{n_k+1}^{1/2}}{t_{n_k}} < 2^{-k}\varepsilon \min_{j<k} \mu_{n_j+1}^{-1/2}.$$

Теперь мы хотим оценить коэффициенты при r_j в первом уравнении системы (4.4.18). Если $j < k$, то

$$\frac{k^2}{\mu_{n_k}^{1/2}} \cdot \frac{\mu_{n_j}^{1/2}}{|s_k - t_{n_j}|} \lesssim \frac{k^2\mu_{n_j}^{1/2}}{s_k} \lesssim \frac{k^2 t_{n_j}}{t_{n_k}} \lesssim \frac{\varepsilon}{k^4}.$$

Если $j > k$, то

$$\frac{k^2}{\mu_{n_k}^{1/2}} \cdot \frac{\mu_{n_j}^{1/2}}{|s_k - t_{n_j}|} \lesssim \frac{k^2\mu_{n_j}^{1/2}}{t_{n_j}} < \frac{j^2\mu_{n_j}^{1/2}}{t_{n_j}} < \varepsilon 2^{-j}.$$

Аналогичные оценки верны для коэффициентов r_j и q_j во втором уравнении системы (4.4.18) и для сумм $\frac{k^2}{\mu_{n_k}^{1/2}} \cdot \sum_{j\neq k} \frac{1}{j^2} \frac{\mu_{n_j}^{1/2}(d_{n_j}+1)}{s_k - t_{n_j+1}}$.

Следовательно, если мы определим A_{kj} как коэффициент при r_j в первом уравнении системы (4.4.18), а B_{kj} и C_{kj} как коэффициент при r_j и q_j во втором уравнении системы (4.4.18), то мы получим, что $\sum_{k,j:k\neq j} |A_{kj}| + |B_{kj}| + |C_{kj}| \lesssim \varepsilon$.

Невозмущенная система имеет решение $r_k = q_k = 1$. Следовательно, для достаточно малых ε мы можем найти решение возмущенной системы такое, что $r_k, q_k \in (1/2, 3/2)$. Если мы начнем с достаточно больших a_0, b_0, мы получим дополнительное условие $\sum_n a_n b_n > 0$.

Нам осталось доказать, что функция h удовлетворяет условию (d). Это нетривиально, так как теперь последовательность a_n меняет знак.

Доказательство (d). Зафиксируем достаточно большое a_0. По построению чисел a_{n_k} и a_{n_k+1} мы имеем

$$D_k := a_{n_k}\mu_{n_k}^{1/2} + a_{n_k+1}\mu_{n_k+1}^{1/2} =$$

$$\frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{k^2}(r_k - 1 - d_{n_k}) = \sum\nolimits_{l\neq n_k, n_k+1} \frac{a_l\mu_l^{1/2}}{s_k - t_l} - \frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{k^2} d_{n_k}.$$

Выберем последовательность t_{n_k} достаточно редкой, мы можем сделать суммы из уравнения выше настолько малыми, насколько мы хотим (равномерно для всех значений r_k и $q_k \in (1/2, 3/2)$.

Напомним, что $d_{n_k} = o(t_{n_k}^{-N})$ для всех N, а $\mu_{n_k} \lesssim t_{n_k}^2$. Таким образом, второе слагаемое может быть сделано сколь угодно малым. Следовательно, ряд $\sum_k D_k$ сходится абсолютно, и его сумма может быть сделана сколь угодно малой.

Наконец, пусть $a_n > 0$ будут настолько малыми для $n \notin \mathcal{N} \cup \{0\}$, что

$$a_0\mu_0^{1/2} + \sum_k D_k + \sum_{n\in\mathcal{N}} a_n\mu_n^{1/2} > 0. \tag{4.4.19}$$

Мы знаем, что

$$\frac{h(iy)}{A(iy)} = \frac{a_0\mu_0^{1/2}}{iy-t_0} +$$

$$\sum_k \left(\frac{a_{n_k}\mu_{n_k}^{1/2}}{iy-t_{n_k}} + \frac{a_{n_k+1}\mu_{n_k+1}^{1/2}}{iy-t_{n_k+1}}\right) + \sum_{n\in\mathcal{N}} \frac{a_n\mu_n^{1/2}}{iy-t_n}$$

$$= \frac{a_0\mu_0^{1/2}}{iy-t_0} + \sum_k \frac{D_k}{iy-t_{n_k}} +$$

$$\sum_k \frac{a_{n_k+1}\mu_{n_k+1}^{1/2}(t_{n_k+1}-t_{n_k})}{(iy-t_{n_k+1})(iy-t_{n_k+1})} + \sum_{n\in\mathcal{N}} \frac{a_n\mu_n^{1/2}}{iy-t_n}.$$

Так как $d_{n_k} = t_{n_k+1} - t_{n_k} = o(t_{n_k}^{-N})$ для любого $N > 0$ при $k \to \infty$, а $\mu_{n_k+1} \lesssim t_{n_k}^2$, мы получаем, что

$$\sum_k \frac{a_{n_k+1}\mu_{n_k+1}^{1/2}(t_{n_k+1}-t_{n_k})}{(iy-t_{n_k+1})(iy-t_{n_k+1})} = O\Big(\frac{1}{y^2}\Big), \qquad |y| \to \infty.$$

Из (4.4.19) следует, что $|h(iy)| \gtrsim |y|^{-1}|A(iy)|$. □

4.4.3. Случай (IV)

Не умаляя общности, мы можем считать, что T – положительная лакунарная последовательность. Мы знаем, что условие (4.1.2) не выполнено. Пусть существует подпоследовательность индексов $\{n_k\}$ такая, что $\sum_{l<n_k} \mu_l \gtrsim \mu_{n_k}$. Мы выберем быстровозрастающую последовательность индексов $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ такую, что

$$n_{k-1} < m_k < n_k, \qquad \sum_{l=m_k}^{n_k-1} \mu_l > k^6\mu_{n_k}. \tag{4.4.20}$$

Положим,

$$a_l = \mu_l^{1/2} \cdot \left(\sum_{p=m_k}^{n_k-1} \mu_p \right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{k}, \quad m_k \le l \le n_k - 1, \qquad a_{n_k} = \frac{1}{k^2}.$$

Мы можем начать с последовательностей $\{n_k\}$, $\{m_k\}$, растущих столь быстро, и выбрать положительные $\{a_n\}$, $n \notin \cup[m_k, n_k]$ столь малыми, что

$$\sum_{n<m_k} a_n \mu_n^{1/2} = o\Big(\frac{1}{k} \cdot \Big(\sum_{l=m_k}^{n_k-1} \mu_l\Big)^{1/2}\Big), \qquad \sum_{n>n_k} \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{t_n} = o\Big(\frac{1}{k t_{n_k}}\Big), \qquad k \to \infty. \tag{4.4.21}$$

Пусть s_k – единственный корень функции $\sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}$ в интервале (t_{n_k-1}, t_{n_k}). Тогда

$$\sum_{n<m_k} \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{s_k - t_n} + \sum_{l=m_k}^{n_k-1} \frac{a_l \mu_l^{1/2}}{s_k - t_l} + \frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{k^2 (s_k - t_{n_k})} + \sum_{n>n_k} \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{s_k - t_n} = 0. \tag{4.4.22}$$

Отсюда мы заключаем, что числа $\Delta_{n_k} = t_{n_k} - s_k$ удовлетворяют оценке

$$\frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{k^2 \Delta_{n_k}} \ge \frac{1}{t_{n_k}} \sum_{l=m_k}^{n_k-1} a_l \mu_l^{1/2} + o\Big(\frac{1}{k t_{n_k}}\Big) = \frac{1 + o(1)}{k t_{n_k}} \left(\sum_{l=m_k}^{n_k-1} \mu_l\right)^{1/2}, \qquad k \to \infty. \tag{4.4.23}$$

При помощи (4.4.20) мы получаем, что $\Delta_{n_k} = o(t_{n_k})$. Применяя (4.4.22) снова, мы получаем оценку, обратную к (4.4.23). Следовательно,

$$\Delta_{n_k} \asymp \frac{\mu_{n_k}^{1/2}}{k} \cdot \left(\sum_{l=m_k}^{n_k-1} \mu_l\right)^{-1/2} \cdot t_{n_k}.$$

Нам осталось найти положительную последовательность $\{b_n\} \in \ell^2$ такую, что $\sum_n \frac{a_n b_n}{z - t_n}$ обнуляется в точках s_k. Зафиксируем положительные b_n, $n \notin \mathcal{N} = \{n_k\}$ столь малыми, что $\sum_{n \notin \mathcal{N}} b_n < \infty$. Параметры b_{n_k} должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{-a_{n_k} b_{n_k}}{\Delta_{n_k}} + \sum_{j \ne k} \frac{a_{n_j} b_{n_j}}{s_k - t_{n_j}} + \sum_{n \notin \mathcal{N}} \frac{a_n b_n}{s_k - t_n} = 0. \tag{4.4.24}$$

Положим,

$$u_k = k^2 \Delta_{n_k} \sum_{n \notin \mathcal{N}} \frac{a_n b_n}{s_k - t_n}$$

и перепишем нашу систему

$$b_{n_k} - k^2\Delta_{n_k}\sum_{j\neq k}\frac{1}{j^2(s_k - t_{n_j})}b_{n_j} = u_k.$$

Мы покажем, что $\{u_k\}\in\ell^2$. Действительно, $\sum_{n\notin\mathcal{N}}\frac{a_nb_n}{s_k-t_n}\lesssim\frac{1}{t_{n_k}}$ и

$$|u_k|\lesssim\frac{k^2\Delta_{n_k}}{t_{n_k}}\asymp k\mu_{n_k}^{1/2}\cdot\left(\sum_{l=m_k}^{n_k-1}\mu_l\right)^{-1/2}\lesssim\frac{1}{k}.$$

Теперь рассмотрим коэффициенты b_{n_j}. Если $j>k$, то $t_{n_j}\gg s_k\gg k^2\Delta_{n_k}$. С другой стороны, если $j<k$, то $\frac{k^2\Delta_{n_k}}{|s_k-t_{n_j}|}\lesssim\frac{1}{k^2}$. Таким образом, мы можем полагать, что

$$\sum_k k^2\Delta_{n_k}\sum_{j\neq k}\frac{1}{j^2(s_k-t_{n_j})}<\frac{1}{100}.$$

Следовательно, мы можем найти суммируемое решение $\{b_{n_k}\}$ уравнения (4.4.24). Видно, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условиям (a)–(d).

Случай, когда существует последовательность индексов $\{n_k\}$ такая, что $\mu_{n_k}=o(t_{n_k}^2\sum_{l>n_k}\frac{\mu_l}{t_l^2})$, $k\to\infty$, может быть рассмотрен аналогично. $\square$

4.5. Доказательство утверждения 4.1.4

Прежде всего напомним, что любая функция $F\in\mathcal{H}(E)$ может быть представлена в виде $F(z)=A(z)\sum_n\frac{a_n\mu_n^{1/2}}{z-t_n}$, where $a=\{a_n\}\in\ell^2$.

Более того,

$$\left|\frac{F(iy)}{A(iy)}\right|\le\|a\|_{\ell^2}\beta(y),\qquad\beta(y):=\left(\sum_n\frac{\mu_n}{t_n^2+y^2}\right)^{1/2}.\tag{4.5.25}$$

Предположим, что функции h и S в (4.1.8) имеют бесконечное число общих нулей $\{s_k\}$, удовлетворяющих условию степенной разделенности с T, $\operatorname{dist}(s_k,T)\gtrsim|s_k|^{-N}$ для некоторого $N>0$.

Мы будем раскладывать функции h и S на сомножители: $h=G_2S_2$ и $S=S_1S_2$. Причем S_2 будет лакунарным произведением, построенным по некоторой подпоследовательности общих нулей. Потом мы построим G_1 как малое возмущение функции S_2.

Мы будем строить нули s_k функции S_2 и $\tilde{s}_k=s_{k-1}+\delta_k$ функции G_1 последовательно. Предположим, что нули $s_1=\tilde{s}_1$, $\tilde{s}_2, s_2,\ \dots,\ \tilde{s}_{k-1},\ s_{k-1}$ уже построены. Выберем s_k (общий нуль h и S) настолько большим, что если мы определим δ_k из формулы

$$\delta_k = \frac{1}{(\beta(s_k))^{1/2}} \prod_{m=1}^{k-1} \frac{s_m}{\tilde{s}_m} - s_{k-1},$$

то

$$\tilde{s}_k = s_{k-1} + \delta_k > 10 s_{k-1} \qquad \text{и} \qquad s_k > 10 \tilde{s}_k.$$

Это возможно, так как $\beta(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$, но, в то же время, $\beta(y) \gtrsim |y|^{-1}$.

Теперь положим,

$$S_2(z) = \prod_k \left(1 - \frac{z}{s_k}\right), \qquad G_1(z) = \prod_k \left(1 - \frac{z}{\tilde{s}_k}\right),$$

а $G = G_1 G_2$. Нетрудно показать, что $|S_2(iy)| \le |G_1(iy)| \lesssim |y S_2(iy)|$, $|y| \to \infty$.

Предположим, что $G \in \mathcal{H}(E) + z\mathcal{H}(E)$. Мы должны доказать, что G – порождающая функция точной системы (в частности, $G \notin \mathcal{H}(E)$) и доказать соотношение

$$\frac{G_1(z) S_1(z)}{A(z)} = \sum_n \frac{b_n G(t_n)}{\mu_n^{1/2} A'(t_n)(z - t_n)}. \tag{4.5.26}$$

Прямая оценка бесконечного произведения показывает, что

$$\left| \frac{G_1(is_k)}{S_2(is_k)} \right| \asymp \prod_{m=1}^{k} \frac{s_m}{\tilde{s}_m} \asymp s_k (\beta(s_k))^{1/2}.$$

Мы воспользовались формулой, определяющей δ_k. Из условия (d) параграфа 4.1.2 следует, что $|G_2(iy) S_2(iy)| = |h(iy)| \gtrsim |y|^{-1} |A(iy)|$. Следовательно,

$$\left| \frac{G(is_k)}{A(is_k)} \right| \asymp \left| \frac{G_1(is_k)}{S_2(is_k)} \right| \cdot \left| \frac{G_2(is_k) S_2(is_k)}{A(is_k)} \right| \gtrsim$$

$$\frac{1}{s_k} \left| \frac{G_1(is_k)}{S_2(is_k)} \right| \asymp (\beta(s_k))^{1/2}.$$

То есть $G \notin \mathcal{H}(E)$. Мы знаем, что

$$|G(iy)| = |h(iy) G_1(iy)| / |S_2(iy)| \gtrsim |y|^{-1} |A(iy)|.$$

Это доказывает, что G – порождающая функция некоторой точной системы из воспроизводящих ядер.

Полнота биортогональной системы $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{Z}_G}$ доказывается так же, как в утверждении 4.1.3. Если (U, ν) – другие спектральные данные для $\mathcal{H}(E)$, а V

– целая функция из (4.3.16), то V – полином, так как $|G(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A(iy)|$. Следовательно, $V \equiv 0$, так как $V \in L^2(\nu)$ и $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ (см. обсуждение в параграфе 1.1.2).

Для того чтобы получить соотношение (4.5.26), заметим, что

$$H(z) = \frac{G_1(z)S_1(z)}{A(z)} - \sum_n \frac{b_n G(t_n)}{\mu_n^{1/2} A'(t_n)(z - t_n)}$$

- целая функция, так как вычеты в точках t_n совпадают. Оба слагаемых находятся в классе Смирнова в $\mathbb{C}_+$ и в $\mathbb{C}_-$. С другой стороны, $|G_1(iy)S_1(iy)| \lesssim |yS(iy)| \lesssim |A(iy)|$, а сумма в последней формуле стремится к 0 вдоль мнимой оси.

При помощи теоремы Крейна мы заключаем, что функция H нулевого экспоненциального типа и, следовательно, равна константе. Тем не менее,

$$\left|\frac{G_1(is_k)S_1(is_k)}{A(is_k)}\right| \asymp \left|\frac{S(is_k)}{A(is_k)}\right| \cdot \left|\frac{G_1(is_k)}{S_2(is_k)}\right| \lesssim (\beta(s_k))^{1/2} \to 0, \qquad s_k \to \infty.$$

Следовательно, $H \equiv 0$.

Предположим, что G не лежит в классе $\mathcal{H}(E) + z\mathcal{H}(E)$. Напомним, что $\operatorname{dist}(s_k, T) \gtrsim |s_k|^{-N}$ для некоторого $N > 0$. Тогда оценка

$$|G_1(t)/S_2(t)| \lesssim |t|^2 \operatorname{dist}(t, \{s_k\})^{-1}$$

влечет, что

$$|G(t_n)| = \frac{|h(t_n)G_1(t_n)|}{|S_2(t_n)|} \lesssim |h(t_n)|(|t_n| + 1)^{N+2}.$$

Следовательно,

$$\left\{\frac{G(t_n)}{(|t_n| + 1)^{N+2}E(t_n)}\right\} \in L^2(\mu).$$

Выберем m нулей $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m$ функции G_1 и положим $P_m(z) = (z - \tilde{s}_1)\dots(z - \tilde{s}_m)$. При помощи теоремы 26 [53] мы получаем, что $G/P_m \in \mathcal{H}(E)$ для достаточно больших m.

Рассмотрим наименьшее m такое, что $G/P_m \notin \mathcal{H}(E)$, но $G/P_{m+1} \in \mathcal{H}(E)$. Тогда $\tilde{G} = G/P_m = G_2G_1/P_m$ будет требуемой порождающей функцией, удовлетворяющей условию (4.5.26), а функция G_1/P_m будет играть роль G_1.

Полнота системы $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{Z}_{\tilde{G}}}$ и ее биортогональной будет следовать из оценки $|\tilde{G}(iy)| \gtrsim |y|^{-m-1}|A(iy)|$ при $|y| \to \infty$. $\square$

4.6. Базисы Маркушевича с бесконечномерным дефектом

В этом параграфе мы докажем теоремы 1.4.3 и 1.4.4. Отметим, что конструкция базиса Маркушевича, не являющегося сильным, производилась в обратном порядке: вначале мы строили вектор h со специальными свойствами, а потом мы конструировали подходящую систему Λ. Этот метод не дает ответа на вопрос о размерности дефекта ненаследственно полной системы.

Нам понадобится следующее утверждение, которое немного сильнее, чем теорема 1.3.3 для пространств де Бранжа.

Утверждение 4.6.1. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа со спектральными данными (T, μ) и $\sum_n t_n^{2N-2}\mu_n < \infty$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.*

Тогда существует точная система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в $\mathcal{H}(E)$ такая, что ее порождающая функция G удовлетворяет оценке $|G(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A(iy)|$, а биортогональная система неполна. Более того, $\dim\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}^\perp = N$.

Доказательство. Напомним, что каждая функция $f \in \mathcal{H}(E)$ представима в виде $f(z) = A(z)\sum_n \frac{c_n\mu_n^{1/2}}{z-t_n}$, $\{c_n\} \in \ell^2$. Так как $\sum_n t_n^{2N-2}\mu_n < \infty$, отображение $\phi_l(f) = \sum_n c_n t_n^l \mu_n^{1/2}$, $0 \le \ell < N$, - ограниченный линейный функционал на $\mathcal{H}(E)$. Условие $\sum_n \mu_n < \infty$ влечет, что функция B_0, определенная в (4.2.13), принадлежит $\mathcal{H}(E)$, и $\phi_0(f) = \lim_{y\to\infty} iy\frac{f(iy)}{A(iy)} = -\frac{1}{\pi}(f, B_0)$, $f \in \mathcal{H}(E)$. Также нетрудно проверить, что

$$\phi_l(f) = 0, \quad l = 0, 1, \dots N-1 \Longleftrightarrow \lim_{y\to\infty} y^{l+1}\frac{f(iy)}{A(iy)} = 0, \quad l = 0, 1, \dots N-1.$$

Пусть последовательность $\{a_n\} \in \ell^2$ такова, что $\{a_n t_n\} \notin \ell^2$, $\sum_n a_n t_n^l \mu_n^{1/2} = 0$ для $l = 0, 1, \dots N-1$, $a_n t_n^N > 0$ для всех n, кроме конечного числа индексов, и либо ряд $\sum_n a_n t_n^N \mu_n^{1/2}$ расходится к ∞, либо он сходится, и $\sum_n a_n t_n^N \mu_n^{1/2} \ne 0$. Положим,

$$G(z) = A(z)\sum_n \frac{a_n t_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}.$$

Тогда мы получаем, что

$$\lim_{y\to\infty} y^l \frac{G(iy)}{A(iy)} = 0, \quad l = 0, 1, \dots N-1,$$

$$\liminf_{|y|\to\infty} y^N \frac{G(iy)}{A(iy)} > 0.$$

Так как $\{a_n\} \in \ell^2$, but $\{a_n t_n\} \notin \ell^2$, функция G не лежит в пространстве $\mathcal{H}(E)$, но $g_\lambda(z) = \frac{G(z)}{z-\lambda} \in \mathcal{H}(E)$.

Не умаляя общности (поменяв немного коэффициенты a_n), мы можем считать, что все нули G простые. Положим, $\Lambda = \mathcal{Z}_G$ (отметим, что $\Lambda \cap T = \emptyset$ если $a_n \neq 0$). По построению мы имеем $\phi_l(g_\lambda) = \lim_{y\to\infty} y^l \frac{G(iy)}{A(iy)} = 0$, $l = 0, 1, \dots N-1$, для любого $\lambda \in \Lambda$. Очеивдно, что функционалы ϕ_l линейно независимы, а $\dim \{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}^\perp \geq N$.

С другой стороны, множество функций $f(z) = A(z) \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z-t_n}$, $\{a_n\} \in \ell^2$, которые ортогональны системе $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, параметризовано целыми функциями S такими, что

$$\frac{G(z)S(z)}{A(z)} = \sum_n \frac{a_n G(t_n)}{\mu_n^{1/2} A'(t_n)(z-t_n)}$$

(см. параграф 4.1.1). Так как S имеет нулевой экспоненциальный тип (для порождающих функций точных систем из воспроизводящих ядер функции G/E и G^*/E лежат в классе Смирнова в $\mathbb{C}_+$) и $|S(iy)| = o(|A(iy)/G(iy)|)$ при $|y| \to \infty$, мы заключаем, что S – полином степени не выше $N-1$. Следовательно, $\dim \{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}^\perp \leq N$. □

Напомним формулировку теоремы 1.4.3.

Теорема 4.6.2. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа такое, что $\sum_n \mu_n = \infty$.*

(i) Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ последовательности T такая, что $\sum_k t_{n_k}^{2N-2} \mu_{n_k} < \infty$, то $\operatorname{def}(\mathcal{H}(E)) \geq N$ (более того, существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ такой, что $\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) = N$ для некоторого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$).

(ii) Пусть последовательноть T удовлетворяет условию степенной разделенности, $|t_{n+1} - t_n| \gtrsim |t_n|^{-M}$ для некоторого $M > 0$. Тогда следующие условия равносильны:

$$(a) \quad \operatorname{def}(\mathcal{H}(E)) = \infty, \qquad (b) \quad \inf_n \mu_n |t_n|^N = 0 \text{ для любого } N > 0.$$

Доказательство. 1. Пусть $T^\circ = \{t_{n_k}\}$, $\mu^\circ = \mu|_{T^\circ}$, а $\mathcal{H}(E^\circ)$ – соответствующее пространство де Бранжа. Из утверждения 4.6.1 мы знаем, что существует точная система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda^\circ\}_{\lambda\in\Lambda^\circ}$ в $\mathcal{H}(E^\circ)$, чья порождающая функция G° удовлетворяет оценке $|G^\circ(iy)| \gtrsim |y|^{-N} |A^\circ(iy)|$ для некоторого N. Тогда, пользуясь утверждением 4.1.3, мы получаем, что существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(E)$, не являющийся сильным. Из замечания 4.3.1 мы знаем, что дефект, соответствующий разбиению $\Lambda = \Lambda^\circ \cup \tilde{T}$ (где $\tilde{T} = T \setminus T^\circ$), равен N.

2. Если T удовлетворяет условию степенной разделенности, то $|t_n| \gtrsim |n|^\rho$ для некоторого $\rho > 0$. Следовательно, (b) влечет, что для некоторой последовательности индексов $\{n_k\}$ и для каждого $N \in \mathbb{N}$ мы имеем $\sum_k t_{n_k}^{2N-2}\mu_{n_k} < \infty$. Тогда из пункта 1. мы получаем, что (b)$\Longrightarrow$(a).

Докажем обратное. Предположим, что $\mu_n \gtrsim |t_n|^{-M}$ для некоторого $M > 0$. Нетрудно проверить, что в этом случае пространство $\mathcal{H}(E)$ умеренного роста ($\varphi'(x) \lesssim (1 + |x|^N)$). Тогда, пользуясь теоремой 5.3 из работы [29], получаем, что существует $M = M(N)$ такое, что для любой точной системы из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и любого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ мы имеем оценку на размер дефекта $\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) \le M$. $\square$

Напомним формулировку теоремы 1.4.4.

Теорема 4.6.3. *Для любой возрастающей последовательности $T = \{t_n\}$, $|t_n| \to \infty$, $|n| \to \infty$ существует мера μ, $\operatorname{supp}\mu = T$ такая, что в пространстве де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ $(= A\mathcal{H}(T, \mu))$ существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ такой, что $\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \infty$ для какого-то разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.*

Доказательство. Разобъем последовательность T на три части $T = T^0 \cup T^1 \cup T^2$ со следующими свойствами:

(i) T^0 и T^1 – положительные лакунарные последовательности,

(ii) $\left[\frac{t_n}{2}, 2t_n\right] \cap T^1 = \emptyset$ для любого $t_n \in T^0$, и $\left[\frac{t_n}{2}, 2t_n\right] \cap T^0 = \emptyset$ для любого $t_n \in T^1$.

Пусть T^0 настолько реже, чем T^1, что любая целая функция, чей рост мажорируется считающей функцией T^0, ограниченная в точках, близких к T^1, постоянна.

Точнее, пусть $n_0(r) = \#(T^0 \cap [0, r])$. Предположим, что

(iii) любая целая функция f порядка 0 такая, что $\int_0^R \frac{n_f(r)}{r}dr = o\big(\int_0^R \frac{n_0(r)}{r}dr\big)$, $R \to \infty$, и $\inf_{[t_n-2,t_n+2]} |f| \lesssim 1$ равномерно по $t_n \in T^1$, постоянна, где $n_f(r) = \#(\mathcal{Z}_f \cap \{|z| \le r\})$. Нетрудно проверить, что это возможно.

Доказательство будет состоять из нескольких шагов. Мы будем последовательно строить меру μ на множествах T^0, T^1 и T^2.

Шаг 1. Конструкция полной системы из воспроизводящих ядер с неполной биортогональной с бесконечным дефектом.

Чтобы определить меру μ на T^0, мы применим результат, доказанный в работе [35] (теорема 0.3). Мы будем использовать формулировку в терминах воспроизводящих ядер:

для любой возрастающей последовательности $T^0 \subset \mathbb{R}$ существует мера $\mu^0 = \sum_{t_n\in T^0} \mu_n\delta_{t_n}$ такая, что в пространстве де Бранжа $\mathcal{H}(E^0)$, $E^0 = A^0 - iB^0$ со спектральными данными (T^0, μ^0) существует точная система из воспроизводящих ядер с порождающей функцией G_0 такая, что биортогональная система $G/(\cdot - \lambda)$ имеет бесконечную коразмерность.

В теореме 0.3 работы [35] накладывались дополнительные требования на пространство $\mathcal{H}(E^0)$, и ее доказательство было довольно длинным. Ниже (Шаг 2) мы явно построим μ^0 и G^0 при помощи упрощенной версии конструкции из работы [35].

Из этой конструкции будет видно, что $\mu_n \le 1$, $t_n \in T^0$. Более того,

$$\frac{C_1}{|W(z)|} \cdot \left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{|z|^2+1}\right)^2 \le \left|\frac{G^0(z)}{A^0(z)}\right| \le \frac{C_2}{|W(z)|} \cdot \left(\frac{|z|^2+1}{|\operatorname{Im} z|}\right)^2, \qquad z \notin \mathbb{R}, \quad (4.6.27)$$

для некоторой целой функции W экспоненциального типа 0 с вещественными нулями такую, что $\int_0^R \frac{n_W(r)}{r}dr = o\big(\int_0^R \frac{n_0(r)}{r}dr\big)$, $R \to \infty$ (см. [35, неравенство (4.4)]).

Шаг 2. Явная конструкция μ^0 и G^0. Пусть A^0 – каноническое произведение нулевого порядка с простыми нулями в T^0. Тогда мы можем выбрать каноническое произведение D с лакунарными вещественными нулями такое, что, для любого $N > 0$,

$$|D(t_n)| \lesssim |t_n|^{-N}|A'(t_n)|, \qquad t_n \in T^0,$$

и$|D(iy)| \lesssim |y|^{-N}|A(iy)|$. Более того,

$$|A^0(z)/D(z)| \lesssim |W(z)|, \qquad \operatorname{dist}(z, \mathcal{Z}_D) \ge 1,$$

где W – целая функция, удовлетворяющая оценке,

$$\int_0^R \frac{n_W(r)}{r}dr = o\big(\int_0^R \frac{n_0(r)}{r}dr\big), \quad R \to \infty.$$

Положим,

$$G^0(z) = A^0(z)\sum_{t_n \in T^0} \frac{t_n D(t_n)}{(A^0)'(t_n)(z-t_n)} = zD(z), \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$\mu_n = \frac{n^2|D(t_n)|^2}{|(A^0)'(t_n)|^2} \lesssim 1, \qquad t_n \in T^0.$$

Определим пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E^0)$, $E^0 = A^0 - iB^0$ при помощи спектральных данных (T^0, μ^0). Легко проверить, что $G^0 \notin \mathcal{H}(E^0)$, $g^0_\lambda = G^0/(\cdot - \lambda) \in \mathcal{H}(E^0)$, $\lambda \in \Lambda^0$, где Λ^0 - множество нулей функции G^0. Следовательно, $\dim\{g^0_\lambda : \lambda \in \Lambda^0\}^\perp = \infty$, так как для ограниченных линейных функционалов $\phi_l(f) = \lim_{y\to\infty} y^{l+1}f(iy)/A^0(iy)$, $l \ge 0$, на $\mathcal{H}(E^0)$ верно равенство $\phi_l(g^0_\lambda) = 0$, $\lambda \in \Lambda$. В последнем рассуждении мы воспользовались выбором функции D.

Нам осталось доказать, что G^0 – порождающая функция полной системы из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(E^0)$. Если $HG^0 \in \mathcal{H}(E^0)$ для целой функции H, то H – функция нулевого экспоненциального типа. Ее рост ограничен сверху величиной A^0/D вдалеке от нулей D и, следовательно, не превосходит роста целой функции W. Мы знаем, что

$$\sum_{t_n \in T^0} \frac{|t_n D(t_n) H(t_n)|^2}{\mu_n^0 A'(t_n)^2} = \sum_{t_n \in T^0} \frac{t_n^2 |H(t_n)|^2}{n^2} < \infty,$$

причем $H(t_n) \to 0$, $t_n \in T^0$, $n \to \infty$. Из свойств функции W и принимая во внимание (iii), мы получаем, что $H \equiv 0$.

Шаг 3. Построение меры μ на T^1. Положим, $\mu_n = 1$, $t_n \in T^1$. Рассмотрим пространство де Бранжа $\mathcal{H}(\tilde{E})$ со спектральными данными $(T^0 \cup T^1, \mu^0 + \mu^1)$. Предположим, что $(\tilde{T}, \tilde{\mu})$ – другие спектральные данные для $\mathcal{H}(\tilde{E})$. Мы докажем, что

$$\tilde{\mu}\big([t_n - 1, t_n + 1]\big) \gtrsim 1, \qquad t_n \in T^1.$$

Действительно, нетрудно оценить производную функции $\Theta_{\tilde{E}}$ при помощи формулы (1.1.4)

$$|\Theta'_{\tilde{E}}(t)| \asymp 1, \quad |t - t_n| \le 2, \quad t_n \in T^1.$$

Следовательно, если спектральные данные $(\tilde{T}, \tilde{\mu})$ соответствуют некоторому α, достаточно близкому к -1 (напомним, что $(T^0 \cup T^1, \mu^0 + \mu^1)$ соответствуют $\alpha = -1$), то существует точка $\tilde{t}_n \in \tilde{T}$ в интервале $[t_n - 1, t_n + 1]$, $t_n \in T^1$ такая, что $|\Theta'_{\tilde{E}}(\tilde{t}_n)| \asymp 1$.

Шаг 4. Построение меры μ на T^2.

Мы можем выбрать спектральные данные $(\tilde{T}, \tilde{\mu})$ в шаге 3 таким образом, что $\tilde{T} \cap T^2 = \emptyset$. Сделаем μ_n для $t_n \in T^2$ экстремально малыми. А именно, пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа со спектральными данными (T, μ), а Θ_E – соответствующая внутренняя функция. Выберем μ_n $(t_n \in T^2)$ настолько малыми, что для некоторых других спектральных данных (U, ν) пространства $\mathcal{H}(E)$ существуют точки $u_n \in [\tilde{t}_n - 1, \tilde{t}_n + 1] \cap U$ такие, что $|\Theta'_E(u_n)| \asymp 1$. Это возможно, так как малые дополнительные нагрузки в мере μ лишь немного возмущают решения уравнения $\Theta_E(t) = \beta \in \mathbb{T}$ и производную $|\Theta'_E(t)|$ в этих точках.

Таким образом, мы построили пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ со спектральными данными (T, μ) такое, что для некоторых других спектральных данных (U, ν) выполнено $\nu([t_n - 2, t_n + 2]) \gtrsim 1$, $t_n \in T^1$ (напомним, что $\nu(\{u_n\}) = 2\pi/|\Theta'_E(u_n)| \asymp 1$). Если $E = A - iB$, то мы получаем разложение $A = A^0 A^1 A^2$, где A^0, A^1 – канонические произведения нулевого порядка с нулями в T^0 и T^1, а A_2 – некоторая целая функция с простыми нулями в T^2.

Шаг 5. Построение множества Λ. По построению, в пространстве $\mathcal{H}(E^0)$ существует точная система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda^0\}_{\lambda\in\Lambda^0}$ с порождающей функцией G^0 такая, что биортогональная система имеет бесконечный дефект. Следовательно, существует бесконечномерное подпространство векторов $a^0 = \{a_n^0\} \in \ell^2$ такое, что

$$\frac{G_1^0(z)S_1^0(z)}{A^0(z)} = \sum_{t_n\in T^0} \frac{a_n^0 G^0(t_n)}{\mu_n^{\frac{1}{2}}(A^0)'(t_n)(z-t_n)}, \qquad \frac{S_2^0(z)}{A^0(z)} = \sum_{t_n\in T^0} \frac{\overline{a_n^0}\mu_n^{\frac{1}{2}}}{z-t_n}$$

для некоторых целых функций S_1^0 и S_2^0, зависящих от a^0.

Как и в доказательстве утверждения 4.1.3, умножая эти уравнения на A^1A^2, мы получаем, что система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in T^1\cup T^2} \cup \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda^0}$ имеет бесконечномерное ортогональное дополнение в $\mathcal{H}(E)$. Положим, $\Lambda = \Lambda^0 \cup T^1 \cup T^2$. Легко проверить, что $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(E)$ (см. замечание 4.3.2), а $G = G^0A^1A^2$ – ее порождающая функция.

Шаг 6. Полнота биортогональной системы. Нам осталось показать, что система $\{G/(\cdot-\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, биортогональная к $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, полна в $\mathcal{H}(E)$. Отметим, что мы не можем применять утверждение 4.1.3, так как не выполнено условие $|G^0(iy)| \gtrsim |y|^{-N}|A^0(iy)|$ для некоторого $N > 0$ (суперполиномиальное убывание G^0/A^0 вдоль мнимой оси - ключевое свойство для конструкции из работы [35] и в шаге 2). Мы будем применять другое рассуждение из [35].

Пусть (U,ν), $U = \{u_n\}$ – спектральные данные для $\mathcal{H}(E)$, построенные выше. Этим данным соответствует функция $E_\alpha = \alpha E - E^*$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$, $\alpha \neq -1$. При помощи рассуждений из параграфа 4.1.1 мы получаем, что система $\{G/(\cdot-\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ неполна в $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{c_n\} \in \ell^2$ и нетривиальная целая функция V такая, что

$$\frac{G(z)V(z)}{E_\alpha(z)} = \sum_n \frac{c_n G(u_n)}{\nu_n^{\frac{1}{2}} E_\alpha'(u_n)(z-u_n)},$$

где $V(u_n) = \nu_n^{-1/2}c_n$ и $V \in L^2(\nu)$. Так как

$$\frac{G}{E_\alpha} = \frac{G^0}{A^0}\cdot\frac{A}{E_\alpha} = \frac{G^0}{A^0}\cdot\frac{1+\Theta_E}{\alpha-\Theta_E},$$

а A^0/G^0 удовлетворяет (4.6.27), мы получаем, что $|V(z)| \lesssim (|z|+1)^N|W(z)|/|\operatorname{Im} z|^M$ для некоторых $M, N > 0$. Таким образом, считающая функция n_V удовлетворяет условию

$$\int_0^R \frac{n_V(r)}{r}dr = o\Big(\int_0^R \frac{n_0(r)}{r}dr\Big), \quad R\to\infty$$

(это можно получить при помощи стандартных оценок, основанных на формуле Иенсена, см., например, [35, §4]). Так как $V \in L^2(\nu)$ и $\nu([t_n-2, t_n+2]) \gtrsim 1$, $t_n \in T^1$, мы получаем, что $\inf_{[t_n-2,t_n+2]} |V| \lesssim 1$. Следовательно, V - постоянная функция. Из условия $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ получаем, что $V \equiv 0$. Это доказывает полноту биортогональной системы. $\square$

4.7. Наследственная полнота для систем из экспонент

В этом параграфе мы докажем теоремы 1.4.5, 1.4.6. Мы детально изучим уравнения (4.1.4)–(4.1.5) для пространства Пэли–Винера $\mathcal{P}W_\pi$ ($T = \mathbb{Z}, \mu_n \equiv 1$). Еще раз отметим, что общая теорема 1.4.3 не позволяет точно установить возможные дефекты смешанных систем в пространстве Пэли–Винера.

4.7.1. Свойства функций S_1 и S_2 для пространств Пэли–Винера

Мы изучаем дефект смешанной системы в пространстве Пэли–Винера

$$\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}. \tag{4.7.28}$$

Рассмотрим уравнения (4.1.4)–(4.1.5) для пространства Пэли–Винера и вектора h, ортогонального смешанной системе ($a_n = b_n$):

$$\sum_n \frac{a_n G(n)}{z-n} = \frac{G_1(z)S_1(z)}{\sin \pi z}, \tag{4.7.29}$$

$$\sum_n \frac{\overline{a_n}(-1)^n}{z-n} = \frac{G_2(z)S_2(z)}{\sin \pi z}. \tag{4.7.30}$$

Мы будем считать, что функции G_1^*/G_1, G_2^*/G_2 S_1^*/S_1 S_2^*/S_2 представимы в виде отношения двух произведений Бляшке (см. параграф 4.1.1).

Пары (S_1, S_2) целых функций из уравнений (4.7.29)–(4.7.30) параметризуют все функции, ортогональные системе (4.7.28). Обозначим за $\Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$ множество всех таких пар.

Сравнивая вычеты в (4.7.29)–(4.7.30), мы получаем, что

$$S(n) = S_1(n)S_2(n) = (-1)^n |a_n|^2. \tag{4.7.31}$$

Это, конечно, тождество 4.1.6, адаптированное к нашей ситуации.

Лемма 4.7.1. *Функция G_1S_1 лежит в пространстве $\mathcal{P}W_\pi + z\mathcal{P}W_\pi$.*

Доказательство. Если w – нуль функции G_1S_1, то из уравнения (4.7.29) и включения $G(n)(1+|n|)^{-1} \in \ell^2$ мы получаем, что

$$\frac{G_1(z)S_1(z)}{z-w} = \sin \pi z \sum_n \frac{a_n G(n)}{(n-w)(z-n)} \in \mathcal{P}W_\pi. \tag{4.7.32}$$

$\square$

Лемма 4.7.2. *Пусть вектор $h \in \mathcal{P}W_\pi$ ортогонален смешанной системе (4.7.28), а $(S_1, S_2) \in \Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Тогда $S \in \mathcal{P}W_\pi + c\sin \pi z$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $Q \in \mathcal{P}W_\pi$, решающую интерполяционную проблему $Q(n) = (-1)^n |a_n|^2$, $n \in \mathbb{Z}$ (где a_n – коэффициенты в представлении $h = \sum_n \overline{a}_n k_n$). Положим, $\tilde{S} = S - Q$. Тогда $\tilde{S}$ обнуляется на множестве $\mathbb{Z}$. Таким образом, $\tilde{S}(z) = H(z)\sin \pi z$. Нам осталось показать, что функция H постоянна. Заметим, что $G_2S_2 = h \in \mathcal{P}W_\pi$. Из леммы 4.7.1 мы получаем, что $G_1S_1 \in \mathcal{P}W_\pi + z\mathcal{P}W_\pi$. Следовательно,

$$G(z)S(z) = \sin^2 \pi z \cdot \sum_n \frac{a_n G(n)}{z-n} \cdot \sum_n \frac{\overline{a_n}(-1)^n}{z-n} \in \mathcal{P}W_{2\pi} + z\mathcal{P}W_{2\pi}. \tag{4.7.33}$$

Пользуясь включениями $G \in \mathcal{P}W_\pi + z\mathcal{P}W_\pi$ и $GQ \in \mathcal{P}W_{2\pi} + z\mathcal{P}W_{2\pi}$, мы получаем, что

$$G(z)\tilde{S}(z) = G(z)H(z)\sin \pi z \in \mathcal{P}W_{2\pi} + z\mathcal{P}W_{2\pi}.$$

Разделав на $\sin \pi z$, мы получаем, что

$$G(z)H(z) \in \mathcal{P}W_\pi + z\mathcal{P}W_\pi.$$

Так как G – целая функция экспоненциального типа π, мы знаем, что H – функция нулевого экспоненциального типа. Если H имеет хотя бы один нуль z_1, то $\frac{H(z)G(z)}{z-z_1} \in \mathcal{P}W_\pi$. Это противоречит тому, что Λ – множество единственности для пространства Пэли–Винера. Следовательно, H постоянна. $\square$

Лемма 4.7.3. *Если $(S_1, S_2) \in \Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$, то $(S_1^*, S_2^*) \in \Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$.*

Доказательство. Мы знаем, что функция S_1^*/S_1 представима в виде B_1/B_2 для некоторых произведений Бляшке B_1 и B_2. Рассмотрим следующее представление

$$\frac{G_1(z)S_1(z)}{\sin \pi z} \cdot \frac{S_1^*(z)}{S_1(z)} = \sum_n \frac{a_n G(n)}{z-n} \cdot \frac{S_1^*(n)}{S_1(n)} + H(z). \tag{4.7.34}$$

Функция H целая, так как вычеты в правой и левой части совпадают. С другой стороны, $G_1S_1^* \in \mathcal{P}W_\pi + z\mathcal{P}W_\pi$ и $|H(z)| \lesssim 1 + |z|$. Следовательно, H

– полином степени не выше 1. Уравнение (4.7.29) влечет, что

$$e^{-\pi|y|}|G_1(iy)S_1(iy)| \to 0, \quad |y| \to \infty.$$

Так как функция S_1^*/S_1 принимает взаимнообратные значения в сопряженных точках, мы получаем, что $\min(|H(iy)|, |H(-iy)|) \to 0$, $|y| \to \infty$. Следовательно, $H \equiv 0$.

Положим, $b_n = a_n S_1^*(n)/S_1(n)$. Используя аналогичные аргументы, мы можем доказать, что

$$\frac{G_2(z)S_2^*(z)}{\sin \pi z} = \sum_n \frac{\overline{a_n}(-1)^n}{z-n} \cdot \frac{S_2^*(n)}{S_2(n)}. \tag{4.7.35}$$

Сравнивая вычеты, мы получаем, что

$$\overline{a_n}(-1)^n S_2^*(n)/S_2(n) = \overline{b_n}(-1)^n.$$

Таким образом, пара (S_1^*, S_2^*) соответствует последовательности $\{b_n\}$ в уравнениях (4.7.29) и (4.7.30). Это означает, что $(S_1^*, S_2^*) \in \Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$. □

Воспользовавшись леммой 4.7.3, мы получаем, что если $(S_1, S_2) \in \Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$, то $(S_1+S_1^*, S_2+S_2^*) \in \Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$ и $(iS_1-iS_1^*, -iS_2+iS_2^*) \in \Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$. В дальнейшем мы будем полагать, что функции S_1 и S_2 вещественны на $\mathbb{R}$.

Из формул (4.7.29)–(4.7.30) мы можем вывести следующий результат.

Следствие 4.7.4. *Если функции S_1 и S_2 вещественны на $\mathbb{R}$, то каждый открытый интервал $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ содержит в точности один нуль функции S. Более того, S не имеет других нулей.*

Доказательство. Так как функция S вещественна на $\mathbb{R}$ и меняет знак в точках $n \in \mathbb{Z}$, она имеет как минимум один нуль в интервалах $(n, n+1)$. Выберем нуль в каждом интервале и построим каноническое произведение S_0. Тогда $S = S_0 H$ для некоторой целой функции H нулевого экспоненциального типа, вещественной на $\mathbb{R}$. Легко проверить, что $|S_0(iy)| \gtrsim |y|^{-1}e^{\pi|y|}$, $|y| \to \infty$. Из леммы 4.7.2 мы знаем, что $S \in \mathcal{P}W_\pi + c\sin \pi z$. Следовательно, $|H(iy)| \lesssim |y|$, $|y| \to \infty$. Таким образом, H – полином степени не выше 1. Так как знаки $S(n)$ чередуются, S не может иметь ровно два нуля в интервале $(n, n+1)$. Следовательно, H постоянна. □

4.7.2. Полнота с точностью до одномерного дефекта

Напомним формулировку теоремы 1.4.5.

Теорема 4.7.5. *Пусть $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$. Тогда, для любого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, ортогональное дополнение к смешанной системе*

$$\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \tag{4.7.36}$$

не более чем одномерно.

Доказательство. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\Lambda \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Пусть $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{a_n} k_n$ и $h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{b_n} k_n$ – два линейно независимых вектора ортогональных (4.7.28), а (S_1, S_2) и (T_1, T_2) – соответствующие пары функций из $\Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Пользуясь леммой 4.7.3, мы получаем, что пары $(S_1 + S_1^*, S_2 + S_2^*)$, $(iS_1 - iS_1^*, -iS_2 + iS_2^*)$, $(T_1 + T_1^*, T_2 + T_2^*)$ и $(iT_1 - iT_1^*, -iT_2 + iT_2^*)$ также лежат в $\Sigma(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Таким образом, мы можем полагать, что пары (S_1, S_2) и (T_1, T_2) линейно независимы, а функции S_1, S_2, T_1, и T_2 вещественны на $\mathbb{R}$.

Сравнивая вычеты в формулах (4.7.29)–(4.7.30) для функций S и T, мы получаем, что

$$S_1(n)T_2(n)\overline{G_2(n)} = T_1(n)S_2(n)\overline{G_2(n)} = (-1)^n G_2(n) a_n b_n.$$

Следовательно,

$$S_1(n)T_2(n) = S_2(n)T_1(n) = \beta_n a_n b_n,$$

где $|\beta_n| = 1$.

Обозначим за Q функцию в PW_π, которая решает интерполяционную задачу $Q(n) = \beta_n a_n b_n$. Тогда

$$T_1(z)S_2(z) = Q(z) + a(z)\sin\pi z, \qquad S_1(z)T_2(z) = Q(z) + b(z)\sin\pi z,$$

для некоторых целых функций a и b. Мы покажем, что a и b постоянны.

Обозначим за $\mathcal{P}W_\pi + \mathbb{C}\sin\pi z$ - класс целых функций вида $f + c\sin\pi z$, где $f \in \mathcal{P}W_\pi$, $c \in \mathbb{C}$. Заметим, что функции $S = S_1S_2$ и $T = T_1T_2$ лежат в классе $\mathcal{P}W_\pi + \mathbb{C}\sin\pi z$ (см. лемму 4.7.2). Более того, пара $(S_1 + T_1, S_2 + T_2)$ соответствует вектору $f + h$, а пара $(S_1 + iT_1, S_2 - iT_2)$ соответствует вектору $f + ih$. Снова применим лемму 4.7.2. Мы получаем, что функции $U = (S_1 + T_1)(S_2 + T_2)$ и $V = (S_1 + iT_1)(S_2 - iT_2)$ лежат в классе $\mathcal{P}W_\pi + \mathbb{C}\sin\pi z$. Следовательно, функции

$$S_1T_2 + S_2T_1 = U - S - T, \qquad i(S_2T_1 - S_1T_2) = V - S - T$$

тоже лежат в классе $\mathcal{P}W_\pi + \mathbb{C}\sin\pi z$. Таким образом, S_1T_2, $S_2T_1 \in \mathcal{P}W_\pi + \mathbb{C}\sin\pi z$. Мы получаем, что a и b постоянны.

Предположим, что $a \neq 0$. Обозначим за s_m нуль функции S_2 в интервале $[m - 1/2, m + 1/2]$ для тех m, для которых такой нуль существует. Тогда

$$Q(s_m) + a(-1)^m \sin\pi(s_m - m) = 0.$$

Следовательно,

$$\sum |s_m - m|^2 \asymp \sum \sin^2\pi(s_m - m) \asymp \sum |Q(s_m)|^2 < \infty.$$

С другой стороны, нули функции S_2 *не зависят от выбора ортогонального базиса* , так как это нули функции h/G_2. Рассмотрим разложение по другому базису (например, $\{n+\delta\}_{n\in\mathbb{Z}}$ для малых δ) . Мы получаем, что

$$\sum |s_m - m - \delta|^2 < \infty$$

для нулей s_m функции S_2 лежащих в интервалах $[m+\delta-1/2, m+\delta+1/2]$. Это дает нам противоречие.

Таким образом, мы доказали, что $a = b = 0$. Следовательно, $S_1T_2 = T_1S_2 = Q$. Так как S_1 не имеет общих нулей с S_2 (мы выбрали базис так, чтобы a_n не обращались в 0), мы получаем, что множества нулей S_2 и T_2 совпадают. Следовательно, $g = ch$ для некоторой константы c. Мы получили противоречие. □

4.7.3. Доказательство теоремы 1.4.6

Напомним формулировку теоремы 1.4.6.

Теорема 4.7.6. *Пусть $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$. Тогда для любого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ такого, что $D_+(\Lambda_1) > 0$, смешанная система* (4.7.36) *полна в $\mathcal{P}W_\pi$.*

Следующее утверждение играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1.4.6.

Утверждение 4.7.7. *Пусть $S \in \mathcal{P}W_\pi + \mathbb{C}\sin\pi z$ – целая функция, вещественная на вещественной оси с вещественными нулями, перемежающимися с $\mathbb{Z}$. Если $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |S(n)| < \infty$, то для любого $\delta > 0$*

$$L_\delta := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{card}\left\{|k| \le N : \mathrm{dist}\,(\mathcal{Z}_S \cap [k, k+1], \mathbb{Z}) > \delta\right\} = 0.$$

Доказательство. Пусть $S(n) = (-1)^n c_n$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $c_n > 0$ и $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n = 1$. Тогда $S(z)/\sin\pi z$ – функция Герглотца в $\mathbb{C}_+$ и

$$\frac{S(z)}{\sin\pi z} = b + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{z-n}$$

для некоторого $b \in \mathbb{R}$. Положим, $s(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{x-n}$.

Случай 1. Если $b \ne 0$, то

$$\lim_{x\in\mathcal{Z}_S, |x|\to\infty} \mathrm{dist}\,(x, \mathbb{Z}) = 0.$$

Это следует из того, что для любого $\delta > 0$ мы имеем $s(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $\mathrm{dist}\,(x, \mathbb{Z}) \ge \delta$.

Случай 2. Предположим, что $b = 0$. Зафиксируем два положительных числа $\delta < 1/4$ и $\eta < \delta^3$ и выберем M таким, что$\sum_{|n|\le M} c_n > 1 - \eta$.

Предположим, что целое число N настолько велико, что $\delta N > M$. Положим,

$$E_N = \Big\{x \in \mathbb{R} : \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{x-n}\Big| \ge \frac{1}{N}\Big\}.$$

По лемме Буля, $|E_N| = 2N$ ($|E|$ обозначает меру Лебега множества E).

Положим,

$$F_N = \Big\{x \in \mathbb{R} : \Big|\sum_{|n|>M} \frac{c_n}{x-n}\Big| \ge \frac{\delta}{2N}\Big\}.$$

Тогда

$$|F_N| \le \frac{4N\eta}{\delta}.$$

Пусть $J_N = [-N - \delta N - M, N + \delta N + M]$. Так как

$$\Big|\sum_{|n|\le M} \frac{c_n}{x-n}\Big| \le \frac{1}{(1+\delta)N}, \qquad x \notin J_N,$$

мы получаем, что для $x \in E_N \setminus J_N$,

$$\Big|\sum_{|n|>M} \frac{c_n}{x-n}\Big| \ge \frac{1}{N} - \frac{1}{(1+\delta)N} = \frac{\delta}{(1+\delta)N}.$$

Таким образом, $x \in F_N$. Мы получили, что $E_N \setminus J_N \subset F_N$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{I}_N$ интервалов вида $I_k = [k, k+1] \subset J_N$, где $|k| \ge M + \delta N$ и выполнены следующие два свойства:

$$(I_k^* \cap E_N) \setminus F_N \ne \emptyset, \qquad I_k^* = [k+\delta, k+1-\delta]; \tag{4.7.37}$$

$$|I_k \cap F_N| < \delta. \tag{4.7.38}$$

Мы покажем, что, для достаточно больших N, мы имеем

$$\operatorname{card} \mathcal{I}_N \ge (1 - A_1\delta)|J_N|, \tag{4.7.39}$$

где A_1 – некоторая абсолютная константа. В дальнейшем (в этом параграфе) символы A_1, A_2 будут обозначать абсолютные константы.

Если $(I_k^* \cap E_N) \setminus F_N = \emptyset$ (т.е., интервал I_k^* не удовлетворяет условию (11.0.8)), то $I_k^* \subset (J_N \setminus E_N) \cup F_N$ и

$$\begin{aligned} |(J_N \setminus E_N) \cup F_N| &\le |J_N| - |J_N \cap E_N| + |F_N| \\ &= |J_N| - |E_N| + |E_N \setminus J_N| + |F_N| \\ &\le 2N + 2\delta N + 2M - 2N + \frac{8N\eta}{\delta} \le A_2 \delta N. \end{aligned}$$

Следовательно, число N_1 тех интервалов I_k^* для которых не выполнено (11.0.8), удовлетворяет следующей оценке:

$$N_1(1 - 2\delta) \le A_3 \delta N.$$

С другой стороны, число N_2 тех интервалов I_k? для которых не выполнено (4.7.38), удовлетворяет оценке $N_2\delta \le \frac{4N\eta}{\delta}$. Таким образом, $N_2 \le \frac{4N\eta}{\delta^2} \le A_4 \delta N$, так как $\eta < \delta^3$. Следовательно, для достаточно больших N,

$$\operatorname{card} \mathcal{I}_N \ge 2N - N_1 - N_2 \ge 2N - A_5 \delta N.$$

Последнее неравенство влечет (4.7.39).

Если $I_k \in \mathcal{I}_N$, то существует точка $y \in (I_k^* \cap E_N) \setminus F_N$ и мы получаем, что

$$\Big| \sum_{|n| \le M} \frac{c_n}{y - n} \Big| \ge \frac{1}{N} - \frac{\delta}{2N} > \frac{1}{2N}.$$

Для любой точки $x \in I_k^*$, используя неравенство $|k| \ge M + \delta N$, мы получаем, что

$$\Big| \sum_{|n| \le M} \frac{c_n}{x - n} - \sum_{|n| \le M} \frac{c_n}{y - n} \Big| \le \sum_{|n| \le M} \frac{c_n |x - y|}{|(x - n)(y - n)|} \le \frac{1}{\delta^2 N^2} \le \frac{1}{4N} \tag{4.7.40}$$

для достаточно больших N. Следовательно,

$$\Big| \sum_{|n| \le M} \frac{c_n}{x - n} \Big| \ge \frac{1}{4N}, \qquad x \in I_k^*.$$

Предположим, что для некоторого $w \in I_k^*$ мы знаем, что $s(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{w - n} = 0$. Тогда

$$\Big| \sum_{|n| > M} \frac{c_n}{w - n} \Big| \ge \frac{1}{4N} > \frac{\delta}{N}.$$

Таким образом, $w \in F_N$. Более того, так как функция под модулем монотонна на I_k, мы получаем, что либо $[k, w] \subset F_N$, либо $[w, k + 1] \subset F_N$. Это противоречит (4.7.38).

Следовательно, нуль s (или S), лежащий в интервале $I_k \in \mathcal{I}_N$, принадлежит множеству $I_k \setminus I_k^*$. Пользуясь (4.7.39), мы получаем, что

$$L_\delta = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{card}\left\{|k| \le N : \mathrm{dist}\,(\mathcal{Z}_S \cap [k, k+1], \mathbb{Z}) > \delta\right\} \le A\delta$$

для некоторой абсолютной константы A. Так как L_δ – невозрастающая функция на $(0, 1/4)$, мы получаем, что $L_\delta \equiv 0$. □

Доказательство. Предположим, что существует нетривиальная функция h, ортогональная к системе (4.7.28) и такая, что $D_+(\Lambda_1) > 0$. Обозначим за $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ множества нулей функций S_1 и S_2 соответственно.

Так как $G_1 S_1 \in \mathcal{P}W_\pi + z\mathcal{P}W_\pi$, мы получаем, что

$$D(\Lambda_1 \cup \mathcal{Z}_1) = \lim_{r\to\infty} \frac{n_r(\Lambda_1 \cup \mathcal{Z}_1)}{2r} \le \pi,$$

и, следовательно,

$$D_-(\mathcal{Z}_1) = \liminf_{r\to\infty} \frac{n_r(\mathcal{Z}_1)}{2r} < \pi.$$

Так как функция S имеет экспоненциальный тип π, мы получаем, что $D_+(\mathcal{Z}_2) > 0$.

Функция $S_2 = h/G_2$ не зависит от выбора базиса. Таким образом, заменив, если нужно, базис $\{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на базис $\{k_{n+\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, мы можем найти такое α, что, для подпоследовательности $\tilde{\mathcal{Z}}_2$ последовательности $\mathcal{Z}_2$ с положительной верхней плотностью, мы имеем

$$\mathrm{dist}\,(\tilde{\mathcal{Z}}_2, \mathbb{Z} + \alpha) \ge 1/4.$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что это выполнено для $\alpha = 0$. Построим функцию S_1, соответствующую этому базису по формуле (4.7.29). Тогда, для $S = S_1 S_2$, мы имеем $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |S(n)| < \infty$. Пользуясь следствием 4.7.4, мы получаем, что нули функции S перемежаются с $\mathbb{Z}$. Из утверждения 4.7.7 мы знаем, что все нули S, за исключением множества нулевой плотности, близки к $\mathbb{Z}$. Мы получили противоречие. □

Глава 5. Проблема Карлсона-Сандберга

В этой главе мы дадим положительный ответ на вопрос Карлсона–Сандберга. Ключевой шаг доказательства – сведение к задаче о полноте смешанной системы. Отметим, что в нашем случае система, состоящая только из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, неполна. Тем не менее смешанная система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \cup \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$ оказывается полной за счет наличия большого числа биортогональных элементов.

Напомним формулировку основного результата.

Теорема 5.0.8. *Пусть* $f \in L^2(0,1)$ *такова, что* $\operatorname{conv}(\operatorname{supp} f) = [0,a]$, $0 < a < 1$. *Обозначим за* $\Lambda = \{(\lambda_k, n_k)\}$ *дивизор* $\mathcal{F}f$ *(т.е.* $\mathcal{F}f$ *обращается в* 0 *с кратностью* n_k*). Тогда система*

$$\{f(x-t)\}_{0\le t\le 1-a} \cup \{x^s e^{i\lambda_k x}\}_{(\lambda_k,n_k)\in-\overline{\Lambda},\quad 0\le s<n_k}$$

полна в $L^2(0,1)$.

Отметим, что в крайнем случае $a = 1$ результат не имеет места.

Утверждение 5.0.9. *Существует функция* $f \in L^2[0,1]$ *такая, что* $\operatorname{conv}(\operatorname{supp} f) = [0,1]$, $\mathcal{F}f$ *имеет только простые нули в точках их множества* $\Lambda \subset \mathbb{R}$, *а семейство*

$$\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{f\}$$

неполно в $L^2[0,1]$.

Доказательство. Рассмотрим нашу задачу на интервале $[-\pi,\pi]$ и применим преобразование Фурье. Мы получим следующую переформулировку теоремы 5.0.8.

Пусть функция F *лежит в пространстве Пэли–Винера* $\mathcal{PW}_{\pi a}$ *(Фурье образ пространства* $L^2[-\pi a, \pi a]$*), а* $\Lambda = \{(\lambda_k, n_k)\}$ *– дивизор функции* F. *Тогда семейство*

$$\{F(z)e^{itz}\}_{|t|\le\pi(1-a)} \cup \{k^s_\lambda\}_{(\lambda_k,n_k)\in\Lambda,\, 0\le s<n_k} \tag{5.0.1}$$

полно в $\mathcal{PW}_\pi$.

Напомним, что $k^0_\lambda(z) = k_\lambda(z) = \frac{\sin[\pi(z-\overline{\lambda})]}{\pi(z-\overline{\lambda})}$ – воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{PW}_\pi$, а функция

$$k^s_\lambda = \Big(\frac{d}{d\overline{\lambda}}\Big)^s k_\lambda$$

воспроизводит s-ю производную:

$$\langle f, k^s_\lambda\rangle_{\mathcal{PW}_\pi} = f^{(s)}(\lambda), \qquad f \in \mathcal{PW}_\pi,\ \lambda\in\mathbb{C},\ s\ge 0.$$

Нетрудно показать, что для каждого $\beta \in \mathbb{R}$ функции

$$F(z)\frac{\sin[\pi(1-a)(z-\beta)]}{z-\beta-2n(1-a)^{-1}}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

лежат в замкнутой линейной оболочке семейства $\{F(z)e^{itz}\}_{|t|\le\pi(1-a)}$ в $\mathcal{P}W_\pi$.

Положим, $G(z) = F(z)\sin[\pi(1-a)(z-\beta)]$. Зафиксируем β так, чтобы у функции G были только простые нули. Положим, $\Lambda' = \{\beta + \frac{2n}{1-a}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Нам осталось проверить, что семейство

$$\left\{\frac{G(z)}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda'} \cup \{k^s_{\lambda_k}\}_{(\lambda_k,n_k)\in\Lambda,\, 0\le s<n_k}$$

полно в $\mathcal{P}W_\pi$.

Вывод основного уравнения

Предположим противное. Тогда существует функция $h \in \mathcal{P}W_\pi \setminus \{0\}$ такая, что

$$\left(\frac{G(z)}{z-\lambda}, h\right) = 0, \qquad \lambda \in \Lambda', \tag{5.0.2}$$

$$(h, k^s_\lambda) = 0, \qquad (\lambda_k, n_k) \in \Lambda,\ 0 \le s < n_k. \tag{5.0.3}$$

Для любого $0 \le \gamma < 1$ мы разложим h по ортогональному базису $k_{n+\gamma}$:

$$h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{a}_{n,\gamma} k_{n+\gamma}, \qquad \{a_{n,\gamma}\} \in \ell^2.$$

Тогда уравнения (5.0.2)–(5.0.3) мы можем переписать следующим образом:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_{n,\gamma}G(n+\gamma)}{n+\gamma-\lambda} = 0, \qquad \lambda \in \Lambda',$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\bar{a}_{n,\gamma}(-1)^n}{(n+\gamma-\lambda_k)^s} = 0, \qquad (\lambda_k, n_k) \in \Lambda,\ 0 < s \le n_k.$$

Поменяв γ (если нужно), мы можем добиться, что $a_{n,\gamma} \ne 0$, $G(n+\gamma) \ne 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, существуют целые функции S_γ и T_γ такие, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_{n,\gamma}G(n+\gamma)}{n+\gamma-z} = \frac{T_\gamma(z)\sin[\pi(1-a)(z-\beta)]}{\sin[\pi(z-\gamma)]}, \tag{5.0.4}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\bar{a}_{n,\gamma}(-1)^n}{n+\gamma-z} = \frac{S_\gamma(z)F(z)}{\sin[\pi(z-\gamma)]} = \frac{h(z)}{\sin[\pi(z-\gamma)]}. \tag{5.0.5}$$

Так как функция $h = FS_\gamma$ не зависит от γ, в дальнейшем мы будем писать $S = S_\gamma$.

Положим $V_\gamma = ST_\gamma$. Сравнивая вычеты в уравнениях (5.0.4)–(5.0.5) в точках $n+\gamma$, $n \in \mathbb{Z}$, мы получаем, что

$$V_\gamma(n+\gamma) = (-1)^n |a_{n,\gamma}|^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.0.6}$$

По построению функция V_γ имеет экспоненциальный тип не выше π. Следовательно, мы получаем формулу

$$V_\gamma(z) = Q_\gamma(z) + \sin[\pi(z-\gamma)] R_\gamma(z), \tag{5.0.7}$$

где

$$Q_\gamma(z) = \sin \pi(z-\gamma) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|a_{n,\gamma}|^2}{z-n-\gamma},$$

а R_γ – функция нулевого экспоненциального типа. Следовательно, сопряженная индикаторная диаграмма функции V_γ равна $[-\pi,\pi]$. Тогда сопряженные индикаторные диаграммы функций T_γ и S равны $[-\pi a, \pi a]$ и $[-\pi(1-a), \pi(1-a)]$ соответственно.

Следовательно, каждая из функций V_γ^*/V_γ, T_γ^*/T_γ, S^*/S представима в виде частного двух произведений Бляшке (напомним, что $H^*(z) = \overline{H(\bar{z})}$).

Из уравнения (5.0.5) следует, что

$$\frac{S(z)F(z)}{\sin[\pi(z-\gamma)]} \cdot \frac{S^*(z)}{S(z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\bar{a}_{n,\gamma}(-1)^n}{n+\gamma-z} \cdot \frac{S^*(n+\gamma)}{S(n+\gamma)} + H(z)$$

для некоторой целой функции H. Так как $FS^* \in \mathcal{P}W_\pi$, мы получаем, что функция H имеет нулевой экспоненциальный тип и стремится к 0 вдоль мнимой оси. Следовательно, $H = 0$.

Положим, $\bar{b}_{n,\gamma} = \bar{a}_{n,\gamma} \frac{S^*(n+\gamma)}{S(n+\gamma)}$. Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\bar{b}_{n,\gamma}(-1)^n}{n+\gamma-z} = \frac{S^*(z)F(z)}{\sin \pi(z-\gamma)}.$$

Воспользовавшись тем, что функция $z \mapsto T_\gamma(z)\sin[\pi(1-a)(z-\beta)]$ принадлежит пространству $\mathcal{P}W_\pi$, а функция ST_γ вещественна на $\mathbb{Z}+\gamma$, мы получаем, что (5.0.4) влечет

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{b_{n,\gamma}G(n+\gamma)}{n+\gamma-z} = \frac{T_\gamma^*(z)\sin[\pi(1-a)(z-\beta)]}{\sin[\pi(z-\gamma)]}.$$

Следовательно, функция

$$g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{b}_n k_{n+\gamma}$$

ортогональна к системе (5.0.1). Тогда вектора $h+g$, $ih-ig$ тоже ортогональны к системе (5.0.1), а соответствующие пары функций равны $(S+S^*, T_\gamma+T_\gamma^*)$, $(iS-iS^*, -iT_\gamma+iT_\gamma^*)$. Следовательно, мы можем считать, что функции S, T_γ и V_γ вещественны на вещественной оси.

Из соотношения (5.0.6) следует, что функция V_γ имеет как минимум один нуль в интервале $(n+\gamma, n+1+\gamma)$, $n\in\mathbb{Z}$. Из (5.0.7) мы получаем, что нули функции V_γ совпадают с нулями функции

$$R_\gamma(\lambda) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|a_{n,\gamma}|^2}{\lambda-n-\gamma}. \tag{5.0.8}$$

Ограниченность функции R на большом множестве

Мы покажем, что из уравнения 5.0.8 можно вывести, что функция R_γ ограничена на большом множестве.

Зафиксируем $\gamma\in[0,1)$ и настолько малое $\delta>0$, что существуют два подмножества Σ, Σ_1 множества нулей $\mathcal{Z}(S)$ функции S, удовлетворяющие следующим условиям:

- Σ содержит ровно одну точку в тех интервалах, где $\mathcal{Z}(S)\cap[n+\gamma, n+1+\gamma)\neq\emptyset$, и
$$\operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}+\gamma) > \frac{\delta}{1+x^2}, \qquad x\in\Sigma;$$
- Σ_1 имеет положительную верхнюю плотность и $\operatorname{dist}(x,\mathbb{Z}+\gamma)>\delta$, $x\in\Sigma_1$.

Положим, $R=R_\gamma$, $a_n=a_{n,\gamma}$, $V=V_\gamma$, $T=T_\gamma$. Рассмотрим три случая.

(i) Если R – нетривиальный полином, то нули функции (5.0.8) приближаются к $\mathbb{Z}+\gamma$. Мы получили противоречие с существованием множества Σ_1.

(ii) Если $R=0$, то утверждение 4.7.7 влечет, что плотность Σ_1 равна нулю.

(iii) Пусть R не является полиномом. Разделим функцию R на $(z-z_1)(z-z_2)$, где z_1 и z_2 – два произвольных нуля R, $z_1, z_2\notin\Sigma$ и получим функцию R_1 нулевого экспоненциального типа, ограниченную на Σ.

В дальнейшем мы докажем, что множество Σ достаточно велико. Для дискретного множества $X=\{x_n\}\subset\mathbb{R}$ рассмотрим его считающую функцию

$$n_X(t) = \operatorname{card}\{n : x_n\in[0,t)\}, \quad t\geq 0$$

,

$$n_X(t) = -\operatorname{card}\{n : x_n\in(-t,0)\}, \quad t<0.$$

Если f – целая функция, а X – множество вещественных нулей (с учетом кратности), то существует аргумент f на вещественной оси такой, что $\arg f(t) = \pi n_X(t) + \psi(t)$, где ψ – гладкая функция. Такой выбор аргумента единственен с точностью до аддитивной константы. В дальнейшем мы всегда будем полагать, что аргумент выбран таким образом.

Мы будем использовать тот факт, что любая функция $f \in \mathcal{P}W_\pi$ с сопряженной индикаторной диаграммой $[-\pi, \pi]$ и нулями в $\overline{\mathbb{C}_+}$ удовлетворяет уравнению

$$\arg f = \pi x + \tilde{u} + c, \tag{5.0.9}$$

где $u \in L^1((1+x^2)^{-1}dx)$, $c \in \mathbb{R}$ (см., например, [67, 68]). Здесь $\tilde{u}$ обозначает сопряженную функцию (преобразование Гильберта) функции u,

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) u(t)dt.$$

Уравнение, аналогичное 5.0.9, может быть написано для произвольного пространства де Бранжа (модельного пространства K_Θ с мероморфной функцией Θ), см. [67, 68]. Уравнения такого рода позволяют глубже понять структуру пространства и помочь в решении некоторых важных задач (см., например, [2–4]).

Из уравнений (5.0.4)–(5.0.5) следует, что $FV \in \mathcal{P}W_{\pi a+\pi}$. Заменим все нули λ функций h, F, S, T, и V в $\mathbb{C}_-$ на сопряженные $\bar{\lambda}$.

Так как пространство Пэли–Винера замкнуто относительно деления на произведение Бляшке, мы получаем для новых функций h, F, S, T, и V (которые мы будем обозначать теми же буквами), что $h \in \mathcal{P}W_\pi$ и $FV \in \mathcal{P}W_{\pi a+\pi}$.

Напомним, что функция V имеет как минимум один нуль в интервалах вида $(n+\gamma, n+1+\gamma)$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим представление $V = V_0 H$, где нули функции V_0 простые и перемежающиеся с $\mathbb{Z}+\gamma$, причем $V_0|_\Sigma = 0$. Очевидно, что $\arg V_0 = \pi x + O(1)$. Уравнение (5.0.9) влечет, что

$$\arg(FV) = \pi a x + \pi x + \tilde{u} + c.$$

Следовательно,

$$\arg(FH) = \pi a x + \tilde{u} + O(1).$$

Рассмотрим тождество $h = FHS/H$ и заметим, что

$$\arg\left(\frac{S}{H}\right) = \pi n_\Sigma - \alpha,$$

где α – неубывающая функция на $\mathbb{R}$. Это следует из того, что S/H обнуляется только в точках вещественной оси, содержащихся в Σ, а $\frac{S^*H}{SH^*}$ – произведение

Бляшке. Применяя уравнение (5.0.9) к h, мы получаем, что

$$\pi n_\Sigma(x) = \pi(1-a)x + \tilde{u} + v + \alpha, \tag{5.0.10}$$

где $u \in L^1((1+x^2)^{-1}dx)$, $v \in L^\infty(\mathbb{R})$, а α – неубывающая функция.

Итого, мы построили функцию R_1 нулевого экспоненциального типа, не являющуюся полиномом, ограниченную на множестве $\Sigma \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющем (8.2.8).

Задача Полиа. Теорема Берлинга–Мальявена

Мы получим противоречие при помощи некоторой информации о классической задаче Полиа и второй теореме Берлинга–Мальявена.

Мы будем говорить, что последовательность $X = \{x_n\} \subset \mathbb{R}$ – *последовательность Полиа*, если любая целая функция нулевого экспоненциального типа, ограниченная на X, равна константе.

Будем говорить, что последовательность дизъюнктных интервалов $\{I_n\}$ на вещественной оси *длинная,* если

$$\sum_n \frac{|I_n|^2}{1+\operatorname{dist}^2(0, I_n)} = \infty.$$

Полное решение проблемы Полиа было получено М. Митковским и А. Полторацким [80]. В частности, разделенная последовательность $X \subset \mathbb{R}$ не является последовательностью Полиа тогда и только тогда, когда существует длинная последовательность интервалов $\{I_n\}$ такая, что

$$\frac{\operatorname{card}(X \cap I_n)}{|I_n|} \to 0.$$

Применим этот результат к функциям R и Σ (вообще говоря, Σ – не обязательно разделенная последовательность, но, по построению, является объединением двух разделенных последовательностей, которые перемежаются) и получаем, что существует длинная последовательность $\{I_n\}$ интервалов такая, что

$$\frac{\operatorname{card}(\Sigma \cap I_n)}{|I_n|} \to 0.$$

Пусть $I = [a, b]$. Положим, $I^- = [a, (2a+b)/3]$, $I^+ = [(a+2b)/3, b]$,

$$\Delta_I^* = \inf_{I^+}[\pi(1-a)x - \pi n_\Sigma(x) + v] - \sup_{I^-}[\pi(1-a)x - \pi n_\Sigma(x) + v].$$

Таким образом, для длинной системы интервалов $\{I_n\}$ и некоторой константы $c > 0$ мы имеем

$$\Delta^*_{I_n} \geq c|I_n|.$$

Теперь мы воспользуемся версией второй теоремы Берлинга–Мальявена, полученной Н. Макаровым и А. Полторацким в [79, теорема 5.9]. Эта теорема (и ее доказательство) влечет, что если функция $\pi(1-a)x - \pi n_\Sigma(x) + v$ может быть представлена как $-\alpha - \tilde{u}$ для функций α и u таких же, как выше, то не существует такой длинной последовательности интервалов. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Докажем утверждение 5.0.9.

Доказательство. Пусть$\Lambda_1 = \{\pi 2^n\}_{n\geq 1}$, $\Lambda = 2\pi\mathbb{Z} \setminus \Lambda_1$. Рассмотрим целую функцию F нулевого порядка с множеством нулей Λ_1. Положим,

$$G(z) = e^{iz/2} \cdot \frac{\sin(z/2)}{F(z)}.$$

Тогда $G = \hat{f}$ для некоторой функции $f \in L^2[0,1]$, а подпространство $L^2[0,1] \ominus \{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$ имеет бесконечную размерность. $\square$

Глава 6. Суммируемость неклассических рядов Фурье

В этой главе мы докажем теорему 1.6.3 и несколько смежных результатов. Основной инструмент доказательства – применение теоремы Хеймана для оценки произведения Бляшке снизу на больших подмножествах $\mathbb{C}_+$. Также мы приведем более простое доказательство одного результата Г. Губреева и А. Тарасенко.

Напомним формулировку основного результата.

Теорема 6.0.10. (*теорема 1.6.3*) *Пусть порождающая функция G имеет экспоненциальный тип π и удовлетворяет условию Макенхаупта* (1.6.25). *Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda) = \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (ряд* (1.6.24)*) допускает линейный метод суммирования.*

6.1. Универсальный метод суммирования

Предположим, что $\Lambda \subset \mathbb{C}_+$. В дальнейшем мы покажем, какие изменения надо сделать в доказательстве в общем случае. Мы применим к системе $\mathcal{E}(\Lambda)$ преобразование Фурье и, таким образом, перенесем нашу задачу в пространство Пэли–Винера $\mathcal{P}W_\pi$.

Мы должны построить линейный метод суммирования для ряда

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(F, G_\lambda)k_\lambda, \quad F \in \mathcal{P}W_\pi,$$

где $(\cdot,\cdot)$ обозначает обычное скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R})$.

Пусть матрица $W := \{w(\lambda, n)\}$ удовлетворяет условиям из определения 1.6.1. Мы знаем, что

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} w(\lambda, n)(F, G_\lambda)k_\lambda \to F$$

для плотного множества конечных линейных комбинаций воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Таким образом, для доказательства того, что W порождает линейный метод суммирования, достаточно доказать, что операторы

$$T_n : F \to \sum_{\lambda\in\Lambda} w(\lambda, n)(F, G_\lambda)k_\lambda \tag{6.1.1}$$

равномерно ограничены.

Мы будем доказывать, что при подходящем выборе W последовательность сопряженных операторов

$$T_n^*: F \to \sum_{\lambda\in\Lambda} w(\lambda,n)(F,k_\lambda)G_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} w(\lambda,n)F(\lambda)\frac{G(z)}{G'(\lambda)(z-\lambda)}.$$

равномерно ограничена.

6.1.1. Матрица, порождающая метод суммирования

Мы построим матрицу $W = \{w(\lambda,n)\}$, выбрав подходящую последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$ и возрастающий набор подмножеств $\Lambda_n \subset \Lambda$, $\cup\Lambda_n = \Lambda$.

Положим,

$$w_n(z) = \exp\left[-i\alpha_n l_n \int_{|u|>1/2}\left[\frac{1}{z/l_n - u} + \frac{1}{u}\right]du\right], \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Таким образом, $w_n(z)$ – внешняя функция по модулю равная 1 в интервале $[-l_n/2, l_n/2]$ и $e^{-\pi\alpha_n l_n}$ на множестве $\mathbb{R}\setminus[-l_n/2, l_n/2]$. Положим,

$$w(\lambda,n) = \begin{cases} w_n(\lambda), & \lambda\in\Lambda_n \\ 0, & \lambda\notin\Lambda_n. \end{cases}$$

Последовательности $l_n \to \infty$ и $\alpha_n \to 0$ будут выбраны позднее. Нетрудно проверить, что $w_n(\lambda) \to 1$, $n \to \infty$.

Построение множеств Λ_n и представление для операторов T_n^*

Для данных последовательностей $\{l_n\}$, $l_n \to \infty$ и $\{c_n\}$, $c_n > 0$ рассмотрим контуры

$$R_n = [l_n, ic_n l_n], \quad L_n = [-l_n, ic_n l_n], \tag{6.1.2}$$
$$C_n = [-l_n, l_n] \cup R_n \cup L_n.$$

Положим, $\Lambda_n = \Lambda \cap \operatorname{int} C_n$. Тогда для $F \in \mathcal{P}W_\pi$ мы имеем

$$\begin{aligned}
T_n^* F(x) &= G(x) \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \frac{w_n(\lambda) F(x)}{G'(\lambda)(x-\lambda)} \\
&= \frac{G(x)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(\zeta) w_n(\zeta)}{G(\zeta)(\zeta - x)} d\zeta + \frac{1}{2} F(x) w_n(x) \chi_{[-l_n, l_n]}(x) \\
&= \frac{G(x)}{2\pi i} \left[\int_{[-l_n, l_n]} + \int_{R_n} + \int_{L_n} \right] \frac{F(\zeta) w_n(\zeta)}{G(\zeta)(\zeta - x)} d\zeta + \frac{1}{2} F(x) w_n(x) \chi_{[-l_n, l_n]}(x) \\
&= I_{1,n}(x) + I_{2,n}(x) + I_{3,n}(x) + \frac{1}{2} F(x) w_n(x) \chi_{[-l_n, l_n]}(x), \quad (6.1.3)
\end{aligned}$$

где $\chi_{[-l_n, l_n]}$ – индикатор интервала $[-l_n, l_n]$. Норма (в $L^2(\mathbb{R})$) каждого слагаемого справа в (6.1.3) будет оцениваться отдельно. Видно, что норма последнего слагаемого ограничена величиной $\|F\|_2$.

Величину $\|I_{1,n}\|$ можно оценить непосредственно. Действительно, функция $w_n F G^{-1}$ принадлежит весовому пространству

$$L^2(\mathbb{R}, |G|^2) := \{H : \int_{\mathbb{R}} |H(x)|^2 |G(x)|^2 < \infty\}.$$

Так как $|G|^2 \in (A_2)$, преобразование Гильберта – ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}, |G|^2)$.

Нам осталось выбрать последовательности$\{l_n\}$, $\{c_n\}$ и оценить величины $\|I_{2,n}\|$ и $\|I_{3,n}\|$.

Внешне-внутренняя факторизация и построение контуров C_n

Пусть ω – внешняя функция в $\mathbb{C}_+$ такая, что $|\omega(x)| = |G(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, а B – произведение Бляшке с простыми нулями в Λ. Для того чтобы оценить $I_{2,n}$ и $I_{3,n}$, мы воспользуемся внешне-внутренней факторизацией

$$e^{i\pi z} G(z) = c\omega(z) B(z), \quad |c| = 1.$$

Пользуясь оценкой на верхнюю плотность Λ и формулой

$$\arg B'(t) = 2 \sum_\lambda \frac{\Im \lambda}{|t - \lambda|^2},$$

мы получаем, что

$$|\arg B(x) - \arg B(0)| \le 2\pi \cdot \#\big[\Lambda \cap \{|z| < 2|x|\}\big] + o(|x|) \lesssim 1 + |x|.$$

Следующая лемма будет играть ключевую роль в доказательстве.

Лемма 6.1.1. *Пусть B – произведение Бляшке такое, что* $|\arg B(x)| \lesssim 1+|x|$. *Тогда существует последовательности $l_n \to \infty$, $\{c_n\}$, $1 \le c_n \le 10$ и убывающая функция $\varepsilon(t) \to 0$, $t \to \infty$ такие, что для контуров C_n, которые мы определили в* (6.1.2), *выполнена оценка*

$$-\log|B(\lambda)| \le \varepsilon(|\lambda|)|\lambda|, \quad \lambda \in \bigcup_n C_n. \tag{6.1.4}$$

Мы отложим доказательство этой леммы и закончим построение линейного метода суммирования.

Оценки величин $\|I_{2,n}\|$ и $\|I_{3,n}\|$ аналогичны. Мы будем оценивать только $\|I_{2,n}\|$. Пусть $\{C_n\}$ – последовательность контуров, выбранная в лемме 6.1.1. Зафиксируем $\alpha_n = 1000\varepsilon(l_n/10)$, где $\varepsilon(t)$ – функция из леммы 6.1.1. Мы знаем, что

$$\|I_{2,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sup_{g\in L^2, \|g\|\le 1} \Bigl|\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x) I_{2,n}(x)dx}_{J}\Bigr|.$$

Следовательно,

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{R_n} \frac{F(\zeta)A(\zeta)}{G(\zeta)} w_n(\zeta)d\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{R_n} e^{-i\pi\zeta}F(\zeta)\cdot\frac{A(\zeta)}{\omega(\zeta)}\cdot\frac{w_n(\zeta)}{B(\zeta)}d\zeta,$$

где

$$A(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)G(x)}{x-\zeta}dx.$$

При помощи неравенств

$$\log|w_n(\zeta)| \le -\alpha_n l_n \int_{|u|>1/2} \frac{\Im\zeta/l_n du}{|\zeta/l_n - u|^2} \le -\alpha_n l_n/5,$$

$\zeta \in R_n$ и леммы 6.1.1 мы получаем, что

$$\frac{|w_n(\zeta)|}{|B(\zeta)|} \le \frac{e^{-200\varepsilon(l_n/10)l_n}}{e^{-\varepsilon(|\zeta|)|\zeta|}} \le \frac{e^{-\varepsilon(|\zeta|)|\zeta|}}{e^{-\varepsilon(|\zeta|)|\zeta|}} = 1, \quad \zeta \in R_n.$$

Более того,

$$|J|^2 \lesssim \int_{R_n} |e^{-i\pi\zeta}F(\zeta)|^2|d\zeta| \cdot \int_{R_n} \frac{|A(\zeta)|^2}{|\omega(\zeta)|^2}|d\zeta|.$$

Пользуясь ограниченностью преобразования Гильберта с весом $|\omega|^2$, мы получаем, что

$$\frac{A(\zeta)}{\omega(\zeta)} \in H^2(\mathbb{C}_+) \quad \text{и} \quad \left\|\frac{A(\zeta)}{\omega(\zeta)}\right\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \lesssim \|g\| \le 1.$$

С другой стороны, $|d\zeta|\big|_{R_n}$ – мера Карлесона для пространства Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$. Следовательно,

$$|J| \lesssim \|e^{-i\pi\zeta}F(\zeta)\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \cdot \left\|\frac{A(\zeta)}{\omega(\zeta)}\right\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \lesssim \|F\|_{\mathcal{P}W_\pi}.$$

Мы доказали теорему 6.0.10 при дополнительном условии $\Lambda \subset \mathbb{C}_+$.

Поточечная сходимость интерполяционного ряда

Рассмотрим интерполяционный ряд Лагранжа

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} F(\lambda)\frac{G(z)}{G'(\lambda)(z-\lambda)}. \tag{6.1.5}$$

Представляет интерес поточечная сходимость этого ряда. Следующая теорема показывает, что поточечная сходимость имеет место и при более слабых условиях.

Теорема 6.1.2. *Пусть G – целая функция экспоненциального типа π в полуплоскостях $\mathbb{C}_\pm$ и*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|G(x)|^2}{1+|x^2|}dx < \infty, \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{|G(x)|^2(1+|x|^2)} < \infty. \tag{6.1.6}$$

Тогда существует линейный метод суммирования $W = \{w(\lambda, n)\}$ со сходимостью на компактах. А именно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\lambda\in\Lambda} w(\lambda,n)F(\lambda)\frac{G(z)}{G'(\lambda)(z-\lambda)} = F(z), \text{ *равномерно по* } z \in K$$

для всех $F \in \mathcal{P}W_\pi$ и $K \Subset \mathbb{C}$.

Нетрудно проверить, что условия (6.1.6) слабее чем условие Макенхаупта (1.6.25). Тем не менее, из них следует, что $\mathcal{E}(\Lambda)$ – точная (полная и минимальная) система в $L^2(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Мы докажем, что для любого компакта K операторы $V_n : \mathcal{P}W_\pi \mapsto L^\infty(K)$

$$V_n : F \to \sum_{\lambda\in\Lambda} w(\lambda,n)(F,k_\lambda)G_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} w(\lambda,n)F(\lambda)\frac{G(z)}{G'(\lambda)(z-\lambda)}.$$

равномерно ограничены. Зафиксируем $R > 1$ такое, что $K \subset \{|z| < R\}$ и контуры C_n.

Для любого $x \in K$ мы имеем

$$V_n F(x) = G(x) \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \frac{w_n(\lambda) F(x)}{G'(\lambda)(x-\lambda)}$$

$$= \frac{G(x)}{2\pi i} \left[\int_{\zeta \in \mathbb{C}^-, |\zeta| = 2R} + \int_{[-l_n, l_n] \setminus [-2R, 2R]} + \int_{R_n} + \int_{L_n} \right] \frac{F(\zeta) w_n(\zeta)}{G(\zeta)(\zeta - x)} d\zeta$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Интегралы I_2, I_3, I_4 легко оценить. С другой стороны,

$$I_1 \le 2\pi R \sup_{|z|=2R} |F(z)| \cdot \sup_{|z|=2R} |G(z)|^{-1} \lesssim \|F\|.$$

$\square$

Доказательство теоремы 6.0.10 в общем случае, когда в Λ есть точки в обеих полуплоскостях $\mathbb{C}_\pm$

Мы будем использовать внешне-внутреннюю факторизацию G в обеих полуплоскостях

$$G(z) = \begin{cases} \omega(z) B^+(z) e^{-i\pi z}, & \text{если } z \in \mathbb{C}_+ \\ \omega^\#(z) B^-(z) e^{i\pi z}, & \text{если } z \in \mathbb{C}_-. \end{cases} \tag{6.1.7}$$

Выберем контуры C_n^- для точек в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ так же, но при помощи произведения Бляшке B^-. Построим операторы T_n^- и положим $T_n = T_n^+ + T_n^-$. При помощи тех же рассуждений докажем, что операторы T_n^- равномерно ограничены. Следовательно, T_n равномерно ограничены и $T_n F \to F$ для плотного подмножества функций $F \in \mathcal{P}W_\pi$. $\square$

6.1.2. Доказательство леммы 6.1.1

Нам понадобится следующая оценка.

Лемма 6.1.3. *Пусть B – произведение Бляшке такое, что $|\arg B(x)| \lesssim 1 + |x|$. Тогда существует последовательности $l_n \to \infty$, $\{c_n\}$, $1 \le c_n \le 10$ и константа $C = C(B)$ такая, что для контуров C_n, определенных в* (6.1.2), *выполнена оценка*

$$-\log |B(\lambda)| \le C_B \Im \lambda + C_B, \quad \lambda \in \bigcup_n C_n. \tag{6.1.8}$$

Более того, это неравенство выполнено для $c_n \in U_n$, где $U_n \subset [1, 10]$ – некоторое множество такое, что $|U_n| > 8$.

Доказательство. Пусть $\{z_l\}$ – нули произведения Бляшке B, $z_l = x_l + iy_l$. Выберем последовательность $\{l_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ так, что $\sup_n (\arg B)'(\pm l_n) \lesssim 1$. Следовательно,

$$\sup_n (\arg B)'(\pm l_n) = \sup_n \sum_l \frac{2y_l}{(\pm l_n - x_l)^2 + y_l^2} < \infty,$$

а последовательности $\Lambda \pm l_n$ равномерно удовлетворяют условию Бляшке.

Теорема Хеймана (см., например, [76, лекция 15, теорема 1]) утверждает, что $|\log|B(z)|| = o(|z|)$ для всех $z \in \mathbb{C}_+$, кроме некоторого подмножества конечного (малого) вида. Нам понадобится следующая версия этого результата.

Утверждение 6.1.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует семейство дисков $D_m(w_m, r_m) := \{|z - w_m| < r_m\}$ такое, что*

$$\sum_m \frac{r_m}{|w_m|} < \varepsilon, \qquad |\log|B(z)|| \le c|z|, \quad z \notin \cup_m D_m(w_m, r_m),$$

где c зависит только от ε и суммы ряда Бляшке $\sum_n \frac{y_n}{x_n^2 + y_n^2}$.

По сравнению с теоремой Хеймана, мы требуем более слабую оценку на $\log|B(z)|$, но мы требуем равномерность константы c. Утверждение 6.1.4 доказывается точно так же, как и теорема Хеймана в [76].

Применим утверждение 6.1.4 к произведениям Бляшке $B(z \pm l_n)$: существует последовательность $c_n \in [1, 10]$ такая, что

$$|B(z \pm l_n)| \gtrsim e^{-c|z|}, \quad z \in \{\mp t + ic_n t, t > 0\}.$$

Если $z \in \{\mp t + ic_n t, t > 0\}$, то $|z| \simeq \Im z$. Мы получаем требуемую оценку на B и контуры C_n из (6.1.2). $\square$

Окончание доказательства леммы 6.1.1

Мы выберем контуры C_n как в лемме 6.1.3. Применим теорему Хеймана для произведения Бляшке B. Таким образом, существует последовательность дисков $D_n = \{z : |z - z_n| < r_n\}$ конечного вида

$$\sum_n \frac{r_n}{|z_n|} < \frac{1}{1000}, \tag{6.1.9}$$

такая, что $-\log|B(z)| \le \varepsilon_1(|\lambda|)|\lambda|$, $\lambda \notin \cup_n D_n$, где ε_1 – некоторая функция, $\varepsilon_1(t) \to 0$.

Положим,

$$\Delta_n := \operatorname{conv}\{l_n, il_n, 10il_n\}.$$

Рассмотрим последовательность $\sigma_n = \sum_{k\in\mathcal{N}_n} \frac{r_k}{|z_k|}$. Пусть $\mathcal{N}_n$ – множество индексов s таких, что $D_s \cap \Delta_n \ne \emptyset$. Если $l_{n+1} > 100 l_n$, то $\mathcal{N}_n \cap \mathcal{N}_m = \emptyset$, $n \ne m$. Таким образом, $\sum_n \sigma_n < \frac{1}{1000}$.

Зафиксируем последовательность q_n, монотонно растущую к бесконечности такую, что $\sum_n q_n\sigma_n < 1/1000$.

Положим,

$$\Delta_n^+ = \{z \in \Delta_n : q_n \Im z \ge |\Re z|\}.$$

Если для некоторого диска D_k, $D_k \cap \Delta_n^+ \ne \emptyset$, то

$$\frac{r_k}{|z_k - l_n|} \le 10 q_n \frac{r_k}{|z_k|}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k: D_k \cap \Delta_n^+ \ne \emptyset} \frac{r_k}{|z_k - l_n|} < \frac{1}{100}.$$

Следовательно, существуют контуры C_n, как в лемме 6.1.1, такие, что $C_n \cap D_k = \emptyset$ для любого диска D_k такого, что $D_k \cap \Delta_n^+ \ne \emptyset$. Следовательно, верна оценка

$$-\log|B(z)| \le \varepsilon_1(|\lambda|)|\lambda|, \quad \lambda \in C_n \cap \Delta_n^+.$$

Применяя лемму 6.1.1, мы получаем, что

$$-\log|B(\lambda)| \le C_B \Im\lambda + C_B \le 5\frac{C_B}{q_n}|\lambda|, \quad \lambda \in C_n \setminus \Delta_n^+.$$

$\square$

Явное построение метода суммирования

Теорема 6.1.5. *Пусть $C_n^\pm (= C_n^\pm(-l_n, l_n, \pm i c_n l_n))$ – множество треугольных контуров из леммы 6.1.1, а $B^\pm$ – произведения Бляшке с нулями $\Lambda \cap \mathbb{C}_\pm$ соответственно. Тогда матрица*

$$w(n,\lambda) = \begin{cases} w_n^\pm(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_\pm, \quad \lambda \in \operatorname{int} C_n^\pm \\ 0, & \textit{в других случаях} \end{cases}$$

порождает линейный метод суммирования для рядов (1.6.24), (6.1.5).

Отметим, что последовательность контуров C_n не обязательно лакунарна. Если, например, $\Lambda \subset \mathbb{C}_+$, а произведение Бляшке B удовлетворяет оценке

$(\arg B)'(x) \lesssim 1$, то l_n может быть произвольной последовательностью, стремящейся к бесконечности.

6.2. Наследственная полнота системы $\mathcal{E}(\Lambda)$

Мы дадим короткое доказательство того, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ наследственно полна, если выполнены условия теоремы 6.0.10. Впервые это утверждение было доказано Г. Губреевым и А. Тарасенко. Несмотря на то, что это утверждение слабее теоремы 6.0.10, автор диссертации решил доказать его отдельно, так как с его точки зрения метод доказательства может представлять определенный интерес.

Утверждение 6.2.1. *Пусть порождающая функция $G(= G_\Lambda)$ имеет экспоненциальный тип π и удовлетворяет условию Макенхаупта* (1.6.25)*. Тогда система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ наследственно полна в пространстве Пэли–Винера.*

Доказательство. Предположим, что существует нетривиальная функция $h \in L^2(-\pi,\pi)$, ортогональная смешанной системе

$$\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda_2} \cup \{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1},$$

где $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – биортогональная система, а $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

Следовательно,

$$(h, e^{i\lambda t})(\varphi_\lambda, h) = 0, \ \ \lambda \in \Lambda.$$

Рассмотрим это уравнение в пространстве Пэли–Винера. Пусть $H = \mathcal{F}h$. Тогда

$$(H, k_\lambda)(G_\lambda, H) = 0, \ \text{for any } \lambda \in \Lambda.$$

Воспользуемся формулой Шеннона–Котельникова–Уиттекера

$$H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H(n)\frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H(n)k_n(z).$$

Таким образом, $(G_\lambda, H) = \frac{1}{G'(\lambda)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{G(n)\overline{H(n)}}{\lambda-n}$. Рассмотрим мероморфную функцию

$$H(z)\sum_n \frac{\overline{H(n)}G(n)}{z-n}.$$

Эта функция обнуляется на Λ. Следовательно,

$$H(z)\cdot\sin(\pi z)\sum_n \frac{\overline{H(n)}G(n)}{z-n} = G(z)S(z) \tag{6.2.10}$$

для некоторой целой функции S. Легко проверить, что, для подходящего c_0,

$$S(z) = \sin(\pi z) \sum_n \frac{|H(n)|^2}{z-n} + c_0 \sin(\pi z).$$

Рассмотрим меру $\mu_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. Уравнение (11.0.1) влечет, что

$$H(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{H(t)}G(t)d\mu_0(t)}{x-t} = G(x)\left(c_0 + \int_{\mathbb{R}} \frac{|H(t)|^2 d\mu_0(t)}{x-t}\right).$$

То же самое верно для любой меры $\mu_\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n+\alpha}$, $\alpha \in [0,1)$. Следовательно, аналогичное уравнение выполнено и для меры $dx = \int_0^1 \mu_\alpha d\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Интегрирование по параметру $\alpha \in (0,1)$ дает нам уравнение

$$\frac{H(x)}{G(x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{H(t)}G(t)dt}{x-t} = c + \int_{\mathbb{R}} \frac{|H(t)|^2 dt}{x-t}.$$

Воспользовавшись ограниченностью преобразования Гильберта с весом $|G(x)|^2$, мы получаем, что левая часть лежит в пространстве $L^1(\mathbb{R})$. Если $c \neq 0$, то мы получаем противоречие. Если $c = 0$, то заметим, что

$$m\{x : |\int_{\mathbb{R}} \frac{|H(t)|^2 dt}{x-t}| > s\} \gtrsim \frac{1}{s}, \ s \to 0,$$

где m – мера Лебега. Следовательно, функция $c + \int_{\mathbb{R}} \frac{|H(t)|^2 dt}{x-t}$ не может быть суммируема даже если $c = 0$. Мы получили противоречие. $\square$

Глава 7. Локализация нулей преобразования Гильберта

В этой главе мы будем изучать свойство локализации нулей для преобразования Гильберта (Коши). Оказывается, что структура множеств, которые притягивают нули (аттракторов), в точности соответствует структуре гамильтониана соответствующей канонической системы. Например, все аттракторы одного пространства с локализацией упорядочены по включению. В том случае, когда есть лишь конечное число аттракторов, удается получить полное описание соответствующих спектральных мер теоремы 1.7.10–7.5.2.

Идеи доказательства в основном развивают идеи де Бранжа из книги [53]. Ключевой шаг – лемма о двух целых функциях экспоненциального типа нуль.

7.1. Эквивалентные формы локализации

В этом параграфе мы докажем теорему 1.7.1 об эквивалентных формах локализации. Напомним ее формулировку.

Теорема 7.1.1. *Пусть $\mathcal{H}(T,\mu)$ – пространство дискретных преобразований Гильберта, а T удовлетворяет условию степенной разделенности* (1.7.27). *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) существует неограниченное множество $S \subset \mathbb{C}$ такое, что множество $\mathcal{Z}_f \cap S$ конечно для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$;

(ii) множество $\mathcal{Z}_f \setminus \cup_n D(t_n, 1)$ конечно для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$;

(iii) существует последовательность непересекающихся дисков $D(t_n, r_n)$ такая, что для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ множество $\mathcal{Z}_f \setminus \cup_n D(t_n, r_n)$ конечно, и каждый диск $D(t_n, r_n)$ содержит не более одной точки из $\mathcal{Z}_f$ для всех индексов n, кроме, быть может, конечного числа;

(iv) не существует $f \in \mathcal{H}(T,\mu)\setminus\{0\}$ с бесконечным числом кратных нулей.

Доказательство. Заметим, что утверждение (iii) $\Longrightarrow$ (iv) очевидно, как и утверждение (ii) $\Longrightarrow$ (i) (возьмем в качестве $S = \mathbb{C} \setminus \cup_n D(t_n, 1)$).

Для того чтобы доказать эквивалентность всех 4-х условий, мы последовательно докажем, что (i) $\Longrightarrow$ (ii), (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) и (ii)& (iv) $\Longrightarrow$ (iii).

При доказательстве нам иногда будет удобно рассматривать не пространство $\mathcal{H}(T,\mu)$, а соответствующее пространство де Бранжа $\mathcal{H} = A\mathcal{H}(T,\mu)$.

Напомним, что последовательность $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$ *лакунарна*, если $\inf_k |z_{k+1}|/|z_k| > 1$. Каноническое произведение Вейерштрасса рода нуль, построенное по лакунарной последовательности, мы будем называть *лакунарным каноническим произведением.*

Нам часто будут нужны условия, гарантирующие то, что функция F лежит в пространстве де Бранжа $\mathcal{H} = A\mathcal{H}(T,\mu)$. Следующий критерий – частный случай теоремы 26 из [53]:

Теорема 7.1.2 (теорема 26 из книги де Бранжа). *Пусть $\mathcal{H} = A\mathcal{H}(T,\mu)$ – пространство де Бранжа. Целая функция F лежит в $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда iF/A – функция ограниченного вида (т.е. отношение двух ограниченных функций) в обеих полуплоскостях $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$,*

$$\liminf_{|y|\to\infty} \left|\frac{F(iy)}{A(iy)}\right| = 0, \tag{7.1.1}$$

и

$$\sum_n \frac{|F(t_n)|^2}{|A'(t_n)|^2\mu_n} < \infty. \tag{7.1.2}$$

Этот результат будет играть важную роль не только в доказательстве теоремы 7.1.1.

Кратко напомним идеи доказательства теоремы 7.1.2. Условие (7.1.2) влечет, что мы можем написать интерполяционный ряд Лагранжа для F/A, а именно, $\sum_n \frac{F(t_n)}{A'(t_n)(z-t_n)}$. Условие (7.1.1) означает, что этот ряд представляет функцию F/A (т.е. что нет дополнительного слагаемого). Следовательно, $F \in A\mathcal{H}(T,\mu)$. Необходимость условий (7.1.1) и (7.1.2) следует из определения пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$.

Мы покажем, что в теореме 7.1.1 условие (ii) может быть заменено на более сильное условие (ii’):

(ii’) *для любой $F \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$ и $M>0$ выполнено условие*

$$\#\{\mathcal{Z}_F \setminus \cup_n D(t_n, |t_n|^{-M})\} < \infty.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii’). Предположим, что (ii’) не выполнено. Тогда для некоторого $M>0$ существует нетривиальная функция $F\in\mathcal{H}$, у которой есть бесконечное множество нулей $z\in\mathcal{Z}_F$ таких, что $\operatorname{dist}(z,T) \ge |z|^{-M}$.

Пусть S – неограниченное множество, удовлетворяющее (i). Тогда мы можем выбрать две последовательности $s_k \in S$ и $z_k \in \mathcal{Z}_F$ такие, что

$$2|z_k| \le |s_k| \le |z_{k+1}|/2 \text{ и } \operatorname{dist}(z_k, T) \ge |z_k|^{-M}.$$

Положим,

$$H(z) = F(z)\prod_k \frac{1-z/s_k}{1-z/z_k}.$$

Прямые оценки бесконечного произведения дают, что $|H(z)| \lesssim |z|^{M+1}|F(z)|$ для $|z|\ge 1$ и $\operatorname{dist}(z,\{z_k\}) \ge |z_k|^{-M}/2$. В частности, это верно для $z\in T$.

Разделим H на полином P степени $M+1$ такой, что $\mathcal{Z}_P \subset \mathcal{Z}_F \setminus \{z_k\}$. Из теоремы 7.1.2 следует, что функция $\tilde{H} = H/P$ лежит в $\mathcal{H}$. Это противоречит условию (i), так как множество $\mathcal{Z}_{\tilde{H}} \cap S$ бесконечно.

(ii)$\Longrightarrow$(iv) Предположим, что условие (iv) не выполнено. Тогда существует ненулевая функция $F \in \mathcal{H}$ и последовательность $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n$, состоящая из кратных нулей F такая, что $\mathrm{dist}(\{z_n\}, T) \le 1$, $\inf_n |z_{n+1}|/|z_n| > 2$. Положим,

$$h(z) = \left[\prod_n \frac{1 - z/x_n}{1 - z/z_n}\right]^2.$$

Нетрудно показать, что это произведение сходится и $\sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)| < \infty$, а $\sup_{y\in\mathbb{R}} |h(iy)| < \infty$. Действительно, так как $|y_n| \le 1$, мы знаем, что

$$\left|\frac{1 - iy/x_n}{1 - iy/z_n}\right|^2 = \frac{x_n^2 + y^2}{x_n^2 + (y - y_n)^2} \cdot \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n^2} \le \left(1 + \frac{4}{x_n}\right)\left(1 + \frac{y_n^2}{x_n^2}\right).$$

Ряды $\sum_n \frac{y_n^2}{x_n^2}$ и $\sum_n \frac{1}{x_n}$ сходятся. Следовательно, $\sup_{y\in\mathbb{R}} |h(iy)| < \infty$. С другой стороны,

$$\left|\frac{1 - x/x_n}{1 - x/z_n}\right|^2 \le \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n^2}$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Из теоремы 7.1.2 следует, что функция $H = Fh$ лежит в $\mathcal{H}$, и у H есть вещественные кратные нули. Следовательно, не умаляя общности, мы можем считать, что существует последовательность *вещественных кратных нулей* z_n функции F. Если существует большое число $M \in \mathbb{N}$ и бесконечная подпоследовательность $\{z_n'\}$ такая, что $\mathrm{dist}(z_n', T) \ge C|t_{k+1} - t_k|^{-M}$, $z_n' \in [t_k, t_{k+1}]$, то функция

$$\frac{F(z)}{\prod_{k=1}^{M+2}(z - \lambda_k)} \cdot \prod_n \frac{z - (z_n' + i)}{z - z_n'}$$

(где $\lambda_k \notin \{z_n'\}$ – некоторые нули функции F) лежит в пространстве $\mathcal{H}$, и мы получили противоречие с (ii'). Если такого числа M нет, то все кратные нули находятся около точек $\{t_n\}$. А именно, для каждого k (кроме, быть может, конечного числа) существует число n_k такое, что $|z_k - t_{n_k}| \le C_N |t_{n_k}|^{-N}$ для любого $N \in \mathbb{N}$. В этом случае функция

$$\tilde{F}(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{K+2}(z - \lambda_k)} \cdot \prod_k \frac{(z - (z_k + i))(z - t_{n_k})}{(z - z_k)^2}$$

лежит в $\mathcal{H}$ для достаточно большого K, и мы опять получили противоречие.

Покажем, что $\tilde{F} \in \mathcal{H}$. Заметим, что $|\tilde{F}(t_n)| \lesssim |F(t_n)|$ для достаточно большого K, а $|\tilde{F}(iy)| \lesssim |F(iy)|$, $|y| > 1$. Тогда $\tilde{F}$ лежит в $\mathcal{H}$ по теореме 7.1.2.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть $\{z_n\}$ – последовательность нулей функции $F \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ такая, что $\operatorname{dist}(z_n, T) \geq 1$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\inf_n |z_{n+1}|/|z_n| > 2$. Положим,

$$h(z) = \prod_n \frac{1 - z/z_{2n+1}}{1 - z/z_{2n}}.$$

Из стандартных оценок бесконечного произведения следует, что $|h(z)| \lesssim (1 + |z|)$ при $\operatorname{dist}(z, \{z_n\}) > 1$. Если λ – нуль функции F, то функция $\frac{F(z)}{z-\lambda} \cdot h(z)$ лежит в $\mathcal{H}$ и имеет бесконечное число кратных нулей $\{z_{2n+1}\}$.

(ii')&(iv) $\Longrightarrow$ (iii). Рассмотрим набор дизъюнктных дисков $D(t_n, c|t_n|^{-N})$. Если существует ненулевая функция $F \in \mathcal{H}$ с бесконечным числом нулей $\{z_n\}$ вне этих дисков, то мы получаем противоречие с (ii'). Предположим, что все нули функции F, кроме, быть может, конечного числа, находятся внутри дисков $D(t_n, c|t_n|^{-M})$ для достаточно большого M. Если есть бесконечная подпоследовательность дисков $D(t_{n_k}, c|t_{n_k}|^{-M})$, каждый из которых содержит по два нуля z_k, $\tilde{z}_k$ функции F, то (переходя к подпоследовательности) мы можем показать, что функция

$$\frac{F(z)}{\prod_{k=1}^{N+2}(z - \lambda_k)} \cdot \prod_k \frac{(z - t_{n_k})^2}{(z - z_k)(z - \tilde{z}_k)}$$

лежит в $\mathcal{H}$ (см. теорему 7.1.2). $\square$

Следующее замечание нам понадобится при доказательстве теоремы 1.7.11.

Замечание 7.1.1. *Если в пространстве $\mathcal{H}$ нет локализации, то существует ненулевая функция $F \in \mathcal{H}$ и целая функция U с лакунарным множеством нулей*

$$U(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{u_k}\right), \qquad |u_{k+1}| > 10|u_k|,$$

такие, что $F/V \in \mathcal{H}$ для любого делителя V функции U,

$$V = \prod_{k \in \mathcal{N}} (1 - \frac{z}{u_k}),$$

$\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$.

Для доказательства достаточно взять функцию F, которая не удовлетворяет условию (ii), и построить U как каноническое произведение по нулям $u_k \in \mathcal{Z}_F$, $\operatorname{dist}(u_k, T) \geq 1$.

7.2. Локализация и полнота полиномов

В этом параграфе мы будем доказывать теорему 1.7.4. Напомним ее формулировку.

Теорема 7.2.1. *У пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство сильной локализации тогда и только тогда, когда полиномы лежат в пространстве $L^2(\mu)$ и плотны в нем.*

В параграфе 7.2.1 мы покажем, что полнота полиномов влечет свойство сильной локализации. В параграфе 7.2.2 мы докажем обратное.

Прежде всего мы докажем, что свойство локализации влечет то, что нагрузки μ_n убывают суперполиномиально.

Утверждение 7.2.2. *Пусть в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть локализация. Тогда для любого $M > 0$*

$$\mu_n \lesssim |t_n|^{-M}.$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда существует $M > 0$ и бесконечная последовательность индексов $\{n_k\}$ такая, что $\mu_{n_k} \geq |t_{n_k}|^{-M}$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\{t_{n_k}\}$ лакунарна. Пусть U - лакунарное каноническое произведение с нулями в точках $t_{n_{10k}}$. Пользуясь теоремой 7.1.2, мы получаем, что функция

$$A(z)U^3(z)\prod_k \left(1-\frac{z}{t_{n_k}}\right)^{-1}$$

лежит в пространстве де Бранжа $\mathcal{H} := A\mathcal{H}(T,\mu)$. Это противоречит условию (iv) из теоремы 7.1.1. □

7.2.1. Полнота полиномов $\Longrightarrow$ свойство сильной локализации

Пусть $f \in \mathcal{H}(T,\mu)\setminus\{0\}$. Докажем, что для любого $M > 0$ существуют $L > 0$ и $R > 0$ такие, что

$$\inf\{|z|^L|f(z)| : \operatorname{dist}(z,T) \geq |z|^{-M}, |z| > R\} > 0. \qquad (7.2.3)$$

Предположим обратное. Тогда существует функция

$$f(z) := \sum_n \frac{d_n\mu_n}{z-t_n}, \quad \{d_n\} \in \ell^2(\mu),$$

и последовательность $z_j \to \infty$, $j \to \infty$ такие, что $\operatorname{dist}(z_j,T) \geq |z_j|^{-M}$ и $|f(z_j)| < |z_j|^{-j}$. Так как полиномы плотны в $\ell^2(\mu)$, существует K такое, что

$\sum_n d_n t_n^K \mu_n \neq 0$. Возьмем минимальное K, обладающее этим свойством. Тогда мы знаем, что

$$f(z_j) = \sum_n \frac{d_n \mu_n}{z_j - t_n}$$

$$= \sum_{|t_n|<|z_j|/2} \frac{d_n \mu_n}{z_j - t_n} + \sum_{|t_n|\geq|z_j|/2} \frac{d_n \mu_n}{z_j - t_n} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Мы будем оценивать величины Σ_1 и Σ_2 отдельно. Так как $|z_j - t_n| \geq |z_j|^{-M}$ для любого n, мы получаем, что

$$|\Sigma_2| \leq |z_j|^M \sum_{|t_n|>|z_j|/2} |d_n| \mu_n$$

$$= |z_j|^M \sum_{|t_n|>|z_j|/2} \frac{|d_n|}{|t_n|^{K+M+2}} |t_n|^{K+M+2} \mu_n$$

$$\leq \frac{2^{K+M+2}}{|z_j|^{K+2}} \|\{d_n\}\|_{\ell^2(\mu)} \cdot \|\{t_n^{K+M+2}\}\|_{\ell^2(\mu)}.$$

С другой стороны,

$$\Sigma_1 = \sum_{|t_n|<|z_j|/2} d_n \mu_n \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t_n^l}{z_j^{l+1}} \right) = \sum_{|t_n|<|z_j|/2} d_n \mu_n \left(\sum_{l=0}^{K} \frac{t_n^l}{z_j^{l+1}} + r_{n,j} \right),$$

где $r_{n,j} \leq \dfrac{2|t_n|^{K+1}}{|z_j|^{K+2}}$. Следовательно,

$$f(z_j) = \sum_n \frac{d_n \mu_n}{z_j - t_n} = \sum_{|t_n|<|z_j|/2} \sum_{l=0}^{K} d_n \mu_n \frac{t_n^l}{z_j^{l+1}} + O(|z_j|^{-K-2})$$

$$= \sum_n \sum_{l=0}^{K} d_n \mu_n \frac{t_n^l}{z_j^{l+1}} - \sum_{|t_n|\geq|z_j|/2} \sum_{l=0}^{K} d_n \mu_n \frac{t_n^l}{z_j^{l+1}} + O(|z_j|^{-K-2})$$

$$= \frac{\sum_n d_n \mu_n t_n^K}{|z_j|^{K+1}} + O(|z_j|^{-K-2}).$$

Мы получили противоречие. Следовательно, оценка 7.2.3 доказана.

Мы показали, что для любого $M > 0$ все нули функции $f \in \mathcal{H}(T, \mu) \setminus \{0\}$, кроме, быть может, конечного числа, лежат в множестве $\cup_n D(t_n, |t_n|^{-M})$. Пользуясь теоремой 1.7.1, мы заключаем, что в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть локализация и, следовательно, любой диск $D(t_n, |t_n|^{-M})$, кроме, быть может, конечного числа, содержит не более одного нуля функции f.

Нам осталось доказать, что диск $D(t_k, |t_k|^{-M})$ содержит в точности одну точку из $\mathcal{Z}_f$ для достаточно больших $|k|$. Положим,

$$g(z) = \sum_{n \neq k} \frac{d_n \mu_n}{z - t_n}.$$

Напомним, что $|f(z)| \geq c|z|^{-L}$ for $|z - t_k| = |t_k|^{-M}$ для достаточно больших k, а L – число из утверждения (7.2.3). Так как $\mu_k = o(|t_k|^{-\tilde{L}})$, $|k| \to \infty$ для любого $\tilde{L} > 0$, мы заключаем, что $|f(z) - g(z)| < c|z|^{-L}/2$ для $|z - t_k| = |t_k|^{-M}$, $|k| \geq k_0$.

Положим, $F = Af$, $G = Ag$. Тогда F, G – целые функции, $|F - G| < |F|$, если $|z - t_k| = |t_k|^{-M}$, $|k| \geq k_0$. Пользуясь теоремой Руше, мы получаем, что у F и G одинаковое число нулей в $D(t_k, |t_k|^{-M})$, $|k| \geq k_0$. Так как $G(t_k) = 0$, мы получаем, что у функции $F = Af$ есть нуль в диске $D(t_k, |t_k|^{-M})$, $|k| \geq k_0$. Мы доказали, что в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть сильная локализация

7.2.2. Свойство сильной локализации $\Longrightarrow$ полнота полиномов

Эта импликация доказывается намного проще обратной. Пусть $\{u_n\} \in \ell^2$ – нетривиальная последовательность такая, что $\sum_n u_n t_n^k \mu_n^{1/2} = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = A(z) \sum_n \frac{u_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}.$$

Ясно, что F лежит в пространстве де Бранжа $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T, \mu)$. Мы знаем, что все моменты последовательности u_n равны нулю. Следовательно,

$$|F(iy)/A(iy)| = o(|y|^{-k}) \text{ при } |y| \to \infty$$

для любого $k > 0$. С другой стороны, свойство сильной локализации влечет, что для любого $M > 0$ все нули f, кроме, быть может, конечного числа, лежат в $\cup_n D(t_n, r_n)$, где $r_n = |t_n|^{-M}$ и $\#\big(\mathcal{Z}_f \cap D(t_n, r_n)\big) \leq 1$ для всех индексов n, кроме, быть может, конечного числа.

Пусть T_1 – множество тех точек t_n, для которых диск $D(t_n, r_n)$ содержит ровно один нуль функции F. Обозначим его за z_n с тем же индексом n. Рассмотрим разложение функции $A = A_1 A_2$, где A_1 – некоторое каноническое произведение с нулями в T_1, а A_2 – полином. Положим,

$$F_1(z) = A_1(z) \prod_{t_n \in T_1} \frac{z - z_n}{z - t_n}.$$

Мы можем выбрать M столь большим, чтобы произведения сходились и, более того, $|F_1(z)| \asymp |A_1(z)|$, если $\operatorname{dist}(z, T_1) \ge c|z|^{-N}/2$, а N - константа из (1.7.27). Тогда мы получаем, что разложение $F = F_1F_2$. Нетрудно проверить, что F_2 – полином. Следовательно, $|F(iy)|/|A(iy)| \gtrsim |y|^{-M}$, $y \to \infty$ для некоторого $M > 0$. Мы получили противоречие. $\square$

7.2.3. Сильная локализация для "хороших" мер

Следующая теорема показывает, что при некоторых условиях регулярности на (T, μ) свойство локализации (не обязательно сильной!) влечет полноту полиномов в $L^2(\mu)$.

Теорема 7.2.3. *Пусть $\tilde{T} = \{t_{n_k}\}$ – бесконечная подпоследовательность $T = \{t_n\}$ такая, что полиномы лежат в пространстве $L^2(T \setminus \tilde{T}, \mu|_{T\setminus\tilde{T}})$ и неполны в нем. Предположим, что существует положительная функция $\mathcal{M}$ на $\mathbb{R}$ такая, что $\mathcal{M}(t_n) = \mu_n^{1/2}$ и $\mathcal{M}$ – нормальный вес (т.е., $-\log \mathcal{M}(e^t)$ - выпуклая функция по t). Тогда в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ нет локализации.*

Отметим, что существование такого веса тесно связана с задачей о допустимости монотонных мажорант (см. [3, следствие 4] или [2, теорема 8]).

Как мы увидим при доказательстве теоремы 7.2.3, существует общий принцип, который говорит, что неполнота полиномов в $L^2(\mu)$ влечет некоторый результат о мажоризации в соответствующем пространстве де Бранжа. Следущее утверждение показывает, что мажоризация, в свою очередь, влечет отсутствие свойства локализации.

Утверждение 7.2.4. *Пусть $\mathcal{H}(E) = A\mathcal{H}(T, \mu)$ – пространство де Бранжа со спектральной мерой μ такой, что $\mu_n = o(|t_n|^{-M})$ для некоторого $M > 0$. Предположим, что существует ненулевая функция $f \in \mathcal{H}(E)$ такая, что для некоторой бесконечной подпоследовательности индексов n_k выполнено $f(t_{n_k}) = 0$ и*

$$|f(t)| \le |E(t)| \cdot \mathcal{M}(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $\mathcal{M} \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathcal{M}(t) \le \mu_{n_k}^{1/2}$ для $|t - t_{n_k}| < |t_{n_k}|^{-N}$ и некоторого $N > 0$. Тогда в пространстве $\mathcal{H}(E)$ нет локализации.

Доказательство. Предположим, что в пространстве $\mathcal{H}(E)$ есть локализация. Не умаляя общности, мы можем считать, что

$$|f(t)| \le \frac{|E(t)|\mu_{n_k}^{1/2}}{|t_{n_k}|^N}, \qquad |t - t_{n_k}| < \mu_{n_k}^{1/2},$$

где N – некоторое большое число. Мы покажем, что существует константа $c > 0$ такая, что функция

$$g(z) = f(z) \prod_k \frac{z - (t_{n_k} + ic\mu_{n_k})}{z - t_{n_k}}$$

удовлетворяет оценке $|g(t_{n_k})| \lesssim |E(t_{n_k})|\mu_{n_k}^{1/2}|t_{n_k}|^{-N}$.

Применяя формулу Пуассона в верхней полуплоскости к функции f/E, мы получим оценку

$$|f(z)/E(z)| \le C\mu_{n_k}^{1/2}|t_{n_k}|^{-N},$$

если $|z-t_{n_k}| < \mu_{n_k}$ и $z \in \mathbb{C}_+$. Действительно, для $z \in D(t_{n_k}, \mu_{n_k})$ верна оценка

$$\log\left|\frac{F(z)}{E(z)}\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \log\left|\frac{F(t)}{E(t)}\right| \frac{ydt}{(x-t)^2+y^2} \le$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t-t_{n_k}|<\mu_{n_k}^{1/2}} \log\left|\frac{F(t)}{E(t)}\right| \frac{ydt}{(x-t)^2+y^2} +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_{n_k}|>\mu_{n_k}^{1/2}} \log^+\left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2 \frac{ydt}{(x-t)^2+y^2}.$$

Первое слагаемое не превосходит $\log(\mu_{n_k}^{1/2}|t_{n_k}|^{-N})$, а второе ограничено.

Для оценки функции f/E в нижней полуплоскости нам понадобится следующая простая лемма (доказательство которой мы приводить не будем).

Лемма 7.2.5. *Если в пространстве $\mathcal{H}(E)$ есть локализация, то* $\mathrm{dist}(t_n, \mathcal{Z}_E) \asymp \mu_n$.

Нетрудно доказать, что $B(z) = \dfrac{E^*(z)}{E(z)}$ – интерполяционное произведение Бляшке (с точностью до конечного числа кратных нулей). Из леммы 7.2.5 мы заключаем, что $|B(z)| \lesssim 1$, $|z - t_{n_k}| \le c\mu_{n_k}$, $z \in \mathbb{C}_-$. Таким образом,

$$|f(z)/E(z)| \lesssim \mu_{n_k}^{1/2}|t_{n_k}|^{-N}, \quad |z - t_{n_k}| = \varepsilon\mu_{n_k}$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Та же самая оценка верна для функции g/E, так как $|g(z)| \asymp |f(z)|$ на окружности $|z - t_{n_k}| = \varepsilon\mu_{n_k}$. Следовательно, $|g(t_{n_k})| \lesssim |E(t_{n_k})|\mu_{n_k}^{1/2}|t_{n_k}|^{-N}$. Положим,

$$h(z) = g(z)\prod_k \frac{z-(t_{n_k}+i)}{z-(t_{n_k}+ic\mu_{n_k})}.$$

Тогда

$$\sum_k \left|\frac{h(t_{n_k})}{E(t_{n_k})}\right|^2 \mu_n \asymp \sum_k \left|\frac{g(t_{n_k})}{E(t_{n_k})}\right|^2 \frac{1}{\mu_n} \lesssim \sum_k \frac{1}{|t_{n_k}|^{2N}} < \infty$$

для достаточно большого N. Мы получили включение $h \in \mathcal{H}(E)$. С другой стороны, h не удовлетворяет условию (ii). $\square$

7.2.4. Доказательство теоремы 7.2.3

Шаг 1. Пусть $\{s_n\}$ – вещественная последовательность, удовлетворяющая условию степенной разделенности, а $\nu = \sum_n \nu_n \delta_{s_n}$ – мера. Предположим, что $\mathcal{P} \subset L^2(\nu)$ и $\overline{\mathcal{P}} \neq L^2(\nu)$.

Из неполноты полиномов следует, что существует нетривиальная последовательность $\{d_n\} \in \ell^2(\nu)$ такая, что

$$\sum_n d_n s_n^k \nu_n = 0, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Положим,

$$f(z) = \frac{A(z)}{E(z)} \sum_n \frac{d_n \nu_n}{z - s_n}.$$

Мы знаем, что

$$t^k f(t) - \frac{A(t)}{E(t)} \sum_n \frac{d_n s_n^k \nu_n}{s_n - t} = \frac{A(t)}{E(t)} \sum_n d_n \nu_n \frac{t^k - s_n^k}{t - s_n} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Таким образом,

$$|f(t)| \leq \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{|t|^k} \cdot \frac{|A(t)|}{|E(t)|} \cdot \left| \sum_n \frac{d_n s_n^k \nu_n}{s_n - t} \right|, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Если $\operatorname{dist}(t, \{s_n\}) \geq |t|^{-M}$ для некоторого $M > 0$, то

$$|f(t)| \leq \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{|t|^k} \sup_n |s_n|^k \nu_n^{1/2} \right) \cdot |t|^{\tilde{M}},$$

для некоторого $\tilde{M}$.

Шаг 2. Положим, $\{s_n\} = T \setminus \tilde{T}$, $\nu = \mu\big|_{T \setminus \tilde{T}}$. Определим функцию f как в шаге 1. Тогда f обнуляется на $\tilde{T}$ и, разделив f на полином (если это необходимо), мы получаем, что существует нетривиальная функция f, удовлетворяющая оценке

$$\begin{aligned}\log|f(t)| &\leq \log \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{|t|^k} \sup_{t_n \in T \setminus \tilde{T}} |t_n|^k \mu_n^{1/2} \\ &= \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \left[\sup_{t_n \in T \setminus \tilde{T}} \Big(1/2 \log \mu_n + k \log |t_n| \Big) - k \log |t| \right].\end{aligned}$$

Обозначим за $G^\#$ преобразование Лежандра функции G,

$$G^\#(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}(xt - G(t)).$$

Положим, $G(s) = -1/2\log\mathcal{M}(e^s)$. Тогда

$$\log|f(t)| \le \inf_{k\in\mathbb{N}_0}\bigl(G^\#(k) - k\log|t|\bigr), \qquad |t-t_{n_k}| < \frac{1}{100|t|^N}.$$

Если $|t|>1$, то

$$\inf_{k\in\mathbb{N}_0}\bigl(G^\#(k) - k\log|t|\bigr)$$

$$\le C + \log|t| + \inf_{s\in\mathbb{R}}(G^\#(s) - s\log|t|) = C\log|t| - (G^\#)^\#(\log|t|).$$

Из выпуклости G мы заключаем, что $(G^\#)^\# = G$. Следовательно,

$$|f(t)| \le C|t|(\mathcal{M}(t))^{1/2}, \qquad |t-t_{n_k}| < \frac{1}{100|t|^N}, \qquad |t|>1.$$

Используя утверждение 7.2.4, мы получаем требуемый результат. □

7.2.5. Аппроксимация полиномами на дискретных подмножествах $\mathbb{R}$; ошибка Гамбургера

Даже в том случае, когда T – множество нулей функции класса Гамбургера, плотность полиномов в $L^2(T,\mu)$, $\mu = \sum_n \mu_n\delta_{t_n}$ – тонкое свойство. Отметим, что такие меры появляются в параметризации Неванлинны всех решений неопределенной проблемы моментов Гамбургера (см. обсуждение в работах [46, 47]).

Отметим, что работа Гамбургера на эту тему содержала ошибку, которая оставалась не замеченной более 50 лет. В работе [65] Гамбургер утверждал, что полиномы плотны в $L^2(T,\mu)$, где T – множество нулей функции A класса Гамбургера всякий раз, когда

$$\sum_{t_n\in T}\frac{1}{\mu_n|A'(t_n)|^2} = \infty, \qquad \sum_{t_n\in T}\frac{1}{(1+t_n^2)\mu_n|A'(t_n)|^2} < \infty. \tag{7.2.4}$$

Этот результат применялся для получения описания канонических мер в параметризации Неванлинны.

Если бы результат Гамбургера был верен, то, в частности, полиномы были бы плотны в $L^2(T,\mu)$ для любой меры $\mu = \sum_{t_n\in T}|A'(t_n)|^{-2}\delta_{t_n}$. В 1989 неточность в работе Гамбургера была обнаружена К. Бергом и Х. Педерсеном. В следующем году П. Кусис [72] привел пример функции класса Гамбургера A такой, что полиномы не плотны в пространстве

$L^2(T, \sum_{t_n \in T} |A'(t_n)|^{-2}\delta_{t_n})$. Множество T из конструкции Кусиса состоит из пар точек экспоненциально близких друг к другу, и, в частности, не удовлетворяет условию степенной разделенности.

Предъявим контрпример к утверждению Гамбургера такой, что T удовлетворяет условию степенной разделенности. Положим,

$$A(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{n^2}\Big) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{n^3 + 1/2}\Big)$$

$T := \mathcal{Z}_A$, $\mu := \sum_{t_n \in T} |A'(t_n)|^{-2}\delta_{t_n}$. Тогда A – функция класса Гамбургера такая, что условие (7.2.4) выполнено. С другой стороны, легко проверить, что функция $A_1(z) := \prod_{n=10}^{\infty}\big(1 - \frac{z}{n^2}\big)$ принадлежит пространству $A\mathcal{H}(T,\mu)$.

Действительно, это получается из теоремы 7.1.2 и того факта, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-\frac{z}{n^2}\big)$ ограничено на $[0,\infty)$. Следовательно, по теореме 1.7.4, полиномы не плотны в $L^2(\mu)$ (конечно, существует и прямое доказательство этого утверждения).

Боричев и Содин доказали критерий полноты полиномов в пространстве $L^2(T,\mu)$, где T – множество нулей функции класса Гамбургера A (см. [46, следствие 1.1]): полиномы плотны в $L^2(T,\mu)$ тогда и только тогда, когда для любой функции $\tilde{A}$ такой, что $\tilde{A}$ – функция класса Гамбургера, $\mathcal{Z}_{\tilde{A}} \subset \mathcal{Z}_A$, выполнено

$$\sum_{t_n \in \mathcal{Z}_{\tilde{A}}} \frac{1}{\mu_n |\tilde{A}'(t_n)|^2} = \infty.$$

Можно дать похожий критерий для следующего свойства: полиномы не плотны в $L^2(T,\mu)$, но их замыкание имеет конечную коразмерность (это условие появляется в теореме 1.7.10).

7.3. Структура цепочек из подпространств де Бранжа при условии локализации

В этом параграфе мы докажем теорему 1.7.11. Напомним ее формулировку.

Теорема 7.3.1. *Пусть пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ (или $\mathcal{H}(T,\mu)$) таково, что носитель меры Кларка $\operatorname{supp}\mu = T$ удовлетворяет условию степенной разделенности. Тогда в $\mathcal{H}(E)$ есть локализация тогда и только тогда, когда в любом не одномерном подпространстве де Бранжа $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}(E)$ есть подпространство де Бранжа коразмерности 1.*

Хорошо известно, что пространство де Бранжа содержит подпространство де Бранжа коразмерности 1 тогда и только тогда, когда спектральная мера μ конечна, $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ (см. [53]). Таким образом, достаточно доказать, что свойство локализации эквивалентно конечности спектральной меры в любом подпространстве де Бранжа.

Локализация $\Longrightarrow$ конечность спектральной меры

Пусть $\nu = \sum_k \nu_k \delta_{s_k}$ – спектральная мера некоторого подпространства де Бранжа $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(\tilde{E})$ пространства $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E)$. Тогда носитель ν удовлетворяет условию степенной разделенности. Это немедленно следует из оценки непрерывной ветви аргумента $\tilde{E}$ на $\mathbb{R}$ (см., [53, Задача 93]):

$$(\arg \tilde{E})(b) - (\arg \tilde{E})(a) \le \pi \text{ всякий раз, когда } (\arg E)(b) - (\arg E)(a) = \pi$$

и того факта, что для двух ближайших точек s_k и s_{k+1} в носителе меры ν верно тождество $(\arg \tilde{E})(s_k) - (\arg \tilde{E})(s_{k+1}) = \pi$ (отметим, что $\arg \tilde{E}$ убывает на $\mathbb{R}$).

Предположим обратное (т.е. $\nu(\mathbb{R}) = \infty$).

Так как $\{s_k\}$ удовлетворяет условию степенной разделенности, существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $M > 0$ такие, что $\nu_{s_{n_k}} |s_{n_k}|^M \gtrsim 1$. Мы будем считать, что положительная последовательность s_{n_k} лакунарна, $s_{n_{k+1}} > 10 s_{n_k}$. Положим,

$$U(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{s_{n_{10k}} + i}\right), \qquad V(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{s_{n_k}}\right).$$

Нетрудно проверить, что (см. теорему 7.1.2) функция

$$A_{\tilde{E}}(z) \cdot \frac{U^2(z)}{V(z)}$$

лежит в $\mathcal{H}(E)$. Это противоречит свойству (iv) из теоремы 1.7.1.

Конечность спектральной меры $\Longrightarrow$ локализация

Нам понадобятся следующие два результата.

Утверждение 7.3.2. *Пусть $\mathcal{H}(E_1)$ – подпространство де Бранжа пространства $\mathcal{H}(E)$, а U – лакунарное каноническое произведение*

$$U(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_k}\right), \qquad |u_{k+1}| > 10|u_k|.$$

Если $F \in \mathcal{H}(E_1)$ и $F/U \in \mathcal{H}(E)$, то $F/U \in \mathcal{H}(E_1)$.

Утверждение 7.3.3. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа такое, что его спектральная мера конечна. Тогда существует подпространство де Бранжа $\mathcal{H}(E_1)$ коразмерности 1. Более того, если $F \in \mathcal{H}(E)$ и $F(\lambda) = 0$, то $F(z)/(z-\lambda) \in \mathcal{H}(E_1)$.*

Утверждение 7.3.2 немедленно следует из теоремы 26 [53]. Утверждение 7.3.3 нетрудно вывести из теоремы 29 [53]. Действительно, функция $B(z) := \frac{i}{2}[E(z) - E^*(z)]$ такова, что

$$\frac{-B(z)}{A(z)} = \sum_n \frac{\mu_n}{z - t_n} + C.$$

Из условия $\sum_n \mu_n < \infty$ следует, что $-B(z) - CA(z) \in \mathcal{H}(E)$. Следовательно, область определения оператора умножения на z не плотна и, пользуясь теоремой 29 и задачей 87 из [53], мы получаем требуемое.

Воспользуемся замечанием 7.1.1. Зафиксируем нетривиальную функцию $F \in \mathcal{H}(E)$ и лакунарное каноническое произведение U такое, что $F/V \in \mathcal{H}(E)$ для любого делителя V функции U. Дополнительно потребуем, чтобы функция F/U имела хотя бы один нуль z_0.

Теорема де Бранжа об упорядоченности цепочки (см. [53, теоремы 35 и 40]) утверждает, что все подпространства де Бранжа упорядочены по включению. Более того, они могут быть параметризованы вещественным параметром. Положим,

$$\mathcal{B} := \{\mathcal{H}(E_x)\}_{x\in\mathcal{N}}, \quad \mathcal{N} \subset (0,1],$$

$\mathcal{H}(E_1) = \mathcal{H}(E)$. Подпространство $\mathcal{H}(E_x)$ изометрически вложено в $\mathcal{H}(E_y)$ тогда и только тогда, когда $x \le y$, $x, y \in \mathcal{N}$.

Из конечности спектральной меры для пространства $\mathcal{H}(E_x)$ мы заключаем, что для любого $x \in (0,1]$ пространство $\mathcal{H}(E_x)$ содержит подпространство де Бранжа $\mathcal{H}(E_y)$, $y < x$, коразмерности 1. Это означает, что $(y,x) \cap \mathcal{N} = \emptyset$.

Таким образом, $\mathcal{N}$ не более чем счетно. То есть существует не более чем счетное число различных подпространств $\mathcal{H}(E_x)$.

Разложим функцию U в бесконечное произведение

$$U(z) = \prod_{l\in\mathcal{N}} U_l(z), \qquad U_l(z) := 1 - \frac{z}{u_l}.$$

Положим,

$$V^x(z) = \prod_{l\in\mathcal{N}, l>x} U_l(z).$$

Таким образом, $V^0(z) \equiv U(z)$, $V^1(z) \equiv 1$.

Лемма 7.3.4. *Для любого $x \in (0,1]$, $F/V^x \in \mathcal{H}(E_y)$ для любого $y \ge x$, $\quad y \in \mathcal{N}$.*

Доказательство. Положим,

$$L = \{x : x \in (0,1], F/V^x(z) \in \mathcal{H}(E_y) \text{ для любого } y \geq x, \quad y \in \mathcal{N}\}.$$

Пусть $x = \inf L$. Предположим, что $x > 0$. Если $x \in L$, то существует число $y < x$ такое, что $[y, x] \subset L$. Действительно, мы можем рассмотреть подпространство $\mathcal{H}(E_y)$ коразмерности 1 в $\mathcal{H}(E_x)$. Из утверждения 7.3.2 мы получаем, что $F/V^y = F/(V^x U_x) \in \mathcal{H}(E_y)$. Следовательно, $y \in L$. Мы получили противоречие.

С другой стороны, если $x \notin L$, то при помощи аналогичных аргументов мы получаем, что $F/V^x \in \mathcal{H}(E_t)$ для любого $t > x$, $t \in \mathcal{N}$. Мы знаем, что существует последовательность $x_n \in L$ такая, что $x_n \to x$. Таким образом, $\mathcal{H}(E_x) = \cap_{y>x, y\in\mathcal{N}} \mathcal{H}(E_y)$. Мы получили, что $F/V^x \in \mathcal{H}(E_x)$. Следовательно, $x \in L$. □

Рассмотрим теперь функцию F/U. Утверждение 7.3.2 влечет, что

$$\frac{F}{U}, \quad \frac{F}{(z - z_0)U} \in \bigcap_{x>0, x\in\mathcal{N}} \mathcal{H}(E_x).$$

С другой стороны, $\dim \cap_{x>0, x\in\mathcal{N}} \mathcal{H}(E_x) \leq 1$. Это противоречие доказывает теорему 7.3.1. □

7.4. Упорядоченность множеств нулей преобразования Коши

В этом параграфе мы докажем теорему 1.7.8. Напомним ее формулировку.

Теорема 7.4.1. *Пусть в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть свойство локализации. Тогда для любых двух аттракторов S_1, S_2 либо $S_1 \subset S_2$, либо $S_2 \subset S_1$ (с точностью до конечных множеств).*

Мы дадим два различных доказательства теоремы 1.7.8. В первом доказательстве ключевую роль играет теорема де Бранжа об упорядоченности подпространств. Второе доказательство более элементарно.

Предварительные рассуждения

Мы начнем доказательство с двух лемм, которые будут играть важную роль в обоих доказательствах.

Лемма 7.4.2. *Пусть в пространстве де Бранжа $\mathcal{H}(E) (= A\mathcal{H}(T, \mu))$ есть локализация, а $A = (E + E^*)/2$ – функция с простыми нулями в T. Если $A = A_1 A_2$, где функции A_1 и A_2 – целые и $A_1 \in \mathcal{H}(E)$, то A_2 имеет* *экспоненциальный тип нуль и*

$$\sum_{t_n \in \mathcal{Z}_{A_2}} \frac{1}{\mu_n |A_2'(t_n)|^2} < \infty. \tag{7.4.5}$$

Отметим, что $\mu_n = o(|t_n|^{-N})$. Следовательно, $|t_n|^N = o(|A_2'(t_n)|)$ для любого $N > 0$. Таким образом, A_2 принадлежит классу Гамбургера.

Напомним, что функция f – функция ограниченного вида в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, если $f = g/h$, где g, h – ограниченные аналитические функции в $\mathbb{C}_+$. Если, к тому же, h внешняя, то f – функция из класса Смирнова $\mathcal{N}_+(\mathbb{C}_+)$.

Доказательство леммы 7.4.2. Так как $A_1 \in \mathcal{H}(E)$ и $\frac{A(z)}{z-t} \in \mathcal{H}(E)$ для любого $t \in T$, функции A_1/E и A/E лежат в классе Смирнова $\mathcal{N}_+(\mathbb{C}_+)$. Следовательно, A_2 – функция ограниченного вида в $\mathbb{C}_+$. Можно доказать, что (переходя к сопряженной функции) A_2 – функция ограниченного вида в $\mathbb{C}_-$. Из теоремы М. Крейна мы заключаем, что (см., например, [66, Глава I, Параграф 6]) функция A_2 имеет конечный экспоненциальный тип. Если экспоненциальный тип A_2 положителен, то из факторизации Неванлинны для функции A_1/E следует, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ либо $A_1 e^{i\varepsilon z} \in \mathcal{H}(E)$, либо $A_1 e^{-i\varepsilon z} \in \mathcal{H}(E)$. Предположим, что $A_1 e^{i\varepsilon z} \in \mathcal{H}(E)$. Следовательно, $A_1(e^{i\varepsilon z} - \alpha) \in \mathcal{H}(E)$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Это противоречит свойству локализации для пространства $\mathcal{H}(E)$. Таким образом, функция A_2 имеет нулевой экспоненциальный тип.

Напомним, что если $F \in \mathcal{H}(E)$, то

$$\sum_{t_n \in T} \frac{|F(t_n)|^2}{\mu_n |A'(t_n)|^2} < \infty$$

(см. теорему 7.1.2). Применяя это неравенство к $F = A_1$, мы получаем (7.4.5). $\square$

Мы докажем, что достаточно доказать теорему об упорядоченности аттракторов только для подмножеств T.

Лемма 7.4.3. *Пусть $f \in \mathcal{H}(E)$, $f \neq 0$, а T_f – множество, определенное в параграфе 1.7.1. Тогда существует функция $A_f \in \mathcal{H}(E)$, множество нулей которой совпадает с T_f с точностью до конечного множества.*

Доказательство. Пусть z_n – нуль функции f, ближайший к точке $t_n \in T_f$. Так как T_f определено с точностью до конечного множества, мы можем считать, что существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{Z}_f$ и T_f. Положим,

$$A_f(z) = f(z) \prod_{t_n \in T_f} \frac{z - t_n}{z - z_n}.$$

Мы знаем, что $|z_n - t_n| \le |t_n|^{-M}$, где M намного больше, чем N из условия степенной разделенности. Легко видеть, что $|A_f(iy)| \asymp |f(iy)|$, $|y| \to \infty$ и

$$|A_f(t_n)| \asymp |f(t_n)|, \qquad t_n \in T \setminus T_f.$$

Следовательно, $A_f \in \mathcal{H}(E)$ по теореме 7.1.2. $\square$

7.4.1. Первое доказательство теоремы 1.7.8

Следующая лемма играет ключевую роль в первом доказательстве теоремы 1.7.8.

Лемма 7.4.4. *Пусть в пространстве $\mathcal{H}(E)$ есть локализация. Если функция $f \in \mathcal{H}(E)$ вещественна на вещественной оси и имеет только простые нули, то*

$$\mathcal{F} := \overline{\mathrm{Span}}_{\mathcal{H}(E)} \left\{ \frac{f(z)}{z-\lambda} \right\}_{\lambda \in \mathcal{Z}_f} \tag{7.4.6}$$

– подпространство де Бранжа пространства $\mathcal{H}(E)$ (т.е., $\mathcal{F} = \mathcal{H}(\tilde{E})$) и $T_f = T_{\tilde{A}}$, где $\tilde{A}$ – соответствующая A-функция пространства $\mathcal{H}(\tilde{E})$.

Доказательство. Легко проверить, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет всем аксиомам пространств де Бранжа (см. [53, теорему 23]). Таким образом, $\mathcal{F}$ – пространство де Бранжа со свойством локализации. Следовательно, $T_f \subset T_{\tilde{A}}$. Нам осталось показать, что $T_{\tilde{A}} \subset T_f$ (напомним, что T_f и $T_{\tilde{A}}$ определены с точностью до конечных множеств).

Предположим обратное. Это означает, что существует факторизация $\tilde{A}$, $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2$ такая, что $\tilde{A}_1 \in \mathcal{F}$, функция $\tilde{A}_2$ имеет бесконечное число нулей, а нули функции f локализованы в точности около $\mathcal{Z}_{\tilde{A}_1}$ (т.е. для любого $M > 0$ выполнено неравенство $|z_n - \tilde{t}_n| < |\tilde{t}_n|^{-M}$ для достаточно большого n, где z_n и $\tilde{t}_n$ - нули f и $\tilde{A}$ соответственно). Не умаляя общности, мы можем считать, что $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_{\tilde{A}} = \emptyset$.

Теперь мы хотим построить нетривиальную функцию $h \in \mathcal{F}$ такую, что $h \perp \left\{ \frac{f(z)}{z-\lambda} \right\}_{\lambda \in \mathcal{Z}_f}$. Тогда мы получим противоречие. Мы будем строить такую функцию h при помощи техники из работы [28].

Пусть $\tilde{\mu} := \sum_{\tilde{t}_n \in \mathcal{Z}_{\tilde{A}}} \tilde{\mu}_n \delta_{\tilde{t}_n}$ – спектральная мера функции $\mathcal{F}$, а $\tilde{k}_n$ – воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{F}$ в точке $\tilde{t}_n$. Таким образом,

$$\frac{\tilde{k}_n(z)}{\|\tilde{k}_n\|_{\mathcal{F}}} = \frac{\|\tilde{k}_n\|_{\mathcal{F}}}{\tilde{A}'(\tilde{t}_n)} \cdot \frac{\tilde{A}(z)}{z - \tilde{t}_n}. \tag{7.4.7}$$

Хорошо известно, что система $\{\tilde{k}_n\}$ – ортогональный базис в $\mathcal{F} = \mathcal{H}(\tilde{E})$ [53, теорема 22]. Положим,

$$h(z) = \sum_n h_n \frac{k_n(z)}{\|\tilde{k}_n\|_{\mathcal{F}}}, \qquad \{h_n\} \in \ell^2.$$

Тождество $(h, f(z)/(z-\lambda))_{\mathcal{F}} = 0$ $\lambda \in \mathcal{Z}_f$, эквивалентно тождеству

$$\sum_n \frac{h_n f(t_n)}{\|\tilde{k}_n\|_{\mathcal{F}}(\lambda - t_n)} = 0, \qquad \lambda \in \mathcal{Z}_f.$$

Это равносильно соотношению

$$\sum_n \frac{h_n f(t_n)}{\|\tilde{k}_n\|_{\mathcal{F}}(z - t_n)} = \frac{f(z)S(z)}{\tilde{A}(z)}, \tag{7.4.8}$$

где S – некоторая целая функция. Из уравнения (7.4.7) мы заключаем, что

$$\tilde{\mu}_n^{1/2} = \|\tilde{k}_n\|_{\mathcal{F}}/|\tilde{A}'(\tilde{t}_n)|.$$

Таким образом, включение $\{h_n\} \in \ell^2$ эквивалентно тому, что $\sum_n |S(\tilde{t}_n)|^2\mu_n < \infty$. Из теоремы 1.7.11 мы знаем, что спектральная мера $\tilde{\mu}$ конечна. Таким образом, мы можем взять $S \equiv 1$. Нам осталось доказать, что выполнена интерполяционная формула (7.4.8).

Очевидно, что разность между правой и левой частью в (7.4.8) – целая функция нулевого экспоненциального типа. Нам осталось доказать, что эта разность стремится к 0 вдоль мнимой оси. Из леммы 7.4.2 следует, что $\tilde{A}_2$ – функция нулевого экспоненциального типа и принадлежит классу Гамбургера. Следовательно,

$$|\tilde{A}_2(iy)| \to \infty \text{ при } |y| \to \infty.$$

С другой стороны, $\sup_y |f(iy)|/|\tilde{A}_1(iy)| < \infty$. Следовательно, мы доказали интерполяционную формулу для $f/\tilde{A}$. □

Завершение доказательства теоремы 1.7.8. Как обычно, мы будем рассматривать нашу задачу (о локализации) в пространствах де Бранжа $\mathcal{H} = A\mathcal{H}(T,\mu)$. Из леммы 7.4.3 следует, что мы можем считать, что у функции f и g есть только вещественные нули. Рассмотрим два подпространства пространства $\mathcal{H}$

$$\mathcal{F}_1 := \overline{\mathrm{Span}}_{\mathcal{H}}\left\{\frac{f(z)}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in\mathcal{Z}_f}, \qquad \mathcal{F}_2 := \overline{\mathrm{Span}}_{\mathcal{H}}\left\{\frac{g(z)}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in\mathcal{Z}_g}.$$

Из леммы 7.4.4 мы получаем, что $\mathcal{F}_{1,2}$ – подпространства де Бранжа пространства $\mathcal{H}$. Тогда теоремы де Бранжа об упорядоченности подпространств (см. [53, теорема 35]) утверждает, что либо $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, либо $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Предположим, что $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. В пространстве $\mathcal{F}_1$ есть локализация. Из включения $g/(\cdot - \lambda) \in \mathcal{F}_1$ следует, что нули g локализованы около множества $\mathcal{Z}_{\tilde{A}}$, где $\tilde{A}$ - соответствующая A-функция пространства $\mathcal{F}_1$. Из леммы 7.4.4 мы получаем, что $T_g \subset T_f$. Если $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, то можно доказать, что $T_f \subset T_g$ при помощи тех же аргументов. Мы полностью доказали теорему 1.7.8. □

7.4.2. Второе доказательство теоремы 1.7.8

.

Из леммы 7.4.3 видно, что достаточно рассматривать только те функции в $\mathcal{H}(E)$, которые являются делителями A. Пусть $f = A_1$, $g = \tilde{A}_1$, где $\mathcal{Z}_{A_1}, \mathcal{Z}_{\tilde{A}_1} \subset T$. Следовательно, $A = A_1 A_2 = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2$ для некоторых целых функций A_2 и $\tilde{A}_2$.

Пусть $A_1 = BA_0$, $\tilde{A}_1 = \tilde{B}A_0$, где функции B и $\tilde{B}$ не имеют общих нулей. Для доказательства теоремы 1.7.8 мы должны показать, что у одной из функций B или $\tilde{B}$ лишь конечное число нулей.

Следующее утверждение играет ключевую роль во втором доказательстве теоремы 1.7.8. Отметим, что один из главных ингредиентов доказательства этого утверждения – версия принципа Фрагмена–Линделефа [53, лемма 8]. Этот результат также нужен для доказательства теоремы де Бранжа об упорядоченности. Таким образом, два доказательства теоремы 1.7.8 не полностью независимы.

Напомним, что определение класса Смирнова $\mathcal{N}_+(\mathbb{C}_+)$ дано в параграфе 7.4.

Утверждение 7.4.5. *Пусть B и $\tilde{B}$ – целые функции конечного порядка, вещественные на $\mathbb{R}$ с вещественными простыми нулями и такие, что функции $\frac{B}{\tilde{B}}$ и $\frac{\tilde{B}}{B}$ лежат в $\mathcal{N}_+(\mathbb{C}_+)$. Если множество $\mathcal{Z}_B \cup \mathcal{Z}_{\tilde{B}}$ удовлетворяет условию степенной разделенности, то для некоторого $M > 0$ как минимум одно из следующих утверждений верно:*

(i) существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \mathcal{Z}_B$ такая, что $|B'(t_{n_k})| \le 4|t_{n_k}|^M |\tilde{B}(t_{n_k})|$

(ii) существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \mathcal{Z}_{\tilde{B}}$ такая, что $|\tilde{B}'(t_{n_k})| \le 4|t_{n_k}|^M |B(t_{n_k})|$.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда для любого $M > 0$ мы знаем, что $|B'(t_n)| \ge |t_n|^M |\tilde{B}(t_n)|$, $t_n \in \mathcal{Z}_B$ и $|\tilde{B}'(t_n)|$, $t_n \in \mathcal{Z}_{\tilde{B}}$. Тогда функция

$$F_1(z) := \frac{\tilde{B}(z)}{B(z)} - \sum_{t_n \in \mathcal{Z}_B} \frac{\tilde{B}(t_n)}{B'(t_n)(z - t_n)}$$

– целая функция нулевого экспоненциального типа (отметим, что из наших условий на B и $\tilde{B}$ следует, что ряд справа сходится, если $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_B$). То же самое верно для функции

$$F_2(z) := \frac{B(z)}{\tilde{B}(z)} - \sum_{t_n \in \mathcal{Z}_{\tilde{B}}} \frac{B(t_n)}{\tilde{B}'(t_n)(z-t_n)}.$$

Следовательно, для любого $z \in \mathbb{C}$ выполнено тождество

$$\left(F_1(z) + \sum_{t_n \in \mathcal{Z}_B} \frac{\tilde{B}(t_n)}{B'(t_n)(z-t_n)}\right) \cdot \left(F_2(z) + \sum_{t_n \in \mathcal{Z}_{\tilde{B}}} \frac{B(t_n)}{\tilde{B}'(t_n)(z-t_n)}\right) = 1. \quad (7.4.9)$$

Выберем K таким, что диски $D(t_n, |t_n|^{-K})$ попарно дизъюнктны. Более того, мы можем выбрать K так, что $|B(x)| \asymp |B(y)|$ и $|\tilde{B}(x)| \asymp |\tilde{B}(y)|$, если $x,\, y \in C_n := \{w : |w - t_n| = |t_n|^{-K}\}$. Так как $|\tilde{B}(t_n)| = o(|t_n|^M |B'(t_n)|)$ для любого $M > 0$, мы получаем, что оба преобразования Коши ограничены на C_n. Следовательно,

$$\min(|F_1(z), |F_2(z)|) \lesssim 1, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \cup_n D(t_n, |t_n|^{-K}).$$

Из оценки $\min_{w \in C_n}(|F_1(w)|, |F_2(w)|) \lesssim 1$, следует, что

$$|F_1(w)| \lesssim 1 \text{ или } |F_2(w)| \lesssim 1, \quad w \in C_n.$$

Пользуясь принципом максимума для F_1 или F_2, мы получаем, что

$$\min(|F_1(z), |F_2(z)|) \lesssim 1, \qquad z \in \mathbb{C}. \quad (7.4.10)$$

Лемма 8 [53] утверждает, что если две целых функции F_1 и F_2 имеют экспоненциальный тип нуль и удовлетворяют (7.4.10), то одна из них постоянна. Таким образом, тождество (7.4.9) влечет, что F_1 и F_2 – ненулевые константы.

Отметим, что пара функций $z\tilde{B}(z)$ и $B(z)$ тоже удовлетворяют условиям леммы 7.4.5. Повторив предыдущие аргументы, мы получаем, что функция

$$\tilde{F}_1(z) := \frac{z\tilde{B}(z)}{B(z)} - \sum_{t_n \in \mathcal{Z}_B} \frac{t_n \tilde{B}(t_n)}{B'(t_n)(z-t_n)}$$

- ненулевая константа. Следовательно, $U(z) := zF_1(z) - \tilde{F}_1(z)$ - непостоянная линейная функция и $U(iy) = o(|y|)$, $y \to \infty$. Это противоречие доказывает лемму 7.4.5. □

Завершение доказательства теоремы 1.7.8

Предположим, что выполнено (i) из утверждения 7.4.5. Разделив (если требуется) функцию B на полином, мы получаем, что $|B'(t_{n_l})| \le |\tilde{B}(t_{n_l})|$. Следовательно, мы можем построить лакунарное каноническое произведение U_1 такое, что $\mathcal{Z}_{U_1} \subset \mathcal{Z}_B$ и

$$|B'(t_n)| \le |\tilde{B}(t_n)|, \qquad t_n \in \mathcal{Z}_{U_1}.$$

Пусть U_2 – другое лакунарное каноническое произведение с нулями в множестве $\{\Im z \ge 1\}$ и такое, что

$$|U_2(t_n)| = o(|U_1(t_n)|), \qquad n \to \infty, \qquad t_n \in T \setminus \mathcal{Z}_{U_1}, \tag{7.4.11}$$

$$|U_2(t_n)| = o(|U_1'(t_n)|), \qquad t_n \in T. \tag{7.4.12}$$

Эти условия выполнены, если нулей U_2 намного меньше, чем нулей U_1. Мы покажем, что в этом случае

$$f := A_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} \in \mathcal{H}(E).$$

Это противоречит свойству локализации. Так как A_1 лежит в $\mathcal{H}(E)$, а U_1 и U_2 – лакунарные произведения, мы получаем, что функции f/E и f^*/E лежат в классе Смирнова $\mathcal{N}_+(\mathbb{C}_+)$ и $|f(iy)/E(iy)| \to 0$, $|y| \to \infty$. Для того чтобы применить теорему 7.1.2, нам осталось доказать, что

$$\sum_{t_n \in T} \frac{|f(t_n)|^2}{|A'(t_n)|^2 \mu_n} < \infty.$$

Так как f обнуляется на множестве $\mathcal{Z}_{A_1} \setminus \mathcal{Z}_{U_1}$, нам нужна оценка сумм, соответствующих множествам $\mathcal{Z}_{A_2}$ и $\mathcal{Z}_{U_1}$. Используя (7.4.11) и лемму 7.4.2, мы получаем, что

$$\sum_{t_n \in \mathcal{Z}_{A_2}} \frac{|f(t_n)|^2}{|A'(t_n)|^2 \mu_n} = \sum_{t_n \in \mathcal{Z}_{A_2}} \frac{|U_2(t_n)|^2}{|U_1(t_n)|^2} \cdot \frac{1}{|A_2'(t_n)|^2 \mu_n} < \infty.$$

Теперь оценим суммы, соответствующие множеству $\mathcal{Z}_{U_1}$. Мы знаем, что BA_0 делит $A = \tilde{B}A_0\tilde{A}_2$, а B делит $\tilde{A}_2$. Следовательно, $\mathcal{Z}_{U_1} \subset \mathcal{Z}_{\tilde{A}_2}$. Мы знаем, что для $t_n \in \mathcal{Z}_{U_1}$

$$|A_1'(t_n)| = |B'(t_n)| \cdot |A_0(t_n)| \le |A_0(t_n)| \cdot |\tilde{B}(t_n)| = |\tilde{A}_1(t_n)|. \tag{7.4.13}$$

Воспользовавшись (7.4.11), (7.4.12), (7.4.13) и леммой 7.4.2, мы получаем, что

$$\sum_{t_n\in\mathcal{Z}_{U_1}} \frac{|f(t_n)|^2}{|A'(t_n)|^2\mu_n} = \sum_{t_n\in\mathcal{Z}_{U_1}} \frac{|U_2(t_n)|^2}{|U_1'(t_n)|^2}\cdot\frac{|A_1'(t_n)|^2}{|\tilde{A}_1(t_n)|^2|\tilde{A}_2(t_n)|^2\mu_n}$$

$$\le \sum_{t_n\in\mathcal{Z}_{U_1}} \frac{1}{|\tilde{A}_2(t_n)|^2\mu_n} < \infty.$$

Следовательно, $f\in\mathcal{H}(E)$. Это противоречие доказывает теорему1.7.8. $\square$

7.5. Описание пространств с локализацией типа 2

В этом параграфе мы докажем теорему 1.7.10. Напомним ее формулировку.

Теорема 7.5.1. *В пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть локализация типа 2 тогда и только тогда, когда существует разбиение $T=T_1\cup T_2$, $T_1\cap T_2=\emptyset$ такое, что выполнены следующие три условия:*

(i) существует функция A_2 класса Гамбургера такая, что $\mathcal{Z}_{A_2}=T_2$;

(ii) полиномы лежат в пространстве $L^2(T_2,\mu\big|_{T_2})$ и не плотны в нем, но их замыкание имеет конечную коразмерность;

(iii) полиномы лежат в пространстве $L^2(T_1,\tilde{\mu})$ и плотны в нем, $\tilde{\mu}=\sum_{t_n\in T_1}\mu_n|A_2'(t_n)|^2\delta_{t_n}$.

Более того, T_1 и T – аттракторы для $\mathcal{H}(T,\mu)$.

7.5.1. Достаточность условий теоремы 1.7.10

Предположим, что A – функция вещественная на $\mathbb{R}$ с простыми нулями в T и $A=A_1A_2$, где A_2 – функция класса Гамбургера из (i). Пусть $\mathcal{H}(E)=A\mathcal{H}(T,\mu)$ – соответствующее пространство де Бранжа, а $\mathcal{H}(E_2)$ – пространство де Бранжа, построенное по спектральным данным T_2, $\mu|_{T_2}$, т.е.

$$\mathcal{H}(E_2)=A_2\mathcal{H}(T_2,\mu|_{T_2}).$$

Мы знаем, что ортогональное дополнение $\mathcal{L}$ к множеству полиномов в $L^2(T_2,\mu|_{T_2})=\ell^2(\mu|_{T_2})$ конечномерно. Если $\{d_n\}\in\ell^2(\mu|_{T_2})\setminus\mathcal{L}$, то у последовательности $\{d_n\}$ существует ненулевой момент $\sum_{t_n\in T_2}\mu_n d_n t_n^K\neq 0$, для некоторого $K\in\mathbb{N}_0$.

Если

$$f(z)=\sum_{t_n\in T_2}\frac{\mu_n d_n}{z-t_n}$$

- соответствующая функция из $\mathcal{H}(T_2,\mu|_{T_2})$, то, воспользовавшись аргументами из параграфа 7.2.1, мы получаем, что для любого $M>0$ у функции f

есть нуль в $D(t_n, |t_n|^{-M})$, $t_n \in T_2$, когда n достаточно велико. Следовательно, для любой функции из $\mathcal{H}(T_2, \mu|_{T_2})$ (кроме некоторого конечномерного подпространства) ее нули локализованы около всего множества T_2.

Пусть $\mathcal{G}$ – подпространство пространства де Бранжа $\mathcal{H}(E_2)$ такое, что

$$\mathcal{G} = \left\{ A_2 \sum_{t_n \in T_2} \frac{\mu_n d_n}{z - t_n} : \{d_n\} \in \mathcal{L} \right\}.$$

Это конечномерное подпространство $\mathcal{H}(E_2)$. Легко проверить, что $F \in \mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $F \in \mathcal{H}(E_2)$ и $|F(iy)/A(iy)| = o(|y|^{-M})$, $|y| \to \infty$ для любого $M > 0$. Мы получаем, что $\mathcal{G}$ удовлетворяет аксиомам пространства де Бранжа. Следовательно, $\mathcal{G}$ – подпространство де Бранжа пространства $\mathcal{H}(E_2)$. Так как $\mathcal{G}$ конечномерно, оно состоит из функций вида SP, где S – фиксированная функция без нулей, вещественная на $\mathbb{R}$, а P – любой полином степени не выше L. Заменив A на A/S, мы можем добиться того, что $\mathcal{G}$ состоит из полиномов.

Мы доказали, что в пространстве $\mathcal{H}(E_2)$ есть локализация, и для любой функции $F \in \mathcal{H}(E_2)$ либо $T_F = \emptyset$ (т.е., F – полином), либо $T_F = T_2$.

Пусть $f \in \mathcal{H}(T, \mu)$, $f(z) = \sum_{t_n \in T} \frac{c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}$. Так как последовательность $|A_2(t_n)|\mu_n^{1/2}$ стремится к нулю быстрее, чем любая степень $t_n \in T_1$, $|t_n| \to \infty$, мы получаем, что

$$A_2(z) \sum_{t_n \in T_1} \frac{c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n} = \sum_{t_n \in T_1} \frac{A_2(t_n) c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n} + H(z) \tag{7.5.14}$$

для некоторой целой функции H (отметим, что вычеты справа и слева совпадают).

Более того, нетрудно проверить (при помощи теоремы 7.1.2), что $H \in \mathcal{H}(E_2)$. Действительно, достаточно доказать, что $\frac{|H(iy)|}{|A_2(iy)|} \to 0$, $|y| \to \infty$ (это очевидно, так как преобразования Коши стремятся к 0, а $|A_2(iy)| \to \infty$, $|y| \to \infty$ для функций из класса Гамбургера) и

$$\sum_{t_n \in T_2} \frac{|H(t_n)|^2}{|A_2'(t_n)|^2 \mu_n} < \infty. \tag{7.5.15}$$

Нам осталось доказать (7.5.15). Преобразование Коши в правой части (7.5.14) ограничено на T_2. Следовательно, $|H(t_n)| \lesssim 1, t_n \in T_2$. С другой стороны, из включения $1 \in \mathcal{G}$ и определения $\mathcal{G}$ мы получаем, что

$$\frac{1}{A_2(z)} = \sum_{t_n \in T_2} \frac{\mu_n d_n}{z - t_n}, \quad d_n := \frac{1}{\mu_n A_2'(t_n)}.$$

Включение $\{d_n\} \in \ell^2(\mu|_{T_2})$ влечет, что $\sum_n \frac{1}{\mu_n |A_2'(t_n)|^2} < \infty$. Таким образом, ряд из (7.5.15) сходится.

Заметим, что фунцкия $F(z) := A_2(z) \sum_{t_n \in T_2} \frac{c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}$ лежит в $\mathcal{H}(E_2)$ по определению. Следовательно,

$$A_2(z) f(z) = \sum_{t_n \in T_1} \frac{c_n A_2(t_n) \mu_n^{1/2}}{z - t_n} + H(z) + F(z),$$

а $H + F \in \mathcal{H}(E_2)$. Положим,

$$g(z) = \sum_{t_n \in T_1} \frac{c_n A_2(t_n) \mu_n^{1/2}}{z - t_n}.$$

Предположим, что $H + F \neq 0$. Тогда либо $H + F$ – полином, либо нули $H + F$ локализованы около T_2 (с точностью до конечного множества) и, следовательно, $|H(t_n) + F(t_n)| > |A_2(t_n)| \cdot |t_n|^{-M}$ для некоторого $M > 0$, когда $t_n \in T_1$ достаточно велико. В обоих случаях

$$|H(t_n) + F(t_n)| \gtrsim 1, \quad z \in D(t_k, r_k), \quad t_k \in T_1,$$

где $r_k = |t_k|^{-K}$, а K достаточно велико. Так как $|g(z)| \to 0$, если $|z - t_k| = r_k$, $k \to \infty$, мы получаем, что функция $g + H + F$ имеет ровно по одному нулю в каждом из дисков $D(t_k, r_k)$, $t_k \in T_1$, кроме, быть может, конечного числа. Следовательно, f имеет нули около любой точки из T_1 и T_2, если $H + F$ не является полиномом (применим теорему Руше к маленьким дискам $D(t_k, r_k)$, $t_k \in T_2$, $r_k = |t_k|^{-K}$, и воспользуемся тем, что $|H + F| \gtrsim 1$, $|z - t_k| = r_k$).

Нам осталось рассмотреть случай $H + F = 0$. Так как полиномы плотны в $L^2(T, \tilde{\mu})$, в пространстве $\mathcal{H}(T, \tilde{\mu})$ есть сильная локализация и $T_g = T_1$ с точностью до конечного множества. Так как функция Af обнуляется на T_2, мы получаем, что $T_f = T$.

7.5.2. Необходимость условий теоремы 1.7.10

Предположим, что в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть локализация типа 2, а $\mathcal{H}(E) = A\mathcal{H}(T, \mu)$ – соответствующее пространство де Бранжа. Пусть f – функция из $\mathcal{H}(T, \mu)$ такая, что $\#(T \setminus T_f) = \infty$. Тогда лемма 7.4.3 влечет, что существует T_1 ($T_1 = T_f$ с точностью до конечного множества) и функция A_1 с простыми нулями в T_1, $A_1 \in \mathcal{H}(E)$. Рассмотрим разложение $A = A_1 A_2$ для некоторой целой функции A_2 такой, что $\mathcal{Z}_{A_2} = T_2$. Необходимость условия (i) следует из леммы 7.4.2. Отметим, что наши условия (локализация типа 2) означают, что нули любой функции $F \in \mathcal{H}(E)$ локализованы около T или около T_1.

Следовательно, множество нулей любой функции F вида

$$A_2(z) \sum_{t_n \in T_2} \frac{c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \quad \{c_n\} \in \ell^2,$$

либо конечно (F – полином), либо локализовано около T_2. Для того чтобы доказать (ii), нам осталось проверить, что степени всех полиномов $P \in \mathcal{H}(E_2)$ равномерно ограничены.

Мы покажем, что условие $PA_1 \in \mathcal{H}(E)$ для любого полинома P противоречит локализации. Действительно, пусть $\mathcal{H}_0$ – подпространство де Бранжа пространства $\mathcal{H}(E)$, построенное, как в лемме 7.4.4. А именно,

$$\mathcal{H}_0 := \overline{\mathrm{Span}}_{\mathcal{H}(E)} \left\{ \frac{A_1(z)}{z - t_n} \right\}_{t_n \in T_1}.$$

Более того, зафиксируем последовательность полиномов P_k с вещественными простыми нулями, не принадлежащими T. Положим,

$$\mathcal{H}_k := \overline{\mathrm{Span}}_{\mathcal{H}(E)} \left\{ \frac{P_k(z) A_1(z)}{z - t_n} \right\}_{t_n \in T_1 \cup \mathcal{Z}_{P_k}}.$$

Каждое из пространств $\mathcal{H}_k$ – подпространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$. Мы покажем, что

$$\dim(\mathcal{H}_{k+1} \ominus \mathcal{H}_k) = 1 \qquad \text{для любого } k \geq 0. \tag{7.5.16}$$

Если (7.5.16) доказано, то мы получаем, что пространство

$$\tilde{\mathcal{H}} := \overline{\mathrm{Span}}\,(\cup_k \mathcal{H}_k)$$

не содержит подпространства де Бранжа коразмерности 1. Это противоречит теореме 1.7.11. Докажем равенство (7.5.16). Для любой функции F из $\mathcal{H}_{k-1}$ вида $F(z) := \frac{P_{k-1}(z)A_1(z)}{z-\lambda}$, $\lambda \in T_1 \cup \mathcal{Z}_{P_{k-1}}$, мы знаем, что $zF(z) \in \mathcal{H}_k$. Пространство $\mathcal{H}_k$ содержит подпространство $\mathcal{H}^*$ коразмерности 1. Хорошо известно, что $\mathcal{H}^*$ – область определения оператора умножения на z в $\mathcal{H}_k$ (см. [53, задачи 86, 87]). Таким образом, $\mathcal{H}_{k-1} = \mathcal{H}^*$. Мы заключаем, что $\mathcal{H}_{k-1}$ имеет коразмерность 1 в $\mathcal{H}_k$.

Мы доказали необходимость условий (i) и (ii). Предположим, что условие (iii) не выполнено. То есть полиномы не плотны или не лежат в пространстве $\mathcal{H}(T_1, \tilde{\mu})$. Тогда в этом пространстве нет сильной локализации. Выберем функцию

$$g(z) = \sum_{t_n \in T_1} \frac{c_n A_2(t_n) \mu_n^{1/2}}{z - t_n} \in \mathcal{H}(T_1, \tilde{\mu})$$

такую, что нули g не локализованы около T_1 (это значит, что существует бесконечная последовательность дисков $D(t_{n_j}, |t_{n_j}|^{-M})$, $t_{n_j} \in T_1$ такая, что $\#D(t_{n_j}, |t_{n_j}|^{-M}) \cap \mathcal{Z}_g = 0$). Положим,

$$H(z) = A_2(z) \sum_{t_n \in T_1} \frac{c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n} - g(z).$$

Функция H – целая и $H \in \mathcal{H}(E_2)$, где $\mathcal{H}(E_2) = A_2 \mathcal{H}(T, \mu|_{T_2})$. Это значит, что H может быть представлена в следующем виде:

$$H(z) = -A_2(z) \sum_{t_n \in T_2} \frac{c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n} \quad \text{для некоторой } \{c_n\} \in \ell^2.$$

Положим,

$$f(z) = \sum_{t_n \in T} \frac{c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{H(z)}{A_2(z)} + \frac{g(z)}{A_2(z)} - \frac{H(z)}{A_2(z)} = \frac{g(z)}{A_2(z)}$$

и $Af = A_1 g$. Тем не менее, нули функции $A_1 g$ не локализованы около всего множества T_1. Мы получили противоречие.

7.5.3. Локализация типа N

Используя аргументы из доказательства теоремы 1.7.10, мы можем найти аналогичное описание для пространств с локализацией типа N.

Теорема 7.5.2. *Пусть $\mathcal{H}(T, \mu)$ таково, что T удовлетворяет условию степенной разделенности. В пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ есть локализация типа N тогда и только тогда, когда существуют множества $W_j \subset T$, $1 \le j \le N$ такие, что*

(i) $W_1 \subset W_2 \subset ... \subset W_N = T$ *и* $\#(W_{j+1} \setminus W_j) = \infty$;

(ii) *существуют целые функции B_j, $1 \le j < N$ нулевого экспоненциального типа такие, что $\mathcal{Z}_{B_j} = T \setminus W_j$, в частности, $B_N \equiv const$, а целые функции B_{j+1}/B_j, $1 \le j \le N-1$ принадлежат классу Гамбургера*;

(iii) *полиномы лежат в пространстве*

$$L^2(W_{j+1} \setminus W_j, \sum_{t_n \in W_{j+1} \setminus W_j} |B_{j+1}(t_n)|^2 \mu_n \delta_{t_n}), \quad 1 \le j \le N-1,$$

и не плотны там, но их замыкание имеет конечную коразмерность;

(iv) полиномы лежат в пространстве

$$L^2(W_1, \sum_{t_n \in W_1} |B_1(t_n)|^2 \mu_n \delta_{t_n})$$

и плотны там.

Более того, в этом случае для любой нетривиальной $f \in \mathcal{H}(T, \mu)$ множество T_f совпадает с одним из множеств W_j, $1 \le j \le N$.

Доказательство. Достаточность условий (i)–(iv) мы можем получить индукцией по N. Легко проверить, что

$$|B_{N-1}(t_n)|\mu_n^{1/2} = o(|t_n|^M), \quad t_n \in W_{N-1}, \quad |t_n| \to \infty \text{ для любого } M.$$

Положим,

$$\mathcal{H} := \left\{ \sum_{t_n \in W_{N-1}} \frac{c_n B_{N-1}(t_n)\mu_n^{1/2}}{z - t_n} : \{c_n\} \in \ell^2 \right\}.$$

Из индукционного предположения мы знаем, что в пространстве $\mathcal{H}$ есть локализация типа $N-1$. Теперь мы можем повторить рассуждения из параграфа 7.5.1.

Необходимость условий (i) и (ii) можно вывести из лемм 7.4.4 и 7.4.2 соответственно. Необходимость условий (iii) и (iv) можно получить индукцией по N, используя рассуждения из параграфа 7.5.2. $\square$

Если в пространстве с локализацией есть бесконечное число аттракторов (то есть $N = \infty$), то их структура может быть очень сложной, так как неделимые интервалы могут сгущаться влево многими способами. Было бы интересно найти аналитическое описание таких наборов аттракторов (например, как множеств нулей целых функций некоторого специального класса).

Глава 8. Подпространства $C^\infty(A, B)$, инвариантные относительно дифференцирования

В этой главе мы докажем теоремы 1.8.1–1.8.3. Все эти результаты могут быть сформулированы в терминах полноты или неполноты смешанных систем. Таким образом, доказательства состоят из двух шагов: сведение к задаче о полноте смешанной системы в пространстве Пэли–Винера, решение этой задачи при помощи техники, применявшейся в главах 4 и 5.

8.1. Доказательство теоремы 1.8.1

Напомним формулировку теоремы 1.8.1.

Теорема 8.1.1. *Пусть у D-инвариантного подпространства L – компактный резидуальный интервал I. Если*

$$2\pi\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) < |I|,$$

то

$$L = \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Предварительные замечания

Непрерывные линейные функционалы в $C^\infty(a, b)$ – распределения с компактным носителем в (a, b) (т.е. распределения вида $\phi = f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, где $f \in L^1_{loc}(a, b)$, а дифференцирование понимается в смысле теории распределений). Обозначим класс таких функционалов за $S(a, b)$. Как обычно, мы определяем преобразование Фуре распределения $\varphi \in S(a, b)$ при помощи формулы

$$\hat{\varphi}(z) = \varphi(e^{izx}),$$

так как φ – распределение конечного порядка, $\hat{\varphi}$ – целая функция конечного экспоненциального типа, растущая не быстрее полинома вдоль вещественной оси. Положим,

$$\mathcal{H}_I = \left\{ f : f = \sum_{k=0}^{n} z^k (f_k(z) + c_k), \quad f_k \in \mathcal{PW}_I,\ c_k \in \mathbb{C} \right\},$$

где $\mathcal{PW}_I$ – Фурье образ пространства $L^2(I)$. Для каждого функционала $\varphi \in S(a, b)$ мы знаем, что $\hat{\varphi} \in \mathcal{H}_I$, где $I = I(\varphi)$ – замкнутый интервал такой, что $\operatorname{supp} \varphi \subset I$.

Преобразование Фурье переводит двойственность между $S(a,b)$ и $C^\infty(a,b)$ в двойственность между пространством $\mathcal{H}=\cup_{I\subset(a,b)}\mathcal{H}_I$ и пространством $\mathcal{U}$ – целых функций с сопряженной индикаторной диаграммой в (ia,ib) и убывающих быстрее любого полинома вдоль вещественной оси. А именно, для $F\in\cup_{I\subset(a,b)}\mathcal{H}_I$, $G\in\mathcal{U}$ положим,

$$(F,G)_{\mathcal{H},\mathcal{U}}=(\check{F},\check{G})_{S(a,b),C^\infty(a,b)}.$$

Отметим, что если у функции F – бесконечное число нулей, то действие функционала $(F,G)_{\mathcal{H},\mathcal{U}}$ может быть рассмотрено как скалярное произведение в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ (or $\mathcal{PW}_I$) функций $F(z)/P(z)$ и $G(z)\overline{P(\overline{z})}$, где P – полином достаточно большой степени, чьи нули содержатся в множестве нулей функции F. Действительно, пусть $F\in\mathcal{H}_I$, а P – полином такой, что $F=PF_0$, $F_0\in\mathcal{P}W_I$. Мы знаем, что $F_0=\hat{\phi}_0=\hat{f}_0$, $f_0\in L^2(I)$. Таким образом,

$$\phi_0(g)=\int_I f_0 g,\quad \phi(g)=\int_I f_0\cdot P(-iD)g.$$

Следовательно,

$$(F,G)_{\mathcal{H},\mathcal{U}}=\phi(\check{G})=\int_I f_0P(-iD)\check{G}=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}_0(P(-iD)\check{G})\widehat{\ }=\int_{\mathbb{R}}F_0\cdot PG.$$

Это рассуждение объясняет, как при решении задачи появляется пространство $\mathcal{PW}_I$.

8.1.1. Проблема синтеза в гильбертовом пространстве

Положим, $\Lambda=-i\sigma(D|_L)$. Будем рассматривать спектр оператора $-iD$ вместо спектра оператора D.

$$L_0=\overline{L_{res}+\mathcal{E}(L)}.$$

Пусть I – *резидуальный интервал* подпространства L,

$$L_{res}=L_I=\{f\in C^\infty(a,b):f^{(k)}(I)=0\,,k\geq 0\}.$$

В том случае, когда множество Λ конечно, теорема 8.1.1 была доказана в статье [22]. В дальнейшем мы будем полагать, что множество Λ бесконечно. Мы будем полагать, что спектр Λ простой, то есть $\mathcal{E}(L)$ содержит только экспоненты $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$ и не содержит функций вида $x^ke^{i\lambda x}$, $k>1$.

Если I состоит из одной точки c, то легко проверить, что $L=C^\infty(a,b)$. Действительно, носитель любого функционала $\phi\in L^\perp$ состоит из одной точки и, следовательно, $\phi = \sum_{k=1}^{m} a_k \delta_c^{(k)}$. Это противоречит условию $\phi \perp \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$. В дальнейшем мы будем полагать, что I содержит более одной точки.

Рассмотрим аннигиляторы $L^\perp$ и $L_0^\perp$ (в сопряженном пространстве $S(a,b)$) к пространствам L и L_0. Легко видеть, что

$$\widehat{L_0^\perp} = \{F : F \in \mathcal{H}_I, F\big|_\Lambda = 0\}.$$

Нам достаточно доказать, что $L^\perp$ плотно в $L_0^\perp$ в (*)-слабой топологии.

Рассмотрим распределение $\phi \in L^\perp$ с максимальной длиной множества $\operatorname{conv}\operatorname{supp}\phi$. Легко видеть, что $\hat\phi \in \mathcal{H}_I$. С другой стороны, $\hat\phi \notin \mathcal{H}_J$ для любого подинтервала $J \subset I$, $J \neq I$. Следовательно,

$$\hat\phi(z) = G_\Lambda(z)E(z),$$

где G_Λ – каноническое произведение с нулями в Λ такое, что функция $G_\Lambda(z)/\overline{G_\Lambda(\bar z)}$ представима в виде частного двух произведений Бляшке, а E – некоторая целая функция. Более того, не умаляя общности, мы можем считать, что у E нет кратных нулей и $E(\lambda) \neq 0$, если $\lambda \in \Lambda$.

Из утверждения 3.1 [22] следует, что

$$\frac{G_\Lambda(z)E(z)}{z-w} \in \widehat{L^\perp}, \quad w \in \mathcal{Z}_E.$$

Таким образом, мы можем полагать, что $G_\Lambda E \in \mathcal{PW}_I$, в противном случае мы можем начать с функции $\frac{E(z)}{(z-w_1)\dots(z-w_n)}$ вместо E.

Предположим обратное. Пусть $L^\perp$ не плотно в $L_0^\perp$. Тогда существует целая функция T такая, что $G_\Lambda T \in \mathcal{H}_I$, а $G_\Lambda T \notin \widehat{L^\perp}$. Зафиксируем такую функцию T и число N такое, что $G_\Lambda(x)T(x) = O(1+|x|^N)$. Из теоремы Хана–Банаха следует, что существует нетривиальная функция $f \in C^\infty(I)$ такая, что

$$\left(\frac{G_\Lambda(z)E(z)}{z-w}, \hat f\right) = 0, \quad w \in \mathcal{Z}_E \quad \text{и} \quad (G_\Lambda T, \hat f) \neq 0.$$

Для того чтобы получить задачу в гильбертовом пространстве, предположим, что $G_\Lambda T \in \mathcal{PW}_I$. В этом случае оба уравнения могут быть интерпретированы как условия на скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R})$. В следующем параграфе мы сведем общий случай ($G_\Lambda T$ растет не быстрее полинома) к условию $G_\Lambda T \in \mathcal{PW}_I$.

Мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \frac{G_\Lambda(x)E(x)}{x-w}\overline{F(x)}dx = 0, \quad w \in \mathcal{Z}_E, \\ \int_{\mathbb{R}} G_\Lambda(x)T(x)\overline{F(x)}dx \neq 0. \end{cases} \tag{8.1.1}$$

Мы докажем, что эта система противоречит следующему утверждению. (Воспроизводящее ядро в точке λ в пространстве $\mathcal{PW}_I$ мы обозначим за k_λ.)
Утверждение 8.1.2. *Пусть $G \in \mathcal{PW}_I$ – функция с простыми нулями такая, что $G \notin \mathcal{PW}_J$ для любого подинтервала J интервала I. Рассмотрим разбиение ее нулей $\mathcal{Z}_G = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ такое, что $2\pi\mathcal{D}_+(\Lambda_2) < |I|$. Тогда смешанная система*

$$\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \cup \left\{\frac{G(z)}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda_1} \tag{8.1.2}$$

полна в $\mathcal{PW}_I$.

Предположим, что утверждение 8.1.2 доказано, а $G_\Lambda T \in \mathcal{PW}_I$. Из первого уравнения системы (8.1.1) следует, что вектор F ортогонален (в $\mathcal{PW}_I$) к семейству $\left\{\frac{G_\Lambda(z)E(z)}{z-w}\right\}_{w\in\mathcal{Z}_E}$. Применим утверждение 8.1.2 к функции $G = G_\Lambda E$, $\Lambda_2 = \Lambda, \Lambda_1 = \mathcal{Z}_E$, и получим, что F принадлежит выпуклой линейной оболочке $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Это противоречит второму уравнению в системе (8.1.1).

8.1.2. Сведение к задаче в гильбертовом пространстве

В общем случае мы знаем только, что $G_\Lambda T(x) = O(1+|x|^N)$ на вещественной оси. Положим,

$$M = \{G_\Lambda H : G_\Lambda H \in \mathcal{PW}_I\}.$$

Мы знаем, что пространство $\widehat{L^\perp}$ плотно в M. Следовательно, нам осталось доказать, что M плотно в $\widehat{L_0^\perp}$. Предположим обратное. Тогда существует функция $f \in C_0^\infty(a,b)$ такая, что $\hat{f} \perp M$, а $(G_\Lambda T, \hat{f}) \neq 0$.

Зафиксируем конечное множество W, $W \cap \Lambda = \emptyset$, такое, что существует функция g вида $\sum_{w\in W} c_w e^{iwt}$ и $g^{(k)} - f^{(k)}$ обнуляется в концах интервала I, если $0 \le k \le 2N+2$. Более того, легко видеть, что существует функция $G_\Lambda F_0 \in M$ такая, что $G_\Lambda(T+F_0)$ обнуляется на W. Следовательно, $G_\Lambda(T+F_0) = G_\Lambda P_W T_1$, где P_W - полином с корнями в W. Легко видеть, что $(G_\Lambda P_W T_1, F) \neq 0$.

Положим, $\tilde{F} = \widehat{f-g}$. Заметим, что $\tilde{F}(x) = O((1+|x|)^{-2N})$. В частности, $\tilde{F}Q \in L^2(\mathbb{R})$ для любого полинома Q степени не выше $2N-1$.

Для любой целой функции U такой, что $G_\Lambda P_W U \in \mathcal{PW}_I$, мы получаем систему

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} G_\Lambda(x)P_W(x)U(x)\overline{\tilde{F}(x)}dx = 0, \\ \int_{\mathbb{R}} G_\Lambda(x)P_W(x)T_1(x)\overline{\tilde{F}(x)}dx \neq 0. \end{cases} \tag{8.1.3}$$

Зафиксируем функцию U такую, что у функций T_1 и U как минимум $N+2$ общих нуля, а $G_\Lambda U \notin \mathcal{PW}_J$ для любого подинтервала $J \subset I$. Тогда

$U = QU_1$, $T_1 = QT_2$, где Q – полином степени $N+2$. Следовательно,

$$(G_\Lambda P_W T_2, \tilde{F}Q^*) \neq 0, \qquad \left(\frac{G_\Lambda P_W U_1}{z-u}, \tilde{F}Q^*\right) = 0, \quad \text{if} \quad u \in \mathcal{Z}_{U_1}.$$

Мы получили систему вида (8.1.1) с множеством $\Lambda \cup W$ вместо Λ и функцией U_1 вместо E. Как мы доказали в предыдущем параграфе, эта система противоречива. □

8.2. Доказательство утверждения 8.1.2

Для того чтобы доказать теорему 1.8.1, нам осталось доказать утверждение 8.1.2. Мы будем полагать, что $I = [-\pi, \pi]$. Обозначим $\mathcal{PW}_\pi$ пространство $\mathcal{PW}_{[-\pi,\pi]}$. Напомним, что k_λ – воспроизводящее ядро в пространстве $\mathcal{PW}_\pi$,

$$k_\lambda(z) = \frac{\sin \pi(z-\overline{\lambda})}{\pi(z-\overline{\lambda})}, \qquad \text{и} \qquad f(\lambda) = (f, k_\lambda).$$

Для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ система $\{k_{n+\gamma}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – ортогональный базис в $\mathcal{PW}_\pi$.

Уравнение на функцию нулевого экспоненциального типа

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.0.8 в главе 5. Предположим обратное. Тогда существует ненулевой вектор $h \in \mathcal{PW}_\pi$ такой, что

$$\left(h, \frac{G(z)}{z-\lambda}\right) = 0, \quad \lambda \in \Lambda_1, \qquad (h, k_\lambda) = 0, \quad \lambda \in \Lambda_2. \tag{8.2.4}$$

Разложим h по ортогональному базису $\{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$h(z) = \sum_n \overline{a_n} k_n(z).$$

Отметим, что вместо базиса $\{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ мы можем использовать любой базис $\{k_{n+\gamma}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где $\gamma \in (0,1)$. Следовательно, не умаляя общности, мы можем считать, что $\Lambda \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ и $a_n = \overline{h(n)} \neq 0$ для любого n. Тогда уравнения (8.2.4) эквивалентны системе

$$\begin{cases} \sum_n \frac{a_n G(n)}{\lambda-n} = 0, \quad \lambda \in \Lambda_1, \\ \sum_n \frac{(-1)^n \overline{a_n}}{\lambda-n} = 0, \quad \lambda \in \Lambda_2. \end{cases} \tag{8.2.5}$$

Следовательно, существуют целые функции S_1 и S_2 такие, что

$$\begin{cases} \sum_n \frac{a_n G(n)}{z-n} = \frac{G_1(z)S_1(z)}{\sin \pi z} \\ \sum_n \frac{(-1)^n \overline{a_n}}{z-n} = \frac{G_2(z)S_2(z)}{\sin \pi z} = \frac{h(z)}{\sin \pi z}, \end{cases} \tag{8.2.6}$$

а G_1 и G_2 – канонические произведения, соответствующие множествам Λ_1 и Λ_2. Функции S_1, S_2, удовлетворяющие системе (8.2.6), параметризуют все функции, ортогональные к смешанной системе (8.1.2). Положим, $V = S_1 S_2$. Сравнивая вычеты в системе (8.2.6) в точках n, мы получаем, что

$$V(n) = (-1)^n |a_n|^2.$$

Таким образом,

$$V(z) = Q(z) + R(z) \sin \pi z,$$

где

$$Q(z) = \sin \pi z \sum_n \frac{|a_n|^2}{z-n},$$

а R – функция нулевого экспоненциального типа. Не умаляя общности, мы можем считать, что S_1 и S_2 вещественны на вещественной оси (такие же формулы верны и для функций $S_1 + S_1^*$, $S_2 + S_2^*$). Мы знаем, что

$$R(\lambda) + \sum_n \frac{|a_n|^2}{\lambda - n} = 0, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_{S_2}. \tag{8.2.7}$$

Это очень сильное условие, так как мы можем начать с любого базиса $\{k_{n+\gamma}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\gamma \in [0,1)$, далекого от вещественных нулей S_2. Таким образом, преобразование Коши последовательности $|a_n|^2$ не слишком велико в вещественных нулях функции S_2. С другой стороны, у множества вещественных нулей S_2 – положительная верхняя плотность, так как у фунцкии $V = S_1 S_2$ есть как минимум один нуль в каждом интервале $[n, n+1)$, а длина сопряженной индикаторной диаграммы функции S_1 меньше, чем 2π. В следующем параграфе мы применим эту идею. Поскольку доказательство почти полностью повторяет рассуждения из главы 5, мы приведем его в сокращенном варианте.

Выбор базиса

Выбор базиса $\{k_{n+\gamma}\}, \gamma \in \mathbb{R}$, разумеется, эквивалентен сдвигу соответствующих функций. Для удобства мы будем использовать старые обозначения. Зафиксируем столь малое $\delta > 0$, что существуют два подмножества Σ, Σ_1 множества нулей $\mathcal{Z}(S_2)$ функции S_2 такие, что:

- Σ содержит в точности одну точку в тех интервалах, где $\mathcal{Z}(S_2)\cap[n,n+1)\neq\emptyset$, и
$$\operatorname{dist}(x,\mathbb{Z})>\frac{\delta}{1+x^2},\qquad x\in\Sigma;$$
- у Σ_1 положительная верхняя плотность и $\operatorname{dist}(x,\mathbb{Z})>\delta$, $x\in\Sigma_1$.

Отсюда мы можем получить, что существует нетривиальная целая функция R нулевого экспоненциального типа, ограниченная на Σ (см. главу 5).

Далее мы хотим получить уравнение на Σ, которое будет этому противоречить.

Из (8.2.6) следует, что $GV\in\mathcal{P}W_{2\pi}$. Для любой целой функции f, нули которой удовлетворяют условию Бляшке, мы положим,
$$f^{\#}(z)=f(z)(B^-(z))^{-1},$$
где $B^-(z)$ - произведение Бляшке в $\mathbb{C}^-$ с нулями в $\mathcal{Z}_f\cap\mathbb{C}^-$. Функция $f^{\#}$ не имеет нулей в $\mathbb{C}^-$ и лежит в пространстве $\mathcal{PW}_\pi$, если $f\in\mathcal{PW}_\pi$. Таким образом,
$$h^{\#}=G_2^{\#}S_2^{\#}\in\mathcal{P}W_\pi,\quad G^{\#}V^{\#}\in\mathcal{P}W_{2\pi}.$$

Рассмотрим разложение $V^{\#}=V_0H$ такое, что нули функции V_0 – простые и перемежающиеся с $\mathbb{Z}$, а $V_0|_\Sigma=0$. Легко видеть, что $\arg V_0=\pi x+O(1)$. Следовательно,
$$\arg(G^{\#}V^{\#})=2\pi x+\tilde{u_1}+c,$$
и
$$\arg(G^{\#})=\pi x+\tilde{u_2}+c.$$
Мы получаем, что
$$\arg(H)=\tilde{u_3}+O(1).$$

Рассмотрим тождество $h^{\#}=G_2^{\#}HS_2^{\#}/H$. Заметим, что
$$\arg\left(\frac{S_2}{H}\right)=\pi n_\Sigma-\alpha,$$
где α – неубывающая функция на $\mathbb{R}$.

Мы получаем, что
$$\arg G_2^{\#}+\pi n_\Sigma(x)=\pi x+\tilde{u}+v+\alpha,\tag{8.2.8}$$
где $u\in L^1((1+x^2)^{-1}dx)$, $v\in L^\infty(\mathbb{R})$, а α – неубывающая функция.

Так как верхняя плотность Λ_2 меньше, чем π, мы знаем, что
$$\pi n_\Sigma(x)=\pi\varepsilon x+\tilde{u}+v+\alpha_1,\quad\varepsilon>0\tag{8.2.9}$$
для некоторой неубывающей функции α_1.

Итого, мы построили целую непостоянную функцию R нулевого экспоненциального типа и ограниченную на множестве $\Sigma \subset \mathbb{R}$ таком, что выполнено уравнение (8.2.9).

Действуя так же, как в главе 5, мы заключаем, что эти условия на R противоречивы. $\square$

8.3. Доказательство теоремы 1.8.2

Напомним формулировку теоремы 1.8.2.

Теорема 8.3.1. *Существует D-инвариантное подпространство L такое, что*

$$L_{res} = \{f \in C^\infty(-2\pi, 2\pi) : f\big|_{[-\pi,\pi]} \equiv 0\},$$

$$\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) = 1,$$

но

$$L \neq \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Напомним, что $\mathcal{P}$ – множество полиномов.

Лемма 8.3.2. *Существует последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}$ с плотностью 1, ее порождающая фунция G_Λ и целая функция S такие, что выполнены следующие три условия :*

(i) $G_\Lambda \mathcal{P} \subset \mathcal{PW}_\pi$ и $G_\Lambda S \in \mathcal{PW}_\pi$;

(ii) $G_\Lambda S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n k_n$ и для любого $N > 0$ $a_n = o(n^{-N})$, $|n| \to \infty$;

(iii) функция $G_\Lambda S$ ортогональна семейству $G_\Lambda \mathcal{P}$ в $\mathcal{PW}_\pi$.

Выведем теорему 8.3.1 из леммы 8.3.2.

Доказательство теоремы 8.3.1. Предположим, что Λ и S построены. Положим,

$$M = \left\{f \in L^2(-\pi, \pi) : \ \hat{f} \in G_\Lambda \mathcal{P}\right\}$$

(напомним, что любая функция $F \in \mathcal{PW}_\pi$ представима в виде $F = \hat{f}$ для некоторой $f \in L^2(-\pi, \pi)$). Любая функция $f \in M$ определяет линейный функционал $C^\infty(-2\pi, 2\pi)$ следующим образом:

$$\phi_f(h) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\overline{f(t)}dt, \qquad h \in C^\infty(-2\pi, 2\pi).$$

Функционал ϕ_f корректно определен, поскольку $f(t) \equiv 0$, $|t| \geq \pi$.

Положим,

$$L = M^\perp = \{h \in C^\infty(-2\pi, 2\pi) : \ \phi_f(h) = 0, \ f \in M\}.$$

По построению, L – замкнутое подпространство $C^\infty(-2\pi, 2\pi)$,

$$\{f \in C^\infty(-2\pi, 2\pi) : f|_{[-\pi,\pi]} \equiv 0\} \subset L.$$

Так как множество общих нулей $\widehat{L^\perp}$ совпадает с Λ, мы получаем, что $\sigma(D|_L) = \Lambda$.

Покажем, что подпространство L инвариантно относительно оператора D. Пусть $h \in L$. Мы должны показать, что $\int_{-\pi}^{\pi} h'(t)\overline{f(t)}dt = 0$ для любой $f \in M$. Так как $\hat{f} = G_\Lambda P = O(1 + |x|^{-N})$ для любого N, мы получаем, что $f \in C^\infty[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} h'(t)\overline{f(t)}dt = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\overline{f'(t)}dt.$$

С другой стороны, если $f \in M$, то $\hat{f}'(x) = G_\Lambda(x)xP(x) \in M$ и выражение справа обнуляется. Мы показали, что L D-инвариантно.

Теперь мы построим функционал ϕ такой, что $\phi|_{L_0} = 0$, но $\phi|_L \neq 0$, где (как и в доказательстве теоремы 1.8.1)

$$L_0 = \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Пусть функция $h_0 \in L^2(-\pi, \pi)$ такова, что $\widehat{\overline{h_0}} = G_\Lambda S$. Напомним, что $G_\Lambda S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n k_n$, где $a_n = o(n^{-N})$ для любого $N > 0$. Следовательно, $\overline{h_0(t)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$. Так как коэффициенты a_n быстро убывают, функция h_0 лежит в классе C^∞ в *замкнутом* интервале $[-\pi, \pi]$. Обозначим за h функцию из $C^\infty(-2\pi, 2\pi)$ такую, что $h|_{[-\pi,\pi]} = h_0$.

Рассмотрим функционал ϕ на L, $\phi(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\overline{h_0(t)}dt$. Легко видеть, что ϕ обнуляет множество $\{g \in C^\infty(-2\pi, 2\pi) : g|_{[-\pi,\pi]} \equiv 0\}$. Более того, $\phi(e^{i\lambda t}) = \widehat{\overline{h_0}}(\lambda) = 0$. Следовательно, ϕ обнуляет L_0.

Покажем, что $h \in L$. Из условия $\phi(h) = \int_{-\pi}^{\pi} |h_0(t)|^2 dt > 0$, мы получаем, что $L \neq L_0$. Действительно, для любого $f \in M$ мы знаем, что

$$\begin{aligned}\phi_f(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\overline{f(t)}dt = \int_{-\pi}^{\pi} h_0(t)\overline{f(t)}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_0(x)\overline{\hat{f}(x)}dx = 0,\end{aligned}$$

так как $\hat{h}_0 = G_\Lambda S$, $\hat{f} = G_\Lambda P$ для некоторого полинома P, а $G_\Lambda S \perp G_\Lambda \mathcal{P}$ в $L^2(\mathbb{R})$. Следовательно, мы построили функционал, который разделяет L_0 и L. □

Доказательство леммы 8.3.2. Напомним, что $\mathcal{Z}_F$ – множество нулей целой функции F. Пусть

$$U(z)=\frac{\sin(\pi\sqrt{z})}{\pi\sqrt{z}}=\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z}{n^2}\right),$$

а V – лакунарное каноническое произведение. Например,

$$V(z)=\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z}{2^{2n}+1}\right).$$

Положим,

$$G_\Lambda(z)=\frac{\sin\pi z}{U(z)V(z)}.$$

Отметим, что функция UV стремится к бесконечности быстрее любого полинома вдоль $\mathbb{R}\setminus X$, где X – небольшая окрестность нулей функции UV. Пользуясь принципом максимума, мы получаем, что $G_\Lambda P\in\mathcal{P}W_\pi$ для любого полинома P.

Нам понадобятся следующие две целые функции:

$$T(z)=\frac{\sin(\pi\sqrt{z+1/2}/10)}{W(z)\sqrt{z+1/2}},\qquad W(z)=\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z}{100\cdot 2^{2n}-1/2}\right)$$

(отметим, что нули числителя – это множество $100n^2-1/2$, $n\in\mathbb{N}$).

Определим последовательность a_n. Пусть $a_n:=0$ для $n\notin\mathcal{Z}_U\cup\mathcal{Z}_V$ и

$$a_n:=(-1)^nT(n),\qquad n\in\mathcal{Z}_U\cup\mathcal{Z}_V.$$

Легко видеть, что $T(n)=o(n^{-N})$ для любого N при $n\to\infty$, так как функция $\sin(\pi\sqrt{x})$ ограничена при $x>0$, а $W(n)$, растет быстрее любого полинома вдоль $\mathbb{N}$.

Определим функцию S при помощи формулы

$$\frac{G_\Lambda(z)S(z)}{\sin\pi z}=\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^na_n}{z-n}. \tag{8.3.10}$$

Следовательно, $G_\Lambda S=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nk_n$, где k_n - ортогональный базис в $\mathcal{P}W_\pi$. Таким образом, $G_\Lambda S\in\mathcal{P}W_\pi$. Мы доказали (i) и (ii), так как последовательность $\{a_n\}$ быстро убывает.

Отметим, что суммирование в последней формуле происходит только по индексам $n\in\mathcal{Z}_U\cup\mathcal{Z}_V$. Таким образом, мы можем переписать уравнение

(8.3.10) следующим образом:

$$\frac{S(z)}{U(z)V(z)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathcal{Z}_U\cup\mathcal{Z}_V} \frac{T(n)}{z-n}.$$

Положим, $S_1 = G_\Lambda T$. Мы покажем, что верна следующая интерполяционная формула:

$$\frac{S_1(z)}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n G_\Lambda(n)}{z-n}.$$

Из уравнений $a_n = (-1)^n T(n)$, $G_\Lambda(n) = \pi(-1)^n \big((UV)'(n)\big)^{-1}$, $n \in \mathcal{Z}_U \cup \mathcal{Z}_V$ мы заключаем, что эта интерполяционная формула эквивалентна интерполяционной формуле для функции T:

$$\frac{T(z)}{U(z)V(z)} = \sum_{n\in\mathcal{Z}_U\cup\mathcal{Z}_V} \frac{T(n)}{(UV)'(n)(z-n)}. \tag{8.3.11}$$

Еще раз напомним, что $T(n)$ убывает быстрее любого полинома при $n \to \infty$. Легко видеть, что $|(UV)'(n)| \to \infty$ при $n \to \infty$, $n \in \mathcal{Z}_U \cup \mathcal{Z}_V$. Так как V – лакунарное произведение, мы знаем, что $|V(n)|$ достаточно велико при $n \in \mathcal{Z}_U$ и $|V'(n)|$, достаточно велико при $n \in \mathcal{Z}_V$. С другой стороны, $|U(n)|$, $n \in \mathcal{Z}_V$ и $|U'(n)|$, $n \in \mathcal{Z}_U$ могут быть оценены снизу отрицательной степенью n. Следовательно, ряд в правой части (8.3.11) сходится равномерно на компактах, отделенных от полюсов.

Легко видеть, что вычеты в правой и левой части совпадают. Таким образом, разность между правой и левой частью (8.3.11) (мы обозначим ее за H) равна целой функции. Видно, что H имеет нулевой экспоненциальный тип. Осталось заметить, что $T/(UV)$ стремится к нулю вдоль мнимой оси. Следовательно, $|H(iy)| \to 0$, $|y| \to \infty$. Таким образом, $H \equiv 0$.

Используя те же рассуждения. мы можем получить, что для любого полинома $P \in \mathcal{P}$

$$\frac{P(z)S_1(z)}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{P(n) a_n G_\Lambda(n)}{z-n}.$$

Осталось проверить, что функция $G_\Lambda S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n k_n$ ортогональна ко всем функциям $z^k G_\Lambda$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $a \notin \mathbb{Z}$, а $P(z) = (z-a)z^k$. Так как k_n - воспроизводящее ядро в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$, мы получаем, что

$$(z^k G_\Lambda, G_\Lambda S) = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^k a_n G_\Lambda(n) =$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{P(n) a_n G_\Lambda(n)}{n-a} = \frac{P(z)S_1(z)}{\sin \pi z}\bigg|_{z=a} = 0.$$

Мы доказали (iii). Лемма 8.3.2 полностью доказана. $\square$

8.4. Подпространства с некомпактным резидуальным интервалом

В этом параграфе мы докажем теорему 1.8.3. Напомним ее формулировку.

Теорема 8.4.1. *Если резидуальный интервал I не компактен, то*

$$L = \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Пусть распределение φ имеет компактный носитель в (a, b). Обозначим за $I(\varphi)$ выпуклую оболочку его носителя, а за $|I(\varphi)|$ длину этой выпуклой оболочки. Заметим, что если у подпространства L резидуальный интервал I, который компактно содержится в (a, b), то все распределения, обнуляющие L, сосредоточены на этом интервале. Следовательно,

$$\sup\{|I(\varphi)| : \ \varphi \in L^{\perp}\} = |I|.$$

Следующая лемма показвает, что это верно, если $I = (a, b)$.

Лемма 8.4.2. *Если $\sigma(D|_L)$ – бесконечное дискретное подмножество $\mathbb{C}$ и $L_{res} = \{0\}$, то*

$$\sup\{|I(\varphi)| : \ \varphi \in L^{\perp}\} = b - a,$$

где $b - a = \infty$, если интервал (a, b) имеет бесконечную длину.

Доказательство. Пусть s – супремум из леммы. Из условий на $\sigma(D|_L)$ следует, что $s > 0$. Заметим, что если $|I(\varphi)|, |I(\psi)| > s/2$, то эти интервалы имеют непустое пересечение или $|I(\varphi + \psi)| > s$. Следовательно,

$$I = \bigcup \{I(\varphi) : \ \varphi \in L^{\perp}, \ |I(\varphi)| > s/2\}$$

интервал длиной $|I| \geq s$. Следовательно, $|I| = s$. Действительно, если числа $c, d \in I$, $d - c > s$ таковы, что $c \in I(\varphi), \ d \in I(\psi)$, то $|I(\varphi + \psi)| > s$. Мы получили противоречие.

Мы докажем, что I содержит внутренность любого интервала $I(\varphi)$, $\varphi \in L^{\perp}$. Предположим обратное, то есть существует функционал $\varphi \in L^{\perp}$ такой, что внутренность $I(\varphi)$ не содержится в I. Если J – нетривиальный интервал в $I(\varphi) \setminus I$. Выберем функционал $\psi \in L^{\perp}$ такой, что

$$|I(\psi)| > \max\{s - |J|, s/2\}.$$

Заметим, что $|I(\varphi + \psi)| > s$. Мы получили противоречие.

Таким образом, все распределения $\varphi \in L^{\perp}$ сосредоточены в замыкании I. Если $s = |I| < b - a$, то L содержит L_I, и мы получили противоречие. Следовательно, $s = b - a$. $\square$

Радиус полноты

Пусть Λ – дискретное подмножество $\mathbb{C}$. Положим,

$$R(\Lambda) = \sup\{a : \mathcal{E}(\Lambda) \text{ полна в } L^2[0, a]\}.$$

Величина $R(\Lambda)$ называется *радиусом полноты* множества Λ. Хорошо известно, что $R(\Lambda)$ равна плотности Берлинга–Мальявена Λ [43], но нам не понадобится этот замечательный факт.

Замечание 8.4.1. *Выводы теоремы 1.8.1 и утверждения 8.1.2 остаются верными, если мы заменим в условии верхнюю плотность на радиус полноты.*

Доказательство. Мы использовали условие $D_+(\Lambda) < \frac{|I|}{2\pi}$ только в доказательстве утверждения 8.1.2, когда выводили уравнение (8.2.9) из уравнения (8.2.8). Мы докажем, что это верно и при условии $R(\Lambda) < |I|$. Предположим, что $I = [-\pi, \pi]$. Если $R(\Lambda) < 2\pi$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует нетривиальная целая функция T такая, что $G_2 T \in \mathcal{PW}_{\pi-\varepsilon}$, где G_2 - каноническое произведение, построенное по множеству Λ. Не умаляя общности, мы можем считать, что нули T лежат в $\mathbb{C}^+$. Тогда

$$\arg G_2^{\#} + \arg T = \pi(1-\varepsilon)x + \tilde{u} + c, \quad u \in L^1((1+x^2)^{-1}), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Это уравнение влечет (8.2.9). $\square$

Доказательство теоремы 8.4.1

Пусть I – резидуальный интервал подпространства L. Если $R(\Lambda) \geq |I|$, то $\mathcal{E}(\Lambda)$ полно в $L^2(J)$ для любого собственного подинтервала J интервала I. Следовательно, L не может обнуляться любым распределением с компактным носителем в I, то есть $L = C^{\infty}(a, b)$.

Если $R(\Lambda) < |I|$, то, используя лемму 8.4.2, мы получаем, что для данного $\varepsilon > 0$ существует функционал $\varphi \in L^{\perp}$, $|I(\varphi)| > |I| - \varepsilon$. Тогда $L^{\perp}$ содержит все распределения с носителем в $I(\varphi)$, чьи преобразования Фурье обнуляются на множестве $\sigma(D|_L)$ с нужными кратностями. Так как ε произвольно, мы доказали то, что нужно. $\square$

Глава 9. Пространства фоковского типа

В этой главе мы докажем теоремы 1.9.3 и 1.9.2. Доказательство первой из них базируется на технике из главы 3 и хорошо известной оценке σ-функции Вейерштрасса. Доказательство второй использует описание бесселевых последовательностей в малых пространствах целых функций из главы 2.

9.1. Полнота биортогональной системы

В этом параграфе мы докажем теорему 1.9.4, которая равносильна теореме 1.9.3 (см. главу 1). Напомним ее формулировку.

Теорема 9.1.1. *Если $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – полная и минимальная система в пространстве Фока, а F – ее порождающая функция, то система $\left\{\frac{F(z)}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ тоже полна.*

Предварительные замечания

Пусть σ – σ-функция Вейерштрасса, соответствующая решетке $\mathcal{Z} = \{z : z = m + in, m, n \in \mathbb{Z}\}$,

$$\sigma(z) = z \prod_{\lambda\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{\lambda^2}}.$$

Хорошо известно, что $|\sigma(z)| \asymp \operatorname{dist}(z,\mathcal{Z}) e^{\pi|z|^2/2}$ (см., например, [55, p. 108]). Из этой оценки легко получить, что система $\left\{\frac{k_w}{\|k_w\|}\right\}_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}}$ полна и минимальна, а $\sigma_0(z) := \frac{\sigma(z)}{z}$ – ее порождающая функция. Действительно, мы знаем, что $\frac{\sigma_0(z)}{z-w_1} \perp k_{w_2}(z), w_1, w_2 \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}, w_1 \neq w_2$. Следовательно, система $\{k_w\}_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0,w_0\}}$ неполна для любого $w_0 \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$. С другой стороны, хорошо известно, что система $\{k_w\}_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}}$ полна.

Система $\left\{\frac{\|k_w\|}{\sigma_0'(w)} \cdot \frac{\sigma_0(z)}{z-w}\right\}$ биортогональна к исходной. С любой функцией $S \in \mathcal{F}$ мы свяжем ее формальный ряд Фурье *по системе* $\left\{\frac{k_w}{\|k_w\|}\right\}_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}}$

$$S \sim \sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} b_w \frac{k_w}{\|k_w\|}, \qquad b_w := \left(S(z), \frac{\|k_w\|}{\sigma_0'(w)} \cdot \frac{\sigma_0(z)}{z-w}\right)_{\mathcal{F}}.$$

Этот ряд лучше, чем произвольный ряд Фурье (1.4.18). Например, этот ряд допускает линейный метод суммирования. В частности, мы знаем, что последовательность $\{b_w\}$ нетривиальна.

Нам понадобится следующая оценка коэффициентов:

$$|b_w|^2 \le \|S\|^2 \cdot \left\| \frac{\|k_w\|}{\sigma_0'(w)} \cdot \frac{\sigma_0(z)}{z-w} \right\|^2 \lesssim \|S\|^2 \cdot \left\| \frac{w\sigma_0(z)}{z-w} \right\|^2.$$

Первое неравенство следует из неравенства Коши–Шварца. Рассмотрим формулу Тейлора $\sigma_0(w+\varepsilon) = \sigma_0'(w)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, $w \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$. Мы получаем, что $|\sigma_0'(w)| \asymp \frac{e^{\pi|w|^2/2}}{|w|}$. С другой стороны, $\|k_w\|^2 = k_w(w) = e^{\pi|w|^2}$. Из этого следует второе неравенство.

Оценим норму биортогональных элементов

$$\left\| \frac{w\sigma_0(z)}{z-w} \right\|^2 = \int_{\mathbb{C}} \frac{|w\sigma_0(z)|^2 e^{-\pi|z|^2}}{|w-z|^2} dm(z) \lesssim$$
$$\int_{|z-w|<1/2} + \int_{|z|<2|w|, |z-w|>1/2} + \int_{|z|>2|w|}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Из оценки $|\sigma_0(z)| \asymp \operatorname{dist}(z, \mathcal{Z} \setminus \{0\}) \frac{e^{\pi|z|^2/2}}{1+|z|}$ мы получаем, что $|I_1| \lesssim 1$,

$$|I_2| \lesssim \int_{|z|<2|w|, |z-w|>1/2} \frac{|w|^2}{(1+|z|^2)|w-z|^2} dm(z) \lesssim \log(1+|w|),$$

$$|I_3| \lesssim \int_{|z|>2|w|} \frac{|w|^2}{(1+|z|^2)|z|^2} dm(z) \lesssim 1.$$

Таким образом,

$$|b_w|^2 \lesssim \log(1+|w|), \tag{9.1.1}$$

$$\left\| \frac{w\sigma_0(z)}{z-w} \right\|^2 \lesssim \log(1+|w|), \quad w \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}. \tag{9.1.2}$$

Лемма 9.1.2. *Если F – порождающая функция полной и минимальной системы из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в $\mathcal{F}$, а $\Lambda \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, то для любой тройки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ верно тождество*

$$\left(\frac{F(z)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)}, S \right)_{\mathcal{F}} = \sum_{w \in \mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{F(w) b_w}{(w-\lambda_1)(w-\lambda_2)(w-\lambda_3)\|k_w\|} \tag{9.1.3}$$

для любой $S \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Хорошо известно, что для любой функции $H \in \mathcal{F}$, $\sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{|H(w)|^2}{\|k_w\|^2} < \infty$ (см., наример, [55]). Таким образом, $\left\{ \frac{F(w)}{(w-\lambda_1)\|k_w\|} \right\} \in \ell^2$.

Из оценки (9.1.1) мы получаем, что $\left\{\frac{b_w}{(w-\lambda_2)(w-\lambda_3)}\right\} \in \ell^2$. Следовательно, ряд в правой части (9.1.3) сходится и определяет ограниченный линейный функционал на $\mathcal{F}$. С другой стороны, левая и правая часть (9.1.3) совпадают, если S – конечная линейная комбинация ядер $\{k_w\}_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}}$. Полнота системы $\{k_w\}_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}}$ означает, что множество конечных линейных комбинаций $\{k_w\}_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}}$ плотно в $\mathcal{F}$. Таким образом, ограниченные линейные функционалы в левой и правой части (9.1.3) совпадают. $\square$

Доказательство теоремы 9.1.1

Предположим обратное. Тогда существует функция $S \in \mathcal{F}$ такая, что $S \perp \frac{F(z)}{z-\lambda}$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\Lambda \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ и $S \not\perp \frac{\sigma_0(z)}{z-w}$, $w \in \mathcal{Z}\setminus\{0\}$. Действительно, мы можем воспользоваться системой, построенной по решетке $\mathcal{Z}+\varepsilon$ для некоторого ε.

Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)} = \sum_{k=1}^{3} \frac{c_k}{z-\lambda_k}.$$

Для любой тройки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ мы знаем, что

$$\left(\frac{F(z)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)}, S\right) = 0.$$

Зафиксируем две произвольные точки $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Положим,

$$L(z) = \sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{F(w)\overline{b_w}}{(z-w)(w-\lambda_1)(w-\lambda_2)\|k_w\|},$$

$$T(z) = L(z)\cdot\frac{\sigma_0(z)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}{F(z)}.$$

Из леммы 9.1.2 следует, что мероморфная функция L обращается в ноль в точках из множества $\Lambda\setminus\{\lambda_1,\lambda_2\}$. Следовательно, T – целая функция. Таким образом,

$$\sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{F(w)\overline{b_w}}{(z-w)(w-\lambda_1)(w-\lambda_2)\|k_w\|} = \frac{F(z)T(z)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\sigma_0(z)}. \qquad (9.1.4)$$

Сравнивая вычеты в формуле (9.1.4), мы получаем, что

$$\frac{F(w)\overline{b_w}}{(w-\lambda_1)(w-\lambda_2)\|k_w\|} = \frac{F(w)T(w)}{(w-\lambda_1)(w-\lambda_2)\sigma_0'(w)}, \quad w \in \mathcal{Z}\setminus\{0\}.$$

Из условия $F(w) \neq 0$ следует, что $T(w) = \overline{b_w}\frac{\sigma_0'(w)}{\|k_w\|}$, $w \in \mathcal{Z}\setminus\{0\}$.

Предположим, что у функции T есть как минимум два ноля t_1, t_2. Из условия $S \not\perp \frac{\sigma_0(z)}{z-w}$ мы получаем, что $b_w \neq 0$. Следовательно, $t_1, t_2 \notin \mathcal{Z}\setminus\{0\}$. Таким образом, $L(t_1) = L(t_2) = 0$ и

$$\frac{F(z)T(z)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-t_1)\sigma_0(z)} = \frac{L(z)-L(t_1)}{z-t_1}$$

$$= \frac{1}{z-t_1}\sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{F(w)\overline{b_w}}{(w-\lambda_1)(w-\lambda_2)\|k_w\|}\left[\frac{1}{z-w} - \frac{1}{t_1-w}\right]$$

$$= \sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{F(w)\overline{b_w}}{(w-\lambda_1)(w-\lambda_2)\|k_w\|}\cdot\frac{1}{(z-w)(w-t_1)}.$$

Воспользовавшись (9.1.4), мы получаем, что

$$\frac{F(z)T(z)}{(z-t_1)(z-\lambda_2)\sigma_0(z)} = \frac{F(z)T(z)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\sigma_0(z)}\left[1 - \frac{\lambda_1 - t_1}{z-t_1}\right]$$

$$= \sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{F(w)\overline{b_w}}{(z-w)(w-\lambda_1)(w-\lambda_2)\|k_w\|}\left[1 - \frac{\lambda_1 - t_1}{w-t_1}\right]$$

$$= \sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{F(w)\overline{b_w}}{(z-w)(w-t_1)(w-\lambda_2)\|k_w\|}.$$

Повторяя эту процедуру для точки t_2, мы получаем, что

$$\frac{F(z)T(z)}{(z-t_1)(z-t_2)\sigma_0(z)} = \sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{F(w)\overline{b_w}}{(z-w)(w-t_1)(w-t_2)\|k_w\|}.$$

Таким образом,

$$F(z)\frac{T(z)}{(z-t_1)(z-t_2)} = \sum_{w\in\mathcal{Z}\setminus\{0\}} \frac{|w|^{1/2}\sigma_0(z)}{z-w}\cdot\frac{F(w)\overline{b_w}}{(w-t_1)(w-t_2)|w|^{1/2}\|k_w\|}. \quad (9.1.5)$$

Из включения $\left\{\frac{F(w)}{(w-\lambda_1)\|k_w\|}\right\} \in \ell^2$ и оценки $|b_w|^2 \lesssim \log(1+|w|)$, $\left\|\frac{|w|^{1/2}\sigma_0(z)}{z-w}\right\| \lesssim 1$ (см. (9.1.1), (9.1.2)) мы получаем, что выражение в правой части (9.1.5) лежит в $\mathcal{F}$. Это противоречит полноте системы $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Следовательно, у функции T есть как минимум один ноль. Таким образом, $T(z) = e^{P(z)}(a_1 z - a_0)$, где P - полином степени не выше 2. Это противоречит оценке $|T(w)| = \left|b_w \frac{\sigma_0'(w)}{\|k_w\|}\right| \lesssim \frac{\log^{1/2}(1+|w|)}{|w|}$, $w \in \mathcal{Z}\setminus\{0\}$ (см. (9.1.1)). $\square$

9.2. Пространства Фока, совпадающие с пространствами де Бранжа

В этом параграфе мы докажем теорему 1.9.2. Напомним ее формулировку.

Теорема 9.2.1. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа с мерой Кларка $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(i) существует пространство фоковского типа $\mathcal{F}_\varphi$ такое, что $\mathcal{H}(E) = \mathcal{F}_\varphi$;

(ii) оператор поворота $R_\theta : f(z) \mapsto f(e^{i\theta}z)$ – ограниченный обратимый оператор в $\mathcal{H}(E)$ для всех (одного) $\theta \in (0,\pi)$;

(iii) последовательность $\{t_n\} = \operatorname{supp}\mu$ лакунарна и для некоторого $C > 0$ и всех n выполнено неравенство

$$\sum_{|t_k|\le|t_n|} \mu_k + t_n^2 \sum_{|t_k|>|t_n|} \frac{\mu_k}{t_k^2} \le C\mu_n. \tag{9.2.6}$$

Импликация (i)$\Longrightarrow$(ii) очевидна.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

Мы будем использовать обратимость оператора $R_{\pi/2}$. Для других значений θ доказательство аналогично. Мы знаем, что $A(iz) \in \mathcal{H}(E)$. Таким образом, последовательность $iT = \{it_n\}$ удовлетворяет условию Бляшке $\sum_n (1+|t_n|)^{-1} < \infty$. Более того, $\{k_\lambda\}_{\lambda\in iT}$ – базис Рисса из воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}(E)$ и в соответствующем модельном подпространстве. Следовательно, последовательность iT лакунарна в обеих полуплоскостях $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ (см., например, [82, лемма D.4.4.2]).

Мы можем полагать, что $A(z) = \prod_n \left(1 - \frac{z}{t_n}\right)$ и $|t_n| > 2$. Следовательно,

$$\frac{1}{\mu_n} = \left\|\frac{A(z)}{z-t_n}\right\|^2 \asymp \left\|R_{\pi/2}\left(\frac{A(z)}{z-t_n}\right)\right\|^2 = \tag{9.2.7}$$

$$\sum_k \frac{|A(it_k)|^2}{|A'(t_k)|^2\mu_k|it_k-t_n|^2}.$$

Оценим величину $\frac{A(it_k)}{A'(t_k)}$, $t_k\in[2^K,2^{K+1}]$:

$$\left|\frac{A(it_k)}{A'(t_k)}\right|^2 = 2|t_k|^2\prod_{l\neq k}\left|\frac{1-\frac{it_k}{t_l}}{1-\frac{t_k}{t_l}}\right|^2 \gtrsim |t_k|^2.$$

Мы воспользовались тем, что $\sup_{s>0}\#\{t_n : 2^s\le |t_n|<2^{s+1}\}<\infty$.

Из оценки (9.2.7) мы получаем, что

$$\frac{1}{\mu_n}\gtrsim \sum_k \frac{|t_k|^2}{\mu_k|t_k-it_n|^2}\asymp \sum_{|t_k|>|t_n|}\frac{1}{\mu_k}+\frac{1}{|t_n|^2}\sum_{|t_k|\le|t_n|}\frac{|t_k|^2}{\mu_k}.$$

Таким образом, $\frac{1}{\mu_n}\gtrsim\sum_{|t_k|>|t_n|}\frac{1}{\mu_k}$.

Воспользовавшись леммой 2.3.14 из главы 2, мы получаем, что $\mu_n\le C2^{-\delta(m-n)}\mu_m$, $m>n$ для некоторого $\delta>0$. Более того, $\frac{\mu_m}{|t_m|^2}\le C2^{-\delta(m-n)}\frac{\mu_n}{|t_n|^2}$, $m>n$. Мы доказали неравенство (9.2.6).

(iii)$\Longrightarrow$(i)

Для удобства мы будем полагать, что $\{t_n\}$ – односторонняя положительная последовательность. Положим,

$$\Omega_1=\left\{z:|z|\le\frac{t_1+t_2}{2}\right\},\quad \Omega_n=\left\{z:\frac{t_{n-1}+t_n}{2}<|z|\le\frac{t_n+t_{n+1}}{2}\right\}.$$

Оценим величину $A(z)$ для $z\in\Omega_n$:

$$|A(z)|\asymp\frac{|z|^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1}t_k}\cdot\frac{|z-t_n|}{t_n}.$$

Пусть ε – маленькое положительное число. Положим,

$$\varphi(r)=2\log|A(ir)|+\log\mu_n,\quad r\in\cup_n[(1-\varepsilon)t_n,(1+\varepsilon)t_n],$$

и $\varphi(r)=\infty$ для других значений r.

Мы должны проверить, что $\|F\|_{L^2(\nu)}\asymp\|F\|_E$, $F\in\mathcal{H}(E)$, with $\nu=e^{-\varphi(|z|)}dm(z)$. Вначале докажем, что ν – мера Карлесона для $\mathcal{H}(E)$, то есть $\|F\|_{L^2(\nu)}\lesssim\|F\|_E$, $F\in\mathcal{H}(E)$. Мы нормализуем нашу меру для пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ $\nu_d(z)=|A(z)|^2\nu$. Из теоремы 1.2.2 мы заключаем, что ν_d – карлесонова мера для $\mathcal{H}(T,\mu)$. Действительно,

$$\nu_d(\Omega_n) \asymp \frac{|t_n|^2}{\mu_n}, \quad \int_{\Omega_n} \frac{d\nu_d(z)}{|z|^2} \asymp \frac{1}{\mu_n}.$$

Так как последовательности $\frac{t_n^2}{\mu_n}$, μ_n растут, как минимум, как геометрическая прогрессия, мы получаем то, что требуется.

Для удобства читателя мы кратко повторим аргументы из главы 2. Эти же соображения нам понадобятся, когда мы будем доказывать обратные оценки. Пусть $f(z) = A(z)\sum_n \frac{a_n\mu_n^{1/2}}{z-t_n}$ – произвольная функция из $\mathcal{H}(E)$,

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}(E)} = \sum_n |a_n|^2.$$

Мы должны проверить, что $\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)} dm(z) \lesssim \sum_n |a_n|^2$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_n} \left|\sum_k \frac{a_k\mu_k^{1/2}}{z-t_k}\right|^2 d\nu_d(z) \lesssim \int_{\Omega_n} \frac{d\nu(z)}{|z|^2}\Bigl(\sum_{k<n}|a_k|\mu_k^{1/2}\Bigr)^2 + \\ |a_n|^2 + \nu_d(\Omega_n)\Bigl(\sum_{k>n}\frac{|a_k|\mu_k^{1/2}}{t_k^2}\Bigr)^2 \\ \lesssim \frac{1}{\mu_n}\Bigl(\sum_{k<n}|a_k|\mu_k^{1/2}\Bigr)^2 + |a_n|^2 + \frac{t_n^2}{\mu_n}\Bigl(\sum_{k>n}\frac{|a_k|\mu_k^{1/2}}{t_k^2}\Bigr)^2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)} dm(z) = \sum_n \int_{\Omega_n} \left|\sum_k \frac{a_k\mu_k^{1/2}}{z-t_k}\right|^2 d\nu_d(z)$$

$$\lesssim \sum_n \frac{1}{\mu_n}\Bigl(\sum_{k<n}|a_k|\mu_k^{1/2}\Bigr)^2 + \sum_n |a_n|^2 + \sum_n \frac{t_n^2}{\mu_n}\Bigl(\sum_{k>n}\frac{|a_k|\mu_k^{1/2}}{t_k^2}\Bigr)^2.$$

Покажем, что первое слагаемое ограничено величиной $C\|a\|^2$ (последнее слагаемое оценивается аналогично). Действительно,

$$\begin{aligned}
\sum_n \frac{1}{\mu_n}\Big(\sum_{k<n}|a_k|\mu_k^{1/2}\Big)^2 &= \sup_{c\in\ell^2,\|c\|=1}\Big(\sum_n c_n\mu_n^{-1/2}\sum_{k<n}|a_k|\mu_k^{1/2}\Big)^2 \\
&= \sup_{c\in\ell^2,\|c\|=1}\Big(\sum_k |a_k|\mu_k^{1/2}\sum_{n>k}c_n\mu_n^{-1/2}\Big)^2 \\
&\le \sum_l |a_l|^2\cdot \sup_{c\in\ell^2,\|c\|=1}\sum_l \mu_l\Big(\sum_{n>l}c_n\mu_n^{-1/2}\Big)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \|a\|^2\cdot \sup_{c\in\ell^2,\|c\|=1}\sum_l \mu_l\Big(\sum_{n>l}|c_n|^2\mu_n^{-1/2}\cdot\sum_{n>l}\mu_n^{-1/2}\Big) \\
&\lesssim \|a\|^2\cdot \sup_{c\in\ell^2,\|c\|=1}\sum_l \mu_l^{1/2}\sum_{n>l}|c_n|^2\mu_n^{-1/2} \\
&= \|a\|^2\cdot \sup_{c\in\ell^2,\|c\|=1}\sum_n |c_n|^2\sum_{l<n}\frac{\mu_l^{1/2}}{\mu_n^{1/2}} \lesssim \|a\|^2.
\end{aligned}$$

Мы доказали, что мера ν_d карлесонова. Отметим, что карлесонова константа для меры ν_d зависит только от константы лакунарности последовательности $\inf_n \frac{t_{n+1}}{t_n}$.

Нам осталось проверить, что ν – обратная карлесонова мера для $\mathcal{H}(E)$, то есть $\|F\|_{L^2(\nu)} \gtrsim \|F\|_E$, $F\in\mathcal{H}(E)$. Мы должны доказать, что

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)}dm(z) \gtrsim \sum_n |a_n|^2.$$

Положим, $D_n = \{z : \varepsilon t_n/2 \le |z - t_n| \le \varepsilon t_n\}$. Воспользуемся неравенствами

$$\int_{D_n} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)} dm(z) \gtrsim \frac{\varepsilon^2}{\mu_n} \int_{D_n} \Big| \sum_k \frac{a_k \mu_k^{1/2}}{z - t_k} \Big|^2 dm(z)$$
$$\ge \frac{\varepsilon^2}{\mu_n} \int_{D_n} \Big[\frac{\mu_n}{t_n^2 \varepsilon^2} |a_n|^2 -$$
$$\frac{C}{|z|^2} \Big(\sum_{k<n} |a_k| \mu_k^{1/2} \Big)^2 - C \Big(\sum_{k>n} \frac{|a_k| \mu_k^{1/2}}{t_k} \Big)^2 \Big] dm(z)$$
$$\ge \varepsilon^4 \Big[\frac{1}{\varepsilon^2} |a_n|^2 - \frac{C}{\mu_n} \Big(\sum_{k<n} |a_k| \mu_k^{1/2} \Big)^2 -$$
$$C \frac{t_n^2}{\mu_n} \Big(\sum_{k>n} \frac{|a_k| \mu_k^{1/2}}{t_k} \Big)^2 \Big].$$

Константа C зависит только от константы лакунарности последовательности $\inf_n t_{n+1}/t_n$. Складывая эти оценки, мы получаем величины

$$\sum_n \frac{1}{\mu_n} \Big(\sum_{k<n} |a_k| \mu_k^{1/2} \Big)^2, \sum_n \frac{t_n^2}{\mu_n} \Big(\sum_{k>n} \frac{|a_k| \mu_k^{1/2}}{t_k} \Big)^2.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)} dm(z) \ge \sum_n \int_{D_n} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)} dm(z)$$
$$\ge \varepsilon^4 \Big[\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_n |a_n|^2 - C \sum_n |a_n|^2 \Big].$$

Если ε достаточно мало, мы получаем требуемое.

Поправим определение $\varphi(r)$ для $r \notin \cup_n [(1-\varepsilon)t_n, (1+\varepsilon)t_n]$ так, чтобы $\varphi(r)$ было конечно, но очень велико. Оценка $\|F\|_{L^2(\nu)} \asymp \|F\|_E, F \in \mathcal{H}(E)$ останется верной. $\square$

Глава 10. Бесселевы последовательности в пространствах де Бранжа с равномерной верхней плотностью

В этой главе мы докажем теорему 1.10.3. Напомним ее формулировку.

Теорема 10.0.2. *В пространстве $\mathcal{H}(E)$ все вещественные последовательности Λ имеют конечную верхнюю плотность $\mathrm{UD}(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^-) < \infty \qquad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^+) < \infty,$$
$$\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^-) < \infty \qquad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^+) < \infty, \tag{10.0.1}$$

где последовательности $\mathcal{A}_n^\pm$, $\mathcal{B}_n^\pm$ построены по спектральной мере μ.

Напомним определения величин $M_n^\pm(x)$, $P_n^\pm(x)$, $R^\pm_{M\text{ или P}}(x)$, $\mathcal{A}_n^\pm$ и $\mathcal{B}_n^\pm$:

$$M_n^-(x) = \mu([t_n - (x - t_n), t_n]),$$
$$P_n^-(x) = \int_{|y-t_n|>|x-t_n|} \frac{d\mu(y)}{|y-t_n|^2}, \quad x \in I_n^-.$$
$$M_n^+(x) = \mu([t_{n+1}, t_{n+1} + (t_{n+1} - x)]),$$
$$P_n^+(x) = \int_{|y-t_{n+1}|>|x-t_{n+1}|} \frac{d\mu(y)}{|y-t_{n+1}|^2}, \quad x \in I_n^+,$$
$$\mathcal{R}_M^- = \{x : x \in I_n^-, M_n^-(x) \ge |x-t_n|^2 P_n^-(x)\},$$
$$\mathcal{R}_M^+ = \{x : x \in I_n^+, M_n^+(x) \ge |x-t_{n+1}|^2 P_n^+(x)\},$$
$$\mathcal{R}_P^- = \{x : x \in I_n^-, M_n^-(x) < |x-t_n|^2 P_n^-(x)\},$$
$$\mathcal{R}_P^+ = \{x : x \in I_n^+, M_n^+(x) < |x-t_{n+1}|^2 P_n^+(x)\},$$
$$\mathbb{R} = \mathcal{R}_M^- \cup \mathcal{R}_M^+ \cup \mathcal{R}_P^- \cup \mathcal{R}_P^+,$$
$$\mathcal{A}_n^\pm = \{M_n^\pm(x) : x \in \mathcal{R}_M^\pm, x \in I_n\}, \qquad \mathcal{B}_n^\pm = \{P_n^\pm(x) : x \in \mathcal{R}_P^\pm, x \in I_n\}.$$

Доказательство. Вначале оценим норму воспроизводящего ядра $\|k_\lambda\|$ через величины $M_n^\pm(\lambda)$, $P_n^\pm(\lambda)$.

Лемма 10.0.3. *Пусть $\lambda \in I_n^-$, тогда $\|k_\lambda\|^2 \asymp \max(M_n^-(\lambda)|\lambda - t_n|^{-2}, P_n^-(\lambda))$. Если $\lambda \in I_n^+$, то $\|k_\lambda\|^2 \asymp \max(M_n^+(\lambda)|\lambda - t_{n+1}|^2, P_n^+(\lambda))$.*

Доказательство. Из тождества (1.2.13) следует, что

$$\|k_\lambda\|^2 = \sum_l \frac{\mu_l}{|\lambda - t_l|^2} \asymp \sum_{|t_n - t_l| \le \lambda - t_n} + \sum_{|t_n - t_l| > \lambda - t_n} \asymp$$

$$\frac{M_n^-(\lambda)}{|\lambda - t_n|^2} + P_n^-(\lambda).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

Достаточность условий (10.0.1)

Мы докажем, что не существует бесселевой последовательности Λ с бесконечной верхней плотностью $\mathrm{UD}(\Lambda) = \infty$. Пусть Λ – такая последовательность. Положим,

$$\Lambda_M^- = \Lambda \cap \mathcal{R}_M^-, \quad \Lambda_M^+ = \Lambda \cap \mathcal{R}_M^+, \quad \Lambda_P^- = \Lambda \cap \mathcal{R}_P^-, \quad \Lambda_P^+ = \Lambda \cap \mathcal{R}_P^+.$$

Тогда верхняя плотность одной из последовательностей $\Lambda^{\pm}_{M \text{ или } P}$ бесконечна. Мы подробно рассмотрим случаи $\mathrm{UD}(\Lambda_M^-) = \infty$ и $\mathrm{UD}(\Lambda_P^-) = \infty$. Доказательства для двух оставшихся случаев аналогичны.

1. Пусть $\mathrm{UD}(\Lambda_M^-) = \infty$. Каждая из последовательностей $\mathcal{A}_n^-$ имеет конечный диадический размер. Причем все размеры равномерно ограничены по n. Следовательно, существует подмножество $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda_M^-$ такое, что

$$\mathrm{UD}(\tilde{\Lambda}) = \infty, \qquad M_n^-(\lambda_1) \asymp M_n^-(\lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \tilde{\Lambda} \cap I_n^-.$$

Положим,

$$\lambda_{\min}^n = \min(\tilde{\Lambda} \cap I_n), \quad \lambda_{\max}^n = \max(\tilde{\Lambda} \cap I_n), \quad m_n = \min\{s : t_n - t_s \le \lambda_{\min}^n - t_n\}.$$

Рассмотрим последовательность функций g_n,

$$g_n(z) = \sum_{m_n \le k \le n} \frac{\mu_k}{z - t_k}.$$

Легко видеть, что

$$\|g_n\|^2 = \sum_{m_n \le k \le n} \mu_k = M_n^-(\lambda_{\min}).$$

С другой стороны, если $\lambda \in \tilde{\Lambda} \cap I_n^-$, то

$$|g_n(\lambda)| \ge \sum \frac{\mu_k}{2|\lambda - t_n|} = \frac{M_n^-(\lambda_{\min})}{|\lambda - t_n|}.$$

Воспользовавшись леммой 10.0.3 и тем, что $\lambda \in \Lambda_M^-$, получаем

$$\|k_\lambda\|^2 \asymp \frac{M_n^-(\lambda)}{|\lambda - t_n|^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\lambda\in\tilde\Lambda_n}\frac{|g_n(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2}\gtrsim \#(\tilde\Lambda\cap I_n^-)\cdot\frac{[M_n^-(\lambda_{\min})]^2}{M_n^-(\lambda_{\max})}\gtrsim \#(\tilde\Lambda\cap I_n^-)\cdot M_n^-(\lambda_{\min}).$$

Применяя неравенство Бесселя к функциям g_n, получаем противоречие.

2. Пусть $\mathrm{UD}(\Lambda_P^-)=\infty$. Последовательность $\mathcal{B}_n^-$ имеет конечный диадический размер, равномерно ограниченный по n. Следовательно, существует подмножество $\tilde\Lambda\subset\Lambda_P^-$ такое, что

$$\mathrm{UD}(\tilde\Lambda)=\infty,\qquad P_n^-(\lambda_1)\asymp P_n^-(\lambda_2),\quad \lambda_1,\lambda_2\in\tilde\Lambda\cap I_n.$$

Для каждого n положим,

$$\lambda_{\min}^n=\min(\tilde\Lambda\cap I_n),\quad \lambda_{\max}^n=\max(\tilde\Lambda\cap I_n),\quad m_n=\max\{s: t_n-t_s>\lambda_{\max}-t_n\}.$$

Положим,

$$v_n(z)=\sum_{k\notin(m_n,n]}\frac{\mu_k}{(t_n-t_k)(z-t_k)}.$$

Легко видеть, что

$$\|v_n\|^2=P_n^-(\lambda_{\max}).$$

С другой стороны, если $\lambda\in\tilde\Lambda\cap I_n$, то $|v_n(\lambda)|\gtrsim P_n^-(\lambda)$ и

$$\|k_\lambda\|^2\asymp P_n^-(\lambda).$$

Таким образом,

$$\sum_{\lambda\in\tilde\Lambda_n}\frac{|v_n(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2}\gtrsim \#(\tilde\Lambda\cap I_n^-)\cdot\frac{[P_n^-(\lambda_{\max})]^2}{P_n^-(\lambda_{\min})}\gtrsim$$

$$\#(\tilde\Lambda\cap I_n^-)\cdot P_n^-(\lambda_{\max}).$$

Применяя неравенство Бесселя к функциям v_n, мы получаем противоречие.

Необходимость условий (10.0.1)

Докажем, что если хоть одно из условий (10.0.1) не выполнено, то существует бесселева последовательность с бесконечной верхней плотностью.

Пусть $\sup_n\mathcal{D}(\mathcal{A}_n^-)=\infty$. Тогда существуют последовательности $\Lambda_n=\{\lambda_1^{(n)},...,\lambda_{k_n}^{(n)}\}\subset\mathcal{R}_M^-\cap I_n$ (возможно, Λ_n определены не для всех индексов n) такие, что

$$k_n\to\infty,\quad M_n^-(\lambda_{l+1}^{(n)})\ge 2M_n^-(\lambda_l^{(n)}),\quad 0<l<k_n. \tag{10.0.2}$$

Дополнительно потребуем, чтобы $2t_k - t_l \notin \Lambda_n$ ни при каких k, l, n. Докажем, что последовательность $\cup_{n\in\mathcal{I}}\Lambda_n$ бесселева для достаточно редкой последовательности индексов $\mathcal{I}$. Для этого достаточно проверить, что последовательности Λ_n *равномерно бесселевы* (константа C в неравенстве (8.2.6) не зависит от n).

Предположим, что последовательности $\Lambda_n \subset I_n$ равномерно бесселевы. Будем считать, что последовательность интервалов $I_n = [t_{s_n}, t_{s_n+1}] \subset \mathbb{R}^+$ такова, что $t_{s_{n+1}} > 10t_{s_n+1}$ (в дальнейшем мы наложим еще некоторые условия на "редкость" системы интервалов I_n). Пусть $\tilde{I}_n \supset 1,5I_n$ – дизъюнктная система интервалов, $\tilde{I}_n = [c_n, d_n]$.

Пусть $f(z) = \sum_l \frac{a_l\mu_l^{1/2}}{z-t_l}$. Положим,

$$f(z) = \sum_{t_l\in\tilde{I}_n} \frac{a_l\mu_l^{1/2}}{z-t_l} + \sum_{t_l\notin\tilde{I}_n} \frac{a_l\mu_l^{1/2}}{z-t_l} =: f_n + g_n.$$

Тогда

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_n} \frac{|f(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2} \le 2\sum_{\lambda\in\Lambda_n} \frac{|f_n(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2} + 2\sum_{\lambda\in\Lambda_n} \frac{|g_n(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2}$$
$$\lesssim \sum_{t_l\in\tilde{I}_n} |a_l|^2 + \tag{10.0.3}$$
$$\left[\sum_l |a_l|^2\right] \cdot \sum_{\lambda\in\Lambda_n}\left(\frac{\mu(x:|x|\le c_n)}{|\lambda|^2} + \sum_{m:t_m>d_n \text{ или } t_m<-c_n} \frac{\mu_m}{t_m^2}\right)\|k_\lambda\|^{-2}.$$

Положим, $e_\lambda := \left(\frac{\mu(x:|x|\le c_n)}{|\lambda|^2} + \sum_{m:t_m>d_n \text{ или } t_m<-c_n} \frac{\mu_m}{t_m^2}\right)\|k_\lambda\|^{-2}$. Нетрудно проверить, что можно найти интервалы $\tilde{I}_n$ и подпоследовательность $\Lambda_1 \subset \cup_n\Lambda_n$ такие, что $\mathrm{UD}(\Lambda_1) = \infty$ и $\sum_n\sum_{\lambda\in\Lambda_1\cap I_n} e_\lambda < \infty$. Складывая неравенства (10.0.3), получаем, что последовательность Λ_1 бесселева.

Осталось доказать, что последовательности Λ_n равномерно бесселевы. Пусть $f \in \mathcal{H}(T,\mu)$. Это значит, что

$$f(z) = \sum_l \frac{a_l\mu_l^{1/2}}{z-t_l}, \quad \|f\|^2 = \sum_l |a_l|^2.$$

Проверим неравенство Бесселя для f и последовательности Λ_n. Вначале оценим величину $|f(\lambda_s)|^2\|k_{\lambda_s}\|^{-2}$, $1 \le s \le k_n$:

$$\frac{|f(\lambda_s)|^2}{\|k_{\lambda_s}\|^2} \lesssim \left[\sum_{2t_n-\lambda_s\le t_l\le t_n} |a_l|\mu_l^{1/2}\right]^2 \frac{1}{M_n^-(\lambda_s)} +$$

$$\left[\sum_{2t_n-\lambda_s\le t_l\le t_n}|a_l|\frac{\mu_l^{1/2}}{|t_n-t_l|}\right]^2\frac{|\lambda_s-t_n|^2}{M_n^-(\lambda_s)}.$$

Нам осталось доказать, что

$$\sum_{s=1}^{k_n-1}\frac{1}{M_n^-(\lambda_s)}\left[\sum_{2t_n-\lambda_s\le t_l\le t_n}|a_l|\mu_l^{1/2}\right]^2\lesssim\sum_n|a_n|^2 \tag{10.0.4}$$

и

$$\sum_{s=1}^{k_n-1}\frac{|\lambda_s-t_n|^2}{M_n^-(\lambda_s)}\left[\sum_{2t_n-\lambda_s\le t_l\le t_n}|a_l|\frac{\mu_l^{1/2}}{|t_n-t_l|}\right]^2\lesssim\sum_n|a_n|^2. \tag{10.0.5}$$

Докажем неравенство (10.0.4) при помощи двойственности

$$\sum_{s=1}^{k_n-1}\frac{1}{M_n^-(\lambda_s)}\left[\sum_{2t_n-\lambda_s\le t_l\le t_n}|a_l|\mu_l^{1/2}\right]^2=\sup_{\|c_s\|_2=1}\sum_{s=1}^{k_n-1}\sum_{2t_n-\lambda_s\le t_l\le t_n}a_lc_s[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\mu_l^{1/2}.$$

Достаточно доказать, что норма последовательности

$$\tau_l=\mu_l^{1/2}\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}c_s[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}$$

ограничена сверху абсолютной константой. Действительно,

$$|\tau_l|^2\lesssim\mu_l\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}|c_s|^2[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\cdot\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}.$$

Мы знаем, что

$$\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\asymp[M_n^-(\lambda_{l^*})]^{-1/2},$$

где l^* - минимальный индекс такой, что $|t_n-t_l|\le\lambda_{l^*}-t_n$. Далее,

$$\sum_l|\tau_l|^2\lesssim\sum_l\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}|c_s|^2[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\mu_l[M_n^-(\lambda_{l^*})]^{-1/2}=$$

$$=\sum_s|c_s|^2[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\sum_{2t_n-\lambda_s\le t_l\le t_n}\mu_l[M_n^-(\lambda_{l^*})]^{-1/2}.$$

Заметим, что

$$[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\sum_{2t_n-\lambda_s\le t_l\le t_n}\mu_l[M_n^-(\lambda_{l^*})]^{-1/2}\le$$

$$[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\int_0^{M_n^-(\lambda_s)} x^{-1/2}dx = 2.$$

Неравенство (10.0.4) полностью доказано.

Докажем неравенство (10.0.5). Вначале докажем, что последовательность $P_n^-(\lambda_s)$ убывает как геометрическая прогрессия

$$P_n^-(\lambda_s) = \sum_{l:\lambda_s - t_n < |t_n - t_l| \le \lambda_{s+1} - t_n} \frac{\mu_l}{|t_n - t_l|^2} + P_n^-(\lambda_{s+1}) \ge$$

$$\frac{M_n^-(\lambda_{s+1}) - M_n^-(\lambda_s)}{|t_n - \lambda_{s+1}|^2} + P_n^-(\lambda_{s+1}) \ge \frac{3}{2}P_n^-(\lambda_{s+1}).$$

Заметим, что

$$\sum_{s=1}^{k_n-1}\frac{|\lambda_s - t_n|^2}{M_n^-(\lambda_s)}\Big[\sum_{2t_n - \lambda_s \le t_l \le t_n}|a_l|\frac{\mu_l^{1/2}}{|t_n - t_l|}\Big]^2 \le$$

$$\sum_{s=1}^{k_n-1}P^-(\lambda_s)\Big[\sum_{2t_n - \lambda_s \le t_l \le t_n}|a_l|\frac{\mu_l^{1/2}}{|t_n - t_l|}\Big]^2.$$

Последнюю сумму оценим так же, как в доказательстве неравенства (10.0.4).

Оставшиеся случаи $\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^{\pm}) = \infty$, $\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^{+}) = \infty$ доказываются аналогично. Теорема 1.4.2 полностью доказана. $\square$

Заключительные замечания

Используя методы этой главы, можно доказать количественный аналог теоремы 1.10.3.

Теорема 10.0.4. *Если $\{V_n\}_{n>0}$ – положительная возрастающая последовательность и*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_n^{\pm}) \le V_n, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^{\pm}) \le V_n,$$

то для любой бесселевой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}$ верна оценка

$$\#(\Lambda \cap I_n) \lesssim V_n.$$

Для доказательства достаточно повторить наши рассуждения.

Пусть μ – произвольная мера Кларка пространства $\mathcal{H}(E)$, $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$. Положим, $\tilde{\mu} = \sum_{k\ge 0} v_k \delta_{2^k}$, где

$$v_0 = \mu([-1,1)), \quad v_k = \mu([2^{k-1}, 2^k)) + \mu([-2^{|k|}, 2^{-|k|-1})), \quad k > 0.$$

Теорема 10.0.5. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – произвольное пространство де Бранжа со спектральной мерой μ. Тогда последовательность $\Lambda \subset i\mathbb{R}$ бесселева в*

$\mathcal{H}(E)$ *тогда и только тогда, когда она бесселева в пространстве де Бранжа* $\mathcal{H}(E_1)$, *построенном по спектральной мере* $\tilde{\mu}$.

Эту теорему можно доказать, действуя так же, как в главе 2 при доказательстве теоремы 1.2.2.

Отметим, что носитель меры $\tilde{\mu}$ лакунарен, поэтому все бесселевы последовательности в соответствующих пространствах описываются теоремой 1.2.2.

Глава 11. Дополняемость систем из экспонент. Заключительные замечания

В этой главе мы докажем теоремы 1.11.2 и 1.1.1.

Доказательство теоремы 1.11.2

Для того чтобы упростить изложение, мы вначале докажем теорему 1.11.1. Доказательство теоремы 1.11.2 аналогично. Напомним формулировку теоремы 1.11.1.

Теорема 11.0.6. *Если $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – неполная система в $L^2(-\pi,\pi)$, то существует последовательность $S\subset\mathbb{R}$, $\Lambda\cap S=\emptyset$ такая, что система $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda\cup S}$ полна и минимальна в $L^2(-\pi,\pi)$.*

Следующий результат хорошо известен (см., например, теорему 4 в лекции 18 [76]).

Утверждение 11.0.7. *Система $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ полна и минимальна в $L^2(-\pi,\pi)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

(i) произведение

$$G(z):=\lim_{R\to\infty}\prod_{|\lambda|<R}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right) \tag{11.0.1}$$

сходится к целой функции G;

(ii) для некоторого (любого) $\lambda\in\Lambda$ $\frac{G(z)}{z-\lambda}\in\mathcal{P}W_\pi$;

(iii) не существует нетривиальной целой функции T такой, что $GT\in\mathcal{P}W_\pi$.

Если система $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ неполна, то произведение (11.0.1) может расходиться. Но, так как Λ удовлетворяет условию Бляшке $\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{|\lambda|^2}<\infty$, произведение

$$G_\Lambda(z):=\prod_{\lambda\in\Lambda}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)e^{\Re(\lambda^{-1})z} \tag{11.0.2}$$

сходится. Функция G_Λ такова, что $\dfrac{G(z)}{\overline{G(\bar z)}}$ - отношение двух произведений Бляшке в $\mathbb{C}^+$.

Пусть $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – неполная система в $L^2(-\pi,\pi)$, а G_Λ каноническое произведение (см. (11.0.2)).

Положим,

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}:=\{T: T-\text{ целая, и }\quad G_\Lambda T\in\mathcal{P}W_\pi\}.$$

Легко проверить, что $\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ – нетривиальное гильбертово пространство целых функций (по отношению к норме, унаследованной из пространства Пэли–Винера).

Утверждение 11.0.8. *Пусть система* $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ *неполна в* $L^2(-\pi,\pi)$. *Тогда система* $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda\cup S}$ *полна и минимальна в* $L^2(-\pi,\pi)$ *тогда и только тогда, когда множество* S *– минимальное множество единственности в* $\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ *(т.е.* S *– множество единственности, а* $S\setminus\{s_0\}$ *не является множеством единственности для некоторого (любого)* $s_0\in S$*).*

Нам осталось доказать, что в пространстве $\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ существует минимальное множество единственности.

Мы докажем, что $\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ – пространство де Бранжа (существует функция E из класса Эрмита–Билера такая, что $\mathcal{H}(E)=\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$). Предположим, что это доказано.

Легко видеть, что для любой точки $w\in\mathbb{C}$ существует $F\in\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ такая, что $F(w)\neq 0$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\{z : A(z)=0\}\cap\Lambda=\emptyset$ (мы можем выбрать подходящее α в теореме 22 [53]). Положим, $S=\{z : A(z)=0\}$. Из утверждения 11.0.8 мы получаем, что система $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda\cup S}$ полна и минимальна в $L^2(-\pi,\pi)$.

Для того чтобы доказать, что $\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ – пространство де Бранжа, мы проверим, что $\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ удовлетворяет аксиомам (A1)–(A3) из параграфа 1.1.5.

Пусть G_Λ – каноническое произведение из (11.0.2).

(A2). Для любой точки $w\in\mathbb{C}$ функционал вычисления значения в точке $F\mapsto F(w)$ – ограниченный линейный функционал в $\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$. Действительно, если $w\notin\Lambda$, то

$$|F(w)|=|G_\Lambda(w)F(w)/G_\Lambda(w)|\le|G_\Lambda(w)|^{-1}\|G_\Lambda F\|_{\mathcal{P}W_\pi}\cdot\|k_w^{\mathcal{P}W_\pi}\|$$

$$=|G_\Lambda(w)|^{-1}\|F\|_{\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}}\cdot\|k_w^{\mathcal{P}W_\pi}\|.$$

Если $w\in\Lambda$, то мы воспользуемся формулой $F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(w+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$ и применим ту же оценку.

(A1). Если $F\in\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ и $F(w)=0$, то $F(z)\frac{z-\bar{w}}{z-w}\in\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$ и $\|F(z)\frac{z-\bar{w}}{z-w}\|=\|F\|$.

(A3). Если $F\in\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$, то $F^*\in\mathcal{H}_{\Lambda,\pi}$. Действительно, если $G_\Lambda F\in\mathcal{P}W_\pi$, то $G_\Lambda^*F^*\in\mathcal{P}W_\pi$. Так как $\dfrac{G_\Lambda}{G_\Lambda^*}$ – отношение двух произведений Бляшке, мы получаем, что $G_\Lambda F^*\in\mathcal{P}W_\pi$. $\square$

Точные системы в пространстве де Бранжа

Докажем теперь теорему 1.11.2.

Теорема 11.0.9. *Если* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– неполная система в пространстве де Бранжа* $\mathcal{H}(E)$, *то существует последовательность* $S\subset\mathbb{R}$, $\Lambda\cap S=\emptyset$ *такая, что система* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\cup S}$ *полна и минимальна в* $\mathcal{H}(E)$.

Доказательство. Положим,

$$\mathcal{H}_{\Lambda_1,\mathcal{H}(E)} := \{T : T - \text{ целая, и } G_{\Lambda_1}T \in \mathcal{H}(E)\}.$$

Теперь мы можем завершить доказательство так же, как доказательство теоремы 1.11.1. □

Замечание 11.0.1. *Хорошо известно, что не существует функции $F \in \mathcal{P}W_\pi \setminus \{0\}$ с нулями только на вещественной оси. С другой стороны, множество $\{z : F(z) = 0\}$ должно удовлетворять условию Бляшке. Следовательно, система $\{e^{nt}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ полна в $L^2(-\pi,\pi)$ и не содержит полной и минимальной подсистемы.*

Доказательство теоремы 1.1.1

Теорема 1.1.1 следует из следующего утверждения.

Утверждение 11.0.10. *Если дискретное преобразование Гильберта*

$$\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$$

– унитарный оператор из ℓ^2 в ℓ^2_w, то $T \cup \Lambda$ – подмножество окружности или прямой в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Обозначим за $e^{(n)}$ стандартный ортонормированный базис в ℓ^2. Таким образом, $e^{(n)} = (0, ..., 1, 0, ...)$.

Зафиксируем индекс m и рассмотрим функцию

$$A(z) = (z - t_m)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j}{(\overline{\lambda_j} - \overline{t_m})(\lambda_j - z)}.$$

Так как оператор $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ унитарен, образы векторов $e^{(n)}$ образуют ортогональный базис в ℓ^2_w. Следовательно, A обнуляется на T.

Тогда, вычитая ряды для $A(z)$ и $A(t_n)$, мы получаем, что

$$A(z) = A(z) - A(t_n) = (z - t_n)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j(\lambda_j - t_m)}{(\overline{\lambda_j} - \overline{t_m})(\lambda_j - t_n)(\lambda_j - z)}.$$

Таким образом, функция

$$\frac{A(z)}{z - t_n} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j(\lambda_j - t_m)}{(\overline{\lambda_j} - \overline{t_m})(\lambda_j - t_n)(\lambda_j - z)}$$

обращается в ноль, если $z \in T \setminus \{t_n\}$.

Так как оператор $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}$ унитарен, множество векторов $\mathcal{H}_{(T,\mu):(\Lambda,w)}e^{(n)}$ – ортонормированный базис в $\ell^2(\Lambda, w)$.

Следовательно, последовательность

$$\left(\frac{\lambda_j - t_m}{\overline{\lambda_j} - \overline{t_m}} \cdot \frac{1}{\lambda_j - t_n}\right)_j$$

отличается только на скалярный множитель от последовательности $(1/(\overline{\lambda_j} - \overline{t_n}))_j$. Таким образом, аргументы комплексных чисел $(\lambda_j - t_m)^2/(\lambda_j - t_n)^2$ совпадают. Следовательно, для $j \neq l$ и $m \neq n$, верно, что

$$\left(\frac{(\lambda_j - t_m)(\lambda_l - t_n)}{(\lambda_j - t_n)(\lambda_l - t_m)}\right)^2 > 0.$$

Другими словами, двойное отношение четырех комплексных чисел λ_j, λ_l, γ_n и γ_m вещественно. Мы получаем, что эти четыре комплексных числа лежат на одной прямой или окружности.

Повторяя эти рассуждения для четырех произвольных точек (например, λ_1, λ_2, γ_1, γ_2), мы получаем, что каждая точка из множества $T \cup \Lambda$ лежит на прямой или окружности, определенной первыми четырьмя точками.

Действительно, мы можем рассмотреть произвольную точку из $T \cup \Lambda$ вместе с любыми тремя точками из множества $\{\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2\}$. $\square$

Заключительные замечания и открытые вопросы

Отметим, что многие (но не все!) результаты диссертации о пространствах де Бранжа могут быть обобщены на пространства целых функций класса $\mathfrak{R}$.

Большинство результатов диссертации могут быть рассмотрены как факты из теории операторов. Точнее, как свойства систем собственных и присоединенных векторов одномерных возмущений самосопряженных операторов (см. обсуждение в [35]). Например, теорему 1.6.3 можно интерпретировать как теорему о свойствах собственных функций уравнения Шредингера на отрезке с нелокальным граничным условием.

Методы главы 2 позволяют описать базисы Рисса из воспроизводящих ядер не только для малых пространств де Бранжа, но и для некоторых других классов пространств (например, если точки t_n расположены в кластерах, расстояние между которыми велико).

В заключение мы поставим несколько вопросов, которые остались открытыми.

Вопрос 11.0.11. *Верно ли, что любая наследственно полная система экспонент в $L^2(-\pi,\pi)$ является базисом суммирования (т.е. у соответствующего ряда Фурье есть линейный метод суммирования)?*

Возможно, ответ на этот вопрос может быть получен, если построить наследственно полную систему, не удовлетворяющую условию 2-аппроксимации.

Вопрос 11.0.12. *Можно ли описать все "дефектные" вектора (т.е вектора, ортогональные к некоторой смешанной системе) хотя бы в пространстве Пэли–Винера?*

Отметим, что из доказательства теоремы 1.4.2 можно извлечь некоторое необходимое условие. Неясно, является ли оно достаточным.

Вопрос 11.0.13. *Можно ли описать все разбиения $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$, которые порождают неполную смешанную систему? Обладает ли множество таких разбиений хоть какой-нибудь связностью или упорядоченностью?*

Отметим, что перекидывание конечного числа точек из Λ_1 в Λ_2 сохраняет размерность ортогонального дополнения к смешанной системе.

Вопрос 11.0.14. *Какие условия (кроме условий макенхауптовского типа) надо наложить на порождающую функцию G, чтобы гарантировать наследственную полноту системы в пространстве Пэли–Винера? Можно ли описать все такие функции G?*

Нетрудно показать, что, если условие Макенхаупта выполнено на большей части вещественной оси, то соответствующая система наследственно полна (надо немного модифицировать доказательство утверждения 6.2.1).

Вопрос 11.0.15. *Существуют ли в пространстве Фока ненаследственно полные системы из воспроизводящих ядер?*

Напомним, что в пространстве Фока нет базиса Рисса из воспроизводящих ядер. Поэтому методы главы 4 напрямую неприменимы. С другой стороны, в главе 9 удалось доказать полноту биортогональной системы в случае, когда базиса Рисса нет.

Вопрос 11.0.16. *Можно ли описать в геометрических терминах регулярные пространства де Бранжа такие, что гамильтониан состоит из неделимых интервалов, сгущающихся только вправо или и вправо и влево?*

Отметим, что одна цепочка неделимых интервалов, сгущающихся вправо, соответствует ситуации, когда полиномы лежат в пространстве де Бранжа и полны там.

Вопрос 11.0.17. *Имеет ли место упорядоченность аттракторов для произвольного пространства класса $\mathfrak{R}$?*

Пусть мера $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ такова, что $\sum_n \frac{1}{|t_n|} < \infty$. Тогда упорядоченность аттракторов в пространстве $\mathcal{H}(T, \mu)$ может быть доказана теми же методами, что и в главе 7. (Мы неявно предполагаем, что в пространстве есть локализация).

Вопрос 11.0.18. *Можно ли описать все системы экспонент $\mathcal{E}(\Lambda)$ такие, что формальный ряд Фурье суммируем по Чезаро?*

Отметим, что можно построить пример такой системы, не являющейся базисом Рисса.

Литература

1. Н. Ахиезер. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси. // УМН. 1956. Т. 11. С. 3–43.
2. Ю. Белов. Критерии допустимости мажорант для модельных подпространств с быстро растущим аргументом порождающей внутренней функции. // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2007. Т. 345. С. 55–84.
3. Ю. Белов. Необходимые условия допустимости мажорант для некоторых модельных подпространств. // Алгебра и Анализ. 2008. Т. 20. №4. С. 1–26.
4. Ю. Белов. Модельные функции с почти предписанным модулем. // Алгебра и Анализ. 2008. Т. 20. №2. С. 3–18.
5. Ю. Белов. Последовательности Бесселя с конечной верхней плотностью в пространствах де Бранжа. // Алгебра и Анализ. 2015. Т. 27. №4. С. 15–27.
6. В. Васюнин. Базисы из собственных подпространств и неклассические интерполяционные задачи. // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. №4. С. 65–66.
7. Дж. Гарнетт. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
8. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
9. Г. Губреев, А. Тарасенко. Спектральное разложение модельных операторов в пространствах де Бранжа. // Матем. сб. 2010. Т. 201. №11. С. 41–76.
10. Л. Довбыш, Н. Никольский. Два способа избежать наследственной полноты. // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 65. С. 183–188.
11. Л. Довбыш, Н. Никольский, В. Судаков. Насколько хорошим может быть ненаследственно полное семейство? // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 73. С. 52—69.
12. П. Кусис. Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984.
13. А. Маркус. Задача спектрального синтеза для операторов с точечным спектром. // Изв. АН СССР. 1970. Т. 34. №3. С. 662–688.
14. С. Мергелян. Весовые приближения многочленами. // УМН. 1956. Т. 11. С. 107–152.
15. А. Минкин. Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент. // Алгебра и Анализ. 1991. Т. 3. №5. С. 109–134.
16. Н. Никольский. Лекции об операторе сдвига. М.: Мир, 1980.
17. Н. Никольский. Полные расширения вольтерровых операторов. // Изв. АН СССР. 1969. Т. 33. №6. С. 1349–1353.

18. Н.Никольский, Б. Павлов, С. Хрущев. Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. // Комплексный анализ и спектральная теория (Ленинград, 1979/1980). С. 214–335.
19. Б. Павлов. Базисность системы экспонент и условие Макенхаупта. // ДАН. 1979. Т. 247. С. 37–40.
20. E. Abakumov, A. Baranov, Y. Belov. Localization of zeros for Cauchy transforms. // Int. Math. Res. Notices. 2015. Vol. 2015. P. 6699–6733.
21. A. Aleman, A. Baranov, Y. Belov. Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation. // Journal of Functional Analysis. 2015. Vol. 268. P. 2421–2439.
22. A. Aleman, B. Korenblum. Derivation-invariant subspaces of C^∞. // Comput. Methods Funct. Theory. 2008. Vol. 8. no. 2. P. 493–512.
23. A. Atzmon, A. Olevskii. Completeness of integer translates in Function Spaces on $\mathbb{R}$. // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 83. no. 3. P. 291–327.
24. G. Ascenzi, Y. Lyubarskii, K. Seip. Phase space distribution of Gabor expansions. // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2009. Vol. 26. P. 277–282.
25. E. Azoff, H. Shehada. Algebras generated by mutually orthogonal idempotent operators. // J. Oper. Theory. 1993. Vol. 29. no. 2. P. 249–267.
26. A. Bakan. Representation of measures with polynomial denseness in $L^p(\mathbb{R}, d\mu)$, $0 < p < \infty$ and its application to determinate moment problems. // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136. no.10. P. 3579–3589.
27. A. D. Baranov. Stability of bases and frames of reproducing kernels in model subspaces. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2005. Vol. 55. P. 2399–2422.
28. A. Baranov, Y. Belov. Systems of reproducing kernels and their biorthogonal: completeness or incompleteness? // Int. Math. Res. Notices. 2011. Vol. 2011. no. 22. P. 5076–5108.
29. A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev. Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels. // Adv. Math. 2013. Vol. 235. P. 525–554.
30. A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev. Spectral synthesis in de Branges spaces. // Geom. Funct. Anal. 2015. Vol. 25. no. 2. P. 417–452.
31. A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev. A restricted shift completeness problem. // J. Funct. Anal. 2012. Vol. 263. P. 1887–1893.
32. A. Baranov, Y. Belov, A.Borichev, D. Yakubovich. Recent developments in spectral synthesis for exponential systems and for non-selfadjoint operators. // Recent Trends in Analysis (Proceedings of the conference in honor of Nikolai Nikolski). Theta Foundation, Bucharest. 2013. P. 17–34.
33. A. Baranov, A. Borichev, V. Havin. Majorants of meromorphic functions with fixed poles. // Indiana Univ. Math. J. 2007. Vol. 45. no. 4. P. 1595–628.

34. A. Baranov, H. Woracek. De Branges' theorem on approximation problems of Bernstein type. // J. Inst. Math. Jussieu. 2013. Vol. 12. no. 4. P. 879–899.
35. A. Baranov, D. Yakubovich. Completeness and spectral synthesis of non-selfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators. // arXiv:1212.5965.
36. A. Baranov, A. Dumont, A. Hartmann, K. Kellay. Sampling, interpolation and Riesz bases in small Fock spaces. // J. Math. Pures Appl. 2015. Vol. 103. no. 6. P. 1358–1389.
37. Y. Belov. Uniqueness of Gabor series. // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2015. Vol. 39. P. 545–551.
38. Y. Belov. Complementability of exponential systems. // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2015. Vol. 353. P. 215–218.
39. Y. Belov, V. Havin. The Beurling–Malliavin Multiplier Theorem and its analogs for the de Branges spaces. // Springer series: Operator theory, ed. Alpay. 2015. Vol. 1. P. 581–609.
40. Y. Belov, Y. Lyubarskii. On summation of non-harmonic Fourier series. // Constructive Approximation. (опубликовано онлайн) DOI:10.1007/s00365-015-9290-6
41. Y. Belov, T. Mengestie, K. Seip. Unitary discrete Hilbert transforms. // J. Anal. Math. 2010. Vol. 112. P. 383–395.
42. Y. Belov, T. Mengestie, K. Seip. Discrete Hilbert transforms on sparse sequences. // Proc. Lond. Math. Soc. 2011. Vol. 103. no.3. P. 73–105.
43. A. Beurling and P. Malliavin. On the closure of characters and the zeros of entire functions. // Acta Math. 1967. Vol. 118. P. 79–93.
44. A. Borichev, R. Dhuez, K. Kellay. Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces. // J. Funct. Anal. 2007. Vol. 242. P. 563–606.
45. A. Borichev, Y. Lyubarskii. Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces. // J. Inst. Math. Jussieu. 2010. Vol. 9. P. 449–461.
46. A. Borichev, M. Sodin. Weighted polynomial approximation and the Hamburger moment problem. // Complex Analysis and Differential Equations (Proceedings of the Marcus Wallenberg Symposium in Honor of Matts Essen), Uppsala University. 1998.
47. A. Borichev, M. Sodin. The Hamburger moment problem and weighted polynomial approximation on discrete subsets of the real line. // J. Anal. Math. 1998. Vol. 76. P. 219–264.
48. A. Borichev, M. Sodin. Weighted exponential approximation and non-classical orthogonal spectral measures. // Adv. Math. 2011. Vol. 226. P. 2503–2545.
49. L. de Branges. Some Hilbert spaces of entire functions. // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 96. P. 259–295.

50. L. de Branges. Some Hilbert spaces of entire functions II. // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 99. P. 118–152.
51. L. de Branges. Some Hilbert spaces of entire functions III. // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 100. P. 73–115.
52. L. de Branges. Some Hilbert spaces of entire functions IV. // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 105. P. 43–83.
53. L. de Branges. Hilbert Spaces of Entire Functions. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1968.
54. J. Bruna, A. Olevskii, A. Ulanovskii. Completeness in $L^1(\mathbb{R})$ of discrete translate. // Rev. Mat. Iberoamericana. 2006. Vol. 22. no.1. P. 1–6.
55. J. Buckley, X. Massaneda, J. Ortega-Cerda. Traces of functions in Fock spaces on lattices of critical density. // Bull. London Math. Soc. 2012. Vol. 44. P. 222–240.
56. D.N. Clark. One-dimensional perturbations of restricted shifts. // J. Anal. Math. 1972. Vol. 25. P. 169–191.
57. W. Cohn. Carleson measures for functions orthogonal to invariant subspaces. // Pacific J. Math. 1982. Vol. 103. P. 347–364.
58. D. Deckard, C. Foias, C. Pearcy. Compact operators with root vectors that span. // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 76. no. 1. P. 101–106.
59. J. Delsarte. Les fonctions moyenne-périodiques. // J. Math. Pures Appl. 1935. Vol. 14. P. 403–453.
60. G. Folland. Harmonic Analysis in Phase Space. Ann. of Math. Stud. vol. 122. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
61. E. Fricain. Complétude des noyaux reproduisants dans les espaces modeles. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2002. Vol. 52. no.2. P. 661–686.
62. K. Gŕochenig. Foundations of Time-Frequency Analysis. Birkh́auser, Boston, MA, 2001.
63. P. Hájek, V. Montesinos Santalucia, J. Vanderwerff, V. Zizler. Biorthogonal Systems in Banach Spaces. CMS Books in Mathematics, Canadian Mathematical Society, Springer–Verlag, 2008.
64. H. Hamburger. Über die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen. // Math. Nachr. 1951. Vol. 4. P. 56–69.
65. H. Hamburger. Hermitian transformations of defeciency index $(1,1)$, Jacobi matrices and undetermined moment problem. // Amer. J. Math. 1944. Vol. 66. P. 489–522.
66. V. Havin, B. Jöricke. The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
67. V. Havin, J. Mashreghi. Admissible majorants for model subspaces of H^2. Part 1: slow winding of the generating inner function. // Can. J. Math. 2003. Vol. 55. no. 6. P. 1231–1263.

68. V. Havin, J. Mashreghi. Admissible majorants for model subspaces of H^2. Part 2: fast winding of the generating inner function. // Can. J. Math. 2003. Vol. 55. no. 6. P. 1264–1301.
69. J-P. Kahane. Sur quelques problémes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1953–1954. Vol. 5. P. 39–130.
70. A. Katavolos, M. Lambrou, M. Papadakis. On some algebras diagonalized by M-bases of ℓ^2. // Integr. Equat. Oper. Theory. 1993. Vol. 17. no. 1. P. 68–94.
71. P. Koosis. The Logarithmic Integral. I. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
72. P. Koosis. Mesures orthogonales extrémales pour l'approximation pondéree par des sommes d'exponentielles imaginaires. // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 1990. Vol. 311. P. 161–164.
73. M. Lacey, E. Sawyer, C. Shen, I. Uriarte-Tuero. Two-weight inequality for the Hilbert transform: A real variable characterization, I. // Duke Math. J. 2014. Vol. 163. no.15. P. 2795–2820.
74. M. Lacey. Two-weight inequality for the Hilbert transform: A real variable characterization, II. // Duke Math. J. 2014. Vol. 163. no.15. P. 2821–2840.
75. D. Larson, W. Wogen. Reflexivity properties of $T \oplus 0$. // J. Funct. Anal. 1990. Vol. 92. no. 2. P. 448–467.
76. B. Levin. Lectures on Entire Functions. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 150. AMS, Providence, RI, 1996.
77. Y. Lyubarskii and K. Seip. Weighted Paley-Wiener spaces. // J. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 15. P. 979–1006.
78. Y. Lyubarskii, K. Seip. Complete interpolating sequences for Paley–Wiener spaces and Muckenhoupt's (A_p) condition. // Rev. Mat. Iberoamericana. 1997. Vol. 13. no. 2. P. 361–376.
79. N. Makarov, A. Poltoratski. Meromorphic inner functions, Toeplitz kernels and the uncertainty principle. // Perspectives in Analysis, Math. Phys. Stud. Springer, Berlin. 2005. Vol. 27. P. 185–252.
80. M.Mitkovski, A.Poltoratski. Polya sequences, Toeplitz kernels and gap theorems. // Adv. Math. 2010. Vol. 224. P. 1057–1070.
81. A. Nakamura. Basis properties and complements of complex exponential systems. // Hokkaido Math. J. 2007. Vol. 36. no. 1. P. 193–206.
82. N. Nikolski. Operators, Functions and Systems: an Easy Reading. Vol. 1. Math. Surveys Monogr. Vol. 92. AMS, Providence, RI, 2002.
83. N. Nikolski. Operators, Functions and Systems: an Easy Reading. Vol. 2. Math. Surveys Monogr. Vol. 93. AMS, Providence, RI, 2002.
84. A. Olevskii. On spectrum-preserving approximation. // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1990. Vol. 1. P. 32–36 (Russian); English transl.: Soviet Math. Dokl. 1990. Vol. 41. no. 2. P. 215–218.

85. A. Poltoratski. Bernstein's problem on weighted polynomial approximation. // arXiv:1110.2540, to appear in Proc. of Abel Symposium, Oslo, 2012.
86. A. Poltoratski. A problem on completeness of exponentials. // Ann. Math. 2013. Vol. 178. no. 3. P. 983–1016.
87. R. Romanov. Canonical systems and de Branges spaces. // http://arxiv.org/abs/1408.6022.
88. R. Romanov. Order problem for canonical systems and a conjecture of Valent. // http://arxiv.org/abs/1502.04402, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
89. L. Schwartz. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. // Ann. of Math. 1947. Vol. 48. P. 857–929.
90. L. Schwartz. Etude des sommes d'exponentielles. 2nd ed. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, V. Actualités Sci. Ind., Hermann, Paris, 1959.
91. K. Seip. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space, I. // J. Reine Angew. Math. 1992. Vol. 429. P. 91–106.
92. K. Seip. On the connection between exponential bases and certain related sequence in $L^2[-\pi,\pi]$. // J. Funct. Anal. 1995. Vol. 130. P. 131–160.
93. P. Terenzi. Every separable Banach space has a bounded strong norming biorthogonal sequence which is also a Steinitz basis. // Studia Math. 1994. Vol. 111. P. 207–222.
94. P. Terenzi. A positive answer to the basis problem. // Israel J. Math. 1998. Vol. 104. P. 51–124.
95. R. Vershynin. On constructions of strong and uniformly minimal M-bases in Banach spaces. // Arch. Math. 2000. Vol. 74. P. 50–60.
96. R. Young. On complete biorthogonal system. // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 83. no. 3. P. 537–540.
97. R. Zalik. On approximation by shifts and a theorem of Wiener. // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 243. P. 299–308.