САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Басок Михаил Константинович

О некоторых локусах вырождений на пространствах модулей

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Зограф П. Г.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020

Оглавление

Глава 1. Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Современное представление о пространстве модулей римановых поверхностей $\mathcal{M}_g$ было заложено в работах Мамфорда 1960х годов. В 1965 году вышла книга [53], в которой впервые была описана конструкция $\mathcal{M}_g$ как алгебраического многообразия. На основании этой конструкции были построены многие другие пространства модулей, например, пространство модулей спинорных кривых $\mathcal{S}_g$ или пространство модулей абелевых, и, более общо, k-дифференциалов (см. [3]). Интерес к таким пространствам приходит из попыток лучше понять геометрию самих пространств модулей, а также из различных областей математики и физики, в которых пространства модулей естественным образом возникают (см., например, [18], [38], [31]).

Одним из классических направлений исследования пространств модулей является исследование групп Пикара этих пространств. В качестве причины отдельного интереса к этому бирациональному инварианту можно привести знаменитую работу Харриса и Мамфорда [28], в которой показано, что компактифицированное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_g$ имеет общий тип при $g \geq 24$, то есть канонический класс этого пространства обилен. Для того, чтобы это показать, авторы представляют канонический класс в виде линейной комбинации некоторых эффективных дивизоров на $\overline{\mathcal{M}}_g$ и класса Ходжа, обильность которого известна. Это становится возможным после того, как авторы с помощью явных вычислений показывают, что на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_g$ существует дивизор с достаточно маленьким наклоном. Благодаря схожей технике позже удалось доказать, что пространство модулей нечетных спинорных кривых $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}}$ имеет общий тип при $g \geq 12$ (см. [21]), а пространство модулей четных спинорных кривых $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}}$ имеет общий тип при $g \geq 9$ (см. [20]).

Широкий интерес к пространствам модулей привел к возникновению большого спектра методов их изучения, как алгебраических, так и аналитических. Как правило, для вычислений в группах Пикара пространств модулей применяются алгебраические методы, такие, как теория пересечений (см., например, [28], [1], [21]) или же формулы Портеуса и Гротендика–Римана–Роха. Однако, в течение последних десяти лет Зограф, Короткин и соавторы представили серию работ, в которых различные соотношения в группах Пикара выводятся из асимптотик тау-функции Бергмана (см. [39], [44], [45], [43], [46]). Ключевой идеей этих работ является наблюдение, что модулярные свойства тау-функции Бергмана, построенной как часть голоморфной факторизации дзета-регуляризованного оператора Лапласа [38], позволяют интерпретировать ее как сечение некоторого естественного линейного расслоения на пространстве модулей.

Формулы, полученные в вышеупомянутой серии работ, были ранее неизвестны и потому вызвали к себе интерес со стороны алгебраических геометров. Некоторые соотношения были передоказаны с использованием чисто алгебраических методов, например, в работах [23] и [8].

Результаты диссертации являют собой продолжение исследования в вышеописанном направлении.

Цели и задачи работы. В данной работе решено несколько задач. Во-первых, мы показываем, как, используя методы, разработанные Зографом и Короткиным, можно построить аналитическое доказательство формул, полученных Фаркашем для классов дивизора тэта-характеристик с вырожденными нулями [21] и дивизора тэта-нуль в рациональной группе Пикара $\overline{\mathcal{S}}_g$ [20]. Такое доказательство ранее не было известно и представляет отдельный интерес.

Во-вторых, мы вводим в рассмотрение новые дивизоры на пространстве модулей нечетных спинорных кривых $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$: дивизор каустики и дивизор базовых точек. Для того, чтобы лучше понять их структуру, мы исследуем две серии локусов вырождений над пространством $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$. Мы описываем касательное пространство к этим локусам во внутренних терминах, а также некоторые другие их локальные свойства. В завершение мы анонсируем разложения дивизоров каустики и базовых точек через стандартные образующие $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$.

В третьих, мы развиваем алгебро-геометрический подход к соотношениям, полученным в [46]. В результате мы не только предлагаем чисто алгебраическое доказательство этих соотношений, но получаем новые соотношения, из которых немедленно следуют предыдущие.

Научная новизна. Все основные результаты настоящей диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для исследования бирациональных свойств пространств модулей, для получения новых соотношений в группах Пикара и для дальнейшего исследования геометрии различных локусов вырождений. Также материалы диссертации могут быть использованы в методических целях.

Методология и методы исследования. Для получения результатов, изложенных в Главе 3, мы анализируем поведение тау-функции Бергмана на пространстве модулей абелевых дифференциалов с нулями четной кратности. Также, мы используем стандартное представление сечений тэта-характеристик как некоторого выражения от тэта-функции Римана с соответствующей характеристикой. Анализируя асимптотики этих объектов, мы получаем заявленные результаты.

В Главе 4 мы описываем касательные пространства к некоторым схемам вырождений, используя отображение Гаусса–Валя. Изначально эта идея была мотивирована некоторыми аналитическими соображениями. Также Глава 4 содержит вычисление геометрической кратности неприведенных компонент рассматриваемых локусов. Это вычисление получается как следствие некоторых общих геометрических лемм, доказанных автором.

В Главе 5 мы предлагаем разложение каждой компоненты дивизора универсального дискриминанта через стандартные образующие рациональной группы Пикара пространства модулей спектральных накрытий Хитчина. Для этого мы анализируем дискриминант произвольного монического многочлена. Мы получаем некоторое разложение для этого дискриминанта и, используя это разложение, мы представляем каждый из рассматриваемых локусов как локус нулей некоторого морфизма расслоений. Затем мы вычисляем классы этих расслоений с помощью стандартных фактов из теории пересечений на пространстве модулей. Также в этой главе мы связываем два класса Ходжа на вышеуказанном пространстве. Для вывода соответствующей формулы используется формула Гротендика–Римана–Роха и некоторые другие соотношения.

Положения, выносимые на защиту. Данная диссертация основана на следующих трех результатах:

- *Аналитический вывод соотношений Фаркаша.* При помощи аналитических методов выводятся соотношения для классов $[\overline{\Upsilon}_g]$ и $[\Theta_{\mathrm{null}}]$ в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}})\otimes\mathbb{Q}$ и $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}})\otimes\mathbb{Q}$ соответственно. Первое соотношение выводится из свойств тау-функции Бергмана, второе соотношение выводится при помощи стандартного анализа тэта-функции.

- *Локусы вырождений на пространстве $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$.* Рассматриваются следующие локусы на пространстве модулей нечетных тэта-характеристик с отмеченными точками:

$$\begin{aligned}
X_i &= \overline{\{(C,\eta,p)\in\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{odd}}\ \mid\ h^0(C,\eta)=1,\ h^0(C,\eta(-ip))=1\}},\\
Y_1 &= \overline{\{(C,\eta,p,q)\in\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}}\ \mid\ h^0(C,\eta)=1,\ (C,\eta,p)\in X_1,\ h^0(C,\eta(p-q))=2\}},\\
Y_i &= \overline{\{(C,\eta,p,q)\in\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}}\ \mid\ h^0(C,\eta)=1,\ (C,\eta,p)\in X_1,\ h^0(C,\eta(p-iq))=1\}},\quad i\geq 2.
\end{aligned}$$

  Описывается касательное пространство к этим локусам в общей точке, также вычисляется геометрическая кратность диагональных компонент Y_i при $i\geq 2$.

- *Класс универсального дискриминанта на пространстве спектральных накрытий Хитчина.* Классы компонент универсального дискриминанта в рациональной группе Пикара пространства модулей $\mathrm{GL}(n)$ спектральных накрытий Хитчина раскладываются через стандартные образующие группы Пикара. Также выводится формула, связывающая два класса Ходжа в этой группе Пикара.

Достоверность результатов и апробация работы. Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в статьях [7], [8], [9] за авторством соискателя. Каждая из публикаций напечатана в журнале, входящем в список ВАК.

Результаты диссертации докладывались

- на конференции “Integrable Systems and Moduli Spaces”, Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery, Банф, Канада;
- на семинаре “The second St. Petersburg-Moscow Students Meeting”, Высшая Школа Экономики, Москва, Россия;
- на семинарах лаборатории Чебышева и лаборатории “Современная Алгебра и Приложения”.

Структура диссертации. Глава 2 содержит общие сведения о пространстве модулей римановых поверхностей и о пространстве модулей нечетных спинорных кривых. Все изложенные в этой главе результаты могут быть найдены в классической литературе. Глава 3 посвящена аналитическому выводу формул Фаркаша. Также в этой главе мы обсуждаем некоторые свойства тау-функции Бергмана, в частности, причины, по которым тау-функция Бергмана может быть интерпретирована как определитель оператора Коши–Римана. Глава 4 посвящена изучению локальной геометрии некоторых локусов вырождений на пространстве модулей нечетных спинорных кривых $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$. Глава 5 посвящена выводу различных соотношений в рациональной группе Пикара пространства модулей спектральных накрытий Хитчина.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Петру Георгиевичу Зографу.

Глава 2. Общие сведения о пространствах модулей

В этой главе мы приведем некоторые общие факты о пространствах модулей $\overline{\mathcal{M}}_g$ и $\overline{\mathcal{S}}_g$. Эти факты приводятся для того, чтобы сделать предлагаемую работу в целом более замкнутой, а также для того, чтобы зафиксировать необходимые обозначения. Все приведенные ниже сведения могут быть найдены в классической литературе.

2.1. Пространство модулей $\mathcal{M}_g$. Краткий обзор

Римановой поверхностью называется любое одномерное комплексное многообразие. Риманова поверхность компактна, если соответствующее многообразие компактно. В этом случае многообразие гомеоморфно сфере с g ручками — число g называется родом римановой поверхности.

Хорошо известно, что на любой компактной римановой поверхности существует структура гладкой проективной алгебраической кривой, индуцирующая исходную комплексную структуру. Действительно, любой дивизор достаточно большой степени на такой поверхности задает обильный пучок, с помощью которого поверхность можно вложить в $\mathbb{P}^n$ для некоторого n. По этой причине мы часто не будем делать разницу между гладкими проективными кривыми и компактными римановыми поверхностями в нашей терминологии.

Ниже мы кратко обсудим классическую теорию пространства модулей $\mathcal{M}_g$ римановых поверхностей рода g. Теоретико-множественно, $\mathcal{M}_g$ — это множество классов изоморфизмов всех римановых поверхностей рода g:

$$\mathcal{M}_g = \{C \text{ — риманова поверхности рода } g\}/_{\sim}.$$

Термин “модули” — то есть параметры, характеризующие данную риманову поверхность с точностью до изоморфизма — был предложен Риманом, он же вычислил необходимое количество независимых (комплексных) параметров:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g = 3g - 3, \qquad g \geq 2.$$

Однако, строгое описание $\mathcal{M}_g$ как алгебраического (и даже комплексного) многообразия для произвольного рода появилось только в середине XX века, хотя к тому времени уже было изучено немало его свойств.

2.1.1. Аналитическая теория $\mathcal{M}_g$. Пространство Тейхмюллера

Мы рекомендуем замечательную книгу [33] для подробного ознакомления с аналитической теорией $\mathcal{M}_g$, ниже мы предлагаем к ознакомлению краткую историческую справку и несколько классических фактов.

Аналитическая теория $\mathcal{M}_g$ строится с помощью теории Тейхмюллера. Пространство Тейхмюллера T_g параметризует римановы поверхности с маркировкой, то есть пары (C, B), где B — некоторый выбор стандартной системы образующих $\pi_1(C)$. На пространстве Тейхмюллера действует модулярная группа $\mathrm{Mod}(C) = \mathrm{Diff}^+(\mathrm{C})/\mathrm{Diff}_0^+(\mathrm{C})$ и фактор по этому действию (в теоретико-множественном смысле) совпадает с $\mathcal{M}_g$.

Пространство Тейхмюллера неявно возникло в работах Феликса Клейна и Анри Пуанкаре, изучавших фуксовы группы и автоморфные формы в 1880х годах. Роберт Фрике, Вернер Фенхель и Якоб Нильсен предложили первую его конструкцию для $g \geq 2$, которую теперь называют пространством Фрике. Метод Фрике, Фенхеля и Нильсена основан на теореме об униформизации, из которой следует, что всякая риманова поверхность рода $g \geq 2$ может быть представлена как фактор верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z \mid \Im z > 0\}$ под действием дискретной группы автоморфизмов $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Группа Γ называется фуксовой группой римановой поверхности. Сопоставляя отмеченной римановой поверхности (C, B) ее фуксову группу Γ, мы получаем вложение пространства Тейхмюллера $T_g \hookrightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$. Согласно теореме Тейхмюллера, образ этого вложения — это открытое подмножество, гомеоморфное шару.

Основной идеей Освальда Тейхмюллера было использовать квазиконформные преобразования для качественной оценки различия между комплексными структурами на фиксированной гладкой вещественной поверхности C_0. Напомним, что квазиконформным преобразованием между римановыми поверхностями C_1 и C_2 называется отображение $f : C_1 \to C_2$, удовлетворяющее уравнению Бельтрами $\overline{\partial} f = \mu \partial f$, где μ — форма типа $(-1, 1)$, для которой выполняется

$$\|\mu\|_\infty = \mathrm{esssup}|\mu| < 1$$

(формально нам требуется некоторая метрика на C_1 и C_2, чтобы определить $|\mu|$, однако, нетрудно видеть, что результат зависит только от конформного класса метрики). Форма μ называется коэффициентом Бельтрами. С каждым квазиконформным преобразованием также связана другая величина, называемая его отклонением:

$$D_f = \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}.$$

Тейхмюллер определил метрику на T_g следующем образом: расстояние между (C, B) и (C', B') определяется как

$$\inf_f \log D_f,$$

где инфимум берется по всем квазиконформным отображениям $f : C \to C'$, таким, что $f_* B = B'$. Эта метрика называется метрикой Тейхмюллера. Тейхмюллер заметил также, что отображения, минимизирующие расстояния, естественным образом соответствуют голоморфным квадратичным дифференциалам на поверхности C. Это утверждение по своей природе аналогично хорошо известному факту, согласно которому наименьшее отклонение среди всех квазиконформных преобразований между двумя прямоугольниками на плоскости имеет аффинное преобразование.

В конце 1950х годов Ларс Альфорс и Липман Берс построили фундаментальную теорию пространства T_g и дали строгие доказательства результатам Тейхмюллера. На пространстве квадратичных дифференциалов, которое мы будем обозначать $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2})$, есть естественная норма

$$\|w\|_1 = \int_C |w|.$$

Используя конструкцию Тейхмюллера, каждому дифференциалу из открытого единичного шара по этой норме можно сопоставить экстремальное квазиконформное отображение, что задает отображение между шаром из $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2})$ и T_g. Это отображение оказывается гомеоморфизмом (относительно топологии, задаваемой метрикой Тейхмюллера, или же топологии, приходящей из биекции с пространством Фрике), более того, естественная комплексная структура на $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2})$ индуцирует комплексную структуру на пространстве Тейхмюллера. Модулярная группа при этом соответствует дискретной подгруппе в группе голоморфных относительно этой комплексной структуры автоморфизмов, причем стабилизатор любой точки (C, B) оказывается изоморфен группе автоморфизмов римановой поверхности $\mathrm{Aut}(C)$. Поскольку римановы поверхности рода $g \geq 1$ имеют лишь конечное число автоморфизмов, мы получаем структуру комплексного орбифолда на фактормножестве $\mathcal{M}_g = T_g/\mathrm{Mod}(C)$.

2.1.2. Алгебраическая теория $\mathcal{M}_g$. Стек модулей

В этом разделе мы кратко обсудим категорный подход к проблеме модулей, подробное обсуждение этого подхода можно найти, например, в книге [27].

Начнем с абстрактной постановки вопроса. Предположим, у нас имеется некоторый класс объектов, для которых мы хотим построить пространство модулей. В случае $\mathcal{M}_g$ это будут гладкие (или стабильные, если речь идет о компактификации, см. Раздел 2.1.3) проективные кривые данного рода. Мы стартуем с понятия семейства таких объектов над произвольной схемой, в случае $\mathcal{M}_g$ это будут всевозможные собственные плоские семейства $\mathcal{C} \to B$, такие, что для каждой точки $b \in B$ слой C_b над ней — это гладкая кривая рода g. Сопоставляя каждой схеме B множество таких семейств, профакторизованное по изоморфизмам, мы получаем функтор модулей $\mathrm{M}_g : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Set}$. В случае $\mathcal{M}_g$ имеем

$$\mathrm{M}_g(B) = \{\mathcal{C} \to B \text{ — собственные плоские семейства кривых рода } g\}/_\sim,$$

где $\sim$ обозначает отношение эквивалентности, заданное изоморфизмами между семействами. Вопрос о существовании классического пространства модулей $\mathcal{M}_g$ можно переформулировать в терминах представимости этого функтора. Напомним, что функтор M_g представим, если существует объект B_0 категории **Sch**, такой, что функторы M_g и $\mathrm{Hom}(\cdot, B_0)$ изоморфны. В случае, если это так, схема B_0 оказывается отличным кандидатом для пространства $\mathcal{M}_g$. И правда, на B_0 есть семейство $\mathcal{C}_0 \to B_0$, соответствующее $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}(B_0, B_0)$ относительно изоморфизма между M_g и $\mathrm{Hom}(\cdot, B_0)$, и для любого семейства $\mathcal{C} \to B$ существует морфизм $B \to B_0 \in \mathrm{Hom}(B, B_0)$, такой, что $\mathcal{C}$ получается пуллбеком $\mathcal{C}_0$ относительно этого морфизма. В таком случае B_0 называется *тонким пространством модулей* (для функтора модулей M_g), а $\mathcal{C}_0 \to B_0$ — универсальным семейством.

Однако, тонкое пространство модулей можно построить крайне редко: существенным препятствием к этому является наличие у некоторых объектов нетривиальных автоморфизмов. В качестве стандартного примера можно привести следующее семейство эллиптических кривых: $\mathcal{C} = \{C_t\} = \{y^2 = x^3 - t\}_{t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}$. Нетрудно видеть, что все кривые в данном семействе изоморфны кривой $C_1 = \{y^2 = x^3 - 1\}$, таким образом, естественное отображение $t \mapsto [C_t] \in \mathcal{M}_1$ оказывается тождественным. С другой стороны, нетрудно проверить, что это семейство нетривиально. Мы получаем, что семейство $\mathcal{C}$ нетривиально, однако модулярное отображение, которое ему соответствует, тождественно — если бы над $\mathcal{M}_g$ существовало универсальное семейство, мы получили бы противоречие.

Эту проблему, можно обойти, если ослабить требования к схеме, представляющей пространство модулей. Для начала потребуем, чтобы схемная структура на $\mathcal{M}_g$ индуцировала естественное преобразование между функторами M_g и $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{M}_g)$. Универсальную относительно этого преобразования схемную структуру будем называть *грубым пространством модулей* для функтора M_g:

Определение 2.1.1. Схема B_0 называется грубым пространством модулей для M_g, если существует такое естественное преобразование Φ между M_g и $\mathrm{Hom}(\cdot, B_0)$, что

1. $\Phi : \mathrm{M}_g(\mathrm{pt}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{pt}, B_0)$ — биекция,

2. для любой другой схемы B_1 и естественного преобразования Φ_1 между M_g и $\mathrm{Hom}(\cdot, B_1)$ найдется естественное преобразование Ψ между $\mathrm{Hom}(\cdot, B_0)$ и $\mathrm{Hom}(\cdot, B_1)$, такое, что $\Phi_1 = \Psi \circ \Phi$.

В 1965 году Мамфорд показал, что грубое пространство модулей $\mathcal{M}_g$ существует для всякого g. Более того, Мамфорд построил естественную компактификацию $\mathcal{M}_g$, называемую компактификацией Деліня–Мамфорда. Мы обсудим эти конструкции в следующем разделе, а сейчас поговорим еще про стек M_g.

В 1960х годах концептуальное восприятие проблемы модулей существенно изменилось под влиянием “категорной идеологии”. Новая идея, возникшая в работах Гротендика, а затем Делиня и Мамфорда, состояла в том, чтобы рассматривать стек вместо пространства (схемы) $\mathcal{M}_g$. Многие геометрические объекты, определенные на схеме, можно обобщить на случай стека: можно рассуждать о дивизорах и пучках, у стека есть группа Пикара и т.д. По сути, любой объект, функториально определенный на семействах кривых, индуцирует некоторый объект на стеке модулей. С другой стороны, существование стека модулей доказать гораздо проще, чем существование самого пространства. Таким образом появилась возможность исследовать $\mathcal{M}_g$, не имея его классической конструкции.

Допуская некоторую вольность обозначений, обозначим через M_g категорию собственных плоских семейств гладких кривых рода g над произвольными схемами. Обозначим через $F : \mathrm{M}_g \to \mathbf{Sch}$ забывающий функтор в категорию схем $\mathbf{Sch}$. Заметим, что относительно этого функтора M_g расслоена над $\mathbf{Sch}$ на группоиды. Теперь категория M_g (с функтором F) будет называться стеком, если

1. для любых двух $(\mathcal{C}_1 \to B), (\mathcal{C}_2 \to B) \in \mathrm{M}_g$ функтор из $\mathbf{Sch}/B \to \mathbf{Set}$ определенный правилом $(\varphi : X \to B) \mapsto \mathrm{Hom}(\varphi^*\mathcal{C}_1, \varphi^*\mathcal{C}_2)$, является пучком относительно топологии Гротендика на $\mathbf{Sch}/B$;

2. для любого покрытия $(\varphi_i : B_i \to B)$ объекта B категории $\mathbf{Sch}$, а также семейств $\mathcal{C}_i$ из слоев F над B_i и морфизмов $\alpha_{ij} : \varphi_{ij}^*\mathcal{C}_i \to \varphi_{ij}^*\mathcal{C}_j$, таких, что $\alpha_{ik} = \alpha_{jk} \circ \alpha_{ij}$ над B_{ijk}, найдутся $\mathcal{C}$ из слоя F над B и морфизмы $\alpha_i : \varphi_i^*\mathcal{C} \to \mathcal{C}_i$, такие, что $\alpha_{ij} = \varphi_{ij}^*\alpha_j^{-1} \circ \varphi_{ij}^*\alpha_i$.

Отметим, что над M_g автоматически существует универсальное семейство кривых.

Хотя идея рассматривать стек модулей изначально хороша именно тем, что это позволяет изучать пространство модулей, никак не используя его схемную структуру, все же наличие грубого пространства модулей $\mathcal{M}_g$ является очень важным свойством самого стека. Одним из центральных следствий из существования $\mathcal{M}_g$ является тот факт, что стек M_g является стеком Делиня-Мамфорда. Среди прочего, это означает, что существует схема $\widetilde{\mathrm{M}}_g$ вместе с семейством кривых $\widetilde{\mathcal{C}} \to \widetilde{\mathrm{M}}_g$ на ней и сюрьекция $\widetilde{\mathrm{M}}_g \to \mathrm{M}_g$ (под отображением $\widetilde{\mathrm{M}}_g \to \mathrm{M}_g$ понимается естественное преобразование между функтором точек $\widetilde{\mathrm{M}}_g$ и M_g), такая, что прообраз универсального семейства с M_g изоморфен $\widetilde{\mathcal{C}}$. В качестве схемы $\widetilde{\mathrm{M}}_g$ можно рассмотреть пространство модулей кривых со "структурами уровней" (with level structures). Это пространство модулей параметризует пары (C, b), где b — некоторый базис в $H^0(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ и n фиксировано для всех кривых. Схема $\widetilde{\mathrm{M}}_g$ имеет естественную структуру накрытия $\mathcal{M}_g$. Если $n \geq 3$, то пара (C, b) не имеет нетривиальных автоморфизмов, что позволяет построить на $\widetilde{\mathrm{M}}_g$ универсальное семейство кривых.

2.1.3. Конструкция Мамфорда грубого пространства модулей $\mathcal{M}_g$ и компактификация Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_g$

В этом разделе мы кратко обсудим построение $\mathcal{M}_g$ с помощью геометрической теории инвариантов (GIT), проделанное Мамфордом и описанное в книге [53]. Мы также рекомендуем [27, Глава 4] в качестве подробного обзора конструкции Мамфорда и сопутствующих результатов.

Отсюда и далее мы будем считать, что $g \geq 2$. Хорошо известно, что всякая гладкая кривая C рода g может быть вложена в $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^{(2n-1)(g-1)-1}$ с помощью n-й степени канонического класса $\omega_C^{\otimes n}$ для всякого $n \geq 3$. Таким образом, для построения $\mathcal{M}_g$ нам достаточно описать квазипроективную схему, параметризующую канонически вложенные (то есть, такие, что $\mathcal{O}(1)|_C \cong \omega_C^{\otimes n}$) гладкие кривые $C \subset \mathbb{P}^N$ с точностью до изоморфизмов.

Первый шаг в построении этой схемы — рассмотреть множество всех кривых в $\mathbb{P}^N$ с данным многочленом Гильберта. Напомним, что многочленом Гильберта проективной схемы $V \subset \mathbb{P}^N$ называется многочлен, определенный как

$$P_V(m) = h^0(V, \mathcal{O}(m)|_V), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Известно, что множество проективных схем $V \subset \mathbb{P}^N$ с данным многочленом Гильберта имеет "естественную схемную структуру" — мы можем сформулировать это более точно, используя терминологию из Раздела 2.1.2. Определим модулярный функтор $\mathbf{Hilb}_{P,N} : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Set}$, полагая $\mathbf{Hilb}_{P,N}(B)$ равным множеству всех собственных плоских семейств

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^N \times B \arrow[dl] \\ B & \end{tikzcd}$$

все слои которых имеют многочлен Гильберта P. Следующая теорема была доказана Гротендиком:

Теорема 2.1. *Функтор $\mathbf{Hilb}_{P,N}$ представим с помощью некоторой проективной схемы $\mathcal{H}_{P,N}$.*

Схема $\mathcal{H}_{P,N}$ называется *схемой Гильберта.*

Поскольку

$$(\dim V)! \cdot P_V(x) = (\deg V) \cdot x^{\dim V} + \ldots,$$

зафиксировав $P = P_{C_0}$ для некоторой гладкой кривой $C_0 \subset \mathbb{P}^N$, мы получим схему Гильберта $\mathcal{H}_{P,N}$, точки которой соответствуют проективным кривым такой же степени, как у C_0. Напомним, что, поскольку схема Гильберта является тонким пространством модулей, на ней существует универсальное семейство $\mathcal{C}_{P,N} \to \mathcal{H}_{P,N}$. Обозначим через $\mathcal{H}^0_{P,N} \subset \mathcal{H}_{P,N}$ открытое подмножество, соответствующее гладким кривым. Пусть теперь g — род C_0 и $\mathcal{U}_g \subset \mathcal{H}^0_{P,N}$ обозначает

локус, заданный
$$\mathcal{U}_g = \{[C] \in \mathcal{H}^0_{P,N} \ \mid \ \omega_C^{\otimes n} \cong \omega_{\mathcal{C}_{P,N}/\mathcal{H}_{P,N}}|_C \cong \mathcal{O}(1)|_C\},$$
где C — слой $\mathcal{C}_{P,N} \to \mathcal{H}_{P,N}$ над точкой $[C]$. Заметим, что пучок $\omega_{\mathcal{C}_{P,N}/\mathcal{H}_{P,N}}$ обратим над $\mathcal{H}^0_{P,N}$, поскольку слои над этим открытым подмножеством гладкие. Любая кривая C, соответствующая точке из $\mathcal{U}_g$, будет канонически вложена в $\mathbb{P}^N$, а также будет иметь ту же степень, и, стало быть, тот же род, что и C_0.

Итак, мы построили квазипроективную схему $\mathcal{U}_g$, которая параметризует все гладкие канонически вложенные кривые в $\mathbb{P}^N$ рода g. Обозначим через $\overline{\mathcal{U}}_g$ замыкание $\mathcal{U}_g$ в $\mathcal{H}_{P,N}$. Отметим, что если множество точек $\mathcal{U}_g$ легко описывается, то множество точек $\overline{\mathcal{U}}_g$ уже не имеет такого простого описания, поскольку в качестве "предельных" кривых из $\mathcal{U}_g$ могут оказаться кривые с довольно сложной структурой особенностей.

Следующий шаг к построению $\mathcal{M}_g$ — "опустить" схемную структуру $\mathcal{U}_g$ на фактор $\mathcal{U}_g$ по отношению эквивалентности, задаваемому изоморфизмами между кривыми. Предположим, что у нас имеется некоторый абстрактный изоморфизм $\varphi : C_1 \to C_2$ между гладкими кривыми рода g, канонически вложенными в $\mathbb{P}^N$. У нас имеется индуцированный изоморфизм между $\varphi^*\omega_{C_2}^{\otimes n}$ и $\omega_{C_1}^{\otimes n}$, откуда видно, что изоморфизм φ задается некоторым автоморфизмом проективного пространства $\mathbb{P}^N$. Таким образом, наша задача — профакторизовать $\mathcal{U}_g$ по действию группы PSL_N.

Для того, чтобы решить вышеописанную задачу, используется теория геометрических инвариантов (GIT). Базовая идея этой теории состоит в том, чтобы определить фактор-схему $\mathcal{U}_g$ как $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\mathcal{U}_g]^{\mathrm{PSL}_N})$, где $\mathbb{C}[\mathcal{U}_g]$ — координатное кольцо $\mathcal{U}_g$ и $\mathbb{C}[\mathcal{U}_g]^{\mathrm{PSL}_N}$ — соответствующее кольцо инвариантов. Фактически, $\mathbb{C}[\mathcal{U}_g] = \mathbb{C}[\overline{\mathcal{U}}_g]$, так что корректнее будет сказать, что мы пытаемся определить фактор-схему $\overline{\mathcal{U}}_g$.

Естественным образом возникают следующие два вопроса:

1. будет ли схема $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\overline{\mathcal{U}}_g]^{\mathrm{PSL}_N})$ проективной и

2. чему соответствуют точки этой схемы?

Ответ на вопрос (1) и некоторый задел для ответа на вопрос (2) дает "общая теория". А именно, следующая теорема является следствием Теорем Гильберта–Вейля–Хабуша и Гильберта–Нагаты:

Теорема 2.2. *Предположим, что W является (конечномерным) представлением редуктивной группы G и $Z \subset \mathbb{P}(W)$ — G-инвариантная проективная схема. Тогда кольцо инвариантов $\mathbb{C}[Z]^G$ является конечно порожденным и значения инвариантных функций из $\mathbb{C}[Z]^G$ различают замкнутые G-орбиты точек из Z.*

Отсюда мы заключаем, что $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{U}}_g]^{\mathrm{PSL}_N}$ соответствует некоторой проективной схеме, однако, нам все еще неясно, как можно интерпретировать множество точек этой схемы. Сложность состоит в том, что далеко не все орбиты PSL_N будут замкнуты в $\overline{\mathcal{U}}_g$, соответственно, точки $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\overline{\mathcal{U}}_g]^{\mathrm{PSL}_N})$ будут соответствовать не всем орбитам, а некоторому выделенному подмножеству. Отметим, что, как бы это парадоксально ни звучало, эта сложность дает нам и некоторую надежду: напомним, что точки $\overline{\mathcal{U}}_g$ могут соответствовать кривым с довольно сложными сингулярностями, однако, возможно, обриты именно этих точек и придется выкинуть, чтобы получить точки фактор-схемы.

На практике дать ответ на вопрос (2) оказывается весьма непросто. Именно в этом долгое время заключалось препятствие к построению $\mathcal{M}_g$, пока Мамфорд не нашел подход к его преодолению. Мы не будет вдаваться в обсуждение технических подробностей работы Мамфорда, но опишем конечный результат этой работы.

Определение 2.1.2. Проективная кривая C арифметического рода g называется *стабильной*, если

1. C не имеет никаких особенностей, кроме, может быть, нодальных точек;

2. $|\operatorname{Aut}(C)| < \infty$.

Напомним, что $N = (2n-1)(g-1)-1$. Пусть g фиксировано. Согласно результатам, полученным Мамфордом, если n достаточно велико, то фактор-схема $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\overline{\mathcal{U}}_g]^{\mathrm{PSL}_N})$ является грубым пространством модулей для функтора модулей стабильных кривых рода g. Это пространство модулей обозначается через $\overline{\mathcal{M}}_g$ и содержит $\mathcal{M}_g$ в качестве открытого подмножества. Пространство $\overline{\mathcal{M}}_g$ принято называть компактификацией Деліня-Мамфорда пространства $\mathcal{M}_g$.

Более того, Мамфорд доказал некоторый более общий результат, для формулировки которого нам потребуется еще одно определение:

Определение 2.1.3. Проективная кривая C рода g с m отмеченными точками $p_1, \ldots, p_m \in C$ называется *стабильной*, если

1. C не имеет никаких особенностей, кроме, может быть, нодальных точек;

2. $p_1, \ldots, p_m$ — попарно-различные гладкие точки C;

3. группа автоморфизмов набора $(C, p_1, \ldots, p_m)$ — конечна.

Мамфорд доказал, что GIT-конструкция фактор-схемы схемы Гильберта, параметризующей стабильные кривые рода g с m отмеченными точками, является грубым пространством модулей для соответствующего функтора. Это пространство модулей обозначается $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}$.

Отметим, что $\overline{\mathcal{M}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ часто называют “универсальной кривой” над $\overline{\mathcal{M}}_g$. Это отображение действительно задает универсальное семейство, если мы рассматриваем соответствующие стеки модулей, однако, в случае пространств модулей у этого отображения возникают вырожденные слои над локусом кривых с нетривиальными автоморфизмами.

Замечание 2.1.1. Схема $\overline{\mathcal{M}}_g$ приведена и неприводима, но не является гладкой (в отличие от соответствующего стека!). Все особенности $\overline{\mathcal{M}}_g$ содержатся внутри локуса кривых, имеющих нетривиальные автоморфизмы, и являются фактор-особенностями (quotient-singularities): с аналитической точки зрения это означает, что в небольшой окрестности такой точки $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ пространство $\overline{\mathcal{M}}_g$ изоморфно $B/\operatorname{Aut}(C)$, где $B \subset \mathbb{C}^{3g-3}$ — небольшая окрестность нуля и $\operatorname{Aut}(C)$ действует на $\mathbb{C}^{3g-3}$ линейными автоморфизмами.

2.1.4. Группа Пикара $\overline{\mathcal{M}}_g$. Описание границы $\overline{\mathcal{M}}_g$

Как уже было упомянуто, группу Пикара можно определить не только для пространства, но и для стека модулей. Линейные расслоения на стеке модулей соответствуют морфизмам между стеком модулей и стеком линейных расслоений. Таким образом, любой функториальный способ сопоставлять семейству кривых $\mathcal{C} \to B$ линейное расслоение $L \to B$ индуцирует элемент из группы Пикара соответствующего стека, что позволяет построить много естественных линейных расслоений на стеке. Следующее утверждение, доказанное Мамфордом [50], описывает различие между $\operatorname{Pic}(\overline{\mathrm{M}}_g)$ и $\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)$:

Теорема 2.3. *Группа* $\operatorname{Pic}(\overline{\mathrm{M}}_g)$ *стека модулей не имеет кручения и содержит* $\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)$ *в качестве подгруппы конечного индекса. В частности,*

$$\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q} \cong \operatorname{Pic}(\overline{\mathrm{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}.$$

Структурное описание группы Пикара стека модулей $\overline{\mathrm{M}}_g$ получено в ряде работ Харера, Мамфорда, Арбарелло и Корналбы. Этот результат — яркий пример алгебраического факта об $\mathcal{M}_g$, для вывода которого используется в равной степени и алгебраическая, и аналитическая теория. Для простоты изложения будем считать, что $g \geq 5$, случаи $g = 3, 4$ (как и почти все, что будет сказано ниже) изложены в статье [1].

Первым шагом к пониманию структуры $\operatorname{Pic}(\overline{\mathrm{M}}_g)$ является описание группы Пикара схемы модулей $\operatorname{Pic}(\mathcal{M}_g)$, полученное Мамфордом и Харером. Этот результат достигается с использованием связи между гомологиями $\mathcal{M}_g$ (как топологического пространства) и гомологиями модулярной группы, возникающей благодаря теории Тейхмюллера. Обозначим через Γ модулярную группу топологической компактной поверхности S, гомеоморфной сфере с g ручками, то есть

$$\Gamma = \pi_0(\mathrm{Diff}^+(S)) = \mathrm{Diff}^+(S)/\mathrm{Diff}^+_0(S).$$

Как мы уже видели в Разделе 2.1.1, из теории Тейхмюллера следует, что аналитически

$$\mathcal{M}_g = B/\Gamma, \tag{2.1.1}$$

где B — шар в $\mathbb{C}^{3g-3}$, а группа Γ действует дискретно и так, что точки B имеют конечные стабилизаторы. Отметим, что это тут же влечет

$$H_i(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) \cong H_i(\Gamma, \mathbb{Q})$$

для всякого i. Равенство верно и для $\mathbb{Z}$, если $i \ll g$, поскольку коразмерность локуса, на котором Γ действует несвободно, уменьшается с ростом g (она равна $g-2$).

Используя конструкцию (2.1.1), Мамфорд показал [48], что

$$\operatorname{Pic}(\mathcal{M}_g) \cong H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z}),$$

в частности, линейные расслоения на $\mathcal{M}_g$ однозначно определяются своими классами Черна. Также Мамфорд высказал предположение, что $H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Эта гипотеза была доказана Харером в работе [24], в которой он вычислил $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$, используя топологические методы, мы рекомендуем также [25] для ознакомления с дальнейшими результатами Харера в этом направлении.

Используя теорему Харера, Арбарелло и Корналба [1] представили структурное описание $\operatorname{Pic}(\overline{\mathrm{M}}_g)$. Для того, чтобы сформулировать результат Арбарелло–Корналбы нам потребуются некоторые определения.

Заметим для начала, что "граница" $\overline{\mathcal{M}}_g \smallsetminus \mathcal{M}_g$ состоит из $\left[\frac{g}{2}\right]+1$ дивизоров $\Delta_0, \ldots, \Delta_{\left[\frac{g}{2}\right]}$, описывающихся следующем образом: общая точка Δ_0 соответствует неприводимой кривой с одной нодальной точкой, а общая точка Δ_i при $i>0$ соответствует кривой с одной нодальной точкой, получающейся объединением гладких кривых рода i и $g-i$. Нетрудно видеть, что все эти дивизоры неприводимы. Каждому дивизору выше соответствует граничный дивизор стека $\overline{\mathrm{M}}_g$, который мы будем обозначать той же буквой. Поскольку $\overline{\mathrm{M}}_g$ — гладкий стек, любой дивизор на нем является дивизором Картье, то есть задает некоторый класс в группе Пикара. Обозначим через δ_i класс дивизора Δ_i.

Кроме классов $\delta_0, \ldots, \delta_{\left[\frac{g}{2}\right]}$ в $\operatorname{Pic}(\overline{\mathrm{M}}_g)$ есть еще один естественный класс, называемый классом Ходжа. Для каждого семейства $f : \mathcal{C} \to B$ стабильных кривых определим

$$\Lambda_B = \det f_* \omega_f = \Lambda^g f_* \omega_f,$$

где ω_f обозначает относительный дуализирующий пучок. Линейные расслоения Λ_B определяют линейное расслоение на стеке $\overline{\mathrm{M}}_g$, класс которого обозначают через λ и называют *классом Ходжа.*

Замечание 2.1.2. В виду Теоремы 2.3 некоторая степень Λ задает линейное расслоение на схеме $\overline{\mathcal{M}}_g$. Известно, что первый класс Черна этого расслоения обилен. Этот факт является одним из ключевых ингредиентов для бирациональной классификации $\overline{\mathcal{M}}_g$.

В работе [1] доказывается следующая теорема:

Теорема 2.4. *Для всякого $g \geq 3$ группа $\mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{M}}_g)$ свободно порождается классами $\lambda, \delta_0, \ldots, \delta_{[\frac{g}{2}]}$ и группа $\mathrm{Pic}(\mathrm{M}_g)$ свободно порождается λ.*

Приведем небольшой набросок доказательства этой теоремы, предложенного Арбарелло и Корналбой. Вычисляя степени классов $\lambda, \delta_0, \ldots, \delta_{[\frac{g}{2}]}$ на некоторых семействах авторы показывают, что классы эти линейно независимы. Затем, используя теоремы Харера авторы выводят, что эти классы порождают $\mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$. Снова анализируя числа пересечения авторы сводят сводят утверждение над $\mathbb{Q}$ к утверждению над $\mathbb{Z}$. Отметим, что $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_g)$ не имеет кручения согласно теореме Харера, что позволяет перейти от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{Z}$.

2.2. Пространство модулей спинорных кривых $\mathcal{S}_g$. Краткий обзор

2.2.1. Тэта-характеристики, основные свойства

Пусть C обозначает гладкую кривую рода $g \geq 1$. Тэта-характеристикой на C называется класс изоморфизма линейного расслоения $\eta \to C$ такого, что $\eta^{\otimes 2} \cong \omega_C$. Исторически термин "тэта-характеристика" связан с инвариантом, различающим четыре тэта-функции на эллиптической кривой и до определенного времени тэта-характеристики как правило изучались в рамках теории тэта-функций. Стоит отметить однако, что тэта-характеристики (порой неявно) возникали и в другом контексте, например, при исследовании бикасательных к кривым: заметим, что если $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ канонически вложена, то любому сечению тэта-характеристики соответствует гиперплоскость в P^{g-1}, которая касается C в каждой точке пересечения.

Тэта-характеристики образуют аффинное пространство над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-векторным пространством квадратных корней из единицы $J_2(C) \subset \mathrm{Pic}_0(C)$. В частности, отсюда следует, что на C существует всего 2^{2g} тэта-характеристик. Напомним, что на $J_1(C)$ имеется стандартная билинейная форма

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : J_2(C) \times J_2(C) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

называемой спариванием Вейля (если отождествить $J_2(C)$ с $H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, то эта билинейная форма будет соответствовать стандартному произведению в когомологиях с последующем интегрированием вдоль C). Для формулировки следующего результата нам потребуется несколько определений.

Напомним, что квадратичной формой на $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-векторном пространстве V с невырожденной антисимметричной (то есть $\langle v, v \rangle = 0$) билинейной формой называют функцию $q : V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ такую, что

$$q(v + w) = q(v) + q(w) + \langle v, w \rangle.$$

Очевидно, множество всех квадратичных форм на V является аффинным пространством над $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Существует всего два класса изоморфизма квадратичных форм на V. Эти два класса различаются так называемым Арф-инвариантом. Чтобы определить этот инвариант, рассмотрим квадратичную форму q на V и положим

$$Z(q) = \{v \in V \ \mid \ q(v) = 0\}.$$

Мы утверждаем, что.

$$\Big| |Z(q)| - |V \setminus Z(q)| \Big| = 2^g, \tag{2.2.1}$$

где $2g = \dim V$ (заметим, что $\dim V$ четно, иначе не существовало бы невырожденной антисимметричной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Это утверждение эквивалентно равенству

$$\Big(\sum_{v \in V'} (-1)^{q(v)} \Big)^2 = 2^{2g},$$

которое легко проверяется. Положим теперь

$$\mathrm{Arf}(q) = \begin{cases} 0, & |Z(q)| = 2^{g-1}(2^g + 1), \\ 1, & |Z(q)| = 2^{g-1}(2^g - 1). \end{cases}$$

Согласно (2.2.1), Arf определен для всякой формы q. Форма q называется *четной*, если $\mathrm{Arf}(q) = 0$.

Заметим теперь, что если $v \in V$, такой, что $q(v) = 1$ и $q'(\cdot) = q(\cdot) + \langle \cdot, v \rangle$, то

$$\mathrm{Arf}(q') = \mathrm{Arf}(q) + 1.$$

Отсюда легко выводится, что существует всего $2^{g-1}(2^g - 1)$ нечетных квадратичных форм.

Следующая лемма также легко проверяется:

Лемма 2.2.1. *Если $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \in V$ — симплектический базис и q — квадратичная форма, то*

$$\mathrm{Arf}(q) = \sum_{i=1}^{g} q(a_i) q(b_i).$$

Теперь, с каждой тэта-характеристикой η свяжем функцию

$$q_\eta : J_2(C) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad q_\eta(L) = h^0(C, \eta \otimes L) + h^0(C, \eta) \mod 2.$$

Следующая теорема является классическим результатом в теории тэта-характеристик:

Теорема 2.5. *Функция q_η является квадратичной формой на $J_2(C)$ относительно спаривания Вейля и*

$$\mathrm{Arf}(q_\eta) = h^0(C, \eta) \mod 2.$$

Благодаря соответствию между тэта-характеристиками и квадратичными формами возникает естественная концепция четности тэта-характеристики. Заметим, что η нечетна тогда и только тогда, когда $h^0(C,\eta)$ нечетно.

Существует множество доказательств Теоремы 2.5, первое из которых Мамфорд приписывает Риману (см. [49]). Чисто алгебраическое доказательство Теоремы 2.5 впервые было дано самим Мамфордом [49], затем это доказательство было адаптировано Харрисом [29] на случай негладких кривых. Имеется также классическая работа Атьи [2], в которой Теорема 2.5 доказывается с помощью эллиптических операторов. В этой же работе Атья показывает, что тэта-характеристики на кривой (и, более общо, на произвольном комплексном многообразии, где тэта-характеристики определяются, как квадратные корни из канонического класса) соответствуют спинорным структурам на этой кривой. Явное соответствие между спинорными структурами на кривых и квадратичными формами в $H^1(C,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ построено Джонсоном в работе [35], что с учетом результатов Атьи в очередной раз доказывает Теорему 2.5.

Определение 2.2.1. Пара (C,η), где C — кривая рода g и η — тэта-характеристика, называется гладкой спинорной кривой. Четность спинорной кривой определяется в соответствии с четностью тэта-характеристики.

2.2.2. Стек S_g и конструкция $\mathcal{S}_g$ с помощью теории Тейхмюллера

Начнем с определения семейства спинорных кривых.

Определение 2.2.2. Семейством спинорных кривых над схемой B называют тройку $(f:\mathcal{C}\to B,\mathcal{F},\beta)$, где $f:\mathcal{C}\to B$ — собственное плоское семейство кривых, $\mathcal{F}\to\mathcal{C}$ — линейное расслоение и $\beta:\mathcal{F}^{\otimes 2}\to\omega_{\mathcal{C}/B}$ — гомоморфизм, такой, что тройка $(C,\mathcal{F}|_C,\beta)$ является спинорной кривой для всякого слоя C.

Морфизмом между семействами $(f:\mathcal{C}\to B,\mathcal{F},\beta)$ и $(f:\mathcal{C}'\to B',\mathcal{F}',\beta')$ называется морфизм семейств

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

и морфизм $\xi:\varphi^*\mathcal{F}'\to\mathcal{F}$, такой, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^{\otimes 2} \arrow[r, "\xi\otimes\xi"] \arrow[d, "\beta"] & \varphi^*\mathcal{F}'^{\otimes 2} \arrow[d, "\beta'"] \\ \omega_{\mathcal{C}/B} \arrow[r, "\cong"] & \varphi^*\omega_{\mathcal{C}'/B'} \end{tikzcd}$$

Обозначим через S_g стек спинорных кривых и через $\mathcal{S}_g$ его грубое пространство модулей. По аналогии с $\mathcal{M}_g$ естественно ожидать, что эти объекты существуют и обладают хорошими свойствами. У нас имеются естественные забывающие отображения $\mathrm{S}_g \to \mathrm{M}_g$ и $\mathcal{S}_g \to \mathcal{M}_g$, являющиеся неразветвленнымм накрытием степени 2^{2g}.

Мы хотим показать, что Теорема 2.5 и существование грубого пространства модулей $\mathcal{M}_g$ определяют алгебраическую структуру на $\mathcal{S}_g$ — во всяком случае, над полем комплексных чисел. В самом деле, как мы сейчас увидим, с помощью Теоремы 2.5 и теории Тейхмюллера можно задать комплексную структуру на $\mathcal{S}_g$, относительно которой $\mathcal{S}_g \to \mathcal{M}_g$ — это голоморфное накрытие. Этого достаточно, чтобы однозначно определить алгебраическую структуру в виду обобщенной теоремы Римана о продолжении (см. [48]):

Теорема 2.6. *Предположим, что X — нормальное алгебраическое многообразие, а Y — нормальное аналитическое пространство и $f : Y \to X$ — собственное голоморфное отображение с конечными слоями. Предположим также, что найдется открытое по Зарисскому $U \subset X$ множество, такое, что $f^{-1}(U)$ плотно в Y и $f : f^{-1}(U) \to U$ неразветвлено. Тогда на Y существует единственная алгебраическая структура, относительно которой f является морфизмом алгебраических многообразий.*

Пусть T_g обозначает пространство Тейхмюллера для кривых рода g, напомним, что точка в T_g задается парой (C, B), где B — система образующих в $\pi_1(C)$ (см. Раздел 2.1.1). Пусть $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$ обозначает $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-векторное пространство со стандартной антисимметричной формой и $Q(V)$ обозначает множество всех квадратичных форм на V. Зададим действие модулярной группы Γ_g поверхности рода g на $T_g \times Q(V)$ следующим образом. Для начала заметим, что если $(C, B) \in T_g$, то B опускается до симплектического базиса в $H_1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, которому соответствует некоторый двойственный симплектический базис в $J_2(C) \cong H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Мы будем обозначать этот базис как $B^\vee$. Отождествляя $B^\vee$ со стандартным базисом в V мы определяем симплектоморфизм

$$\varphi_B : H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} V.$$

Теперь, пусть $\gamma \in \Gamma_g$ и $\gamma(C, B) = (C', B')$. У нас имеется индуцированный симплектоморфизм $\gamma^* : H^1(C', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Сплетая γ^* с φ_B и $\varphi_{B'}$ мы получаем индуцированное отображение

$$\gamma_* : Q(V) \to Q(V').$$

Теперь, определим действие γ на $(C, B, q) \in T_g \times Q(V)$ как

$$\gamma(C, B, q) = (\gamma(C, B), \gamma_* q).$$

Положим $\mathcal{S}_g = (T_g \times Q(V))/\Gamma_g$. Из Теоремы 2.5 и определения пространства Тейхмюллера следует, что точки $\mathcal{S}_g$ соответствуют классам изоморфизма гладких спинорных кривых рода g. Больше того, поскольку Γ_g действует дискретно и имеет конечные стабилизаторы, комплексная структура на T_g индуцирует комплексную структуру на $\mathcal{S}_g$ относительно которой $\mathcal{S}_g$ — нормальное аналитическое пространство и $\mathcal{S}_g \to \mathcal{M}_g$ — голоморфное отображение. Это, согласно Теореме 2.6, индуцирует алгебраическую структуру на $\mathcal{S}_g$.

Отметим некоторые следствия из представленной конструкции. Поскольку симплектоморфизмы сохраняют четность квадратичной формы, мы получаем разбиение

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \sqcup \mathcal{S}_g^{\mathrm{even}}$$

на пространства модулей нечетных и четных спинорных кривых. Поскольку T_g связно и $\mathrm{Sp}(V)$ действует на множестве всех квадратичных форм одной четности на V транзитивно, мы получаем, что $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$ и $\mathcal{S}_g^{\mathrm{even}}$ связны. Больше того, поскольку все особенности $\mathcal{S}_g$ — это фактор-особенности, отсюда можно заключить, что $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$ и $\mathcal{S}_g^{\mathrm{even}}$ неприводимы.

Отдельного рассмотрения требует вопрос, будет ли построенное таким образом $\mathcal{S}_g$ грубым пространством модулей для стека S_g. Ответ на этот вопрос положителен, что следует из более общих результатов Корналбы. Этот факт и наблюдения выше влекут за собой следующий классический результат в теории тэта-характеристик:

Теорема 2.7. *Предположим, что $(\mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, \beta)$ — семейство спинорных кривых и B связно. Тогда все слои над B имеют одну и ту же четность.*

Как и Теорема 2.5, этот результат имеет несколько доказательств, стандартными считаются доказательства Атьи [2] (в аналитической категории) и Мамфорда [49] (в алгебраической категории). Заметим, что Теорема 2.7 была доказана до того, как конструкция $\mathcal{S}_g$ была описана.

2.2.3. Алгебраическая конструкция $\mathcal{S}_g$ и компактификация Корналбы $\overline{\mathcal{S}}_g$

В предыдущем разделе мы построили схему $\mathcal{S}_g$ над $\mathcal{M}_g$, точки которой соответствуют классам изоморфизмов спинорных кривых. Из общих соображений следует, что накрытие $\mathcal{S}_g \to \mathcal{M}_g$ единственным образом продолжается до разветвленного накрытия $\overline{\mathcal{S}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g$, где $\overline{\mathcal{S}}_g$ — некоторая проективная схема, включающая $\mathcal{S}_g$ в качестве открытого подмножества. Возникает естественный вопрос, чему же соответствуют точки схемы $\overline{\mathcal{S}}_g$. Ответ на этот вопрос содержится в классической работе Корналбы [12], в которой развита теория модулей спинорных кривых приводящая к конструкции грубого пространства модулей и его компактификации. Цитируя Корналбу, скажем, что ключевым шагом к построению этой теории является правильное определение негладкой спинорной кривой.

Определение 2.2.3. Нодальная кривая C называется квази-стабильной, если

1. для всякой рациональной компоненты $E \subset C$ выполняется $E \cap \overline{C \setminus E} \geq 2$ и
2. если рациональные компоненты $E_1, E_2 \subset C$ таковы, что $E_1 \cap \overline{C \setminus E_1} = E_2 \cap \overline{C \setminus E_2} = 2$, то $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Рациональная компонента $E \subset C$ для которой $E \cap \overline{C \setminus E} = 2$ называется *исключительной*.

Будем называть *стабильной моделью* квази-стабильной кривой C стабильную кривую $\overline{C}$, получающуюся стягиванием всех исключительных компонент C (то есть заменой их на точки).

Отметим, что квази-стабильная кривая C вообще говоря может иметь бесконечное число автоморфизмов, однако $\mathrm{Aut}(C)$ содержит группу конечного индекса $\mathrm{Aut}_0(C) \subset \mathrm{Aut}(C)$, состоящую из автоморфизмов, тождественных вне исключительных компонент. Нетрудно видеть, что $\mathrm{Aut}_1(C) = \mathrm{Aut}(C)/\mathrm{Aut}_0(C)$ изоморфна группе автоморфизмов стабильной модели кривой C. Следуя Корналбе, мы будем называть автоморфизмы из $\mathrm{Aut}_0(C)$ *несущественными* (inessential).

Определение 2.2.4. Спинорной кривой называется тройка (C, η, β), где C — квази-стабильная кривая, $\eta \to C$ — линейное расслоение и $\beta : \eta^{\otimes 2} \to \omega_C$ — морфизм, причем

1. если $E \subset C$ — исключительная компонента, то $\eta|_E \cong \mathcal{O}_E(1)$ и
2. β невырожден на неисключительных компонентах C.

Класс линейного расслоения η называется тэта-характеристикой на C.

Изоморфизм между спинорными кривыми определяется аналогично изоморфизму между семействами спинорных кривых (см. начало Раздела 2.2.2). В дальнейшем мы часто будем опускать β в обозначении спинорной кривой, если это не приводит к недоразумению.

Подсчет количества тэта-характеристик.

Перед тем, как обсуждать пространство модулей, ответим естественный вопрос о том, сколько существует различных спинорных кривых с данной стабильной моделью $\overline{C}$.

Ответ на этот вопросы требует некоторого дополнительного уточнения. Заметим для начала, что тэта-характеристики на произвольной квази-стабильной кривой не являются корнями из некоторого фиксированного расслоения, поскольку морфизм β вырождается на исключительных компонентах. В результате, может существовать бесконечно много неизоморфных спинорных кривых с фиксированной квази-стабильной кривой. В качестве примера этого эффекта можно рассмотреть некоторую тэта-характеристику η на квази-стабильной кривой C и некоторый обратимый элемент $c \in \mathbb{C}^*$. Пусть $C = E \cup X$, где E — некоторая исключительная компонента, пусть $E \cap X = \{p_1, p_2\}$ и η_X, η_E обозначают сужения η на X и E. Теперь подкрутим отождествление η_X и η_E в p_1 на c, а отождествление их в p_2 оставим прежним. Мы получим новую тэта-характеристику η_c. Нетрудно видеть, что если X связно, то η_c не изоморфна η.

Для того, чтобы избежать такой амбивалентности, можно зафиксировать некоторый класс расслоения $\eta^{\otimes 2}$ на C и рассматривать только те тэта-характеристики η', для которых $\eta'^{\otimes 2} \cong \eta^{\otimes 2}$. Пусть $\Gamma_{\overline{C}}$ обозначает граф, вершины которого соответствуют компонентам $\overline{C}$, а ребра — нодальным точкам. Тогда, если $h = h^1(\Gamma_{\overline{C}})$, то на C будет существовать всего 2^{2g-h} неизоморфных квадратных корней из $\eta^{\otimes 2}$.

Таким образом, при нашем подсчете выходит, что число спинорных кривых с данной стабильной моделью $\overline{C}$ равно 2^{2g-h} умноженному на количество квази-стабильных кривых $C \to \overline{C}$, на которых существует хоть одна тэта-характеристика. Последнее условие можно сформулировать следующим образом: пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ребра $\Gamma_{\overline{C}}$, соответствующие исключительным компонентам. Тогда $e_1 + \cdots + e_n$ является циклом по модулю 2. Следовательно, существует всего 2^h квази-стабильных кривых с тэта-характеристиками и мы приходим к ответу 2^{2g}, такому же, как и в гладком случае.

Вернемся к конструкции "подкрученной" тэта-характеристики η_c. Заметим, что для любого $c \in \mathbb{C}^*$ можно подобрать несущественный автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}_0(C)$, такой, что $\sigma^*\eta_c \cong \eta$. Используя это наблюдение можно заключить, что, хотя зафиксированное нами расслоение $\eta^{\otimes 2}$ для подсчета тэта-характеристик выбрано не канонически, любое другое линейное расслоение $\eta'^{\otimes 2}$ будет изоморфно $\eta^{\otimes 2}$ после подкрутки на несущественный автоморфизм C.

В контексте пространств модулей несколько более естественным является вопрос подсчета не тэта-характеристик, но классов изоморфизма спинорных кривых с фиксированной стабильной моделью. Согласно последнему замечанию выше, подсчитанное нами число тэта-характеристик мажорирует число неизоморфных спинорных кривых, однако обратное может оказывается не верно, если $\Gamma_{\overline{C}}$ не является деревом. И правда, зафиксируем некоторую квази-стабильную кривую C со стабильной моделью $\overline{C}$ и стянем у графа $\Gamma_{\overline{C}}$ все ребра, кроме тех, что соответствуют исключительным компонентам C. Получившийся граф обозначим через $\Gamma_{C/\overline{C}}$. Нетрудно видеть, что каждый элемент из $H^1(\Gamma_{C/\overline{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ задает несущественный автоморфизм C, сохраняющий $\eta^{\otimes 2}$ для любой тэта-характеристики η, но меняющий класс изоморфизма η. Таким образом, если $|\,\mathrm{Aut}(\overline{C})| = 1$, то число неизоморфных спинорных кривых со стабильной моделью $\overline{C}$ оказывается равным

$$2^{2g-h} \sum_{C} 2^{-h^1(\Gamma_{C/\overline{C}})}, \tag{2.2.2}$$

где суммирование происходит по всем квази-стабильным кривым C со стабильной моделью $\overline{C}$, допускающим тэта-характеристику. Отметим, что графы $\Gamma_{C/\overline{C}}$ получаются стягиванием всевозможных четных подграфов $\Gamma_{\overline{C}}$. Используя это наблюдение и (2.2.2) выводим следующее

Предложение 2.2.1. *Пусть $\overline{C}$ — стабильная кривая рода g и $|\,\mathrm{Aut}(\overline{C})| = 1$. Тогда существует всего $2^{2(g-h)}3^h$ неизоморфных спинорных кривых со стабильной моделью $\overline{C}$, где $h = h^1(\Gamma_{\overline{C}})$.*

Универсальное семейство спинорных кривых

Определение 2.2.5. Семейство спинорных кривых — это тройка $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, \beta)$, где $f : \mathcal{C} \to B$ — собственное, плоское семейство квази-стабильных кривых, $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ — линейное расслоение и $\beta : \mathcal{F}^{\otimes 2} \to \omega_{\mathcal{C}/B}$ — морфизм, такой, что для всякого $b \in B$ тройка $(f^{-1}(b), \mathcal{F}|_{f^{-1}(b)}, \beta)$ является спинорной кривой.

Морфизм между семействами определяется аналогично гладкому случаю.

Пусть теперь (C, η, β) — спинорная кривая рода g. Следуя [12] мы построим *универсальную деформацию* (C, η, β) следующем образом. Пусть C' — стабильная модель кривой C, и пусть некоторая аналитическая окрестность C' в $\mathcal{M}_g$ имеет вид $B'/\operatorname{Aut}(C')$, где B' — полидиск в $\mathbb{C}^{3g-3}$ с центром в 0.

Рассмотрим универсальное семейство $\mathcal{C}' \to B'$. Пусть $p_1, \ldots, p_n \in C'$ — нодальные точки, соответствующие исключительным компонентам C. Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}'$ — локус нодальных точек слоев $\mathcal{C}' \to \mathcal{B}'$, обозначим через $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ компоненты $\mathcal{P}$, содержащие точки $p_1, \ldots, p_n$ соответственно (заменив B' меньшим полидиском мы можем добиться того, чтобы каждая точка p_i принадлежала своей компоненте). Мы можем считать, что координаты $t_1, \ldots, t_{3g-3}$ в $\mathbb{C}^{3g-3}$ выбраны таким образом, что $t_i = 0$ задает уравнение образа $\mathcal{P}_i$ в B'. Рассмотрим теперь новый отображение $\mathbb{C}^{3g-3} \to \mathbb{C}^{3g-3}$, задаваемое

$$(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{3g-3}) \mapsto (t_1^2, \ldots, t_n^2, t_{n+1}, \ldots, t_{3g-3})$$

и пусть B — прообраз B' относительно этого отображения. Пусть также $\mathcal{C}_0 \to B$ — прообраз $\mathcal{C}'$ на B. По построению $\mathcal{C}_0$ гладкое всюду, кроме прообразов $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$, где оно имеет особенности типа A_1. Таким образом, разрешение особенностей $\mathcal{C}_0$ состоит из одного раздутия этих локусов, в результате чего мы получаем гладкое многообразие $\mathcal{C}$ и проекцию $f : \mathcal{C} \to B$, являющуюся семейством кривых. Отметим, что слой $f^{-1}(0)$ изоморфен кривой C и если $\mathcal{E}_i$ — дивизор раздутия, соответствующий $\mathcal{P}_i$, то $\mathcal{E}_i \cap f^{-1}(0)$ соответствует i-й исключительной компоненте.

Опять же, если мы выберем B' достаточно маленьким, то каждая компонента локуса нодальных точек $\mathcal{P}$ будет пересекать нодальную точку центрального слоя C'. При этом условии мы получим, что относительная степень $\omega_f(-\mathcal{E}_1 - \cdots - \mathcal{E}_n)$ на любой компоненте любого слоя f будет четной, из чего следует, что существует линейное расслоение $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$, такое, что $\mathcal{F}^{\otimes 2} \cong \omega_f(-\mathcal{E}_1 - \cdots - \mathcal{E}_n)$. Пусть $\alpha : \mathcal{F}^{\otimes 2} \to \omega_f$ обозначает композицию этого изоморфизма и естественного отображения $\omega_f(-\mathcal{E}_1 - \cdots - \mathcal{E}_n) \to \omega_f$. Нетрудно видеть, что тройка $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, \alpha)$ является семейством спинорных кривых.

Как уже было отмечено в Разделе 2.2.3, мы можем подкрутить изоморфизм между кривой C и центральным слоем $f : \mathcal{C} \to B$ на несущественный автоморфизм C так, чтобы $\eta^{\otimes 2}$ стало изоморфно прообразу $\omega_f(-\mathcal{E}_1 - \cdots - \mathcal{E}_n)$ на C. Больше того, выбирая правильным образом $\mathcal{F}$ мы можем добиться того, чтобы это отождествление между C и $f^{-1}(0)$ продолжалось до изоморфизма между спинорными кривыми (C, η, β) и $(f^{-1}(0), \mathcal{F}|_{f^{-1}(0)}, \alpha)$.

Определение 2.2.6. Семейство $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, \alpha)$, построенное выше, называется универсальной деформацией спинорной кривой (C, η, β).

Следующее утверждение доказано Корналбой [12, Предложение 4.6]:

Предложение 2.2.2. *Предположим, что $(\mathcal{C}' \to B', \mathcal{F}', \beta')$ — некоторое семейство спинорных кривых над схемой B'. Пусть (C, η, β) представляет слой этого семейства над некоторой* *точкой $t_0 \in B'$ и пусть $(\mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, \beta)$ — универсальная деформация (C, η, β). Тогда, если $\mathcal{U} \subset B'$ достаточно маленькая аналитическая окрестность точки t_0, то изоморфизм между (C, η, β) и центральным слоем $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, \beta)$ однозначно продолжается но морфизма семейств*

$$(\mathcal{C}'|_{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}, \mathcal{F}'|_{\mathcal{U}}, \beta) \to (\mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, \beta).$$

Развивая это утверждение в Разделе 5 [12], Корналба приходит к конструкции компактифицированного пространства модулей спинорных кривых. Мы можем сформулировать эти результаты следующем образом. Напомним, что в разделе 2.2.2 мы построили некоторую схему $\overline{\mathcal{S}}_g$, содержащую $\mathcal{S}_g$ в качестве подмножества.

Теорема 2.8. *Схема $\overline{\mathcal{S}}_g$ является грубым пространством модулей для стека $\overline{\mathrm{S}}_g$ модулей спинорных кривых. Точки схемы $\overline{\mathcal{S}}_g$ параметризуют классы изоморфизма спинорных кривых (C, η, β), где C пробегает множество всевозможных квази-стабильных кривых рода g, допускающих тэта-характеристику. Аналитические окрестности точек $(C, \eta, \beta) \in \overline{\mathcal{S}}_g$ имеют вид $B/\operatorname{Aut}(C, \eta, \beta)$, где B — базовое пространство универсальной деформации (C, η, β) и $\operatorname{Aut}(C, \eta, \beta)$ представляет группу автоморфизмов спинорной кривой, профакторизованную по несущественным автоморфизмом.*

Как и в случае гладких кривых, четность спинорной кривой (C, η, β) можно определить как $h^0(C, \eta) \mod 2$. Доказательство Мамфорда Теоремы 2.7 нетрудно обобщить для семейств квази-стабильных кривых, в следствии чего мы заключаем, что пространство $\overline{\mathcal{S}}_g$ имеет две неприводимые компоненты $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ и $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$, параметризующие нечетные и четные спинорные кривые. Поскольку данная работа посвящена изучению нечетных спинорных кривых, в дальнейшем мы сосредоточим наше внимание на пространстве $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$.

2.2.4. Граница $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$

Граница $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}} \smallsetminus \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$ представляет собой объединение некоторых дивизоров, проектирующихся на граничные дивизоры $\Delta_0, \ldots, \Delta_{\left[\frac{g}{2}\right]}$ пространства $\overline{\mathcal{M}}_g$. В этом подразделе мы опишем эти дивизоры.

Предположим для начала, что $(C, \eta) \in \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ представляет общую точку прообраза Δ_0, то есть стабильная модель $\overline{C}$ кривой C является неприводимой кривой с одной нодальной точкой. Возможны два варианта:

– кривая C не содержит исключительных компонент. Тогда $C = X/_{x \sim y}$ для некоторой гладкой кривой Xрода $g-1$ и прообраз η на X задает квадратный корень η_X из $\omega_X(x+y)$. Нетрудно видеть, что, обратно, любой квадратный корень из $\omega_X(x+y)$ однозначно определяет нечетную тэта-характеристику на C. Кривые такого вида формируют дивизор $A_0 \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$:

$$A_0 = \{(X/_{x \sim y}, \eta_X)\} \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}. \tag{2.2.3}$$

– кривая C имеет одну исключительную компоненту. Тогда $C = X \cup_{x,y} E$. Пусть η_X, η_E обозначают сужения η на X, E. Тогда $\eta_E \cong \mathcal{O}_E(1)$ и η_X — некоторая тэта-характеристика на X. Нетрудно видеть, что нечетность η равносильна нечетности η_X. Дивизор, параметризующий такие кривые, обозначается $B_0 \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$:

$$B_0 = \{(X \cup_{x,y} E, \eta_X)\} \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}. \tag{2.2.4}$$

Пусть теперь $(C, \eta) \in \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ является общей точкой прообраза Δ_j для некоторого $0 < j \leq \left[\frac{g}{2}\right]$. Тогда стабильная модель $\overline{C}$ кривой C имеет вид $X \cup_{x \sim y} Y$ для некоторых гладких кривых X, Y с отмеченными точками $x \in X$ и $y \in Y$, причем $|g(X) - g(Y)| = g - 2j$. При этом сужения ω_C на X и на Y имеют нечетные степени, из чего мы заключаем, что C должна иметь исключительную компоненту. Таким образом, $C = X \cup_x E \cup_y Y$ и сужения η_X и η_Y тэта-характеристики η на X и Y являются тэта-характеристиками на X и на Y. При этом

$$h^0(C, \eta) = h^0(X, \eta_X) + h^0(Y, \eta_Y) \mod 2,$$

следовательно, четности η_X и η_Y противоположны. В наших обозначениях мы будем всегда считать, что η_X нечетная и заведем обозначение $A_j \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ для дивизора, параметризующего спинорные кривые указанного выше вида для которых $g(X) = j$:

$$A_j = \{(X \cup_x E \cup_y Y, \eta_X, \eta_Y) \mid g(X) = j,\ \eta_X \text{ нечетная}\}. \tag{2.2.5}$$

Таким образом, прообраз Δ_0 в $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ совпадает с $A_j \cup A_{g-j}$.

2.2.5. Структура ветвления $\overline{\mathcal{S}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g$

Заметим, что, согласно Предложению 2.2.1, отображение $\overline{\mathcal{S}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g$ не может быть неразветвленным, поскольку число неизоморфных спинорных кривых с данной стабильной моделью не всегда равно 2^{2g}, если стабильная модель не является гладкой. Для того, чтобы получить представление о структуре ветвления, мы вернемся к конструкции $\mathcal{S}_g$ из Раздела 2.2.2. Напомним, что согласно этой конструкции, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} T_g \times Q(V) \arrow[r] \arrow[d] & T_g \arrow[d] \\ \mathcal{S}_g \arrow[r] & \mathcal{M}_g \end{tikzcd} \tag{2.2.6}$$

где вертикальные стрелки соответствуют факторизации по модулярной группе поверхности с g ручками.

Пусть $(C_0, \eta_0) \in \overline{\mathcal{S}}_g \setminus \mathcal{S}_g$ и пусть стабильная модель $\overline{C}_0$ имеет только одну нодальную точку.

Предположим, что $(C,\eta) \in \mathcal{S}_g$ "близка" к (C_0,η_0) и рассмотрим маленькую петлю l в пространстве $\mathcal{M}_g$ с началом в $[C]$, обходящую вокруг границы $\overline{\mathcal{M}}_g$. Будем обозначать через l^k петлю, k раз обходящую вдоль l. Степень ветвления отображения $\overline{\mathcal{S}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g$ в точке (C_0,η_0) равна минимальному k такому, что поднятие l^k на $\mathcal{S}_g$ с началом в (C,η) является петлей.

Пусть теперь $(C,B,q) \in T_g \times Q(V)$ — некоторая точка, проектирующаяся на (C,η) относительно левой вертикальной стрелки диаграммы 2.2.6. Поднятие l^k на $T_g \times Q(V)$ с началом в (C,B,q) представляет собой путь, соединяющий (C,B,q) и $(C,\gamma_*^k B,q)$, где γ — элемент модулярной группы, представляющий скручивание Дэна, соответствующей нодальной точке $\overline{C}_0$. Проекция этого пути на $\mathcal{S}_g$ будет петлей тогда и только тогда, когда (C,B,q) и $(C,\gamma_*^k B,q)$ проектируются в одну точку на $\mathcal{S}_g$, то есть $q = \gamma_*^k q$.

Обозначим через $A \in \mathrm{Sp}(V)$ симплектический оператор, соответствующий γ. Используя определение скручивания Дэна, нетрудно показать, что $A^2 = \mathrm{Id}$ и $A \neq \mathrm{Id}$ тогда и только тогда, когда $\overline{C}_0$ неприводима, то есть $\overline{C}_0 \in \Delta_0 \subset \overline{\mathcal{M}}_g$. Отсюда мы заключаем, что отображение $\overline{\mathcal{S}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g$ имеет простое ветвление над общей точкой Δ_0 и не разветвлено вне Δ_0.

2.2.6. Группа Пикара $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$

Структура группы Пикара стека $\mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}}$, теорема Рэндал–Вильямса

Как и в случае M_g, структурное описание группы Пикара S_g получается с использованием топологических методов. Известно, что линейные расслоения на S_g характеризуются своими классами Черна, более того, если $g \geq 9$, то $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}_g) \cong H^2(\mathrm{S}_g,\mathbb{Z})$ [58]. Однако, структура вторых когомологий S_g оказывается несколько сложнее, чем в случае M_g. Первым это заметим Корналба [13]: он указал, что в $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}_g)$ имеется кручение порядка 4 вида $\lambda + 2\mu$, где λ — это прообраз класса Ходжа и μ — некоторый другой класс, который мы определим ниже. Корналба также выдвинул гипотезу, что $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}_g)$ изоморфно абелевой группе определяемой копредставлением

$$\langle \lambda, \mu \ \mid \ 4(\lambda + 2\mu) \rangle.$$

Как оказалось, это копредставление описывает лишь подгруппу индекса два в $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}_g)$:

Теорема 2.9 ([58]). *Пусть $g \geq 9$. Существует $\nu \in \mathrm{Pic}(\mathrm{S}_g)$, такой, что*

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{S}_g) \cong \langle \lambda, \nu \ \mid \ 4(\lambda + 4\nu) \rangle.$$

Доказательство. см. [58, Теорема 1.16 и Пример 1.11]. □

В случае $\mathrm{S}_g^{\mathrm{even}}$ в качестве класса ν можно взять класс дивизора Θ_{null} и λ, см. [58, Раздел 6.3]. В случае $\mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}}$ рассматривается следующая конструкция.

Пусть $\pi : \mathrm{S}_{g,1} \to \mathrm{S}_g$ — универсальная кривая над S_g. На $\mathrm{S}_{g,1}$ имеется универсальное линейное расслоение $\Xi_g \to \mathrm{S}_{g,1}$, такое, что $\Xi_g^{\otimes 2} \cong \omega_\pi$ и сужение Ξ_g на слой π над (C,η) изоморфен η для любой точки (C,η). Следуя Корналбе (см. [13] и [12, Раздел 7]) мы определим

$$\mu = c_1(\det \pi_! \Xi_g),$$

где под $\det \pi_! \Xi_g$ понимается детерминантное расслоение, определенное Кнудсеном и Мамфордом [36].

Пусть теперь $\pi^{\mathrm{odd}} : \mathrm{S}_{g,1}^{\mathrm{odd}} \to \mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}}$ — сужение $\pi : \mathrm{S}_{g,1} \to \mathrm{S}_g$ на $\mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}}$. Рассмотрим локус

$$\Theta_3 = \{(C,\eta) \in \mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}} \ \mid \ h^0(C,\eta) \geq 3\}.$$

Тогда $\pi_*^{\mathrm{odd}} \Xi_g$, очевидно, будет линейным расслоением на $\mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}}$ вне Θ_3. Хорошо известно (см. [19] и Раздел 4.8.2), что $\operatorname{codim} \Theta_3 \geq 3$, откуда мы заключаем, что $\pi_*^{\mathrm{odd}} \Xi_g$ единственным образом продолжается до линейного расслоения на $\mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}}$, в частности, мы можем говорить про класс ν расслоения $\pi_*^{\mathrm{odd}} \Xi_g$ в $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}})$. Можно показать, что ν рационально эквивалентен $-\frac{\lambda}{4}$ (см. [58, Лемма 6.6]), откуда следует в частности, что ν можно использовать для копредставления из Теоремы 2.9.

Отметим, что сужение класса μ на $\mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}}$ совпадает с 2ν.

Структура группы Пикара стека $\overline{\mathrm{S}}_g^{\mathrm{odd}}$

Поскольку граница $\overline{\mathrm{S}}_g^{\mathrm{odd}} \setminus \mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}}$ является объединением неприводимых дивизоров $A_0, B_0, A_1, \ldots, A_{g-1}$ (см. Раздел 2.1.1), группа $\mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{S}}_g^{\mathrm{odd}})$ отличается от $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}_g^{\mathrm{odd}})$ добавлением классов этих дивизоров, которые мы обозначим через $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}$. Корналба [12], [13] показал, что классы $\lambda, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}$ линейно независимы.

Расслоение Ξ_g, очевидно, определено и на $\overline{\mathrm{S}}_{g,1}$, так что мы можем говорить про класс $\mu \in \mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{S}}_g)$. Также можно показать, что замыкание локуса Θ_3 в $\overline{\mathrm{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ имеет коразмерность не меньше двух, поэтому мы можем определить класс ν в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{S}}_g^{\mathrm{odd}})$ также, как это было сделано выше. Корналба показал, что

$$4(\lambda + 4\nu) = \alpha_0.$$

Из этих результатов Корналбы и Теоремы 2.9 следует

Предложение 2.2.3. *Пусть $g \geq 9$. Тогда группа $\mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{S}}_g^{\mathrm{odd}})$ свободно порождена классами $\lambda, \nu, \beta_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}$ над $\mathbb{Z}$.*

Глава 3. Тау-функция Бергмана и дивизор тэта-характеристик с кратными нулями

Эта глава посвящена применению свойств тау-функции Бергмана для изучения рациональной группы Пикара пространства модулей спинорных кривых $\overline{\mathcal{S}}_g$. В качестве основного результата мы предлагаем аналитическое доказательство следующей теоремы, доказанной Г. Фаркашем и А. Верра (см. [21, Теорема 0.5]):

Теорема 3.1. *Рассмотрим следующий дивизор на* $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$*:*

$$\overline{\Upsilon}_g = \overline{\{(C,\eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \mid \eta = \mathcal{O}_C(2x_1 + x_2 + \dots + x_{g-2})\}}.$$

Следующее соотношение выполняется в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$*:*

$$[\overline{\Upsilon}_g] = (g+8)\lambda - \frac{g+2}{4}\alpha_0 - 2\beta_0 - \sum_{j=1}^{[g/2]} 2(g-j)\alpha_j - \sum_{j=1}^{[g/2]} 2j\beta_j. \tag{3.0.1}$$

В качестве дополнительного результата мы предлагаем аналитическое доказательство следующей теоремы, доказанной Г. Фаркашем (см. [20, Теорема 0.2]):

Теорема 3.2. *Определим дивизор* $\Theta_{\mathrm{null}} \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$ *как*

$$\Theta_{\mathrm{null}} = \overline{\{(C,L) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{even}} \mid \dim H^0(C,L) > 0\}}.$$

Следующее соотношение выполняется в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}) \otimes \mathbb{Q}$*:*

$$[\Theta_{\mathrm{null}}] = \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{16}\alpha_0^+ - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{[g/2]} \beta_j^+. \tag{3.0.2}$$

Изложение результатов основано на статье [7].

3.1. Пространства модулей абелевых дифференциалов

В этом разделе мы обсудим конструкцию и общие свойства тау-функции Бергмана на пространстве модулей абелевых дифференциалов. Подробную информацию о пространстве модулей абелевых дифференциалов можно найти в [4], [41], [32], [40], [11] и по ссылкам далее, подробное изложение конструкции тау-функции Бергмана дано в [38] (см. также [44], [7]).

Как мы уже упоминали, на универсальной кривой $\pi : \mathrm{M}_{g,1} \to \mathrm{M}_g$ над стеком модулей существует естественное линейное расслоение ω_π. Его пушфорвард является векторным расслоением

$$\mathbb{E}_g = \pi_* \omega_\pi,$$

называемым расслоением Ходжа. Ранг $\mathbb{E}_g$ равен g и слой $\mathbb{E}_g$ над точкой $[C] \in \mathrm{M}_g$ естественно изоморфен $H^0(C, \omega_C)$. Таким образом, если мы обозначим через 0 нулевое сечение $\mathbb{E}_g$, то $\mathcal{H}_g = \mathbb{E}_g \setminus 0$ естественным образом отождествляется со стеком модулей пар (C, w), где C — гладкая кривая рода g и w — ненулевой голоморфный дифференциал на ней.

Поскольку данная глава посвящена аналитическим конструкциям, мы впредь будем использовать термин "пространство" вместо "стек", подразумевая соответствующий орбифолд.

Пространство $\mathcal{H}_g$ может быть стратифицировано следующим образом. Для каждого (неупорядоченного) разбиения $\mu = \{m_1, \ldots, m_n\}$ числа $2g - 2$ на положительные слагаемые положим

$$\mathcal{H}_g(\mu) = \{(C, w) \in \mathcal{H}_g \ \mid \ \mathrm{div} w = m_1 p_1 + \cdots + m_n p_n, \ p_i \neq p_j, \ i \neq j\}.$$

Очевидно, $\mathcal{H}_g(\mu)$ является локально замкнутым подпространством $\mathcal{H}_g$ и

$$\mathcal{H}_g = \bigsqcup_{\mu \vdash 2g-2} \mathcal{H}_g(\mu).$$

Заметим, что если $(C, w) \in \mathcal{H}_g(\mu)$, то $|w|^2$ задает плоскую метрику на C, регулярную вне нулей w. В нулях же метрика $|w|^2$ имеет конические особенностями с коническими углами $2\pi(m_i + 1)$. Поверхности с такой структурой получаются, например, из плоских многоугольников отождествлением сторон. Пусть $P \subset \mathbb{C}$ — некоторый многоугольник и $e_1, \ldots, e_{2N}$ — какая-то нумерация его сторон (e_i не обязательно смежна e_{i-1}), причем e_i получается из e_{N+i} параллельным переносом для всякого i. Пусть C получается из P отождествлением e_i и e_{N+i} для всякого i, тогда C — замкнутая поверхности и комплексная структура на $\mathbb{C}$ естественным образом опускается на C. Больше того, если z — координата на $\mathbb{C}$, то dz индуцирует 1-форму на C, голоморфную вне вершин многоугольника P, и $|dz|^2$ является метрикой с коническими особенностями в этих вершинах. В случае, если конические углы в этих этих особенностях кратны 2π, то dz продолжается до голоморфного дифференциала на C с нулями в этих особенностях.

Заметим, что векторы в $\mathbb{C}$, соответствующие сторонам $e_1, \ldots, e_N$, задают естественные координаты на пространстве всех многоугольников P, имеющих такой тип, как описано выше. Аналогичным способом можно построить координаты на $\mathcal{H}_g(\mu)$. Для того, чтобы их описать, нам потребуется несколько определений.

Определение 3.1.1. Маркировкой Торелли ρ кривой C называется симплектический базис $\{a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g\}$ в $H_1(C,\mathbb{Z})$.

Пусть $(C,w)\in\mathcal{H}_g(\mu)$, $p_1,\ldots,p_n\in C$ — нули w и $\rho=\{a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g\}$ — маркировка Торелли кривой C. Будем считать, что ρ представлена ориентированными простыми петлями, не проходящими через нули w, которые тоже обозначим через $a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g$. Пусть $l_1,\ldots,l_{n-1}$ — простые пути на C, не пересекающие $a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g$ и такие, что l_i соединяет p_n и p_i. Пару ρ,l будем называть оснащением (C,w).

Определение 3.1.2. Будем обозначать через $\widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)$ пространство модулей троек (C,ρ,w), где $(C,w)\in\mathcal{H}_g(\mu)$ и ρ — маркировка Торелли кривой C. Будем обозначать через $\widetilde{\mathcal{H}}^l_g(\mu)$ пространство модулей четверок (C,ρ,l,w), где $(C,w)\in\mathcal{H}_g(\mu)$ и ρ,l — оснащение C.

Заметим, что $\rho,l=\{a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g,l_1,\ldots,l_{n-1}\}$ образует базис в относительных гомологиях $H_1(C;Zeros(w),\mathbb{Z})$, в частности,

$$h_1(C;Zeros(w),\mathbb{C})=2g+n-1.$$

Рассмотрим отображение $\widetilde{\mathcal{H}}^l_g(\mu)\to\mathbb{C}^{2g+n-1}$, задаваемое композицией

$$(C,\rho,l,w)\xmapsto{w\mapsto[w]} H^1(C;Zeros(w),\mathbb{C})\to\mathbb{C}^{2g+n-1}, \tag{3.1.1}$$

где второе отображение задается базисом, двойственным к ρ,l. Хорошо известна следующая теорема (см. [32], [3]):

Теорема 3.3. *Отображение* (3.1.1) *является локальным диффеоморфизмом. В частности, семейство функций*

$$z_j=\int_{a_j}w,\quad z_{g+j}=\int_{b_j}w,\quad z_{2g+j}=\int_{l_j}w$$

задают локальные координаты на $\widetilde{\mathcal{H}}^l_g(\mu)$ *в окрестности любой точки.*

Координаты $z_1,\ldots,z_{2g+n-1}$ называются *гомологическими координатами.*

Заметим, что четверка (C,ρ,l,w) не имеет нетривиальных автоморфизмов, поэтому пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^l_g(\mu)$ является гладким комплексным многообразием. Забывающее отображение $\widetilde{\mathcal{H}}^l_g(\mu)\to\mathcal{H}_g(\mu)$ является орбифолдным накрытием, в частности, $z_1,\ldots,z_{2g+n-1}$ задают локальные координаты на $\mathcal{H}_g(\mu)$. Мы получаем следующее

Следствие 3.1.1. *Страт* $\mathcal{H}_g(\mu)$ *является гладким комплексным орбифолдом размерности* $2g+n-1$.

3.2. Тау-функция Бергмана. Определение и общие свойства

Пусть $(C,\rho,l,w)\in\widetilde{\mathcal{H}}_g^l(\mu)$ и $\rho,l=\{a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g,l_1,\dots,l_{n-1}\}$, как и выше. Пусть $\pi_1,\pi_2:C\times C\to C$ обозначают проекции на первый и второй факторы и $\mathrm{Diag}\subset C\times C$ обозначает диагональ. Каноническим бидифференциалом (или ядром Бергмана) на C называется (единственный) симметричный мероморфный бидифференциал $B(p,q)$ полюсом второго порядка на диагонали с бивычетом 1 и нулевыми a-периодами. С алгебраической точки зрения, B — это сечение линейного расслоения $\pi_1^*\omega_C\otimes\pi_2^*\omega_C\otimes\mathcal{O}_{C\times C}(2\mathrm{Diag})$, однозначно определенное условиями

- B симметрично,
- $B|_{\mathrm{Diag}}$ отображается в $1\in H^0(\mathrm{Diag},\mathcal{O}_{\mathrm{Diag}})$ при естественном отображении
$$\pi_1^*\omega_C\otimes\pi_2^*\omega_C\otimes\mathcal{O}_{C\times C}(2\mathrm{Diag})|_{\mathrm{Diag}}\to\mathcal{O}_{\mathrm{Diag}},$$
- если $q\in C$ фиксировано, $1\le j\le g$ и $q\notin a_j$, то
$$\int\limits_{p\in a_j}B(p,q)=0.$$

Пусть ξ — некоторая локальная координата на C, тогда B можно асимптотически записать в виде
$$B(p,q)=\frac{d\xi(p)d\xi(q)}{(\xi(p)-\xi(q))^2}+\frac{1}{6}S_B\cdot d\xi(p)d\xi(q)+O(\xi(p)-\xi(q))^2.$$
Коэффициент S_B называется связностью Бергмана.

Напомним, что Шварциан функции f определяется как $Sf=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$. Используя локальную координату ξ мы можем придать смысл производным функции $f(p)=\int^p w$ и определить $S_w=Sf$, то есть $S_w=\frac{w''}{w}-\frac{3}{2}\left(\frac{w'}{w}\right)^2$. Нетрудно проверить, что $\frac{S_B-S_w}{(d\xi)^2}$ не зависит от выбора ξ, то есть S_B-S_w является корректно определенным квадратичным дифференциалом на C.

Пусть теперь семейство петель $s_1,\dots,s_{2g+n-1}$ на $C\smallsetminus Zeros(w)$ представляет базис в $H_1(C\smallsetminus Zeros(w),\mathbb{C})$, двойственный по Пуанкаре к базису ρ,l. Следуя [38], рассмотрим связность в тривиальном расслоении на $\widetilde{\mathcal{H}}_g^l(\mu)$, заданную в гомологических координатах $z_1,\dots,z_{2g+n-1}$ следующим образом:
$$d_B=d+\sum_{j=1}^{2g+n-1}\frac{1}{12\pi i}\int_{s_j}\frac{S_B-S_w}{w}\,dz_j. \tag{3.2.1}$$
В работе [38] показано, что связность d_B имеет нулевую кривизну, таким образом, мы можем говорить о плоских сечениях относительно это связности.

Замечание 3.2.1. Для любой функции $f(\xi)$ имеет место тождество

$$\frac{df(\xi_1)df(\xi_2)}{(f(\xi_1)-f(\xi_2))^2} = \frac{d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1-\xi_2)^2} + \frac{1}{6}Sf(\xi_1)\cdot d\xi_1 d\xi_2 + O(\xi_1-\xi_2)^2.$$

В частности, если мы локально определим $z(p) = \int^p w$, то

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{S_B - S_w}{w}|_p = \frac{B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}}{w(p)}|_{p=q}.$$

В разделе 3.1 работы [38] показано, что связность d_B не зависит от выбора l в оснащении ρ, l пары (C, w). Таким образом, мы можем опустить эту связность на $\widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)$; получившуюся связность будем также обозначать d_B.

Определение 3.2.1. Ненулевое решение уравнения

$$d_B\tau = 0 \tag{3.2.2}$$

называется тау-функцией Бергмана.

В работе [38, Теорема 6] решение уравнения (3.2.2) построено в явном виде с использованием тэта-функций. Будем обозначать выражение, построенное в [38], через τ_B. Значение $\tau_B(C,\rho,w)$, $(C,\rho,w)\in\widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)$ определяется с точностью до некоторых корней из единицы, таким образом, некоторая степень τ_B глобально определена, как голоморфная функция на $\widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)$.

Заметим, что на пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)$ действует группа $\mathbb{C}^*\times\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$, где группа $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ изменяет маркировку Торелли, а действие $\mathbb{C}^*$ определяется как

$$\xi\cdot(C,\rho,l,w) = (C,\rho,l,\xi w).$$

Пусть Ω обозначает матрицу b-периодов для C, ассоциированную с базисом ρ, l. Следующее наблюдение является ключевым для нашей работы:

Теорема 3.4. *Функция τ_B обладает следующими свойствами:*

- $\tau_B(C,\rho,w)\neq 0$ *для всякого* $(C,\rho,l,w)\in\widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)$,
- $\tau_B(C,\rho,\xi w) = \xi^{\frac{1}{12}\left(2g-2+n-\sum_{k=1}^n\frac{1}{m_k+1}\right)}\tau_B(C,\rho,l,\xi)$
- *если* $\gamma\in\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$, *то*

$$\tau_B(C,\gamma\rho,w) = \det(C\Omega+D)\tau_B(C,\rho,l,w).$$

Доказательство. см. [44, Теорема 1, Лемма 2, Лемма 3]. ∎

Отметим также, что второе утверждение Теоремы 3.4 легко следует из свойств d_B, см. Лемма 3.7.1.

Заметим, что $\widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)/\operatorname{Sp}(2g,\mathbb{Z}) = \mathcal{H}_g(\mu)$ и действие $\mathbb{C}^*$, очевидно, опускается на $\mathcal{H}_g(\mu)$. Пусть $\mathcal{L} \to \mathcal{H}_g(\mu)/\mathbb{C}^*$ обозначает тавтологическое линейное расслоение относительно этого действия. Будем также обозначать через $\mathbb{E}_g \to \mathcal{H}_g(\mu)/\mathbb{C}^*$ прообраз расслоения Ходжа относительно забывающего отображения $\mathcal{H}_g(\mu)/\mathbb{C}^* \to \mathrm{M}_g$, положим также

$$\Lambda := \det \mathbb{E}_g.$$

Теорема 3.4 имеет следующее следствие:

Следствие 3.2.1. *Пусть $N > 0$ — такое целое число, что $lcm(12, m_1 + 1, \ldots, m_n + 1) \mid N$ и τ_B^N определено, как голоморфная функция на $\widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)$. Тогда τ_B^N опускается до сечения расслоения $\mathcal{L}^{\otimes \frac{-N}{12}\left(2g-2+n-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k+1}\right)} \otimes \Lambda^{\otimes N} \to \mathcal{H}_g(\mu)/\mathbb{C}^*$. Это сечение нигде не обращается в ноль.*

3.3. Тау-функция Бергмана на пространстве $\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$

Заметим, что если μ — это разбиение $2g-2$ на четные слагаемые $m_1, \ldots, m_n$ и $(C, w) \in \mathcal{H}_g(\mu)$, то $\mathcal{O}_C(\frac{1}{2}\mathrm{div} w)$ задает некоторую тэта-характеристику на C. Это сопоставление индуцирует отображение $\mathcal{H}_g(\mu) \to \mathcal{S}_g$.

Для краткости будем обозначать через $\mathcal{H}_g([2^{g-1}])$ страту, соответствующий дифференциалам с $g-1$ различными нулями кратности два и пусть $\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}]) \subset \mathcal{H}_g([2^{g-1}])$ обозначает его компоненту, соответствующую нечетным тэта-характеристикам. Заметим, что $\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$ связно (см. [41]) и, следовательно, неприводимо. Образ естественного отображения

$$\pi : \mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}]) \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$$

совпадает с открытым подмножеством $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \setminus \Upsilon_g$. Заметим, что, поскольку для общей нечетной спинорной кривой (C, η) верно $h^0(C, \eta) = 1$, отображение π взаимно-однозначно вне некоторого замкнутого в топологии Зарисского множества.

Пусть теперь τ_B обозначает тау-функцию Бергмана на $\widetilde{\mathcal{H}}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$ (см. Раздел 3.2) и положим

$$\tau = \tau_B^{72}$$

Заметим, что из уравнения (3.2.2), определяющего тау-функцию Бергмана, следует уравнение

$$d \log \tau = -\frac{6}{\pi i} \sum_{j=1}^{2g+n-1} \int_{s_j} \frac{S_B - S_w}{w}\, dz_j, \tag{3.3.1}$$

где z_j — гомологические координаты (см. Раздел 3.1).

Теорема 3.4 влечет

Лемма 3.3.1. *Для любого* $t \in \mathbb{C}^*$

$$\tau(C, \{a_j, b_j\}_{j=1}^g, t\,\omega) = t^{16(g-1)}\,\tau(C, \{a_j, b_j\}_{j=1}^g, \omega).$$

Следствие 3.2.1 может быть переписано в нашем случае как

Следствие 3.3.1. *Функцию* τ *естественно рассматривать как нигде не обращающееся в ноль голоморфное сечение линейного расслоения* $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{16(g-1)}, \Lambda^{72})$ *на* $\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])/\mathbb{C}^*$.

3.4. Тэта-характеристики, как векторы из $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$. Договоренность об обозначениях

Пусть C — гладкая кривая рода g. Напомним, что, согласно Разделу 2.2.1 Главы 2 тэта-характеристики на C находятся во взаимно-однозначном соответствии с квадратичными формами на $J_2(C) = H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Пусть теперь $\rho = \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ — маркировка Торелли на C. Используя базис, двойственный к ρ, в $H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ мы можем отождествить $H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ с симплектическим пространством $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$ относительно стандартной симплектической формы на нем. Пусть теперь $\eta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$ и $v \in H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ — элемент, соответствующий $(x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$ при указанном выше изоморфизме. Тогда определим

$$q_\eta(v) = \sum_{j=1}^g x_j y_j + \sum_{j=1}^g (\eta_j y_j + \eta_{g+j} x_j).$$

Нетрудно видеть, что q_η, определенная таким образом, является квадратичной формой на $H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ и

$$\mathrm{Arf}(q_\eta) = \sum_{j=1}^g \eta_j \eta_{g+j}$$

(ср. Лемма 2.2.1). Резюмируя все вышесказанное, мы заключаем, что каждый выбор маркировки Торелли ρ на кривой C рода g задает естественную биекцию между тэта-характеристиками на C и векторами из $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$. Так, допуская некоторую вольность, до конца этой главы мы будем называть тэта-характеристиками векторы $\eta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$, имея в виду тэта-характеристики на кривых с маркировкой Торелли. Такая договоренность позволит существенно упростить изложение некоторых фактов о тэта-функциях. В случае, когда это будет необходимо, мы будем вводить отдельное обозначение для линейного расслоения на C, соответствующего тэта-характеристике. Данная договоренность действует до конца текущей главы.

3.5. Асимптотическое поведение тэта-функции при вырождении кривой

Все факты, изложенные в этом разделе, хорошо известны и могут быть найдены в классической литературе (см., Например, [22]).

Случай приводимых кривых. Пусть $C = C_1 \cup C_2$ — приводимая кривая рода g с одной нодальной точкой, где C_1, C_2 - ее неприводимые компоненты. Обозначим род C_1 через j. Пусть $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2$ будет некоторой тэта-характеристикой, причем $\eta_1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2j}$ и $\eta_2 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2(g-j)}$.

Пусть $p_i \in C_i$, $i = 1, 2$, это точки такие, что $C = C_1 \sqcup C_2/_{p_1 \sim p_2}$, и пусть $\zeta_i : U_i \to \mathbb{C}$ будет некоторой локальной координатой в окрестности p_i, такой что $\zeta_i(p_i) = 0$. Будем предполагать, что $t \in \mathbb{C}$ — параметр, принимающий достаточно малые значения, рассмотрим семейство кривых C_t, определяемое следующим образом:

$$C_t = (C_1 \smallsetminus U_1) \cup (C_2 \smallsetminus U_2) \cup \{(x_1, x_2, t) \in U_1 \times U_2 \mid \zeta_1(x_1)\, \zeta_2(x_2) = t\}. \tag{3.5.1}$$

Ясно, что C_0 изоморфна C, а C_t гладкие при $t \neq 0$. Более того, образ некоторой окрестности $0 \in \mathbb{C}$ при отображении $t \to [C_t] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ трансверсален дивизору Δ_j.

Зафиксируем маркировки Торелли $\rho_1 = \{a_i, b_i\}_{i=1}^{j}$ на C_1 и $\rho_2 = \{a_i, b_i\}_{i=j+1}^{g}$ на C_2. Маркировка $\rho_1 \cup \rho_2$ индуцирует маркировку Торелли на C_t для всех $t \neq 0$. Пусть $v_1, \ldots, v_j \in H^0(C_1, \omega_{C_1})$ и $v_{j+1}, \ldots, v_g \in H^0(C_2, \omega_{C_2})$ обозначают базисы нормированных голоморфных дифференциалов на C_1 и C_2 соответственно.

Обозначим матрицу b-периодов для C_t относительно маркировки $\rho_1 \cup \rho_2$ через Ω_t. Пусть

$$\theta[\eta](\cdot, \Omega_t) : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$$

— тэта-функция, соответствующая Ω_t с характеристикой η. Обозначим матрицы b -периодов на C_1 и C_2 Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Предложение 3.5.1. *Пусть $W_1 = (w_1, \ldots, w_j) \in \mathbb{C}^j$ и $W_2 = (w_{j+1}, \ldots, w_g) \in \mathbb{C}^{g-j}$. Положим $R_i = \frac{v_i}{d\zeta_1}|_{p_1}$, если $i \leq j$ и $R_i = \frac{v_i}{d\zeta_2}|_{p_2}$, если $i > j$. Тогда*

$$\begin{aligned} \theta[\eta](W, \Omega_t) = \;& \theta[\eta_1](W_1, \Omega_1)\, \theta[\eta_2](W_2, \Omega_2) \\ & + 4t \sum_{i,k=1}^{g} \tfrac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_k} \Big(\theta[\eta_1](W_1, \Omega_1)\, \theta[\eta_2](W_2, \Omega_2)\Big)\, R_i R_k + O(t^2) \end{aligned}$$

при $t \to 0$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^g$, где $W = W_1 \oplus W_2 \in \mathbb{C}^g$.

Доказательство. Предложение немедленно следует из разложения (см. [22, стр. 41])

$$\Omega_t = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{pmatrix} + \frac{\pi i\, t}{2} \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & \dots & R_g \end{pmatrix} + O(t^2).$$

□

Случай неприводимых кривых. Пусть C — гладкая кривая рода $g-1$, а $p_1, p_2 \in C$ — две различные точки. Тогда $C/_{p_1\sim p_2}$ — неприводимая кривая с одной нодальной точкой рода g. Рассмотрим тэта-характеристику $\eta = \eta_1 \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix}$, где $\eta_1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2(g-1)}$ и $\varepsilon, \delta \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Выберем координату $\zeta_i : U_i \to \mathbb{C}$ возле p_i, можно считать, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ и $\zeta_i(p_i) = 0$. Для достаточно малого $t \in \mathbb{C}$ рассмотрим кривую C_t, определяемую следующим образом:

$$C_t = (C \setminus (U_1 \cup U_2)) \cup \{(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \mid \zeta_1(x_1)\, \zeta_2(x_2) = t\}. \tag{3.5.2}$$

Ясно $C_0 = C/_{p_1\sim p_2}$, тогда как C_t гладкая и имеет род g, если $t \neq 0$. Образ $t \mapsto [C_t] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ трансверсален Δ_0.

Пусть a — простая замкнутая кривая на C обходящая вокруг p_1 и лежащая вне $U_1 \cup U_2$. Для маркировки Торелли ρ на C зафиксируем набор петель $\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g-1}$, представляющих ρ, и выберем простой путь b от p_1 до p_2, который не пересекает эти петли. Тогда набор $\{a, b\} \cup \{a_i, b_i\}_{i=1}^{g-1}$ представляет маркировку Торелли на C_t для всех достаточно малых $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$. Заметим, что представить маркировку Торелли для всех t таким образом невозможно из-за монодромии $b \mapsto b + a$, возникающей, когда t обходит вокруг нуля.

Пусть $L_t = L_t(\eta)$ будет спинорным расслоением на C_t, соответствующим η относительно базиса $\{a, b\} \cup \{a_i, b_i\}_{i=1}^{g-1}$, и пусть $L_{t,0} = L_t(0)$ будет спинорным расслоением с нулевой тэта-характеристикой. По определению мы имеем $(L_t \otimes L_{t,0}^*)(a) = \delta$ и $(L_t \otimes L_{t,0}^*)(b) = \varepsilon$, где $(L_t \otimes L_{t,0}^*) \in H^1(C_t, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ — класс когомологий, соответствующий расслоению $L_t \otimes L_{t,0}^*$.

Обозначим через Ω_t матрицу b-периодов C_t относительно $\{a, b\} \cup \{a_i, b_i\}_{i=1}^{g-1}$ и рассмотрим соответствующую тэта-функцию с характеристикой η:

$$\theta[\eta](\cdot, \Omega_t) : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}.$$

Обозначим через Ω матрицу b-периодов на C относительно ρ.

Предложение 3.5.2. *Предположим, что $\delta = 1$. Тогда $\theta[\eta](\cdot, \Omega_t)$ определена с точностью до корня 8-й степени из единицы и имеет следующую асимптотику на каждом компактном* *подмножестве* $\mathbb{C}^g$

$$\theta[\eta](w_1,\dots,w_g,\Omega_t) = t^{1/8}\Big(e^{-cw_g+r}\,\theta[\eta_1](w_1,\dots,w_{g-1},\Omega)+e^{cw_g}\,\theta[\eta_1](w_1+c_1,\dots,w_{g-1}+c_{g-1},\Omega)+O(t)\Big),$$

где c, r, c_j *не зависят от* $\{w_j\}$*, но зависят от модулей кривой, причем* $c \neq 0$ *и* $\theta[\eta_1](c_1,\dots,c_{g-1},\Omega) \neq 0$ *вне некоторого дивизора на пространстве модулей* $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,2}$*.*

Замечание 3.5.1. Заметим, что если $\delta = 1$, то расслоение $L_t \to C_t$ хорошо определено для всех маленьких $t \in \mathbb{C}$, так что $(C_t, L_t)_{t\neq 0}$ представляет семейство гладких спинорных кривых. Если η — нечетная характеристика, то замыкание этого семейства в $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ трансверсально граничному дивизору A_0.

Предложение 3.5.3. *Предположим, что* $\delta = 0$*. Тогда* $\theta[\eta](\cdot,\Omega_t)$ *зависит от выбора ветви* $\sqrt{t}$ *и имеет следующие асимптотики равномерно на компактных подмножествах* $\mathbb{C}^g$*:*

$$\begin{aligned}\theta[\eta](w_1,\dots,w_g,\Omega_t) = \;&\theta[\eta_1](w_1,\dots,w_{g-1},\Omega)\\ &+\sqrt{t}\,e^{cw_g+r}\,\theta[\eta_1](w_1+c_1,\dots,w_{g-1}+c_{g-1},\Omega)\\ &+\sqrt{t}\,e^{-cw_g-r}\,\theta[\eta_1](w_1-c_1,\dots,w_{g-1}-c_{g-1},\Omega)+O(t),\end{aligned}$$

где c, r, c_j *— зависящие от модулей константы и* $c\cdot\theta[\eta_1](c_1,\dots,c_{g-1},\Omega) \neq 0$ *вне некоторого дивизора на пространстве модулей.*

Замечание 3.5.2. Заметим, что в случае $\delta = 0$ семейство расслоений $L_t \to C_t,\ t \neq \mathbb{R}_{\geq 0}$, не может быть продолжено в окрестность $t = 0$. Чтобы это обойти, можно рассмотреть двулистное накрытие $s^2 = t$. Тогда, если η является нечетной тэта-характеристикой, семейство спинорных кривых $(C_s, L_s \to C_s),\ s^2 = t,\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, хорошо определено и его замыкание в $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ трансверсально граничному дивизору B_0.

Два приведенных выше утверждения прямо следуют из асимптотики Ω_t (см. [22, стр. 53]):

$$\Omega_t = \begin{pmatrix}\Omega & R^T\\ R & \log t + c\end{pmatrix} + O(t), \tag{3.5.3}$$

где $R \in \mathbb{C}^{g-1}$ и $c \in \mathbb{C}$ — константы, зависящие от модулей.

3.6. Нечетный спинор ς, явное представление через тэта-функцию

Рассмотрим точку в $\widetilde{\mathcal{H}}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$, представленную тройкой (C, ρ, ω). Тогда $\sqrt{\omega}$ — это сечение нечетного спинорного расслоения L. Обозначим через Ω матрицу b-периодов для C относительно ρ. Пусть $\theta[\eta](\cdot,\Omega) : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ будет тэта-функцией с нечетной характеристикой η, задаваемой L и

ρ. Рассмотрим дифференциал

$$\varsigma_C(p) = d_x\, \theta[\eta](\mathcal{A}(x-p), \Omega)|_{x=p}\,,$$

где $\mathcal{A}$ — это отображение Абеля (следует обратить внимание, что $\varsigma_C(p)$ не зависит от подъема $\mathcal{A}(x-p)$ на $\mathbb{C}^g$, поскольку $\theta[\eta](0,\Omega) = 0$). Этот дифференциал отличен от нуля тогда и только тогда, когда $\dim H^0(C, L) = 1$, и является в этом случае квадратом сечения L. Следовательно,

$$\varsigma_C = c\,\omega$$

для некоторой константы c.

Опишем асимптотику ς при вырождении кривой.

Случай приводимой кривой. Пусть $C = C_1 \sqcup C_2/_{p_1 \sim p_2}$ — приводимая кривая с одной нодальной точкой рода g; мы предполагаем, что C представляет собой общую точку в $\overline{\mathcal{M}}_g \smallsetminus \mathcal{M}_g$. Рассмотрим кривую C_t, построенную как в Разделе 3.5 (см. (3.5.1)), и пусть ρ_i будет маркировкой Торелли на C_i. Напомним, что $\rho_1 \cup \rho_2$ индуцирует маркировку Торелли на C_t для каждого $t \neq 0$. Зафиксируем нечетную тэта-характеристику $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2$, такую, что $\eta_1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2j}$ и $\eta_2 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2(g-j)}$, где j — род C_1, а η_1 — нечетная. Заметим, что условие, что η нечетная влечет, что η_2 четно.

Пусть $K_i \subset C_i \smallsetminus \{p_i\}$ — компактное подмножество. Можно считать, что $K_i \subset C_t$ для всех достаточно малых t. Тогда из предложения 3.5.1 следует, что

$$\varsigma_{C_t}(p) = v_1(p) + O(t) \tag{3.6.1}$$

равномерно по K_1 при $t \to 0$, где v_1 — ненулевой голоморфный дифференциал на C_1, и

$$\varsigma_{C_t}(p) = t\, v_2(p) + O(t^2) \tag{3.6.2}$$

равномерно по K_2 при $t \to 0$, где v_2 — это ненулевой мероморфный дифференциал на C_2, имеющий полюс порядка два в p_2 и никаких других полюсов.

Случай неприводимых кривых. Пусть C — гладкая кривая рода $g-1$, а $p_1, p_2 \in C$ — различные точки. Предположим, что $C/_{p_1 \sim p_2}$ представляет собой общую точку в $\overline{\mathcal{M}}_g \smallsetminus \mathcal{M}_g$. Рассмотрим кривую C_t, построенную как в Разделе 3.5 (см. (3.5.2)).

Зафиксируем нечетную тэта-характеристику $\eta = \eta_1 \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix}$, где $\eta_1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2(g-1)}$, и выберем маркировку Торелли на C_t для $t \in \mathbb{D} \smallsetminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, как это было сделано в предыдущем подразделе.

Пусть K — компактное подмножество $C \smallsetminus \{p_1, p_2\}$. Рассмотрим следующие два случая:

Случай 1. Пусть $\delta = 1$. В этом случае η_1 и ε имеют разные четности. Пусть $L_t \to C_t$ будет спинорным расслоением с характерной η; тогда согласно Замечанию 3.5.1 пара (C_t, L_t) - это семейство из $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$, замыкание которого трансверсально A_0. Утверждение 3.5.2 означает, что ς_{C_t} определен с точностью до корня 8-й степени из единицы и имеет следующую асимптотику:

$$\varsigma_{C_t}(p) = t^{1/8}(v(p) + O(t)), \tag{3.6.3}$$

равномерно на K при $t \to 0$, где v — ненулевой мероморфный дифференциал на C, имеющий простые полюса в p_1 и p_2 и никаких других полюсов.

Случай 2. Пусть $\delta = 0$. Тогда η_1 должна быть нечетной. Введем новый параметр $r = \sqrt{t}$. Пусть $L_r \to C_{t(r)}$ будет спинорным расслоением с характеристикой η; тогда согласно Замечанию 3.5.2 пара $(C_{t(r)}, L_r)$ является семейством в $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$, замыкание которого трансверсально граничному дивизору B_0. Из Предложения 3.5.3 следует, что $\varsigma_{C_{t(r)}}$ хорошо определено для всех $r \neq 0$ и имеет асимптотику

$$\varsigma_{C_{t(r)}}(p) = v(p) + rv_1(p) + O(r^2) \tag{3.6.4}$$

равномерно на K при $r \to 0$, где v — некоторый голоморфный дифференциал, а v_1 — мероморфный дифференциал на C, имеющий простые полюсы в p_1, p_2 и никаких других полюсов.

Проанализируем глобальное поведение ς. Пусть $\nu : \widetilde{\mathcal{H}}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}]) \to \mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$ обозначает забывающее отображение. Рассмотрим сначала ς как сечение тавтологического линейного расслоения $\nu^*\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{H}}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])/\mathbb{C}^*$.

Напомним, что группа $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z})$ действует на $\widetilde{\mathcal{H}}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$, изменяя маркировку Торелли, и $\widetilde{\mathcal{H}}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])/\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z}) = \mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$. Дифференциал ς преобразуется под действием $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z})$ следующим образом:

Предложение 3.6.1. *Пусть (C, ρ, L) обозначает Торелли отмеченную спинорную кривую, а σ является $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z})$ — преобразованием, действующим на $H_1(C)$. Обозначим $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ матрицу σ относительно базиса ρ. Тогда*

$$\varsigma_{\sigma_* C} = \gamma\sqrt{\det(\sigma_{12}\Omega + \sigma_{11})} \cdot \varsigma_C,$$

где $\gamma^8 = 1$.

Утверждение следует непосредственно из модулярных свойств тэта-функций (см. [52]).

Следствие 3.6.1. ς^8 *можно рассматривать как сечение расслоения* $\mathcal{L}^8 \otimes \Lambda^4 \to \mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])/\mathbb{C}^*$.

3.7. Асимптотика τ при вырождениях

Начнем со следующего технического наблюдения. Пусть C — риманова поверхность рода g, а v — некоторый дифференциал на C. Гомологические координаты, построенные в Разделе 3.1 для голоморфных дифференциалов, можно построить совершенно аналогично и для мероморфного дифференциала v с нулевыми вычетами. На всякий случай, повторим определение в этом случае. Обозначим нули v через $p_1, \ldots, p_d \in C$. Рассмотрим простые пути l_j от p_d до p_j для каждого $j = 1, \ldots, d-1$. Пусть $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ — это простые петли на $C \setminus \{p_1, \ldots, p_d\}$, не пересекающиеся с l_j и такие, что их классы гомологий в $H_1(C)$ образуют симплектический базис. Обозначим $s_1, \ldots, s_{2g+d-1}$ базис в $H_1(C \setminus \{p_1, \ldots, p_d\})$, двойственный к базису, представленному $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, l_1, \ldots, l_{d-1}$ в группе относительных гомологий $H_1(C; \{p_1, \ldots, p_d\})$; имеем $s_j = -b_j, s_{g+j} = a_j$, а s_{2g+j} гомологично небольшой положительно ориентированной окружности вокруг p_j. Тогда положим

$$\begin{aligned} z_j &= \int_{a_j} v, \quad j = 1, \ldots, g, \\ z_{j+g} &= \int_{b_j} v, \quad j = 1, \ldots, g, \\ z_{j+2g} &= \int_{l_j} v, \quad j = 1, \ldots, d-1. \end{aligned}$$

Далее будем считать, что v — голоморфный дифференциал, или мероморфный дифференциал с полюсами порядка два и нулевыми вычетами. Пусть S_B — проективная связь Бергмана относительно маркировки Торелли, соответствующей $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$. Обозначим через m_k кратность нуля p_k.

Лемма 3.7.1. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\sum_{k=1}^{2g+d-1} z_k \int_{s_k} \frac{S_B - S_v}{v} = -\pi i \left(d + \sum_{k=1}^{d} (m_k - \frac{1}{1+m_k}) \right) \tag{3.7.1}$$

Доказательство. Из билинейных соотношений Римана получаем, что

$$\sum_{k=1}^{2g} z_k \int_{s_k} \frac{S_B - S_v}{v} = -2\pi i \sum_{x \in C} \operatorname{Res}_x \left(\frac{S_B - S_v}{v} \int_{p_d} v \right).$$

Вычисляя вычеты, получаем

$$-2\pi i \sum_{x \in C} \operatorname{Res}_x \left(\frac{S_B - S_v}{v} \int_{p_d} v \right) = -\sum_{k=2g+1}^{2g+d-1} z_k \int_{s_k} \frac{S_B - S_v}{v} - \pi i \left(d + \sum_{k=1}^{d} (m_k - \frac{1}{1+m_k}) \right)$$

что влечет (3.7.1). □

Замечание 3.7.2. Если v — голоморфный дифференциал с двойными нулями, то правая часть (3.7.1) равна $\frac{8}{3}(1-g)$. Отсюда следует свойство однородности тау-функции.

Фактически (3.7.1) означает, что если функция F определена на некотором открытом подмножестве $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{H}}_g(\mu)$, $\mu = (m_1, \ldots, m_d)$, и удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\partial_{z_j} \log F(C, v) = \frac{-\alpha}{\pi i} \int_{s_j} \frac{S_B - S_v}{v}, \quad j = 1, \ldots, 3g + d - 1,$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{Q}$, то она должна удовлетворять свойству однородности

$$F(C, tv) = t^{\alpha\left(d + \sum\limits_{k=1}^{d}(m_k - \frac{1}{1+m_k})\right)} F(C, v).$$

Предложение 3.7.1. *Рассмотрим семейство гладких кривых с маркировкой Торелли (C_t, ρ_t) параметризованную некоторым комплексным параметром t, принимающем значения в окрестности 0, и нечетную тэта-характеристику $\eta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$, такую, что C_0 со спинорным расслоением $L_0 \to C_0$ представляет собой точку в $\overline{\Upsilon}_g$, а $t \in \mathbb{C}$ — трансверсальный $\overline{\Upsilon}_g$ параметр. Обозначим $\varsigma_{C_t} = \varsigma_t$ для простоты. Предположим, что $\varsigma_0 \neq 0$ (т.е. $\dim H^0(C_0, L_0) = 1$). Тогда тау-функция τ имеет следующую асимптотику:*

$$\tau(C_t, \varsigma_t) = c_0\, t^8 (1 + o(1)) \quad \text{при } t \to 0. \tag{3.7.2}$$

Доказательство. Можно считать, что C_t определяет семейство комплексных структур на фиксированной топологической поверхности. Пусть $p_{g-2}(t), p_{g-1}(t) \in C$ будут нулями ς_t, склеивающимися при $t \to 0$. Зафиксируем локальную координату $z_t : U \to \mathbb{C}$ на C_t возле $p_{2g-2}(0)$, такую, что $z_t(p_{g-2}(t)) = \sqrt{t}$, и $z_t(p_{g-1}(t)) = -\sqrt{t}$. Заметим, что точка (C_t, ς_t) в $\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$ не зависит от нумерации нулей, поэтому в нашем случае $\sqrt{t}$ определен на двулистном накрытии. Тогда $\varsigma_t \circ z_t^{-1}(x) = (x^2 - t)(x^2 + t)(c + O(t))\, dx$ для некоторого $c \neq 0$ и поэтому

$$\int_{p_{g-2}(t)}^{p_{g-1}(t)} \varsigma_t = t^{5/2}(c_1 + O(t)),$$

где путь интегрирования выбран так, что $\int_{p_{g-2}(t)}^{p_{g-1}(t)} \varsigma_t \to 0$.

Пусть $z_1(t), \dots, z_{3g-2}(t)$ — гомологические координаты точки $(C_t, \rho_t, \varsigma_t)$ для $t \neq 0$. Можно считать, что $z_{3g-2}(t) = t^{5/2}(c_1 + O(t))$. Рассмотрим маленькую окрестность $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$ точки (C_0, L_0). Тогда из приведенных выше вычислений следует, что отображение

$$\mathcal{U} \xrightarrow{[z_1 : \cdots : z_{3g-3} : z_{3g-2}^{2/5}]} \mathbb{C}P^{3g-3}$$

является вложением и образ $\overline{\Upsilon}_g \cap \mathcal{U}$ задается пересечением с гиперплоскостью $\{z_{3g-2} = 0\}$.

Обозначим образ $\mathcal{U}$ в $\mathbb{C}P^{3g-3}$ через $\mathcal{V}$ и прообраз $\mathcal{V}$ в $\mathbb{C}^{3g-2}$ через $\tilde{\mathcal{V}}$. Функцию τ, записанную в локальных координатах $z_1, \dots, z_{3g-2}$, можно рассматривать как функцию на двулистном накрытии $\tilde{\mathcal{V}} \setminus \{z_{3g-2} = 0\}$, которое определяется квадратным корнем из $\sqrt{z_{3g-2}}$. Соотношение (3.3.1) означает, что

$$\tau(z_1, \dots, z_{3g-2}) = c(z_{3g-2}^{2/5})\tilde{\tau}(z_1, \dots, z_{3g-3})\,(1 + o(1)) \tag{3.7.3}$$

при $z_{3g-2} \to 0$, где c — мероморфная функция, имеющая особенность в начале координат, а $\tilde{\tau}(z_1, \dots, z_{3g-3})$ — голоморфная функция ($\tilde{\tau}$ — это не что иное, как 72-я степень тау-функции

Бергмана, рассматриваемой на страте голоморфных дифференциалов на поверхностях рода g, имеющих $g-3$ двойной ноль и один ноль порядка 4. Эта страта проецируется на плотное открытое подмножество $\overline{\Upsilon}_g$). Нетрудно показать, что $z\frac{d}{dz}\log c(z)$ ограничено, и поэтому c должна быть мероморфной в окрестности начала координат.

Лемма 3.7.1, примененная к функции $\tilde{\tau}$, означает, что $\tilde{\tau}$ однородна со степенью однородности, равной $16(g-1)-\frac{16}{5}$. Таким образом, сравнивая степень однородности левой и правой частей (3.7.3), можно сделать вывод, что $c(z)=z^8\,(c_0+o(1))$. □

Зафиксируем $0<j<g$. Пусть $C=C_1\sqcup C_2/_{x_1\sim x_2}$ — кривая с одной нодальной точкой рода g, где C_1, C_2 — гладкие, а род C_1 равен j. Рассмотрим кривую C_t, построенную как в (3.5.1). Зафиксируем $\rho_1\cup\rho_2$ с маркировкой Торелли на C_t, как указано выше, и рассмотрим тэта-характеристику $\eta\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$, такую, что проекция η на первые $2j$ компоненты будет нечетной характеристикой. По этим данным мы определим дифференциал ς_{C_t}, который мы для краткости обозначим ς_t. Предположим, что $\varsigma_0\neq 0$.

Предложение 3.7.2. *Тау-функция τ имеет следующие асимптотики около $A_j\cup B_j$, $j>0$:*

$$\tau(C_t,\varsigma_t)=c\,t^{16(g-j)}(1+o(1))\quad \textit{при } t\to 0. \tag{3.7.4}$$

Доказательство. Напомним, что на любом компактном подмножестве $C_2\setminus\{x_2\}$

$$t^{-1}\,\varsigma_t\to v_2$$

при $t\to 0$, где v_2 — это мероморфный дифференциал на C_2 с двойным полюсом в x_2 и без других полюсов (см. (3.6.2)). Зафиксируем некоторую нумерацию $p_1(t),\dots,p_{g-1}(t)$ нулей ς_t так, что $p_1(t),\dots,p_{g-j-1}(t),p_{g-1}(t)\in C_2$. Пусть $z_1,\dots,z_{3g-2}$ — гомологические координаты, построенные относительно $\rho_1\cup\rho_2$ и выбранной нумерации нулей. Тогда прямые вычисления с использованием дифференциального уравнения (3.3.1) и асимптотических соотношений (3.6.1) и (3.6.2) дают

$$\frac{d}{dt}\log\tau(C_t,\varsigma_t)=-t^{-1}\cdot\frac{6}{\pi i}\sum_{k=1}^{d}z_k\int_{s_k}\frac{S_B-S_{v_2}}{v_2}+O(1)\quad\text{при } t\to 0,$$

где S_B — проективная связь Бергмана, $d=3g-j-1$ и $s_1,\dots,s_d$ — базис в $H_1(C_2\setminus\{p_1(0),\dots,p_{g-j-1}(0),p_{g-1}(0)\})$, двойственный базису в относительной группе гомологий, определяющей гомологические координаты. Из Леммы 3.7.1 видно, что

$$\frac{d}{dt}\log\tau(C_t,\varsigma_t)=\frac{16(g-j)}{t}+O(1),$$

что влечет (3.7.4).

□

Теперь рассмотрим случай неприводимых кривых. Пусть C — гладкая кривая рода $g-1$, а $p_1, p_2 \in C$ — различные точки. Тогда $C/_{p_1\sim p_2}$ — неприводимая кривая рода g с одной нодальной точкой. Рассмотрим семейство кривых C_t, построенное, как указано выше (см. (3.5.2)). Зафиксируем маркировку Торелли ρ на C. Выберем, как мы делали до этого, простой путь b от p_1 к p_2 и простую петлю a вокруг p_1. Тогда $\{a, b\} \cup \rho$ индуцирует маркировку Торелли на C_t для всех $t \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Зафиксируем нечетную тэта-характеристику $\eta = \eta_1 \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда η и выбранная маркировка Торелли определяет ς_{C_t}; $\sqrt{\varsigma_{C_t}}$ — это сечение расслоения $L_t \to C_t$. При этом, (C_t, L_t) стремится при $t \to 0$ к некоторой точке граничного дивизора A_0. Зафиксируем какую-нибудь ветвь $t^{1/8}$. Напомним, что $\frac{1}{t^{1/8}}\varsigma_{C_t} \to v$ при $t \to 0$ для некоторого (в общем случае не равного нулю) мероморфного дифференциала v на C, имеющего простые полюса в p_1, p_2 и никаких других полюсов (см. (3.6.3)). Обозначим $\frac{1}{t^{1/8}}\varsigma_{C_t}$ через $\tilde{\varsigma}_t$.

Предложение 3.7.3. *Тау-функция τ имеет следующую асимптотику вблизи A_0:*

$$\tau(C_t, \tilde{\varsigma}_t) = c\, t^6(1 + o(1)) \quad \text{\textit{при} } t \to 0. \tag{3.7.5}$$

Доказательство. Пусть $z_1(t) = \int_a \tilde{\varsigma}_t$ и $z_2(t) = \int_b \tilde{\varsigma}_t$. Рассмотрим параметр

$$\tilde{t} = \exp\left(2\pi i \frac{z_2(t)}{z_1(t)}\right).$$

Напомним, что когда t обходит ноль, b изменяется на $b + a$, а $\tilde{\varsigma}_t$ на $\gamma\tilde{\varsigma}_t$, где $\gamma^8 = 1$. Это означает, что $\tilde{t}$ можно естественным образом определить как функцию от t для всех $t \in \mathbb{D}$. Асимптотика $\int_b \tilde{\varsigma}_t = \frac{z_1(0)}{2\pi i}\log t + O(1)$ (см. (3.5.3)) влечет, что $\tilde{t}(0) = 0$ и $\tilde{t}(t)$ — это взаимно однозначное отображение около начала координат.

Зафиксируем нумерацию нулей $\tilde{\varsigma}_t$ и введем соответствующие гомологические координаты. Заметим, что $\tau(C_t, \tilde{\varsigma}_t)$ хорошо определена для всех достаточно малых $t \in \mathbb{C}$. Используя уравнение (3.3.1), определяющее тау-функцию, мы получаем, что

$$-\frac{\pi i}{6} \cdot \frac{d}{d\tilde{t}} \log \tau(C_{\tilde{t}}, \tilde{\varsigma}_{\tilde{t}}) = \frac{z_1(0)}{2\pi i\, \tilde{t}} \int_a \frac{S_B - S_{\tilde{\varsigma}_{\tilde{t}}}}{\tilde{\varsigma}_{\tilde{t}}} \cdot (1 + o(1))$$

при $t \to 0$. Вычисляя вычет $\operatorname{Res}_{p_1} \frac{S_B - S_{\tilde{\varsigma}_0}}{\tilde{\varsigma}_0}$, получаем

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \log \tau(C_{\tilde{t}}, \tilde{\varsigma}_{\tilde{t}}) = \frac{6}{\tilde{t}}(1 + o(1)),$$

что влечет (3.7.5). $\square$

Рассмотрим теперь нечетную тэта-характеристику $\eta = \eta_1 \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$. Характеристика η и выбранная маркировка Торелли определяют ς_{C_t}; $\sqrt{\varsigma_{C_t}}$ — это сечение расслоения $L_t \to C_t$. При этом, (C_t, L_t) стремится при $t \to 0$ к некоторой точке (C_0, L_0) дивизора B_0. Рассмотрим новый параметр $r = \sqrt{t}$. Напомним, что согласно (3.6.4) существуют голоморфный дифференциал v на C и мероморфный дифференциал w на C, имеющий простые полюсы в p_1 и p_2 и никаких других полюсов, такие что $\varsigma_{C_{t(r)}} = v + rw + O(r^2)$. Положим $\varsigma_r = \varsigma_{t(r)}$ и $C_r = C_{t(r)}$ для простоты.

Предложение 3.7.4. *Тау-функция τ имеет следующую асимптотику вблизи B_0:*

$$\tau(C_r, \varsigma_r) = c\, r^{16}(1 + o(1)) \qquad \textit{при } r \to 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ обозначает небольшой открытый полидиск из $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ с центром в (C_0, L_0), и пусть $\mathcal{V}$ — связная компонента прообраза $\mathcal{U}$ в $\widetilde{\mathcal{H}}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$. Рассмотрим гомологические координаты $z_1, \ldots, z_{3g-2}$ на $\mathcal{V}$, пронумерованные следующим образом:

$$z_g\left(C_r, \{a, b\} \cup \rho, \varsigma_{C_r}\right) = \int_a \varsigma_r, \quad z_{2g}\left(C_r, \{a, b\} \cup \rho, \varsigma_r\right) = \int_b \varsigma_r$$

и $(g-1)$-ый ноль дифференциала ς_r стремится к нодальной точке при вырождении кривой. Отметим, что согласно асимптотике (3.6.4)

$$z_g\left(C_r, \{a, b\} \cup \rho, \varsigma_r\right) = c\, r(1 + o(1))$$

для некоторой в общем случае ненулевой константы c. Из асимптотики (3.6.4) следует, что

$$r \int_b \frac{S_B - S_{\varsigma_r}}{\varsigma_r} = O(1) \tag{3.7.6}$$

при $r \to 0$.

Вычисляя производные τ по z_j для всех $j \neq g, 2g$ по (3.3.1), получаем асимптотику

$$\tau(z_1, \ldots, z_{3g-2}) = c(z_g, z_{2g})\, \tilde{\tau}(z_1, \ldots, \hat{z}_g, \ldots, \hat{z}_{2g}, \ldots, z_{3g-3})(1 + o(1)) \quad \text{при } z_g \to 0, \tag{3.7.7}$$

где $\tilde{\tau}$ — тау-функция Бергмана на $\widetilde{\mathcal{H}}_{g-1}^{\mathrm{odd}}([2^{g-2}])$.

Множитель $c(z_g, z_{2g})$ — это голоморфная функция в некоторой проколотой окрестности прямой $\{(0, z),\ z \in \mathbb{C}\}$ в $\mathbb{C}^2$. Оценка (3.7.6) показывает, что $\frac{\partial}{\partial z_g} \log \tau$ имеет не более чем простой полюс при $z_g = 0$, следовательно, функция $c(z_g, z_{2g})$ мероморфна в окрестности $z_g = 0$. Рассмотрим ряд Лорана

$$c(z_g, z_{2g}) = \sum_{j=N}^{+\infty} c_j(z_{2g}) z_g^j,$$

Из дифференциального уравнения, определяющего τ, следует, что $\frac{\partial}{\partial z_{2g}} \log \tau = O(z_g)$; поэтому c_N не зависит от z_{2g}. Согласно Лемме 3.3.1 степень однородности τ при действии $\mathbb{C}^*$ на дифференциалы равна $16(g-1)$, тогда как степень однородности $\tilde{\tau}$ равна $16(g-2)$. Таким образом, сравнивая порядки однородности правой и левой частей (3.7.7), мы получаем, что $N = 16$.

□

3.8. Аналитический вывод формулы для класса $\overline{\Upsilon}_g$ в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$

В этом разделе мы приведем аналитическое доказательство Теоремы 3.1

Заметим, что $\varsigma^{16(g-1)}$ — это сечение линейного расслоения.

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}^{16(g-1)} \otimes \Lambda^{8(g-1)} \\ \big\downarrow \\ \mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])/\mathbb{C}^* \end{array}$$

как показано в Следствии 3.6.1 (определение ς см. в Разделе 3.6). По Следствию 3.3.1 тау-функция определяет гомоморфизм из $\mathcal{L}^{16(g-1)}$ в Λ^{72}. Применяя этот гомоморфизм к сечению $\varsigma^{16(g-1)}$, мы получаем сечение Λ^{8g+64}, которое обозначим $\tilde{\psi}$.

Рассмотрим локус $\mathcal{X} = \{(C,\omega) \in \mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}]) \ \mid \ \dim|\mathrm{div}\sqrt{\omega}| > 0\}$ (то есть локус абелевых дифференциалов с двойными нулями таких, что размерность пространства голоморфных сечений соответствующего спинорного расслоения больше единицы). Заметим, что $\pi|_{\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])\setminus\mathcal{X}}$ — биекция и $\pi(\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}]) \setminus \mathcal{X}) = \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \setminus \overline{\Upsilon}_g$, где π — это отображение из $\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])$ к $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$, которое отображает дифференциал в соответствующее спинорное расслоение. Заметим также, что $\pi(\mathcal{X}) \subset \overline{\Upsilon}_g$.

Положим $\psi = \pi_*(\tilde{\psi}|_{\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}([2^{g-1}])\setminus\mathcal{X}})$. Имеем $\pi_*\Lambda^{8g+64} \simeq \lambda^{8g+64}$, поэтому ψ - это голоморфное сечение $\lambda^{8g+64}|_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}\setminus\overline{\Upsilon}_g}$. Пусть $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ — открытое стягиваемое подмножество. Выбирая тривиализацию $\phi : \lambda|_{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}\times\mathbb{C}$, мы получаем голоморфную функцию $\phi^{\otimes 8g+64}\circ\psi : \mathcal{U}\cap(\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}\setminus\overline{\Upsilon}_g) \to \mathbb{C}$. Из Предложений 3.7.1- 3.7.4 и асимптотик (3.6.2), (3.6.3) следует, что эту функцию можно голоморфно продолжить в $\mathcal{U}$. Поэтому мы можем продолжить сечение ψ на $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$. Утверждения 3.7.1-3.7.4 и асимптотики (3.6.2), (3.6.3) также влекут, что

$$[\mathrm{div}\,\psi] = 16\beta_0 + (4+2g)\alpha_0 + 16\sum_{j=2}^{[g/2]}(g-j)\alpha_j + 16\sum_{j=2}^{[g/2]} j\beta_j + 8[\overline{\Upsilon}_g].$$

С другой стороны, по определению ψ

$$[\mathrm{div}\,\psi] = (8g+64)\lambda$$

в рациональной группе Пикара $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}}$. Следовательно

$$(8g+64)\lambda = 16\beta_0 + (4+2g)\alpha_0 + 16\sum_{j=2}^{[g/2]}(g-j)\alpha_j + 16\sum_{j=2}^{[g/2]} j\beta_j + 8[\overline{\Upsilon}_g].$$

откуда следует Формула (3.0.1) из Теоремы 3.1.

3.9. Аналитический вывод формулы для класса Θ_{null} в $\text{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}})\otimes\mathbb{Q}$

В этом разделе мы предлагаем аналитическое доказательство Теоремы 3.2 с использованием модулярных свойств тэта-функции. Пусть $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}}$ — пространство модулей четных спинорных кривых рода g и $\mathcal{S}_g^{\text{even}} \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}}$ — подпространство гладких спинорных кривых. Рассмотрим дивизор тэта-нуль:

$$\Theta_{\text{null}} = \overline{\{(C,L)\in\mathcal{S}_g^{\text{even}} \ \mid\ \dim H^0(C,L)>0\}},$$

где замыкание берется в $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}}$.

Рациональная группа Пикара $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}}$. Пусть $\chi : \overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ — естественная проекция. Граница $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}} \setminus \mathcal{S}_g^{\text{even}}$ — это объединение неприводимых дивизоров $A_0^+, B_0^+, \dots, A_{[g/2]}^+, B_{[g/2]}^+$, таких, что $\chi(A_j^+) = \chi(B_j^+) = \Delta_j$ для каждого $j=0,\dots,\left[\frac{g}{2}\right]$.

Если $j\neq 0$, то общая точка в A_j^+ соответствует четным спинорным расслоением на каждой из двух неприводимых компонент приводимой кривой рода g с одной нодальной точкой. Общие точки в B_j^+ аналогично представлены нечетными спинорными расслоениями. В этих случаях мы также заменяем нодальную точку исключительной компонентой. Формально,

$$\begin{aligned} A_j^+ &= Cl\{(C_1\cup E\cup C_2,\eta,\beta)\in\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}} \ \mid\ \eta|_{C_1} \text{ четна}\},\\ B_j^+ &= Cl\{(C_1\cup E\cup C_2,\eta,\beta)\in\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}} \ \mid\ \eta|_{C_1} \text{ нечетна}\}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 гладкие, род C_1 равен j, а E рационально.

Дивизор A_0^+ — это замыкание локуса нечетных спинорных кривых одной нодальной точкой (в этом случае нижележащая кривая должна быть неприводимой). Формально,

$$\begin{aligned} A_0^+ &= Cl\{(C/_{p\sim q},\eta,\beta)\in\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}} \ \mid\ C \text{ гладкая рода } g-1,\ p,q\in C\},\\ B_0^+ &= Cl\{(C\cup E,\eta,\beta)\in\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}} \ \mid\ C \text{ гладкая рода } g-1,\ E \text{ исключительная}\}. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbb{E}_g$ обозначает прообраз векторного расслоения Ходжа с $\overline{\mathcal{M}}_g$ на $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}}$, а λ является классом в $\text{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}})\otimes\mathbb{Q}$ расслоения $\bigwedge^g\mathbb{E}_g$. Обозначим через α_j^+ и β_j^+ классы A_j^+ и B_j^+ в рациональной группе Пикара соответственно. Группа $\text{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}})\otimes\mathbb{Q}$ порождается $\lambda, \alpha_0^+,\dots,\alpha_{[g/2]}^+, \beta_0^+,\dots,\beta_{[g/2]}^+$.

Тэта-функция как модульная форма. Рассмотрим пространство модулей $\widetilde{\mathcal{S}}_g^{\text{even}}$ четных спинорных кривых с маркировкой Торелли. Точка в $\widetilde{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$ представлена тройкой (C,ρ,η), где C — гладкая кривая рода g, ρ — маркировка Торелли, а $\eta\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$ — четная тэта-характеристика (то есть $\sum\limits_{j=1}^{g}\eta_{2j}\eta_{2j-1}=0$). При этом каждая точка (C,ρ,η) пространства $\widetilde{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$ определяет тэта-функцию с характеристикой:

$$\theta[\eta](\cdot,\Omega):\mathbb{C}^g\to\mathbb{C},$$

где Ω — матрица b-периодов относительно ρ. Введем обозначение $\vartheta(C,\rho,\eta)=\theta[\eta](0,\Omega)$. Тогда ϑ — голоморфная функция на пространстве $\widetilde{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$.

Имеется естественное действие симплектической группы $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z})$ на $\widetilde{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$, изменяющее маркировку Торелли. Заметим, что $\widetilde{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}/\operatorname{Sp}(g,\mathbb{Z})=\mathcal{S}_g^{\mathrm{even}}$.

Предложение 3.9.1. *Зафиксируем точку (C,ρ,η) в $\widetilde{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$. Пусть σ является $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z})$-эндоморфизмом $H_1(C)$, а $\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$ — его матрица по отношению к базису ρ. Тогда*

$$\vartheta(C,\sigma(\rho),\sigma_*(\eta))=\gamma\sqrt{\det(\sigma_{12}\Omega+\sigma_{11})}\cdot\vartheta(C,\rho,\eta),$$

где $\gamma^8=1$.

Утверждение непосредственно следует из модулярных свойств тэта-функций (см. [52]).

Из приведенного выше предложения следует, что ϑ^8 — голоморфное сечение $(\bigwedge^g\mathbb{E}_g)^{\otimes 4}|_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{even}}}$. Из классической теоремы Римана получаем, что дивизор этого сечения равен $n\cdot(\Theta_{\mathrm{null}}\cap\mathcal{S}_g^{\mathrm{even}})$ для некоторого $n\in\mathbb{Z}_{>0}$. Хорошо известно, что $n=16$ (см. [62]).

Вычисления из Раздела 3.5 влекут, что ϑ^8 продолжается на $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$ как голоморфное сечение $(\bigwedge^g\mathbb{E}^g)^{\otimes 4}$ и

$$[\operatorname{div}_{\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}}\vartheta^8]=16[\Theta_{\mathrm{null}}]+\alpha_0^++8\sum_{j=1}^{[g/2]}\beta_j^+,\tag{3.9.1}$$

где $[\ ]$ обозначает класс дивизора в рациональной группе Пикара.

Доказательство Теоремы 3.2. Поскольку ϑ^8 — это сечение $(\bigwedge^g\mathbb{E}^g)^{\otimes 4}$,

$$[\operatorname{div}_{\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}}]\,\vartheta^8=4\lambda,$$

откуда сразу следует (3.0.2). □

3.10. Тау-функция Бергмана, как определитель оператора Коши–Римана. Эвристический вывод уравнения $d_B\tau=0$

Существует несколько замечательных соотношений, благодаря которым тау-функция Бергмана может быть интерпретирована, как определитель оператора Коши–Римана на соответствующей римановой поверхности. Первое из них — это формула Рэя–Зингера, связывающая эта-функцию Дедекинда и дзета-регуляризованный определитель оператора Лапласа на эллиптической кривой [38]. Второе восходит к связи между тау-функцией Бергмана и изомонодромной тау-функцией (см. [37]). В качестве приложения к настоящей главе мы кратко обсудим оба этих подхода, а также предложим эвристический вывод уравнения, определяющего тау-функцию Бергмана.

3.10.1. Тау-функция Бергмана и факторизация определителя оператора Лапласа

Напомним, что дзета-функция ζ_Δ положительного оператора Δ с дискретным спектром $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ определяется как

$$\zeta_\Delta(s) = \sum_{n\ge 1} \lambda_n^{-s}.$$

Если λ_n возрастают достаточно быстро, ζ_Δ имеет регулярное продолжение в $s=0$ и мы можем определить *дзета-регуляризованный* определитель оператора Δ как

$$\det{}_\zeta \Delta = \exp(-\zeta'_\Delta(0)).$$

Можно показать, что $\det_\zeta \Delta$ ведет себя естественным образом при достаточно малых возмущениях Δ, то есть $\det_\zeta(\Delta(1+A)) = \det_\zeta(\Delta)\cdot\det(1+A)$, где $\det(1+A)$ — определитель Фредгольма.

Пусть теперь C — гладкая кривая рода 1 и w — голоморфный дифференциал на C. Пусть z_1, z_2 — гомологические координаты, ассоциированные с w, тогда имеется изоморфизм $C \cong \mathbb{C}/\Gamma$, где $\Gamma = z_1\mathbb{Z} + z_2\mathbb{Z}$, причем w соответствует dz при этом изоморфизме, где z — координата на $\mathbb{C}$. Пусть $\Delta^{|w|^2}$ — оператор Лапласа в Евклидовой метрике. Предельным переходом из Теоремы Рэя–Зингера ([59, Теорема 4.1], см. также [38, (1.2)]) можно получить следующее соотношение:

$$\det{}_\zeta \Delta^{|w|^2} = 4\Im(z_2/z_1)\mathrm{Area}(C, |w|^2)|\eta(z_2/z_1)|^4, \tag{3.10.1}$$

где

$$\eta(q) = e^{\frac{\pi i q}{12}} \prod_{n\ge 1}(1 - e^{2\pi i n q}) \tag{3.10.2}$$

— эта-функция Дедекинда. Согласно [22], логарифмическую производную эта-функции можно выразить следующим образом:

$$-2\frac{d\log\eta(q)}{dq}\,w = \frac{1}{12\pi i}\frac{S_B - S_w}{w}, \tag{3.10.3}$$

где $q = z_2/z_1$. Отсюда видно, что $d_B\eta^2 = 0$, то есть $\tau = \eta^2$ является тау-функцией Бергмана в случае $g=1$.

Отметим, что уравнения (3.10.1) и (3.10.3) влекут за собой

$$d_B \left(\frac{\det_\zeta \Delta^{|w|^2}}{\Im(z_2/z_1)\mathrm{Area}(C, |w|^2)} \right) = 0.$$

В работе [38] это соотношение обобщается на случай произвольного рода, откуда, как следствие, получается нижеследующая теорема. Напомним, что если $(C, \rho, l, w) \in \widetilde{\mathcal{H}}_g^l(\mu)$, то Ω обозначает матрицу b-периодов поверхности C относительно базиса ρ, l. Также будем обозначать через $\Delta^{|w|^2}$ оператор Лапласа на C в метрике $|w|^2$.

Теорема 3.5. *Для любого $g \geq 2$ и любого разбиения $\mu \vdash 2g-2$ выполняется следующее соотношение на $\widetilde{\mathcal{H}}_g^l(\mu)$:*

$$\det_\zeta \Delta^{|w|^2} = (\det \Im(\Omega))\mathrm{Area}(C, |w|^2)|\tau_B|^2,$$

где τ_B — тау-функция Бергмана, построенная в [38, Теорема 6].

Доказательство. см. [38, Теорема 10]. □

3.10.2. Тау-функция Бергмана и изомонодромная тау-функция

Исторически, связность d_B рассматривалась вначале на пространстве Гурвица [37]. Заметим, что разветвленное накрытие $f : C \to \mathbb{P}^1$ однозначно определяется (мероморфным) дифференциалом $w = df$ на C. Связность d_B на пространства пар (C, w) определяется аналогично тому, как она определялась выше на $\widetilde{\mathcal{H}}_g^l(\mu)$.

Другой способ задать разветвленное накрытие $f : C \to \mathbb{P}^1$ — это задать гомоморфизм $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{b_1, \ldots, b_N\}) \to \Sigma_d$ в группу перестановок из $d = \deg f$ элементов, где $N = 2g-2+d$. Координаты точек $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{P}^1$ можно тогда рассматривать, как локальные координаты на пространстве Гурвица. Отождествим Σ_d с подгруппой $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ стандартным образом. Тогда φ становится представлением фундаментальной группы и мы можем рассматривать задачу Римана-Гильберта [42], ассоциированную с этим представлением. Как оказывается (см. [37]), изомонодромная тау-функция, построенная по этой задаче Римана-Гильберта, оказывается тесно связанной с тау-функцией Бергмана — фактически, тау-функция Бергмана является компонентой изомонодромной тау-функции.

Пусть имеется некоторое представление $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{b_1, \ldots, b_N\}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, тогда изомонодромная тау-функция Джимбо, Мива и Уено [34] — это некоторая голоморфная функция на универсальном накрытии пространства, параметризующего всевозможные наборы попарно-различных точек $b_1, \ldots, b_N$, задаваемая определенным дифференциальным уравнением (см. [42] и [55]). Нули этой функции соответствуют тем наборам $b_1, \ldots, b_N$, для которых неразрешима задача Римана-Гильберта.

Согласно замечательной статье Палмера [55], дифференциальные уравнения, задающие изомонодромную тау-функцию, являются уравнениями связности на детерминантном расслоении (см. [57], [60]), ассоциированным с некоторым семейством операторов Коши–Римана. Таким образом, тау-функция может быть естественным образом интерпретирована, как семейство определителей операторов Коши–Римана. Заметим, что эти операторы строятся таким образом, чтобы наличие у них нетривиального ядра являлось препятствием к решению задачи Римана-Гильберта. Это объясняет свойство нулей тау-функции.

Подводя итог вышесказанному, мы заключаем, что тау-функция Бергмана естественным образом может быть интерпретирована как определитель семейства операторов Коши–Римана. Больше того, естественно ожидать, что уравнения, определяющие тау-функцию Бергмана, имеют ту же природу, что уравнения, определяющие изомонодромную тау-функцию. В подтверждение этого мы предлагаем ниже эвристический вывод уравнения $d_B\tau = 0$ в духе [56, Раздел 4].

3.10.3. Эвристический вывод уравнения $d_B\tau = 0$

Предположим для начала, что у нас имеется некоторое семейство операторов $A(t) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — фиксированные конечномерные пространства. Любое обратимое отображение $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ позволяет определить функцию $\tau : t \mapsto \det A(t)$ и два таких отображения определяют одну и ту же функцию с точностью до константы. Это можно выразить следующим дифференциальным уравнением

$$d\log\tau = \operatorname{Tr} d\log A(t) = -\operatorname{Tr}(d(A(t)^{-1})A(t)), \tag{3.10.4}$$

которое верно независимо от нашего отождествления $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$.

В случае, когда $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — бесконечномерные гильбертовы пространства, может быть не вполне ясно, что подразумевается под $\det A(t)$. Однако, если оператор $d(A(t)^{-1})A(t)$ имеет след, мы по-прежнему можем использовать диффенренциальное уравнение (3.10.4) для определения определителя.

Пусть теперь $(C, \rho, l, w) \in \widetilde{\mathcal{H}}^l_g(\mu)$ и $\rho, l = \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, l_1, \dots, l_{n-1}\}$, как обычно. Пусть также $\varepsilon > 0$ — некоторый малый параметр и $D_1, \dots, D_{n-1}$ — диски радиуса ε в метрике $|w|^2$ с центрами $p_1, \dots, p_{n-1}$. Мы будем использовать обозначение $c_j = \partial D_j$. Пусть $\Omega^{p,q}$ обозначает пучок (p, q) форм на C и $H^s(\Omega^{p,q})$ обозначает пространство глобальных сечений $\Omega^{p,q}$, коэффициенты которых лежат в пространстве Соболева. Положим

$$\mathcal{H}_1 = \{v \in H^1(\Omega^{1,0}) \ \mid \ \int_{a_j} v = 0,\ \overline{\partial} v|_{D_j} \equiv 0\ \forall j, \}$$
$$\mathcal{H}_2 = \{u \in L^2(\Omega^{1,1}) \ \mid \ \int_C u = 0\}.$$

Нетрудно видеть, что оператор $\overline{\partial} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ корректно определен и имеет нулевое ядро.

Положим

$$C^\circ = C \smallsetminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup b_1 \cup \dots \cup b_g).$$

Пусть $(p,q) \in C^\circ \times C$, $p \neq q$ и $\int\limits_{p_n}^{p}$ обозначает интеграл вдоль некоторого пути, целиком лежащего в C°. Напомним, что мы используем обозначение B для канонического бидифференциал на C. Нетрудно видеть, что выражение

$$K(p,q) = \int\limits_{p_n}^{p} B(x,q)$$

не зависит от выбора пути и оператор

$$X : u \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p \in C^\circ} K(p,q) u(p)$$

корректно определен для всякого $u \in \mathcal{H}_2 \cap C^\infty(\Omega^{1,1})$ и если $v \in \mathcal{H}_1 \cap C^\infty(\Omega^{1,0})$, то выполняется

$$v(q) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p \in C^\circ} K(p,q) \overline{\partial} v(p),$$

Можно также показать, что $\|Xu\|_{\mathcal{H}_1} \lesssim \|u\|_{\mathcal{H}_2}$, то есть X продолжается до ограниченного оператора $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ и является левым обратным к $\overline{\partial}$.

Для того, чтобы продифференцировать ядро K, мы используем естественную связность на универсальном семействе над $\widetilde{\mathcal{H}}_g^l(\mu)$, задаваемую дифференциалом w. Пусть $z : C^\circ \to \mathbb{C}$ — функция, заданная

$$z(p) = \int_{p_n}^{p} w.$$

Пусть также $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{H}}_g^l(\mu)$ — некоторая окрестность (C, ρ, l, w) и $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$ — универсальное семейство кривых над $\mathcal{U}$. Предположим, что $p \in C^\circ \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$, и обозначим также через p соответствующую точку в слое $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$ над (C, ρ, l, w). Тогда функцию z можно аналитически продолжить в некоторую окрестность точки $p \in \mathcal{C}$. Скажем, что сечение $P : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$, проходящее через точку p, ковариантно постоянно, если $z \circ P$ — постоянная функция на $\mathcal{U}$.

Используя эту связность, мы можем определить ковариантную производную функции $\frac{K(p,q)}{w(q)}$ для всяких $p, q \in C^\circ \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_n\}$, которую мы будем обозначать через d_t (где $t = (z_1, \ldots, z_{2g+n-1})$ — гомологические координаты). Положим также $d_t K(p,q) = d_t \left(\frac{K(p,q)}{w(q)} \right) w(q)$ и определим

$$(d_t X u)(q) = \int\limits_{p \in C^\circ} d_t K(p,q) u(p).$$

Заметим теперь, что если

$$L(p,q) = K(p,q) - \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{w(q)}{z(q) - z(p)},$$

то, очевидно, $d_t L = d_t K$. Заметим, что L не имеет, однако, особенностей на диагонали. Напомним также, что по определению $\overline{\partial} v$ обнуляется на D_j для каждого $j = 1, \ldots, n-1$. Значит, по формуле Стокса

$$-(d_t X \overline{\partial} v)(q) = -\int\limits_{p \in C^\circ} d_t L(p,q) \overline{\partial} v(p) = -\int\limits_{p \in \partial C^\circ} d_t L(p,q) v(p) + \int\limits_{p \in c_1 \cup \cdots \cup c_{n-1}} d_t L(p,q) v(p). \quad (3.10.5)$$

Следовательно, оператор $-d_t X \overline{\partial}$ индуцирует некоторый ядерный оператор на $\partial C^\circ \cup c_1 \cup \cdots \cup c_{n-1}$. Следуя Палмеру [56], след этого оператора мы будем использовать для того, чтобы определить правую часть (3.10.4).

Ориентированная граница ∂C° распадается в объединение $4g$ компонент, обозначим их через $a_1^-, a_1^+, \ldots, a_g^-, a_g^+, b_1^-, b_1^+, \ldots, b_g^-, b_g^+$, где $+$ означает, что соответствующая кривая имеет ту же ориентацию, что компонента границы, а $-$ означает, что ориентации противоположные.

Лемма 3.10.1. *Пусть $j = 1, \ldots, n-1$. Имеем*

$$\int\limits_{p \in c_j} d_t L(p,q) v(p) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{p \in c_j} \frac{B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}}{w(p)} \cdot v(p)\, dz_{2g+j}$$

Доказательство. Зафиксируем $p \in c_j$ и $q \in C^\circ$. Заметим, что $z(p) = z_{2g+j} + z_0$, где $|z_0| = \varepsilon$. Имеем

$$d_t(L(p,q)) = (d_t L)(p,q) + \frac{d_p L(p,q)}{w(p)}\, dz_{2g+j}.$$

Заметим, что $d_p L(p,q) = \frac{1}{2\pi i}\left(B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}\right)$. Следовательно, имеем

$$\int\limits_{p \in c_j} d_t L(p,q) v(p) = d_t \left(\int\limits_{p \in c_j} L(p,q) v(p) \right) - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{p \in c_j} \frac{B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}}{w(p)} \cdot v(p)\, dz_{2g+j}.$$

Поскольку v голоморфна внутри D_j,

$$\int\limits_{p \in c_j} L(p,q) v(p) = 0.$$

$\square$

Лемма 3.10.2. *Пусть $j = 1, \dots, g$. Имеем*

$$\left(\int\limits_{p\in a_j^+} - \int\limits_{p\in a_j^-}\right)(d_t L(p,q)v(p)) = \frac{1}{2\pi i}\cdot \int\limits_{p\in a_j^-} \frac{B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}}{w(p)}\cdot v(p)\, dz_{g+j}, \quad q\in a_j$$

$$\left(\int\limits_{p\in b_j^+} - \int\limits_{p\in b_j^-}\right)(d_t L(p,q)v(p)) = -\frac{1}{2\pi i}\cdot \int\limits_{p\in b_j^-} \frac{B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}}{w(p)}\cdot v(p)\, dz_{j} \quad q\in b_j.$$

Доказательство. Зафиксируем $q \in C^\circ$, а также $p \in a_j$, и пусть $p^+ \in a_j^+$ и $p^- \in a_j^-$ соответствующие точки. Заметим, что $z(p^-) = z(p^+) + z_{g+j}$. Следовательно,

$$d_t(L(p^+,q) - L(p^-,q)) = (d_t L)(p^+,q) - (d_t L)(p^-,q) - \frac{1}{2\pi i}\cdot \frac{B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}}{w(p)}\, dz_{g+j}.$$

Для того, чтобы вывести отсюда утверждение Леммы, достаточно пояснить, что правило

$$v \mapsto \int\limits_{p\in a_j^+} L(p,q)v(p) - \int\limits_{p\in a_j^-} L(p,q)v(p)$$

задает нулевой оператор на пространстве функций, заданных на a_j. Зафиксируем $q \in a_j$ и пусть $q^+ \in a_j^+, q^- \in a_j^-$ — соответствующие точки на ∂C°. Заметим, что $z(q^+) - z(p^+) = z(q^-) - z(p^-)$. Следовательно,

$$L(p^+,q^+) - L(p^-,q^-) = K(p^+,q) - K(p^-,q) = -\int\limits_{x\in b_j} B(x,q) = v_j(q)$$

по известному свойству бидифференциала B, где v_j — j-й нормализованный дифференциал на C. Поскольку $\int_{p\in a_j} v(p) = 0$, мы получаем отсюда

$$\int\limits_{p\in a_j^+} L(p,q^+)v(p) - \int\limits_{p\in a_j^-} L(p,q^-)v(p) = \int\limits_{p\in a_j} v(p)v_j(q) = 0.$$

Применяя такие же аргументы в случае b_j, мы приходим к соотношению

$$L(p^+,q^+) - L(p^-,q^-) = K(p^+,q) - K(p^-,q) = \int\limits_{x\in a_j} B(x,q) = 0,$$

из которого снова следует необходимое нам соотношение. $\square$

Напомним, что $s_1, \dots, s_{2g+n-1}$ обозначает базис в $H_1(C \smallsetminus Zeros(w), \mathbb{Z})$, двойственный по Пуанкаре к ρ, l. Мы можем выбрать для каждого s_j конкретного представителя, полагая $s_j = b_j$, $s_{g+j} = -a_j$, $s_{2g+j} = c_j$. Подводя итог вышесказанному, мы заключаем, что $d_t X \overline{\partial}$ индуцирует оператор, действующий на пространстве функций, определенных на $s_1 \cup \dots \cup s_{2g+n-1}$. На каждой компоненте s_j этот оператор задается ядром $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}}{w(p)} \, dz_j$. Заметим теперь, что

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{B(p,q) - \frac{w(p)w(q)}{(z(p)-z(q))^2}}{w(p)}|_{p=q} = \frac{1}{12\pi i} \cdot \frac{S_B(p) - S_w(p)}{w(p)}.$$

Следовательно, след индуцированного оператора равен

$$\frac{1}{12\pi i} \sum_{j=1}^{2g+n-1} \int\limits_{s_j} \frac{S_B - S_w}{w} \, dz_j;$$

таким образом, уравнение (3.10.4) можно интерпретировать, как

$$\text{“}d_t \log \det \overline{\partial}\text{”} = \text{“} - \operatorname{Tr} d_t X \overline{\partial}\text{”} = -\frac{1}{12\pi i} \sum_{j=1}^{2g+n-1} \int\limits_{s_j} \frac{S_B - S_w}{w} \, dz_j,$$

что эквивалентно “$d_B \log \det \overline{\partial}$” $= 0$.

В заключение, хочется отметить, что первое и третье утверждение Теоремы 3.4 хорошо согласуются с интерпретацией τ, как определителя $\overline{\partial}$ на указанных пространствах. И действительно, первое утверждение эквивалентно тому, что $\overline{\partial}$ не имеет нетривиально ядра в $\mathcal{H}_1$, что верно. Третье же утверждение согласуется с тем, что детерминантное расслоение в смысле Сегала–Вилсона в рассматриваемом случае изоморфно $\det \mathbb{E}_g^\vee$.

Глава 4. Некоторые локусы вырождений на пространстве модулей нечетных тэта-характеристик

В этой главе мы изучаем локальную геометрию некоторых схем вырождений на пространстве модулей $\mathcal{S}_g^{\text{odd}}$, определяемых в терминах нулей тэта-характеристик. Представленные результаты основаны на статье [9].

Напомним, что $\mathcal{S}_{g,k}^{\text{odd}}$ обозначает пространство модулей нечетных спинорных кривых с k отмеченными точками. Для любого целого $i \geq 0$ определим локус $X_i \subset \mathcal{S}_{g,1}^{\text{odd}}$ как

$$X_i = \overline{\{(C, \eta, p) \ \mid \ h^0(C, \eta) = 1, \ h^0(C, \eta(-ip)) > 0\}}, \tag{4.0.1}$$

т.е. $(C, \eta, p) \in X_i$, если η имеет ноль порядка не менее i в отмеченной точке p. Поскольку в случае общей кривой $h^0(C, \eta) = 1$, ожидаемая коразмерность локуса X_i в $\mathcal{S}_{g,1}^{\text{odd}}$ равна i. Например, локус X_2 проецируется на дивизор $\Upsilon_g \subset \mathcal{S}_g^{\text{odd}}$, параметризующий неприведенные тэта-характеристики, рассматриваемый в Главе 3.

Предположим, что $(C, \eta, p) \in X_1$ и $h^0(C, \eta) = 1$, тогда $h^0(C, \eta(p)) = 2$ по формуле Римана–Роха (см. Лемму 4.1.2), так что линейная система $|\eta + p|$ одномерна. В общем случае эта линейная система не имеет базовых точек и имеет только простые ветвления. Вторая серия рассматриваемых нами локусов параметризирует точки в $\mathcal{S}_{g,2}^{\text{odd}}$, в которых нарушается это поведение $|\eta + p|$: для любого $i > 0$ мы определяем локус $Y_i \subset \mathcal{S}_{g,2}^{\text{odd}}$ как

$$\begin{aligned} Y_1 &= \overline{\{(C, \eta, p, q) \in \mathcal{S}_{g,2}^{\text{odd}} \ \mid \ h^0(C, \eta(-p)) = 1, \ h^0(C, \eta(p - q)) \geq 2\}}, \\ Y_i &= \overline{\{(C, \eta, p, q) \in \mathcal{S}_{g,2}^{\text{odd}} \ \mid \ h^0(C, \eta(-p)) = 1, \ h^0(C, \eta(p - iq)) > 0\}}, \quad i \geq 2. \end{aligned} \tag{4.0.2}$$

Заметим, что для любого i локус Y_i параметризует те $(C, \eta, p, q) \in \mathcal{S}_{g,2}^{\text{odd}}$, для которых размерность $h^0(C, \eta(p - iq))$ больше ожидаемой.

Как мы увидим ниже, над открытым подмножеством $\mathcal{S}_g^{\text{odd}}$, соответствующим (C, η) с $h^0(C, \eta) = 1$, определенные выше множества X_i и Y_i можно отождествить с множествами точек схем вырождений некоторых морфизмов между расслоениями; это индуцирует на X_i, Y_i естественную схемную структуру. Описать эти морфизмы можно следующим образом (подробнее см. § 4.5).

Для начала, пусть $(C, \eta) \in \mathcal{S}_g^{\text{odd}}$ такова, что $h^0(C, \eta) = 1$. Рассмотрим естественный морфизм

$$H^0(C, \eta) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathrm{J}_{i-1}(\eta),$$

где $\mathrm{J}_{i-1}(\eta)$ — пучок $(i-1)$-джетов от η. Тогда над точкой (C, η) локус X_i является локусом вырождений для этого морфизма. Повторив это рассуждение для универсального семейства нечетных спинорных кривых мы получим описание X_i как схемы вырождений.

Точно так же, зафиксируем отмеченную нечетную спинорную кривую $(C, \eta, p) \in X_1$, так что $h^0(C, \eta(-p)) > 0$, и предположим дополнительно, что $h^0(C, \eta) = 1$. Над точкой (C, η, p) локус Y_i соответствует схеме вырождений естественного морфизма

$$H^0(C, \eta(p)) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathrm{J}_{i-1}(\eta(p)),$$

где $\mathrm{J}_{i-1}(\eta(p))$ — пучок $(i-1)$-джетов $\eta(p)$. Повторив это рассуждение для универсального семейства отмеченных нечетных спинорных кривых над X_1, мы получим описание Y_i как схемы вырождений.

Основным результатом данной главы является описание конормальных пространств к этим схемам в достаточно общих точках. Для того, чтобы сформулировать этот результат, нам потребуется ввести несколько определений.

Пусть V — схема, а $\mathcal{F} \to V$ — линейное расслоение. Морфизм Гаусса–Валя (см. [63], [19])

$$d_\Lambda : \Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \to H^0(V, \mathcal{F}^{\otimes 2} \otimes \Omega_V)$$

определяется как

$$d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = d\sigma_1 \otimes \sigma_2 - \sigma_1 \otimes d\sigma_2 = d\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2.$$

Для более точного определения см. § 4.4.2.

Если $V = C$ — гладкая кривая и $\mathcal{F} = \eta(d_1p_1 + \dots + d_np_n)$ — тэта-характеристика, подкрученная на дивизор $d_1p_1 + \dots + d_np_n$, тогда $d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ — это глобальное сечение $\eta(d_1p_1 + \dots + d_np_n)^{\otimes 2} \otimes \omega_C$. Используя тот факт, что $\eta^{\otimes 2} \cong \omega_C$ по определению, мы можем идентифицировать $d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ с сечением $\omega_C^{\otimes 2}(2d_1p_1 + \dots + 2d_np_n)$, которое будем интерпретировать как мероморфный квадратичный дифференциал на C. Будем говорить, что сечение w пучка $\omega_C^{\otimes 2}(2d_1p_1 + \dots + 2d_np_n)$ имеет простые полюсы, если $p_i \neq p_j$ и w приходит из сечения $\omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \dots + p_n)$ при естественном вложении

$$\omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \dots + p_n) \hookrightarrow \omega_C^{\otimes 2}(2d_1p_1 + \dots + 2d_np_n).$$

Если $p_i \neq p_j$, то глобальные сечения $\omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \dots + p_n)$ образуют кокасательное пространство к $\mathcal{S}_{g,n}^{\text{odd}}$ в $(C, \eta, p_1, \dots, p_n)$. Таким образом, если $d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ имеет простые полюсы, мы можем рассматривать его как кокасательный вектор к $\mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_{g,n}$ в точке $(C, \eta, p_1, \dots, p_n)$.

Мы часто будем использовать следующее определение.

Определение 4.0.1. Гладкая нечетная спинорная кривая (C, η) — “хорошая”, если

$$|\operatorname{Aut}(C)| = 1, \qquad h^0(C, \eta) = 1.$$

Предположим, что (C, η) хорошая. Согласно Лемме 4.1.2,

1. если $h^0(C, \eta(-ip)) > 0$, то $h^0(C, \eta(ip)) = i + 1$,
2. если $h^0(C, \eta(p - iq)) > 0$ и $h^0(C, \eta(-iq)) = 0$, то $h^0(C, \eta(iq - p)) = i$,
3. если $h^0(C, \eta(p - q)) = 2$, то $h^0(C, \eta(p + q)) = 3$;

эти равенства определяют размерности пространств из следующей теоремы, которая является основным результатом этой главы.

Теорема 4.1. *Пусть $(C, \eta) \in \mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_g$ — хорошая нечетная спинорная кривая рода $g \geq 3$. Тогда имеет место следующее:*

1. *Пусть $(C, \eta, p) \in X_i$ и пусть $\sigma_0 \in H^0(C, \eta(ip))$ — сечение, соответствующее ненулевому глобальному сечению $\eta(-ip)$. Тогда дифференциалы из $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip)))$ имеют простые полюсы и индуцированный морфизм*

$$\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip)) \xrightarrow{d_\Lambda} \left(N^*_{X_i/\mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_{g,1}}\right)_{C,\eta,p}$$

   в конормальное пространство к X_i в точке (C, η, p) — это изоморфизм. В частности, схема X_i — гладкая в точке (C, η, p) и имеет коразмерность i в этой точке.

2. *Пусть $i \geq 2$ и пусть $(C, \eta, p, q) \in Y_i$ такова, что $p \neq q$ и $h^0(C, \eta(-iq)) = 0$. Пусть $\sigma_0 \in H^0(C, \eta(p + iq))$ — сечение, соответствующее глобальному ненулевому сечению $\eta(p - iq)$. Тогда дифференциалы из $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(p+iq)))$ имеют простые полюсы и индуцированный морфизм*

$$\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq - p)) \hookrightarrow \sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(p + iq)) \xrightarrow{d_\Lambda} \left(N^*_{Y_i/\mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_{g,2}}\right)_{C,\eta,p,q}$$

   в конормальное пространство Y_i при (C, η, p, q) — это изоморфизм. В частности, Y_i — гладкая и имеет коразмерность i в точке (C, η, p, q).

3. *Если $(C, \eta, p, q) \in Y_1$, то дифференциалы из $d_\Lambda(\Lambda^2 H^0(C, \eta(p + q)))$ имеют простые полюсы и индуцированный морфизм*

$$\Lambda^2 H^0(C, \eta(p + q)) \xrightarrow{d_\Lambda} \left(N^*_{Y_1/\mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_{g,2}}\right)_{C,\eta,p,q}$$

в конормальное пространство Y_1 *при* (C,η,p,q) *— это изоморфизм. В частности,* Y_1 *гладкое и имеет коразмерность* 3 *в точке* (C,η,p,q).

Заметим, что Теорема 4.1 ничего не говорит о локальной структуре Y_i^{nice} на диагонали $\mathcal{S}_{g,2}^{\text{odd}}$. В Разделе 4.7 мы доказываем, что геометрическая кратность схемы Y_i^{nice} вдоль любой "диагональной" компоненты равна $i-1$.

Ниже мы представим одно применение Теоремы 4.1, которое послужило мотивом для этой работы. Заметим, что проекции Y_1 и Y_3 на $\mathcal{S}_g^{\text{odd}}$ являются дивизорами на $\mathcal{S}_g^{\text{odd}}$, как следует из вычисления их размерностей, проделанного в Теореме 4.1. Образ Y_1 можно описать как

$$\mathrm{W}_g=\{(C,\eta)\in\mathcal{S}_g^{\text{odd}}\ \mid\ \exists p\in\operatorname{supp}(\eta),q\in C \text{и } h^0(C,\eta(p-q))\geq 2\},\tag{4.0.3}$$

где $\operatorname{supp}(\eta)$ — это множество точек $p\in C$, таких, что $h^0(C,\eta(-p))>0$. Если $h^0(C,\eta)=1$, то $h^0(C,\eta(p-q))\geq 2$ означает, что линейная система $|\eta+p|$ имеет базовую точку. Исходя из этого, мы называем W_g "дивизором базовых точек".

Образ Y_3 совпадает с локусом

$$\{(C,\eta)\in\mathcal{S}_g^{\text{odd}}\ \mid\ \exists p\in\operatorname{supp}(\eta),q\in C \text{и } h^0(C,\eta(p-3q))>0\}.$$

Если мы подставим $p=q$, то приведенное выше условие будет определять дивизор Υ_g:

$$\Upsilon_g=\{(C,\eta)\in\mathcal{S}_g^{\text{odd}}\ \mid\ \exists p\in\operatorname{supp}(\eta) \text{и } h^0(C,\eta(-2p))>0\}\tag{4.0.4}$$

(заметим, что в этом случае рассматриваемый локус соответствует также проекции X_2). В случае $p\neq q$ мы получаем еще один дивизор

$$\mathrm{Cau}_g=\overline{\{(C,\eta)\in\mathcal{S}_g^{\text{odd}}\mid\ \exists p\in\operatorname{supp}(\eta),q\neq p \text{и } h^0(C,\eta(p-3q))>0\}}.\tag{4.0.5}$$

Заметим, что если $h^0(C,\eta)=1$, то $h^0(C,\eta(p-3q))>0$ означает, что линейная система $|\eta+p|$ имеет точку ветвления порядка 2 или больше. Следуя терминологии из [47], развитой в аналогичной ситуации для пространств Гурвица, мы называем Cau_g "дивизором каустики".

Пусть $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}}$ обозначает компактифицированное пространство модулей (см. [12]) нечетных спинорных кривых, и пусть $\overline{\Upsilon}_g$, $\overline{\mathrm{W}}_g$ и $\overline{\mathrm{Cau}}_g$ обозначают замыкания Υ_g, W_g и Cau_g в $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}}$ соответственно. Как известно, $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}}$ является $\mathbb{Q}$-факториальным, так что мы можем говорить о классах $\overline{\Upsilon}_g$, $\overline{\mathrm{Cau}}_g$ и $\overline{\mathrm{W}}_g$ в рациональной группе Пикара $\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}})\otimes\mathbb{Q}$ пространства $\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}}$. Также хорошо известно (см. [26, Следствие 1.3]), что при $g\geq 9$ группа $\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}})\otimes\mathbb{Q}$ порождается над $\mathbb{Q}$ классом Ходжа λ и классами граничных дивизоров $\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{g-1}$ (наши обозначения немного отличаются от используемых в [21]: если $j>g/2$, то наш класс α_j равен классу β_{g-j}, первоначально введенному Корналбой). Естественным образом возникает вопрос о вычислении коэффициентов разложений классов $\overline{\Upsilon}_g$, $\overline{\mathrm{Cau}}_g$ и $\overline{\mathrm{W}}_g$ через эти образующие. Следующая формула была получена Г. Фаркашем и А. Верра (см. [21, Теорема 0.5]):

$$[\overline{\Upsilon}_g] = (g+8)\,\lambda - \frac{g+2}{4}\alpha_0 - 2\beta_0 - \sum_{j=1}^{g-1} 2(g-j)\,\alpha_j.$$

Применяя формулу Портеуса, можно вычислить классы замыканий схем вырождений Y_1 и Y_3 в группе Чжоу $\overline{\mathcal{S}}^{\mathrm{odd}}_{g,2}$. Теорема 4.1 вместе с результатами Раздела 4.7 помогает вычислить геометрические кратности замыканий Y_1 и Y_3 в $\overline{\mathcal{S}}^{\mathrm{odd}}_g$, что в конечном итоге приводит к следующим формулам в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}^{\mathrm{odd}}_g)\otimes\mathbb{Q}$ для любого $g \geq 3$:

$$[\overline{\mathrm{W}}_g] = \frac{1}{2}\left(\frac{g^2+11g-6}{2}\lambda - \frac{g^2+3g-2}{8}\alpha_0 - (2g-2)\beta_0 - \sum_{j=1}^{g-1}(g-j)(g+3j-3)\alpha_j\right),$$

$$[\overline{\mathrm{Cau}}_g] = \frac{9g^2+179g-134}{2}\lambda - \frac{9g^2+59g-50}{8}\alpha_0 - (24g-22)\beta_0 - $$
$$- \sum_{j=1}^{g-1}(g-j)(9g+27j-19)\alpha_j.$$

4.1. Две леммы о спинорных расслоениях на хороших спинорных кривых

Введем некоторые определения. Предположим, что $L \to C$ — линейное расслоение на кривой, а D — дивизор на C. Мы будем писать $L \geq D$, если $h^0(C, L(-D)) > 0$, т.е. в линейной системе $\mathbb{P}H^0(C,L)$ есть дивизор, больший или равный D. Мы будем также иногда использовать аддитивное обозначение $L+D$ для пучка $L(D)$. Наконец, если $h^0(C,L) = 1$, то мы будем использовать обозначение $\mathrm{supp}(L)$ для носителя единственного дивизора из линейной системы $\mathbb{P}H^0(C,L)$. В этом случае мы говорим, что L приведено в $p \in C$, если в этой точке приведен этот дивизор.

В оставшейся части главы мы будем рассматривать только хорошие спинорные кривые (C,η) (см. Определение 4.0.1), то есть мы предполагаем, что $|\mathrm{Aut}(C)| = h^0(C,\eta) = 1$. Заметим, что ограничение $|\mathrm{Aut}(C)| = 1$ сделано для удобства, от него можно отказаться, если рассматривать стек модулей вместо грубого пространства модулей. Однако второе ограничение $h^0(C,\eta) = 1$ является существенным: он играет важную роль в доказательстве Теоремы 4.1.

Обозначим через $\mathcal{S}^{\mathrm{nice}}_g \subset \mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_g$ подмножество хороших спинорных кривых. Если $(C,\eta) \in \mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_g$ общая точка, то $h^0(C,\eta) = 1$, а если $g \geq 3$, то общая кривая не имеет автоморфизмов. Отсюда следует, что если $g \geq 3$, то $\mathcal{S}^{\mathrm{nice}}_g$ — это непустое открытое подмножество $\mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_g$.

Пусть

$$\mathcal{S}^{\mathrm{nice}}_{g,n} = \mathcal{S}^{\mathrm{nice}}_g \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,n} \tag{4.1.1}$$

обозначает пространство модулей хороших спинорных кривых с n отмеченными точками. Поскольку хорошие кривые не имеют автоморфизмов, $\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$ и $\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{nice}}$ гладкие. Более того, проекция

$$\mathrm{pr} : \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$$

представляет собой гладкое и собственное семейство кривых, причем слой pr над точкой $(C,\eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$ изоморфен C.

Закончим этот раздел несколькими простыми замечаниями о линейных системах вида $|\eta+D|$ на кривой C, где (C,η) — хорошая спинорная кривая, а D — дивизор на C.

Лемма 4.1.1. *Пусть (C,η) — спинорная кривая, а D — дивизор на C. Тогда*

$$h^0(C,\eta(D)) - h^0(C,\eta(-D)) = \deg D.$$

Доказательство. Следует из формулы Римана–Роха, двойственности Серра и того факта, что $\eta^{\otimes 2} \cong \omega_C$. □

В качестве следствия мы получаем следующее:

Лемма 4.1.2. *Предположим, что (C,η) — это нечетная спинорная кривая, такая что $h^0(C,\eta) = 1$.*

1. *Предположим, что $h^0(C,\eta(-p)) > 0$, то есть $p \in \mathrm{supp}(\eta)$. Тогда $h^0(C,\eta(p)) = 2$.*
2. *Предположим, что $h^0(C,\eta(-ip)) > 0$ для $p \in C$ и $i \geq 0$. Тогда $h^0(C,\eta(ip)) = i+1$.*
3. *Предположим, что $h^0(C,\eta(p-iq)) > 0$ и $h^0(C,\eta(-iq)) = 0$ для $p \in \mathrm{supp}(\eta)$, $q \in C$ и $i \geq 0$. Тогда $h^0(C,\eta(iq-p)) = i$.*
4. *Предположим, что $h^0(C,\eta(p-q)) \geq 2$ для $p,q \in \mathrm{supp}(\eta)$. Тогда*

$$h^0(C,\eta(p-q)) = h^0(C,\eta(q-p)) = 2$$

и $h^0(C,\eta(p+q)) = 3$.

Доказательство. Утверждения (1), (2), (3) и первое равенство из Утверждения (4) следуют непосредственно из Леммы 4.1.1 и следующих наблюдений :

1. $h^0(C,\eta(-p)) > 0$ влечет $h^0(C,\eta(-p)) = 1$ поскольку $h^0(C,\eta) = 1$,
2. $h^0(C,\eta(-ip)) > 0$ влечет $h^0(C,\eta(-ip)) = 1$,
3. $h^0(C,\eta(p-iq)) > 0$ и $h^0(C,\eta(-iq)) = 0$ влекут $h^0(C,\eta(p-iq)) = 1$.

Для доказательства последнего равенства из (4) заметим, что $h^0(C,\eta(p)) = 2$ влечет $h^0(C,\eta(p-q)) \leq 2$, откуда $h^0(C,\eta(p-q)) = 2$. Последнее равенство и тот факт, что $h^0(C,\eta) = 1$, влекут, что $p \neq q$. Из $p,q \in \mathrm{supp}(\eta)$ следует, что $h^0(C,\eta(-p-q)) = 1$ и мы можем применить лемму 4.1.1, чтобы получить необходимое утверждение. □

4.2. Инфинитезимальные деформации спинорных кривых

В этом разделе мы напоминаем некоторые основные конструкции из теории деформаций первого порядка кривых с отмеченными точками. Более подробную информацию читатель может найти в [17, Глава XI] см. также [61] и [6].

Напомним, что семейство гладких спинорных кривых, как мы определили его в Разделе 2.2.2 Главы 2, — это пара $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F})$, в которой $f : \mathcal{C} \to B$ — собственное семейство гладких кривых и $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ — линейное расслоение, такое, что $\mathcal{F}^{\otimes 2} \cong \omega_f$. Как обычно, ω_f — это относительный дуализирующий пучок, так что пара $(f^{-1}(b), \mathcal{F}|_{f^{-1}(b)})$ — это спинорная кривая для любого $b \in B$. Точку B будем обозначать как (C, η), где C — это слой f над этой точкой, а η — ограничение $\mathcal{F}$ на этот слой. Точку же $\mathcal{C}$ будем обозначать как (C, η, p), где $(C, \eta) \in B$ и $p \in C$.

Забывающее отображение $\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{nice}} \to \mathcal{M}_{g,n}$ этально, поэтому мы можем отождествить касательное пространство к $\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{nice}}$ в $(C, \eta, p_1, \dots, p_n)$ с касательным пространством к $\mathcal{M}_{g,n}$ в $(C, p_1, \dots, p_n)$. Последнее изоморфно $\mathrm{Ext}^1(\Omega_C, \mathcal{O}_C(-p_1 - \dots - p_n))$, где Ω_C — пучок кэлеровых дифференциалов на C. Из двойственности Серра мы заключаем, что

$$T^*_{(C,\eta,p_1,\dots,p_n)}\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{nice}} \cong T^*_{(C,p_1,\dots,p_n)}\mathcal{M}_{g,n} \cong H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \dots + p_n)).$$

Нам понадобится описание отображения Кодаиры–Спенсера в этих терминах.

Пусть $B = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$. Рассмотрим инфинитезимальную деформацию отмеченной спинорной кривой $(C, \eta, p_1, \dots, p_n)$, т.е. плоское собственное семейство спиновых кривых $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F})$ такое, что $(C, \eta) = (f^{-1}(0), \mathcal{F}|_C)$, и n сечений $P_1, \dots, P_n : B \to \mathcal{C}$ морфизма f, таких, что $P_i(0) = p_i$.

Обозначим через $\varphi : C \hookrightarrow \mathcal{C}$ отождествление C с центральным слоем. Рассмотрим короткую точную последовательность пучков на C (см. [6, 4.2.5])

$$0 \longrightarrow T_0^*B \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega_{\mathcal{C}}|_C \longrightarrow \Omega_C \longrightarrow 0\,. \tag{4.2.1}$$

Определим пучок $\tilde{\Omega} \subset \Omega_{\mathcal{C}}$ как

$$\tilde{\Omega} := \ker\Big(\Omega_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\oplus_{i=1}^n P_i^*} \bigoplus_{i=1}^n P_{i*}\Omega_B\Big).$$

Поскольку сечения P_i трансверсальны центральному слою C, мы получаем точную последовательность

$$0 \to \tilde{\Omega}|_C \to \Omega_{\mathcal{C}}|_C \to \bigoplus_{i=1}^n T_0^*B \otimes \mathcal{O}_{p_i} \to 0.$$

Комбинируя ее с (4.2.1), мы получаем следующую точную последовательность пучков на C:

$$0 \longrightarrow T_0^*B \otimes \mathcal{O}_C(-p_1 - \cdots - p_n) \longrightarrow \tilde{\Omega}|_C \longrightarrow \Omega_C \longrightarrow 0. \tag{4.2.2}$$

Применяя $\mathrm{Ext}^1(\cdot, \mathcal{O}_C(-p_1 - \cdots - p_n))$ к этой последовательности, мы получаем точную последовательность

$$T_0B \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega_C, \mathcal{O}_C(-p_1 - \cdots - p_n)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\tilde{\Omega}|_C, \mathcal{O}_C(-p_1 - \cdots - p_n)).$$

Средний член этой последовательности — это касательное пространство к $\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{nice}}$ в $(C, \eta, p_1, \ldots, p_n)$, и в [17, Глава XI] доказано, что первая стрелка — это отображение Кодаиры–Спенсера. Следовательно, вторая стрелка описывает нормальное пространство к образу B в $\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{nice}}$ в точке $(C, \eta, p_1, \ldots, p_n)$.

Перепишем это в двойственных терминах. Двойственная версия приведенной выше последовательности может быть записана как

$$H^0(C, \omega_C(p_1 + \cdots + p_n) \otimes \tilde{\Omega}|_C) \longrightarrow H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)) \longrightarrow T_0^*B, \tag{4.2.3}$$

где мы используем, что C гладкая, когда отождествляем Ω_C и ω_C. Используя эту последовательность, получаем следующее:

Лемма 4.2.1. *Если кокасательный вектор из $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)) = T^*_{(C,\eta,p_1,\ldots,p_n)}\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{nice}}$ принадлежит образу отображения ограничения*

$$H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P_1 + \cdots + P_n) \otimes \tilde{\Omega}) \to H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)),$$

то он обнуляется на T_0B.

Доказательство. Последовательность (4.2.3) влечет, что кокасательный вектор из $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n))$ обнуляется на T_0B, если он принадлежит образу $H^0(C, \omega_C(p_1 + \cdots + p_n) \otimes \tilde{\Omega}|_C)$. Но отображение ограничения из леммы — это композиция

$$H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P_1 + \cdots + P_n) \otimes \tilde{\Omega}) \to H^0(C, \omega_C(p_1 + \cdots + p_n) \otimes \tilde{\Omega}|_C) \to H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)),$$

что завершает доказательство. □

4.3. Спинорные кривые с выделенными нулями. Расслоение $\mathcal{E}_g$

Напомним, что подмножество $X_1 \subset \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{odd}}$ определено посредством (4.0.1). Следующая лемма описывает каноническую схемную структуру на его пересечении с $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$.

Лемма 4.3.1. *Существует единственное (с точностью до изоморфизма) линейное расслоение $\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$ на $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$ такое, что $\mathrm{pr}_*\mathcal{F}_{\mathrm{pr}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}}$, и для любой точки $(C,\eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$ ограничение $\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$ на соответствующий слой C проекции pr изоморфно η. Локус нулей в $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$ канонического сечения $\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$ — это дивизор*

$$X_1^{\mathrm{nice}} \subset \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}},$$

конечный над $\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$, множество точек которого совпадает с $X_1 \cap \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$.

Доказательство. Поскольку стек нечетных спинорных кривых представляет собой стек Делиня-Мамфорда, который над локусом $\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$ хороших спинорных кривых изоморфен $\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$, найдется схема $\tilde{S}$, этальное накрытие $\tilde{S} \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$, и семейство нечетных спинорных кривых $(f\colon \tilde{\mathcal{C}} \to \tilde{S}, \mathcal{F})$ такое, что $\tilde{\mathcal{C}} \cong \tilde{S} \times_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}} \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$, и для любой точки $(C,\eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$ и каждой точки $s \in \tilde{S}$ над (C,η) при указанном выше изоморфизме $\tilde{\mathcal{C}}_s := f^{-1}(s) \cong C$ линейные расслоения $\mathcal{F}|_{f^{-1}(s)}$ и η изоморфны.

По теореме о полунепрерывности и определению хороших кривых прямой образ $f_*\mathcal{F}$ — это линейное расслоение на $\tilde{S}$. Пусть

$$\mathcal{F}' := \mathcal{F} \otimes (f^* f_* \mathcal{F})^{-1},$$

тогда $f_*\mathcal{F}' \cong \mathcal{O}_{\tilde{S}}$. Заметим, что $\mathcal{F}'$ — это единственное линейное расслоение на $\tilde{\mathcal{C}}$, такое, что $f_*\mathcal{F}' \cong \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ и $\mathcal{F}'|_{\mathcal{C}_d} \cong \eta$ для любой точки $s \in \tilde{S}$ над (C,η).

Рассмотрим расслоенные произведения $\tilde{S} \times_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}} \tilde{S}$ и $\tilde{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}} \tilde{\mathcal{C}}$, индуцированный морфизм $\tilde{f}\colon \tilde{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}} \tilde{\mathcal{C}} \to \tilde{S} \times_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}} \tilde{S}$ и две забывающие проекции $p_1, p_2\colon \tilde{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}} \tilde{\mathcal{C}} \to \tilde{\mathcal{C}}$. Аналогично вышесказанному, существует единственное линейное расслоение $\tilde{\mathcal{F}}$ на $\tilde{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}} \tilde{\mathcal{C}}$, такое, что $\tilde{f}_*\tilde{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}$, и ограничения которого на слои $\tilde{f}$ изоморфны соответствующим тэта-характеристикам. С другой стороны, этими свойствами обладают оба пучка $p_1^*\mathcal{F}'$ и $p_2^*\mathcal{F}'$. Следовательно, существует изоморфизм

$$p_1^*\mathcal{F}' \cong p_2^*\mathcal{F}'.$$

Более того, существует единственный такой изоморфизм, который удовлетворяет дополнительному свойству: глобальные сечения обоих расслоений, соответствующие $1 \in f_*\mathcal{F}' \cong \mathcal{O}_{\tilde{S}}$, отображаются друг в друга. Нормализованные таким образом изоморфизмы удовлетворяют условию коцикла, следовательно, согласно стандартному спуску существует линейное расслоение $\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$ на $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$ такое, что $\mathcal{F}'$ является прообразом $\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$. Нетрудно заметить, что $\mathrm{pr}_*\mathcal{F}_{\mathrm{pr}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}}$, а ограничение $\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$ на любой слой pr является соответствующей тэта-характеристикой.

Это доказывает первое утверждение леммы, второе же утверждение очевидно. □

Обозначим через $\mathbf{p}\colon X_1^{\mathrm{nice}} \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$ ограничение проекции $\mathrm{pr}\colon \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$.

Замечание 4.3.2. Заметим, что $(\mathrm{pr}\colon \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}, \mathcal{F}_{\mathrm{pr}})$ — это не семейство спинорных кривых в смысле § 4.2, поскольку $\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}^{\otimes 2}$ не изоморфно ω_{pr}. Фактически, разница $\omega_{\mathrm{pr}} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{pr}}^{-2}$ совпадает с прообразом класса $\mu \in \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}})$, введенного в [13], как непосредственно следует из определения μ. Согласно [13, (3.6)], имеется соотношение $\mu = -\frac{1}{2}\lambda$ в $\mathrm{Pic}(\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}) \otimes \mathbb{Q}$, поэтому μ нетривиален.

Рассмотрим расслоенное произведение

$$\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}} = X_1^{\mathrm{nice}} \times_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}} \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \cong X_1^{\mathrm{nice}} \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,1} \tag{4.3.1}$$

и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Delta_g \arrow[r, hook, "\text{образ } \delta"] & \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}} \arrow[r, "\mathbf{q}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\
& X_1^{\mathrm{nice}} \arrow[u, bend left, "\delta"] \arrow[r, "\mathbf{p}"] \arrow[ur, hook, "\mathbf{j}"] & \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}
\end{tikzcd} \tag{4.3.2}$$

Здесь π — это прообраз pr (следовательно, π — это гладкое собственное семейство кривых), а $\mathbf{q}$ — прообраз $\mathbf{p}$. Кроме того, $\mathbf{j}$ — это вложение из леммы 4.3.1, а δ — это сечение π, такое, что $\mathbf{j} = \mathbf{q} \circ \delta$. Наконец, Δ_g — это образ δ; теоретико-множественно

$$\Delta_g = \{(C, \eta, p, p) \in \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}\}.$$

Замечание 4.3.3. Заметим, что морфизм $\mathbf{p}$ конечен согласно Лемме 4.3.1, следовательно, морфизм $\mathbf{q}$ конечен по теорема о замене базы.

Обозначим через $\mathcal{F}_\pi$ линейное расслоение $\mathbf{q}^*\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$ на $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$. Рассмотрим пучок

$$\mathcal{E}_g = \pi_*\mathcal{F}_\pi(\Delta_g) \tag{4.3.3}$$

на X_1^{nice}.

Лемма 4.3.4. *Пучок $\mathcal{E}_g$ — локально свободный пучок ранга 2 и имеет место следующая короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{F}_\pi \longrightarrow \mathcal{E}_g \longrightarrow \pi_*\left(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}\right) \longrightarrow 0. \tag{4.3.4}$$

Доказательство. Если $(C, \eta, p) \in X_1^{\mathrm{nice}}$ и C отождествлена со слоем π над этой точкой, то $\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_C \cong \eta(p)$. По формуле Римана–Роха имеем $h^0(C, \eta(p)) = 2$, следовательно, по теореме о полунепрерывности $\mathcal{E}_g$ — векторное расслоение ранга 2 на X_1^{nice}, а слой $\mathcal{E}_g$ над (C, η, p) естественно изоморфен $H^0(C, \eta(p))$. Вычисляя прямой образ точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_\pi \longrightarrow \mathcal{F}_\pi(\Delta_g) \longrightarrow \mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g} \longrightarrow 0$$

мы получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{F}_\pi \longrightarrow \mathcal{E}_g \longrightarrow \pi_*\left(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}\right)$$

пучков на X_1^{nice}. Для любой точки $(C,\eta,p)\in X_1^{\mathrm{nice}}$ эта последовательность соответствует последовательности

$$0 \longrightarrow H^0(C,\eta) \longrightarrow H^0(C,\eta(p)) \longrightarrow \eta(p)|_p.$$

на слое π (обозначенном C) над этой точкой. Поскольку $h^0(\eta)=1<h^0(\eta(p))=2$, последний морфизм $H^0(C,\eta(p))\to\eta(p)|_p$ выше сюръективен, откуда мы получаем (4.3.4). □

4.4. Пучки джетов, отображение Гаусса–Валя и схемы вырождений

4.4.1. Пучки джетов

Пусть V — схема. Обозначим через $\mathrm{Diag}\subset V\times V$ диагональ и через $\mathcal{I}_{\mathrm{Diag}}$ пучок идеалов Diag; пусть $\mathrm{Diag}^{(i)}$ будет i-й бесконечно малой окрестностью Diag, то есть $\mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}=\mathcal{O}_V/\mathcal{I}_{\mathrm{Diag}}^{i+1}$. Пусть $p_1,p_2:V\times V\to V$ обозначают проекции на первый и второй факторы.

Для когерентного пучка $\mathcal{F}$ на V определим пучок i-х джетов $\mathcal{F}$ как пучок

$$\mathrm{J}_i(\mathcal{F}) = p_{1*}(p_2^*\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}). \tag{4.4.1}$$

Имеется естественный *вычисляющий* морфизм $H^0(V,\mathcal{F})\otimes\mathcal{O}_V\to\mathrm{J}_i(\mathcal{F})$, который определяется как прямой образ отображения ограничения $p_2^*\mathcal{F}\to p_2^*\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}$. Этот морфизм обобщает очевидный вычисляющий морфизм $H^0(V,\mathcal{F})\otimes\mathcal{O}_V\to\mathcal{F}$, вычисляя не только значение сечения в точке, но и i его производных.

Заметим, что $p_{1*}(\mathcal{I}_{\mathrm{Diag}}/\mathcal{I}_{\mathrm{Diag}}^2)\cong\Omega_V$, где Ω_V — пучок кэлеровых дифференциалов на V, следовательно, имеет место короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}\otimes\Omega_V \longrightarrow \mathrm{J}_1(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0. \tag{4.4.2}$$

Нам понадобится относительный вариант конструкции расслоения джетов для гладких семейств кривых. Пусть $\mathcal{C}\to B$ — гладкое семейство кривых. Пусть $p_1,p_2:\mathcal{C}\times_B\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ — два забывающих отображения (p_1 забывает вторую отмеченную точку, а p_2 забывает первую) и пусть $\delta:\mathcal{C}\to\mathcal{C}\times_B\mathcal{C}$ — диагональное отображение. Обозначим через $\mathrm{Diag}\subset\mathcal{C}\times_B\mathcal{C}$ образ δ.

Для когерентного пучка $\mathcal{F}$ на $\mathcal{C}$ определим

$$\mathrm{J}_i(\mathcal{F},f) := p_{1*}(p_2^*\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}). \tag{4.4.3}$$

Это относительный вариант расслоения джетов.

Лемма 4.4.1. *Конструкция относительного расслоения джетов коммутирует с заменой базы. Другими словами, если $\varphi\colon B' \to B$ — это замена базы, $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times_B B'$ и $f'\colon \mathcal{C}' \to B'$ и $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ — индуцированные морфизмы, то $\mathrm{J}_i(\tilde{\varphi}^*\mathcal{F}, f') \cong \tilde{\varphi}^*\mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f)$.*

Доказательство. Легко следует из теоремы о замене базы. □

Вычисляющий морфизм $p_{1*}p_2^*\mathcal{F} \to \mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f)$ определяется как

$$p_{1*}p_2^*\mathcal{F} \to p_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}) = \mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f),$$

аналогично абсолютному случаю.

Заметим, что если $f : \mathcal{C} \to B$ — это проекция, то $p_{1*}p_2^*\mathcal{F} \cong f^*f_*\mathcal{F}$ согласно теореме о замене базы, примененной к декартову квадрату

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \times_B \mathcal{C} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & \mathcal{C} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Комбинируя этот изоморфизм с вычисляющим морфизмом, мы получаем морфизм:

$$\mathrm{ev}_i : f^*f_*\mathcal{F} \to \mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f). \tag{4.4.4}$$

Нестрого говоря, ev_i сообщает сечению его значение и первые i *вертикальных* производных.

Пусть $\mathcal{I}_{\mathrm{Diag}} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{C}\times_B\mathcal{C}}$ обозначает пучок идеалов Diag. Поскольку $\mathcal{C} \to B$ — гладкое семейство кривых, имеется естественный изоморфизм $p_{1*}(\mathcal{I}_{\mathrm{Diag}}^{i+1}/\mathcal{I}_{\mathrm{Diag}}^{i}) \cong \omega_{\mathcal{C}/B}^{\otimes i}$, следовательно, мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \omega_{\mathcal{C}/B}^{\otimes i} \longrightarrow \mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f) \longrightarrow \mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}, f) \longrightarrow 0. \tag{4.4.5}$$

Заметим, что эта последовательность обобщает последовательность (4.4.2). Отсюда следует, что если $\mathcal{F}$ локально свободен, то и $\mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f)$ тоже локально свободен.

Нам понадобится следующая лемма, связывающая вычисляющее отображение с прямой образами линейных расслоений. Для сечения $P\colon B \to \mathcal{C}$ семейства $f\colon \mathcal{C} \to B$ кривых рассмотрим подсхему $P(B) \subset \mathcal{C}$ как дивизор Картье (будем обозначать ее просто P). Обозначим через $P^{(i)} \subset \mathcal{C}$ i-ю инфинитезимальную окрестность P.

Лемма 4.4.2. *Существует естественный изоморфизм*

$$f_*(\mathcal{F}|_{P^{(i)}}) \cong P^*\mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f), \tag{4.4.6}$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} f_*\mathcal{F} \arrow[r, equal] \arrow[d] & P^*f^*f_*\mathcal{F} \arrow[d, "P^*\mathrm{ev}_i"] \\ f_*(\mathcal{F}|_{P^{(i)}}) \arrow[r, equal] & P^*\mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f) \end{tikzcd}$$

коммутативна, где верхнее равенство — канонический изоморфизм, нижнее равенство — это равенство (4.4.6)*, а левая вертикальная стрелка индуцирована отображением ограничения.*

В частности, прямой образ короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-(i+1)P) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_{P^{(i)}} \longrightarrow 0$$

имеет вид

$$0 \to f_*(\mathcal{F}(-(i+1)P)) \to f_*\mathcal{F} \xrightarrow{P^*\mathrm{ev}_i} P^*\mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f) \\ \to R^1 f_*(\mathcal{F}(-(i+1)P)) \to R^1 f_*\mathcal{F} \to 0 \quad (4.4.7)$$

Доказательство. Рассмотрим морфизм $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times_B \mathcal{C}$, соответствующий

$$\mathcal{C} \cong B \times_B \mathcal{C} \xrightarrow{P\times\mathrm{id}} \mathcal{C} \times_B \mathcal{C}.$$

Очевидно, $\varphi^*\mathrm{Diag} = P(B)$ и $\varphi^*(p_2^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}) \cong \mathcal{F}|_{P^{(i)}}$. Применяя теорему о замене базы к декартову квадрату

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C} \times_B \mathcal{C} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & \mathcal{C} \\ B \arrow[r, "P"] & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

мы получаем

$$f_*(\mathcal{F}|_{P^{(i)}}) \cong f_*(\varphi^*(p_2^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}})) \cong P^*(p_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}})) = P^*\mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f).$$

Остальные утверждения леммы сразу следуют из рассмотрения функтора $f_* \circ \varphi^*$, примененного к точной последовательности $0 \to p_2^*\mathcal{F}(-(i+1)\mathrm{Diag}) \to p_2^*\mathcal{F} \to p_2^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}} \to 0$. . □

Лемма 4.4.3. *Если $P\colon B \to \mathcal{C}$ — некоторое сечение, то*

$$\mathrm{J}_i(\mathcal{F}|_P, f) \cong f^*P^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{P^{(i)}} \cong f^*f_*(\mathcal{F}|_P) \otimes \mathcal{O}_{P^{(i)}},$$

в частности, вычисляющее отображение $f^*f_*(\mathcal{F}|_P) \to \mathrm{J}_i(\mathcal{F}|_P, f)$ сюръективно.

Доказательство. Рассмотрим морфизм $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times_B \mathcal{C}$, имеющий вид

$$\mathcal{C} \cong \mathcal{C} \times_B B \xrightarrow{\mathrm{id}\times P} \mathcal{C} \times_B \mathcal{C}.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму, состоящую из двух декартовых квадратов

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C} \times_B \mathcal{C} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & \mathcal{C} \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "P"] & \mathcal{C} \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $f \circ P = \mathrm{id}$ по предположению, отсюда и $p_1 \circ \psi = \mathrm{id}$. Более того, нетрудно видеть, что $\psi^{-1}\mathrm{Diag}^{(i)} = P^{(i)}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_i(\mathcal{F}|_P, f) \cong \mathrm{J}_i(P_*P^*\mathcal{F}, f) \cong p_{1*}(p_2^*P_*P^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}) \cong p_{1*}(\psi_* f^*P^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}) \\
\cong p_{1*}\psi_*(f^*P^*\mathcal{F} \otimes \psi^*\mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}) \cong f^*P^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{P^{(i)}} \\
\cong f^*f_*P_*P^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{P^{(i)}} \cong f^*f_*(\mathcal{F}|_P) \otimes \mathcal{O}_{P^{(i)}},
\end{aligned}$$

где первые два и последний изоморфизмы получаются из определений, третий соответствует замене базы для левого квадрата, четвертый — это формула проекции для ψ, пятый следует из равенства $p_1 \circ \psi = \mathrm{id}$ и $\psi^{-1}\mathrm{Diag}^{(i)} = P^{(i)}$, показанного выше, а шестой следует из равенства $f \circ P = \mathrm{id}$. $\square$

4.4.2. Отображение Гаусса–Валя d_Λ. Определение и основные свойства

Пусть $\mathcal{F} \to V$ — линейное расслоение на схеме V. Рассмотрим морфизм $\Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_V \to \mathcal{F} \otimes \mathrm{J}_1(\mathcal{F})$, заданный композицией

$$\Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_V \hookrightarrow H^0(V, \mathcal{F}) \otimes H^0(V, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_V \to \mathcal{F} \otimes \mathrm{J}_1(\mathcal{F}),$$

где второе отображение — тензорное произведение двух вычисляющих отображений. Образ пучка $\Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_V$ лежит в ядре отображения $\mathcal{F} \otimes \mathrm{J}_1(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, поскольку $\mathcal{F}$ обратим, следовательно, морфизм $\Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_V \to \mathcal{F} \otimes \mathrm{J}_1(\mathcal{F})$ можно поднять до отображения $\Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_V \to \mathcal{F}^{\otimes 2} \otimes \Omega_V$

$$\begin{tikzcd}
 & & \Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_V \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^{\otimes 2} \otimes \Omega_V \arrow[r] & \mathcal{F} \otimes \mathrm{J}_1(\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathcal{F}^{\otimes 2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где нижняя строка — тензорное произведение (4.4.2) с $\mathcal{F}$. Переходя к глобальным сечениям, получаем отображение

$$d_\Lambda : \Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \to H^0(V, \mathcal{F}^{\otimes 2} \otimes \Omega_V). \qquad (4.4.8)$$

Следуя [63], введем следующее определение:

Определение 4.4.1. Отображение d_Λ называется отображением Гаусса–Валя.

Легко видеть, что для $\mathcal{F} = \mathcal{O}_V$ отображение d_Λ задается формулой

$$d_\Lambda(f \wedge g) = f^2 \cdot d\left(\frac{g}{f}\right) = fdg - gdf. \tag{4.4.9}$$

В частности, для любой функции h выполняется $d_\Lambda(hf \wedge hg) = h^2 d_\Lambda(f \wedge g)$.

Заметим, что конструкция d_Λ функториальна: если $\mathcal{F}'$ — это линейное расслоение на другой схеме V', $\varphi : V' \to V$ — это морфизм схем и $l : \varphi^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ — морфизм пучков, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^2 H^0(V, \mathcal{F}) \arrow[r, "d_\Lambda"] \arrow[d, "l^{\otimes 2}"] & H^0(V, \mathcal{F}^{\otimes 2} \otimes \Omega_V) \arrow[d, "l^{\otimes 2} \otimes \varphi^*"] \\
\Lambda^2 H^0(V', \mathcal{F}') \arrow[r, "d_\Lambda"] & H^0(V', (\mathcal{F}')^{\otimes 2} \otimes \Omega'_V)
\end{tikzcd} \tag{4.4.10}$$

Нам понадобится следующая техническая

Лемма 4.4.4. *Пусть Z — эффективный дивизор Картье на схеме V и пусть $\varphi : Z \to V$ — вложение. Положим*

$$\tilde{\Omega}_\varphi = \ker\Big(\Omega_V \to \varphi_*\Omega_Z\Big).$$

Пусть $\mathcal{F} \to V$ линейное расслоение и пусть $\sigma_0 \in H^0(V, \mathcal{F})$ — такое сечение, что $\mathrm{div}\sigma_0 \geq kZ$ *для некоторого $k > 0$. Тогда для любого $\sigma_1 \in H^0(V, \mathcal{F})$ имеем*

$$\mathrm{div} d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma_1) \geq (k-1)Z$$

и, более того, $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma_1)$ соответствует глобальному сечению $\mathcal{F}^{\otimes 2}(-(k-1)Z) \otimes \tilde{\Omega}_\varphi$ при естественном вложении

$$H^0(V, \mathcal{F}^{\otimes 2}(-(k-1)Z) \otimes \tilde{\Omega}_\varphi) \hookrightarrow H^0(V, \mathcal{F}^{\otimes 2} \otimes \Omega_V).$$

Доказательство. Заметим, что все утверждения выше являются локальными, поэтому мы можем предположить, что $\mathcal{F}$ тривиально, так что σ_0, σ_1 — это функции, а Z — главный дивизор. Поскольку $\mathrm{div}\sigma_0 \geq kZ$, можно считать, что $\sigma_0 = hg^k$, где g — уравнение Z. Из (4.4.9) следует, что

$$d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma_1) = g^{k-1} \cdot (g(d\sigma_1 - dh) - k\sigma_1 h dg).$$

Следовательно, $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma_1)$ делится на g^{k-1}, следовательно, $\mathrm{div}\, d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma_1) \geq (k-1)Z$, откуда следует первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что $\tilde{\Omega}_\varphi$, как подпучок Ω_V, порождается g и dg, поэтому $\mathcal{O}(-(k-1)Z) \otimes \tilde{\Omega}_\varphi$ как подпучок Ω_V порождается g^k и $g^{k-1}dg$, следовательно, приведенная выше формула показывает, что $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma_1)$ — это сечение $\mathcal{O}(-(k-1)Z) \otimes \tilde{\Omega}_\varphi$. $\square$

Отдельно рассмотрим случай, когда $V = C$ — гладкая кривая:

Лемма 4.4.5. *Пусть C — гладкая кривая с отмеченной точкой $p \in C$, а $\mathcal{F} \to C$ — линейное расслоение. Предположим, что σ_1, σ_2 — это ненулевые глобальные сечения $\mathcal{F}$.*

Если $\operatorname{ord}_p \sigma_1 > \operatorname{ord}_p \sigma_2$, тогда

$$\operatorname{ord}_p d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = \operatorname{ord}_p \sigma_1 + \operatorname{ord}_p \sigma_2 - 1,$$

а если $\operatorname{ord}_p \sigma_1 = \operatorname{ord}_p \sigma_2$, то

$$\operatorname{ord}_p d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \geq \operatorname{ord}_p \sigma_1 + \operatorname{ord}_p \sigma_2.$$

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, утверждение локально, поэтому можно считать, что σ_1, σ_2 — это функции. Из (4.4.9) имеем

$$d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = \sigma_2^2 d\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right).$$

Если $\operatorname{ord}_p \sigma_1 = \operatorname{ord}_p \sigma_2$, то $\operatorname{ord}_p d(\sigma_1/\sigma_2)$ неотрицателен, а если $\operatorname{ord}_p \sigma_1 > \operatorname{ord}_p \sigma_2$, то $\operatorname{ord}_p d(\sigma_1/\sigma_2)$ равен $\operatorname{ord}_p \sigma_1 - \operatorname{ord}_p \sigma_2 - 1$. Добавляя к этому порядок $2 \operatorname{ord}_p \sigma_2$ сечения σ_2^2, мы получаем утверждение леммы. $\square$

Мы также несколько раз воспользуемся следующим наблюдением:

Лемма 4.4.6. *Предположим, что C — гладкая связная проективная кривая, $\mathcal{F}$ — линейное расслоение на ней, а σ_0 — ненулевое глобальное сечение $\mathcal{F}$. Тогда d_Λ инъективно на $\sigma_0 \wedge H^0(C, \mathcal{F})$.*

Доказательство. Действительно, согласно (4.4.9), равенство $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma) = 0$ влечет, что σ пропорционально σ_0, следовательно, $\sigma_0 \wedge \sigma = 0$. $\square$

4.4.3. Идеалы Фиттинга

В этом разделе мы напомним определение идеалов Фиттинга, см. [16, Раздел 20.2].

Пусть V — схема и пусть $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм векторных расслоений на V, где $\operatorname{rk} \mathcal{G} = n$. Тогда пучок i-х идеалов Фиттинга φ определяется равенством

$$\operatorname{Fitt}_i(\varphi) := \operatorname{Im}\Big(\Lambda^{n-i}\mathcal{F} \otimes \Lambda^{n-i}\mathcal{G}^\vee \xrightarrow{\Lambda^{n-i}\varphi} \mathcal{O}_V\Big) \subset \mathcal{O}_V.$$

Для любой i конструкция пучка i-х идеалов Фиттинга коммутирует с заменой базы: если $h : V' \to V$ — морфизм схем, то

$$\operatorname{Fitt}_i(h^*\varphi) = h^*\operatorname{Fitt}_i(\varphi),$$

см. [16, Следствие 20.5].

Следуя [16], обозначим через $\mathrm{Fitt}(\varphi)$ первый ненулевой пучок среди $\mathrm{Fitt}_0(\varphi), \mathrm{Fitt}_1(\varphi)$, и т.д. Следующее утверждение легко выводится из определений:

Лемма 4.4.7. *Пусть $h : V' \to V$ — такой морфизм схем, что $\mathrm{Fitt}_i(h^*\varphi)$ отличен от нуля для любого i, для которого $\mathrm{Fitt}_i(\varphi)$ не равен нулю. Тогда*

$$\mathrm{Fitt}(h^*\varphi) = h^*\mathrm{Fitt}(\varphi).$$

Мы будем использовать следующее

Определение 4.4.2. Схема $\mathcal{D}(\varphi)$, определяемая пучком идеалов $\mathrm{Fitt}(\varphi)$, называется схемой вырождений φ.

Замечание 4.4.8. Предположим, что $\mathrm{rk}\,\mathcal{F} = r$, $\mathrm{rk}\,\mathcal{G} = i+1$ и $\mathrm{rk}\,\varphi = m := \min(r, i+1)$ в общей точке V. Тогда ожидаемая коразмерность $\mathcal{D}(\varphi)$ — это $(r-m+1)(i-m+2)$. Имеет место очевидная оценка $\mathrm{codim}\,\mathcal{D}(\varphi) \le (r-m+1)(i-m+2)$.

Наряду со схемой вырождений $\mathcal{D}(\varphi)$, связанной с идеалом $\mathrm{Fitt}(\varphi)$, мы можем определить k-ю схему вырождений $\mathcal{D}_{(k)}(\varphi)$, высекаемую $\mathrm{Fitt}_k(\varphi)$. Следующее свойство сразу следует из определения идеалов Фиттинга (см. [16, Предложение 20.8]). Для краткости положим $\mathcal{D}_{(k)} := \mathcal{D}_{(k)}(\varphi)$ и $\mathcal{D}_{(k+1)} := \mathcal{D}_{(k+1)}(\varphi)$.

Лемма 4.4.9. *В обозначениях выше, вне подсхемы $\mathcal{D}_{(k+1)}$ ядро и коядро морфизма $\varphi : \mathcal{F}|_{\mathcal{D}_{(k)}} \to \mathcal{G}|_{\mathcal{D}_{(k)}}$ — это локально свободные пучки на $\mathcal{D}_{(k)}$ рангов $\mathrm{rk}(\mathcal{F}) - \mathrm{rk}(\mathcal{G}) + k + 1$ и $k+1$, соответственно. Более того, если коразмерность схемы $\mathcal{D}_{(k)}$ равна ожидаемой коразмерности $(\mathrm{rk}(\mathcal{F}) - \mathrm{rk}(\mathcal{G}) + k + 1)(k+1)$, тогда $\mathcal{D}_{(k)}$ является локально полным пересечением вне подсхемы $\mathcal{D}_{(k+1)}$.*

4.4.4. Схемы вырождений морфизма между семействами

Пусть $f : \mathcal{C} \to B$ — гладкое семейство кривых, а $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ — линейное расслоение. Обозначим через

$$\mathcal{D}_i(\mathcal{F}, f) := \mathcal{D}(\mathrm{ev}_i \colon f^*f_*\mathcal{F} \to \mathrm{J}_i(\mathcal{F}, f)) \tag{4.4.11}$$

схему вырождений морфизма (4.4.4). Мы будем опускать второй аргумент в обозначении $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}, f)$, если это не будет вносить путаницу. Например, мы будем писать $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}_{\mathrm{pr}})$ для $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}, \mathrm{pr})$ и $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g))$ для $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi)$ и т. д.

Лемма 4.4.10. *Пусть $f : \mathcal{C} \to B$ — гладкое семейство кривых и $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ — линейное расслоение. Пусть $\varphi\colon B' \to B$ — замена базы. Положим $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times_B B'$ и обозначим через $f'\colon \mathcal{C}' \to B'$ и $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ индуцированные морфизмы. Если морфизм замены базы $\varphi^* f_*\mathcal{F} \to f'_*\tilde{\varphi}^*\mathcal{F}$ является изоморфизмом, тогда $\mathcal{D}_i(\tilde{\varphi}^*\mathcal{F}, f') = f^*\mathcal{D}_i(\mathcal{F}, f)$.*

Доказательство. Следует из предположения $\varphi^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f'_* \tilde{\varphi}^* \mathcal{F}$, Леммы 4.4.1 и Леммы 4.4.7. $\square$

Применяя Лемму 4.4.10 ко вложениям точек в B, можно вывести следующее теоретико-множественное описание $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}, f)$. Предположим, $f_*\mathcal{F}$ — это локально свободный пучок ранга $r = h^0(C, \mathcal{F}|_C)$.

Если $i+1 \geq r$, то из приведенного выше соотношения находим, что

$$\mathcal{D}_i(\mathcal{F}, f)^{\mathrm{red}} = \{(C,p) \in \mathcal{C} \ \mid \ h^0(C, \mathcal{F}|_C \otimes \mathcal{O}_C(-(i+1)p)) > 0\}. \tag{4.4.12}$$

Если $i+1 < r$, то у отображения $H^0(C, \mathcal{F}|_C) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathrm{J}_i(\mathcal{F}|_C)$ имеется нетривиальное ядро, так как для любого $p \in C$ найдется ненулевой сечение σ $\mathcal{F}|_C$ такое, что $\operatorname{ord}_p \sigma \geq i+1$. В этом случае схема $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}, f)$ сосредоточена на тех (C,p), где количество независимых сечений с этим свойством больше, чем ожидается, т.е.

$$\mathcal{D}_i(\mathcal{F}, f)^{\mathrm{red}} = \{(C,p) \in \mathcal{C} \ \mid \ h^0(C, \mathcal{F}|_C \otimes \mathcal{O}_C(-(i+1)p)) > r-i-1\}. \tag{4.4.13}$$

Например, $\mathcal{D}_0(\mathcal{F}, f)$ сосредоточена на таких (C,p), что p является базовой точкой $\mathcal{F}|_C$.

4.5. Схемы вырождений, связанные с тэта-характеристиками. Схемная структура на X_i и Y_i

В этом разделе мы опишем схемную структуру на локусах X_i и Y_i, определенных в (4.0.1) и (4.0.2).

Начиная с этого момента, мы предполагаем, что $g \geq 3$. Теперь мы можем дать точное определение схем вырождений X_i, Y_i, представленных во введении.

В случае X_i рассмотрим семейство $\mathrm{pr} : \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}$ и пучок $\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$ на $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$, определенный в Лемме 4.3.1. Напомним, что $\mathrm{pr}_*\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}$ — это линейное расслоение, слой которого над (C,η) естественно изоморфен $H^0(C,\eta)$. Рассмотрим схему $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}) = \mathcal{D}_i(\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}, \mathrm{pr}) \subset \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$. Ввиду (4.4.12) мы имеем

$$\mathcal{D}_i(\mathcal{F}_{\mathrm{pr}})^{\mathrm{red}} = \{(C,\eta,p) \in \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \ \mid \ \eta \geq (i+1)p\}. \tag{4.5.1}$$

Теперь мы можем определить

$$X_i^{\mathrm{nice}} = \mathcal{D}_{i-1}(\mathcal{F}_{\mathrm{pr}}) \tag{4.5.2}$$

и X_i, как замыкание X_i^{nice} в $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{odd}} = \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,1}$.

В случае Y_i, мы используем диаграмму (4.3.2) и пучок $\mathcal{E}_g$ ранга 2, определенный посредством (4.3.3), слой которого над (C,η,p) естественно изоморфен $H^0(C,\eta(p))$. Рассмотрим схему вырождений $\mathcal{D}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)) = \mathcal{D}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi) \subset \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$. Следуя (4.4.13) и (4.4.12), мы заключаем, что для $i = 0$ имеется описание

$$\mathcal{D}_0(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g))^{\mathrm{red}} = \{(C, \eta, p, q) \in \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}} \ \mid \ h^0(C, \eta(p-q)) = 2\}, \tag{4.5.3}$$

а для $i \geq 1$

$$\mathcal{D}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g))^{\mathrm{red}} = \{(C, \eta, p, q) \in \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}} \ \mid \ \eta + p \geq (i+1)q\}. \tag{4.5.4}$$

Мы определим

$$Y_i^{\mathrm{nice}} = \mathcal{D}_{i-1}(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)). \tag{4.5.5}$$

Заметим, что это определяет Y_i^{nice} только как подсхему $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$. Имеется однако естественный изоморфизм $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \times_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}} \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \to \mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{nice}}$, что позволяет рассматривать Y_i^{nice} как подсхему $\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{nice}}$. Наконец, мы определим Y_i как замыкание Y_i^{nice} в $\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}}$.

4.6. Описание конормальных пространств к X_i^{nice} и Y_i^{nice}

Чтобы доказать Теорему 4.1, нам нужно описать конормальные расслоения к X_i^{nice} в $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$ и к Y_i^{nice} в $\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{nice}}$. Напомним, что

$$T^*_{(C,\eta,p)}\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}} \cong H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p)), \qquad T^*_{(C,\eta,p,q)}\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{nice}} \cong H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)),$$

как следует из Раздела 4.2 (мы предполагаем, что $p \neq q$ в последнем изоморфизме). По определению (4.4.8) d_Λ имеем вложения

$$\begin{aligned} d_\Lambda\Big(\Lambda^2 H^0(C, \eta(ip))\Big) &\subset H^0(C, \omega_C \otimes \eta(ip)^{\otimes 2}), \\ d_\Lambda\Big(\Lambda^2 H^0(C, \eta(p+iq))\Big) &\subset H^0(C, \omega_C \otimes \eta(p+iq)^{\otimes 2}). \end{aligned}$$

С другой стороны, изоморфизм $\eta^{\otimes 2} \cong \omega_C$ индуцирует

$$\begin{aligned} H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p)) &\hookrightarrow H^0(C, \omega_C \otimes \eta(ip)^{\otimes 2}), \\ H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)) &\hookrightarrow H^0(C, \omega_C \otimes \eta(p+iq)^{\otimes 2}). \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Доказательство Теоремы 4.1 состоит из двух шагов. Сначала в Предложении 4.6.1 мы показываем, что рассматриваемые в теореме пространства принадлежат кокасательным пространствам к $\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{nice}}$ $(n = 1, 2)$, т.е. они лежат в образах вложений (4.6.1). Мы также показываем, что размерности этих пространств совпадают с коразмерностями, указанными в теореме. Далее, в Предложении 4.6.2 мы доказываем, что пространства конормальны.

Отметим, что вышеупомянутые коразмерности совпадают с ожидаемыми (см. замечание 4.4.8), откуда следует гладкость схем вырождения в указанных точках.

Допуская некоторую вольность, мы обозначаем через $d_\Lambda(\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq-p)))$ образ морфизма

$$\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq-p)) \hookrightarrow \sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(p+iq)) \xrightarrow{d_\Lambda} H^0(C, \eta(p+iq)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$$

из Утверждения (2)) Теоремы 4.1.

Предложение 4.6.1. *В обозначениях Теоремы 4.1 пространства*

$$d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip))), \quad d_\Lambda(\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq-p))) \quad \text{и} \quad d_\Lambda(\Lambda^2 H^0(C, \eta(p+q)))$$

из Утверждений (1), (2) *и* (3) *соответствуют подпространствам*

$$N_1 \subset H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p)), \qquad N_2, N_3 \subset H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q))$$

размерностей $\dim(N_1) = \dim(N_2) = i$ *и* $\dim(N_3) = 3$.

Доказательство. Рассмотрим каждое утверждение отдельно.

• *Пространство* $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip)))$. Напомним, что если $(C, \eta, p) \in X_i^{\text{nice}}$, то $\eta \geq ip$. Следовательно, из Утверждения (2)) Леммы 4.1.2 имеем

$$h^0(\eta(ip)) = i + 1$$

и $\dim d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip))) = i$ по Лемме 4.4.6.

Образ соответствующего вложения $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p)) \hookrightarrow H^0(C, \eta(ip)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$ совпадает с пространством сечений в $H^0(C, \eta(ip)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$, имеющих ноль порядка не менее $2i-1$ при p. С другой стороны, $\mathrm{div}\sigma_0 \geq 2ip$ по построению, поэтому по Лемме 4.4.5

$$\mathrm{div} d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma) \geq (2i-1)p$$

для любого $\sigma \in H^0(C, \eta(ip))$. Отсюда следует, что $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip)))$ соответствует подпространству $N_1 \subset H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p))$ и имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, hook] & d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip))) \arrow[d, hook] \\
H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p)) \arrow[r] & H^0(C, \eta(ip)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)
\end{tikzcd}$$

• *Пространство* $d_\Lambda(\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq-p)))$. Применяя Утверждение (3)) Леммы 4.1.2, получаем

$$h^0(\eta(iq-p)) = i.$$

Условия $h^0(\eta(-iq)) = 0$ и $p \neq q$ гарантируют, что $\sigma_0(p) \neq 0$, поэтому σ_0 не лежит в образе

$H^0(C, \eta(iq-p))$ в $H^0(C, \eta(p+iq))$. Из этого следует, что

$$\dim d_\Lambda(\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq-p))) = i$$

по Лемме 4.4.6.

Образ вложения $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)) \hookrightarrow H^0(C, \eta(p+iq)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$ совпадает с пространством сечений $w \in H^0(C, \eta(p+iq)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$, таких, что $\mathrm{div} w \geq p + (2i-1)q$. Рассмотрим элемент $d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma_1) \in d_\Lambda(\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq-p)))$. Поскольку $\mathrm{div}\sigma_0 \geq 2iq$ и $\mathrm{div}\sigma_1 \geq 2p$, выполняется

$$\mathrm{div} d_\Lambda(\sigma_0 \wedge \sigma_1) \geq p + (2i-1)q$$

по Лемме 4.4.5. Отсюда следует, что пространство $d_\Lambda(\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq-p)))$ соответствует подпространству $N_2 \subset H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q))$:

$$\begin{tikzcd}
N_2 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, hook] & d_\Lambda(\sigma_0 \otimes H^0(C, \eta(iq-p))) \arrow[d, hook] \\
H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)) \arrow[r] & H^0(C, \eta(p+iq)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)
\end{tikzcd}$$

- *Пространство* $d_\Lambda(\Lambda^2 H^0(C, \eta(p+q)))$. Согласно Утверждению (4)) Леммы 4.1.2 имеем

$$h^0(\eta(p+q)) = 3.$$

Поскольку любой вектор из внешнего квадрата трехмерного пространства разложим, $\dim d_\Lambda(\Lambda^2 H^0(C, \eta(p+q))) = h^0(\eta(p+q)) = 3$ по Лемме 4.4.6.

Образ вложения $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)) \hookrightarrow H^0(C, \eta(p+q)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$ состоит из сечений $w \in H^0(C, \eta(p+q)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$ с $\mathrm{div} w \geq p+q$. Используя, что $h^0(\eta(p-q)) = h^0(\eta(q-p)) = 2$ по Лемме 4.1.2 (4), мы можем выбрать базис $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ $H^0(C, \eta(p+q))$, такой, что

$$\mathrm{div}\sigma_0 \geq 2p+2q, \qquad \mathrm{div}\sigma_1 \geq 2p, \qquad \mathrm{div}\sigma_2 \geq 2q.$$

Действительно, пусть σ_0 — сечение, соответствующее сечению $\eta(-p-q)$. Возьмем в качестве σ_1 любое сечение, соответствующее сечению $\eta(q-p)$, такое, что $\sigma_1(q) \neq 0$, и пусть σ_2 — любое сечение, соответствующее сечению $\eta(p-q)$, такое, что $\sigma_2(p) \neq 0$; это возможно, поскольку $h^0(C, \eta(p-q)) = h^0(C, \eta(q-p)) = 2 > 1 = h^0(C, \eta)$.

Из Леммы 4.4.5 следует, что

$$\mathrm{div} d_\Lambda(\sigma_s \wedge \sigma_t) \geq p+q$$

для любого $s, t = 0, 1, 2$. Мы заключаем, что $d_\Lambda(\Lambda^2 H^0(C, \eta(p+q)))$ соответствует подпространству

$N_3 \subset H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q))$:

$$\begin{tikzcd} N_3 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, hook] & d_\Lambda(\Lambda^2 H^0(C, \eta(p+q))) \arrow[d, hook] \\ H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)) \arrow[r] & H^0(C, \eta(p+q)^{\otimes 2} \otimes \omega_C) \end{tikzcd}$$

Это завершает доказательство предложения. □

Чтобы доказать, что пространства N_1, N_2, N_3, определенные в Предложении 4.6.1, конормальны схемам X_i^{nice} и Y_i^{nice}, воспользуемся Леммой 4.2.1. Рассмотрим касательный вектор к схеме вырождений в данной точке: в случае X_i^{nice} это семейство $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F})$ с сечением P, а в случае Y_i^{nice} касательный вектор определяется семейством $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F})$ с двумя сечениями P, Q, где $B = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$. Согласно Лемме 4.2.1, достаточно показать, что N_1 содержится в образе $H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P) \otimes \tilde{\Omega})$ и N_2, N_3 принадлежат образу $H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P+Q) \otimes \tilde{\Omega})$. Чтобы построить прообразы пространств N_1, N_2, N_3, мы повторим их конструкцию, заменив C на $\mathcal{C}$, η на $\mathcal{F}$, p и q на P и Q и т. д.

Заметим, что в конструкции выше подсхемы $P(B), Q(B) \subset \mathcal{C}$ являются дивизорами Картье (обозначим их далее просто как P, Q), поэтому в этом случае мы можем использовать обычные обозначения для соответствующих линейных расслоений, например, $\mathcal{F}(kP+lQ)$ для $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(kP+lQ)$ и т. д.

Нам понадобится следующая "инфинитезимальная" версия Леммы 4.1.2. В Части (1) мы используем соглашение $X_0^{\text{nice}} = \mathcal{S}_{g,1}^{\text{nice}}$.

Лемма 4.6.1. *Пусть $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F})$ — деформация первого порядка хорошей спинорной кривой, а $P, Q : B \to \mathcal{C}$ — два сечения f. Имеют место следующие утверждения:*

1. *Для любой $i \geq 0$ деформация $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P)$ представляет собой касательный вектор к X_i^{nice} тогда и только тогда, когда пучок $f_*(\mathcal{F}(-iP))$ обратим и естественное отображение $f_*(\mathcal{F}(-iP)) \to f_*\mathcal{F}$ является изоморфизмом.*

   В этом случае $f_*\mathcal{F}(iP)$ — это векторное расслоение ранга $i+1$ на B.

2. *Пусть $i \geq 2$ и предположим, что $(C, \eta, p, q) \in Y_i^{\text{nice}}$ удовлетворяет предположениям Утверждения (2) Теоремы 4.1. Тогда $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P, Q)$ представляет собой касательный вектор к Y_i^{nice} тогда и только тогда, когда естественное отображение $f_*(\mathcal{F}(-P)) \to f_*\mathcal{F}$ является изоморфизмом, а $f_*\mathcal{F}(P-iQ) \to f_*\mathcal{F}(P)$ — это вложение линейных расслоений.*

   В этом случае $f_*\mathcal{F}(iQ-P)$ — это векторное расслоение ранга i.

3. *Деформация* $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P, Q)$ *представляет собой касательный вектор к* Y_1^{nice} *тогда и только тогда, когда естественные отображения* $f_*(\mathcal{F}(-P)) \to f_*\mathcal{F}$ *и* $f_*\mathcal{F}(P-Q) \to f_*\mathcal{F}(P)$ *являются изоморфизмами.*

   В этом случае $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, Q, P)$ *также представляет собой касательный вектор к* Y_1^{nice}.

Доказательство. Напомним, что $\mathcal{F}^{\otimes 2} \simeq \omega_f$ по определению семейства спинорных кривых (см. § 4.2). Из двойственности Гротендика следует, что если D — дивизор Картье на $\mathcal{C}$ такой, что $f_*(\mathcal{F}(D))$ и $R^1f_*(\mathcal{F}(D))$ оба локально свободны, тогда

$$f_*(\mathcal{F}(-D)) \cong (R^1f_*(\mathcal{F}(D)))^\vee \quad \text{и} \quad R^1f_*(\mathcal{F}(-D)) \cong (f_*(\mathcal{F}(D)))^\vee, \tag{4.6.2}$$

в частности, $f_*(\mathcal{F}(-D))$ и $R^1f_*(\mathcal{F}(-D))$ также локально свободны.

Докажем каждое утверждение леммы отдельно.

Доказательство утверждения (1). Подставляя в последовательность (4.4.7) из Леммы 4.4.2 $i-1$ вместо i, получаем

$$0 \to f_*(\mathcal{F}(-iP)) \to f_*\mathcal{F} \xrightarrow{P^*\mathrm{ev}_{i-1}} P^*\mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}, f) \to R^1f_*(\mathcal{F}(-iP)) \to R^1f_*\mathcal{F} \to 0.$$

Поскольку X_i^{nice} является локусом нулей морфизма ev_{i-1}, семейство $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P)$ представляет собой касательный вектор к X_i^{nice} тогда и только тогда, когда $P^*\mathrm{ev}_{i-1} = 0$. Приведенная выше точная последовательность показывает, что это эквивалентно условию, что естественное отображение $f_*(\mathcal{F}(-iP)) \to f_*\mathcal{F}$ является изоморфизмом. Это доказывает первую часть утверждения.

Предположим, что $P^*\mathrm{ev}_{i-1} = 0$. Тогда приведенная выше последовательность индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow P^*\mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}, f) \longrightarrow R^1f_*(\mathcal{F}(-iP)) \longrightarrow R^1f_*\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Поскольку $f_*\mathcal{F}$ и $R^1f_*\mathcal{F}$ — линейные расслоения (по определению хорошей спинорной кривой и теореме о полунепрерывности), а также поскольку $\mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}, f)$ — векторное расслоение ранга i, получаем, что $f_*\mathcal{F}(-iP)$ и $R^1f_*\mathcal{F}(-iP)$ — векторные расслоения ранга 1 и $i+1$ соответственно. Это завершает доказательство (4.6.2).

Доказательство утверждения (2). Применив Лемму 4.4.2 к пучку $\mathcal{F}(P)$ и сечению Q, получим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow f_*(\mathcal{F}(P-iQ)) \longrightarrow f_*\mathcal{F}(P) \xrightarrow{Q^*\mathrm{ev}_{i-1}} Q^*\mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}(P), f) \longrightarrow \\ \longrightarrow R^1f_*(\mathcal{F}(P-iQ)) \longrightarrow R^1f_*(\mathcal{F}(P)) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Мы утверждаем, что если $(C,\eta,p,q) \in Y_i^{\mathrm{nice}}$ удовлетворяет условиям Утверждения (2) Теоремы 4.1, тогда $Q^*\mathrm{ev}_{i-1}$ отличен от нуля в единственной точке 0 из B. Действительно, $\mathcal{F}(P)$ — это прообраз $\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)$ относительно естественного отображения $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$, следовательно, существует естественный изоморфизм $f_*(\mathcal{F}(P))|_0 \simeq H^0(C,\eta(p))$, а обнуление $Q^*\mathrm{ev}_{i-1}$ означало бы, что морфизм

$$H^0(C,\eta(p)) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathrm{J}_{i-1}(\eta(p))$$

равен нулю в точке $q \in C$. Однако, этот морфизм отличен от нуля в этой точке, поскольку предположения $p \neq q$ и $h^0(C,\eta(-iq)) = 0$ из Утверждения (2) Теоремы 4.1 влекут, что сечение $\eta(p)$, соответствующее сечению η, имеет ноль порядка менее чем i в q.

Деформация $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P)$ представляет касательный вектор к Y_i^{nice} тогда и только тогда, когда $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P)$ является касательным вектором к X_1^{nice} и морфизм $Q^*\mathrm{ev}_{i-1}$ имеет нетривиальное ядро (это следует из описания Y_i^{nice} в (4.5.5) как локуса вырождений). Согласно Утверждению (1), если $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P)$ представляет касательный вектор к X_1^{nice}, то $f_*\mathcal{F}(P)$ локально свободен и имеет ранг два. Используя тот факт, что $Q^*\mathrm{ev}_{i-1}$ не равен нулю в 0, мы выводим из Леммы 4.4.9, что $Q^*\mathrm{ev}_{i-1}$ имеет нетривиальное ядро тогда и только тогда, когда пучок $f_*(\mathcal{F}(P-iQ)) \cong \ker(Q^*\mathrm{ev}_{i-1})$ локально свободен и имеет ранг 1, так что мы получаем “если и только если” часть утверждения. Отметим также, что Лемма 4.4.9 влечет, что $\mathrm{Coker}(Q^*\mathrm{ev}_{i-1})$ — это локально свободный пучок ранга $i-1$ на B.

Теперь предположим, что $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P)$ представляет касательный вектор к Y_i^{nice}, как выше. Точная последовательность (4.6.3) влечет короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(Q^*\mathrm{ev}_{i-1}) \longrightarrow R^1 f_*(\mathcal{F}(P-iQ)) \longrightarrow R^1 f_*(\mathcal{F}(P)) \longrightarrow 0.$$

Снова используя Утверждение (1), для $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P)$ мы заключаем, что $f_*(\mathcal{F}(-P))$ — локально свободный пучок ранга 1, следовательно, $R^1 f_*(\mathcal{F}(P))$ также локально свободный пучок ранга 1 по (4.6.2). Поскольку $\mathrm{Coker}(Q^*\mathrm{ev}_{i-1})$ — это локально свободный пучок ранга $i-1$, мы приходим к выводу, что $R^1 f_*\mathcal{F}(P-iQ)$ локально свободный пучок ранга i, следовательно, согласно (4.6.2), пучок $f_*\mathcal{F}(iQ-P)$ также локально свободен и имеет ранг i.

Доказательство утверждения (3). Применяя Лемму 4.4.2 для $\mathcal{F}(P)$, Q и $i=0$, мы получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow f_*\mathcal{F}(P-Q) \longrightarrow f_*\mathcal{F}(P) \xrightarrow{Q^*\mathrm{ev}_0} & \\ \longrightarrow f_*(\mathcal{F}(P)|_Q) \longrightarrow R^1 f_*\mathcal{F}(Q-P) \longrightarrow R^1 f_*\mathcal{F}(P) \longrightarrow 0 & \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

Деформация $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P, Q)$ представляет собой касательный вектор к Y_1^{nice} тогда и только тогда, когда $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P)$ касателен к X_1^{nice} и $Q^*\mathrm{ev}_0 = 0$; из приведенной выше последовательности мы видим, что последнее условие эквивалентно тому, что морфизм

$$f_*\mathcal{F}(P-Q) \xrightarrow{\cong} f_*\mathcal{F}(P) \tag{4.6.5}$$

является изоморфизмом; это доказывает “если и только если” часть утверждения.

Теперь предположим, что $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, P, Q)$ представляет собой касательный вектор к Y_1^{nice}. Рассмотрим комплекс Кошуля $0 \to \mathcal{O}(-P-Q) \to \mathcal{O}(-P) \oplus \mathcal{O}(-Q) \to \mathcal{O} \to 0$, который является точным, поскольку сечения P и Q не пересекаются. Тензорно умножая его $\mathcal{F}(P)$ и вычисляя прямой образ, получаем точную последовательность

$$0 \to f_*\mathcal{F}(-Q) \to f_*\mathcal{F} \oplus f_*\mathcal{F}(P-Q) \to f_*\mathcal{F}(P) \to 0$$

(она точна справа, поскольку (4.6.5) сюръективен). Комбинируя эту последовательность с (4.6.5), мы заключаем, что естественное отображение $f_*\mathcal{F}(-Q) \to f_*\mathcal{F}$ является изоморфизмом; согласно Утверждению (1), это означает, что $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, Q)$ касателен к X_1^{nice}.

Комбинируя равенство $Q^*\mathrm{ev}_0 = 0$ и (4.6.4), мы получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow f_*(\mathcal{F}(P)|_Q) \longrightarrow R^1 f_*\mathcal{F}(Q-P) \longrightarrow R^1 f_*\mathcal{F}(P) \longrightarrow 0. \tag{4.6.6}$$

Более того, поскольку $R^1 f_*\mathcal{F}(P)$ обратимый пучок, как было показано при доказательстве (1), мы выводим из (4.6.2) и (4.6.6), что $f_*\mathcal{F}(Q-P)$ является векторным расслоением ранга 2.

Остается показать, что $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, Q, P)$ представляет собой касательный вектор к Y_1^{nice}. Согласно “если и только если” части утверждения, которую мы доказали выше, это эквивалентно тому факту, что отображение

$$f_*\mathcal{F}(Q-P) \xrightarrow{\cong} f_*\mathcal{F}(Q) \tag{4.6.7}$$

является изоморфизмом. Так как $(f : \mathcal{C} \to B, \mathcal{F}, Q)$ касателен к X_1^{nice}, пучок $f_*\mathcal{F}(Q)$ — векторное расслоение ранга 2, как мы показали в Утверждении (1) леммы. Выше мы также показали, что $f_*\mathcal{F}(Q-P)$ локально свободный пучок ранга 2. Наконец, морфизм (4.6.7) инъективен, что означает, что он является изоморфизмом.

Действительно, инъективный морфизм векторных расслоений ранга 2 на B соответствует инъективному морфизму свободных модулей ранга 2 над $\mathbb{C}[\varepsilon]/\varepsilon^2$; эти свободные модули представляют собой векторные пространства размерности 4, поэтому инъекция между ними является изоморфизмом. $\square$

Мы завершим доказательство Теоремы 4.1 следующим предложением:

Предложение 4.6.2. *Подпространства*

$$N_1 \subset H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p)), \quad N_2 \subset H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)), \quad \text{и} \quad N_3 \subset H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)),$$

рассмотренные в Предложении 4.6.1, конормальны к стратам X_i^{nice}, Y_i^{nice} и Y_1^{nice}, соответственно.

Доказательство. Мы рассмотрим каждый случай отдельно и будем использовать обозначения из доказательства Предложения 4.6.1.

• *Случай X_i^{nice}.* Лемма 4.6.1(1) показывает, что пучок $f_*\mathcal{F}(-iP)$ обратим. С другой стороны, любой обратимый пучок на B тривиален, поэтому существует глобальное сечение Σ пучка $\mathcal{F}$, такое, что $\mathrm{div}\Sigma \geq iP$ и $\Sigma|_C$ является ненулевым сечением η. Пусть Σ_0 будет соответствующим глобальным сечением $\mathcal{F}(iP)$. Из конструкции следует, что $\mathrm{div}\Sigma_0 \geq 2iP$. Рассмотрим пространство

$$d_\Lambda\left(\Sigma_0 \wedge H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iP))\right) \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iP)^{\otimes 2} \otimes \Omega_{\mathcal{C}}).$$

Поскольку $\mathrm{div}\Sigma_0 \geq 2iP$, неравенство

$$\mathrm{div} d_\Lambda(\Sigma_0 \wedge \Sigma_1) \geq (2i-1)P$$

выполняется для любого $\Sigma_1 \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iP))$, что сразу следует из применения Леммы 4.4.4 с $\varphi = P$. Используя второе утверждение Леммы 4.4.4 (с $V = \mathcal{C}$, $Z = P$, так, что $\tilde{\Omega}_\varphi = \tilde{\Omega}$, $k = 2i$ и $\mathcal{F}$ заменен на $\mathcal{F}(iP)$), мы заключаем, что $d_\Lambda\left(\Sigma_0 \wedge H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(P))\right)$ лежит в образе вложения

$$H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P) \otimes \tilde{\Omega}) \to H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iP)^{\otimes 2} \otimes \Omega_{\mathcal{C}}),$$

полученного как тензорное произведение вложений $\omega_f(P) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}^{\otimes 2}(P) \hookrightarrow \mathcal{F}(iP)^{\otimes 2}$ и $\tilde{\Omega} \to \Omega_{\mathcal{C}}$. Следовательно, существует пространство $\mathcal{N}_1 \subset H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P) \otimes \tilde{\Omega})$, такое, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P) \otimes \tilde{\Omega}) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iP)^{\otimes 2} \otimes \Omega_{\mathcal{C}}) \arrow[ddd] \\
& \mathcal{N}_1 \arrow[ul, hook] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & d_\Lambda\left(\Sigma_0 \wedge H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iP))\right) \arrow[ur, hook] \arrow[d] & \\
& N_1 \arrow[dl, hook] \arrow[r, "\cong"] & d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip))) \arrow[dr, hook] & \\
H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p)) \arrow[rrr] & & & H^0(C, \eta(ip)^{\otimes 2} \otimes \omega_C)
\end{tikzcd}$$

где все вертикальные отображения являются ограничениями (левая вертикальная стрелка соответствует естественному морфизму пучков $\tilde{\Omega}|_C \subset \Omega_{\mathcal{C}}|_C \to \Omega_C \simeq \omega_C$, определенному посредством (4.2.1)). Мы закончим доказательство, если покажем, что отображение ограничения

$$d_\Lambda\left(\Sigma_0 \wedge H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iP))\right) \to d_\Lambda(\sigma_0 \wedge H^0(C, \eta(ip)))$$

сюръективно. Это следует из того, что $f_*\mathcal{F}(iP)$ является векторным расслоением ранга $i+1 = h^0(\eta(ip))$ согласно Утверждению (1) Леммы 4.6.1, так что $f_*\mathcal{F}(iP)|_0 \cong H^0(C, \eta(ip))$.

• *Случай* Y_i^{nice}, $i \geq 2$. Согласно Утверждению (2) Леммы 4.6.1 пучок $f_*\mathcal{F}(P - iQ)$ обратим, так, что, как и в предыдущем случае, существует глобальное сечение Σ пучка $\mathcal{F}(P)$, такое, что $\mathrm{div}\Sigma \geq iQ$ и $\Sigma|_C$ — ненулевое сечение $\eta(p)$. Пусть Σ_0 будет соответствующим глобальным сечением $\mathcal{F}(P + iQ)$. Заметим, что $\mathrm{div}\Sigma_0 \geq 2iQ$. Пусть подпространство

$$d_\Lambda\left(\Sigma_0 \otimes H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iQ - P))\right) \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(P + iQ)^{\otimes 2} \otimes \Omega_{\mathcal{C}})$$

обозначает образ морфизма

$$\Sigma_0 \otimes H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iQ - P)) \hookrightarrow \Sigma_0 \wedge H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(P + iQ)) \xrightarrow{d_\Lambda} H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(P + iQ)^{\otimes 2} \otimes \Omega_{\mathcal{C}}).$$

Поскольку $\mathrm{div}\Sigma_0 \geq 2iQ$ и $\mathrm{div}\Sigma_1 \geq 2P$ для любого сечения $\Sigma_1 \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(P + iQ))$, соответствующего сечению из $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iQ - P))$ при естественном вложении, имеем

$$\mathrm{div} d_\Lambda(\Sigma_0 \wedge \Sigma_1) \geq P + (2i - 1)Q$$

для любого такого Σ_1 в силу первого утверждения Леммы 4.4.4. Используя второе утверждение Леммы 4.4.4 для $\varphi = P \oplus Q : B \sqcup B \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}$, замененного на $\mathcal{F}(P + iQ)$, получаем, что $d_\Lambda\left(\Sigma_0 \otimes H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iQ - P))\right)$ содержится в образе вложения

$$H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P + Q) \otimes \tilde{\Omega}) \to H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(P + iQ)^{\otimes 2} \otimes \Omega_{\mathcal{C}}),$$

полученного как тензорное произведение $\omega_f(P + Q) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}^{\otimes 2}(P + Q) \hookrightarrow \mathcal{F}(P + iQ)^{\otimes 2}$ и $\tilde{\Omega} \to \Omega_{\mathcal{C}}$. Следовательно, существует пространство $\mathcal{N}_2 \subset H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P + Q) \otimes \tilde{\Omega})$, такое, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P+Q)\otimes\tilde{\Omega}) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(P+iQ)^{\otimes 2}\otimes\Omega_{\mathcal{C}}) \arrow[ddd] \\
& \mathcal{N}_2 \arrow[r, "\cong"] \arrow[ul, hook] \arrow[d] & d_\Lambda\left(\Sigma_0\otimes\mathcal{A}\right) \arrow[ur, hook] \arrow[d] & \\
& N_2 \arrow[r, "\cong"] \arrow[dl, hook] & d_\Lambda(\sigma_0\otimes A) \arrow[dr, hook] & \\
H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}(p+q)) \arrow[rrr] & & & H^0(C, \eta(p+iq)^{\otimes 2}\otimes\omega_C)
\end{tikzcd}$$

в которой мы обозначили

$$A = H^0(C, \eta(iq-p)), \qquad \mathcal{A} = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iQ-P))$$

и все вертикальные отображения являются ограничениями. Мы закончим доказательство, если покажем, что отображение ограничения

$$d_\Lambda\left(\Sigma_0\otimes\mathcal{A}\right) = d_\Lambda\left(\Sigma_0\otimes H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iQ-P))\right) \to d_\Lambda(\sigma_0\wedge H^0(C, \eta(iq-p))) = d_\Lambda(\sigma_0\otimes A)$$

сюръективно. Это следует из того, что $f_*\mathcal{F}(iQ-P)$ является векторным расслоением ранга $i = \dim h^0(C, \eta(iq-p))$, согласно Утверждению (2) Леммы 4.6.1, так что

$$H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F}(iQ-P))|_0 \cong f_*\mathcal{F}(iQ-P)|_0 \cong H^0(C, \eta(iq-p)).$$

• *Случай Y_1^{nice}.* Напомним, что при доказательстве Предложения 4.6.1 мы построили базис $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in H^0(C, \eta(p+q))$, где σ_0 соответствовал сечению $\eta(-p-q)$, а σ_1, σ_2 соответствовали сечениям $\eta(p-q)$ и $\eta(q-p)$. Заметим, что естественное отображение $f_*(\mathcal{F}(-P-Q)) \to f_*\mathcal{F}$ является изоморфизмом, поэтому $f_*(\mathcal{F}(-P-Q))$ обратим. Действительно, морфизмы $f_*(\mathcal{F}(-P)) \to f_*\mathcal{F}$ и $f_*(\mathcal{F}(-Q)) \to f_*\mathcal{F}$ являются изоморфизмами согласно Утверждению (1) Леммы 4.6.1, откуда и следует наше замечание, поскольку P и Q не пересекаются. Отсюда мы выводим, что существует глобальное сечение Σ_0 пучка $\mathcal{F}(P+Q)$, соответствующее сечению $\mathcal{F}(-P-Q)$ и такое, что $\Sigma_0|_C = \sigma_0$. Заметим, что первое условие на Σ_0 эквивалентно

$$\mathrm{div}\Sigma_0 \geq 2P + 2Q.$$

Также, согласно Утверждению (3) Леммы 4.6.1, имеются два изоморфизма

$$f_*\mathcal{F}(P-Q) \xrightarrow{\cong} f_*\mathcal{F}(P)\ , \tag{4.6.8}$$

$$f_*\mathcal{F}(Q-P) \xrightarrow{\cong} f_*\mathcal{F}(Q)\ , \tag{4.6.9}$$

в частности, любое глобальное сечение $\mathcal{F}$ обнуляется вдоль $P+Q$, поскольку P и Q не пересекаются. Напомним, что $h^0(C,\eta(p-q)) = h^0(C,\eta(q-p)) = 2$ (см. Утверждение (4) Леммы 4.1.2), а $f_*\mathcal{F}(P)$ и $f_*\mathcal{F}(Q)$ — векторные расслоения ранга 2 согласно Утверждению (1) Леммы 4.6.1. Ввиду изоморфизмов (4.6.8) и (4.6.9), $f_*\mathcal{F}(P-Q)$ и $f_*\mathcal{F}(Q-P)$ также имеют ранг 2, следовательно, существуют глобальные сечения Σ_1, Σ_2 $\mathcal{F}(P+Q)$ такие, что

$$\mathrm{div}\Sigma_1 \geq 2P, \quad \Sigma_1|_C = \sigma_1, \qquad \mathrm{div}\Sigma_2 \geq 2Q, \quad \Sigma_2|_C = \sigma_2,$$

Пусть $\mathcal{N}_3 \subset H^0(\mathcal{C}, \omega_f(P+Q)\otimes\tilde{\Omega})$ — подпространство, натянутое на векторы $d_\Lambda(\Sigma_i \wedge \Sigma_j)$, $0 \leq i < j \leq 3$. Естественный морфизм $\mathcal{N}_3 \to d_\Lambda(\Lambda^2 H^0(C,\eta(p+q)))$ сюръективен, поскольку пространство $d_\Lambda(\Lambda^2 H^0(C,\eta(p+q)))$ порождается $d_\Lambda(\sigma_i\wedge\sigma_j)$. Используя Лемму 4.4.4, также, как и выше, можно показать, что $\mathcal{N}_3$ соответствует подпространству $H^0(\mathcal{C},\omega_f(P+Q)\otimes\tilde{\Omega})$, таким образом, мы получаем необходимую сюръекцию $\mathcal{N}_3 \to N_3$. □

4.7. Описание Y_{i+1}^{nice} вдоль диагонали Δ_g

Заметим, что Теорема 4.1 ничего не говорит нам о локальной структуре Y_i^{nice} в точках диагонали Δ_g. В этом разделе мы изучаем устройство схемы Y_i^{nice} в точках Δ_g, в частности, мы доказываем, что геометрическая кратность Y_i^{nice} вдоль Δ_g равна $i-1$, т.е. что длина локального кольца общей точки каждой неприводимой компоненты Y_i^{nice}, содержащейся в диагонали, равна $i-1$.

4.7.1. Компоненты схем вырождений, сосредоточенных на дивизорах Картье

Мы начнем с некоторых общих утверждений о локусах нулей сечений пучков джетов; в следующей части мы применим эти результаты для получения описания Y_i^{nice} вдоль диагонали.

Пусть $f: \mathcal{C}\to B$ — гладкое семейство кривых и $Z\subset\mathcal{C}$ — дивизор Картье. Мы предполагаем, что проекция $Z\to B$ конечна. Пусть

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(Z).$$

Также, как и в Разделе 4.4.1, обозначим через $\mathrm{Diag}\subset\mathcal{C}\times_B\mathcal{C}$ диагональ, а через $\mathrm{Diag}^{(i)}$ i-ю инфинитезимальную окрестность Diag. Пусть также $p_1, p_2: \mathcal{C}\times_B\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ обозначают проекции.

Зафиксируем глобальным сечение $s\in H^0(\mathcal{C},\mathcal{L})$ расслоения $\mathcal{L}$, такое, что $\mathrm{div}s = Z$, и пусть $\mathrm{J}_i(s)$ обозначает соответствующее сечение пучка $\mathrm{J}_i(\mathcal{L}, f)$, см. (4.4.3). Обозначим через $Z_i\subset\mathcal{C}$ схему нулей сечения $\mathrm{J}_i(s)$. Зафиксируем все интересующие нас пространства и морфизмы между ними в следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diag}^{(i)} \arrow[dr] & \mathcal{C} \times_B Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
Z_i \times_B \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \times_B \mathcal{C} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & \mathcal{C} \arrow[d] \\
Z_i \arrow[r] & \mathcal{C} \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

Обозначим также

$$Z_i^\circ = Z_i \setminus Z_{i+1}.$$

Лемма 4.7.1. *Для любого $i > 0$ выполняется*

$$Z_i^\circ \times_B Z = \Big((Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}) \cap \mathrm{Diag}^{(i)} \Big) \sqcup V,$$

где $V \subset \mathcal{C} \times_B \mathcal{C}$ — это такая подсхема, что $V \cap \mathrm{Diag} = \varnothing$.

Доказательство. Сначала докажем включение

$$(Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}) \cap \mathrm{Diag}^{(i)} \subset Z_i^\circ \times_B Z. \tag{4.7.1}$$

Подсхема $Z_i^\circ \times_B Z \subset Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}$ является локусом нулей сечения $p_2^*(s)|_{Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}}$, поэтому мы должны проверить, что это сечение обнуляется на $(Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}) \cap \mathrm{Diag}^{(i)}$. Заметим, что $Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}$ — это локус нулей $p_1^* \mathrm{J}_i(s)$. Напомним, что $\mathrm{J}_i(s)$ — это образ s относительно вычисляющего морфизма $f^* f_* \mathcal{L} \cong p_{1*} p_2^* \mathcal{L} \to \mathrm{J}_i(\mathcal{L}, f)$, что равносильно взятию прямого образа вдоль p_1 морфизма ограничения $p_2^* \mathcal{L} \to p_2^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}}$ (подробности см. в Разделе 4.4.1). Таким образом, $\mathrm{J}_i(s)$ соответствует ограничению сечения $p_2^* s$ на $\mathrm{Diag}^{(i)}$, следовательно, условие, что $\mathrm{J}_i(s)$ обращается в ноль вдоль Z_i°, означает, что ограничение $p_2^* s$ на $(Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}) \cap \mathrm{Diag}^{(i)}$ равно нулю. Это доказывает (4.7.1).

С другой стороны, $\mathrm{Diag}^{(i)} \subset \mathcal{C} \times_B \mathcal{C}$ — это дивизор Картье, а пучок его идеалов — это линейное расслоение $\mathcal{O}(-(i+1)\mathrm{Diag})$. Следовательно, включение (4.7.1) влечет, что сечение $p_2^*(s)|_{Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}}$ происходит из сечения $\tilde{s} \in H^0(Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}, p_2^* \mathcal{L}(-(i+1)\mathrm{Diag}))$. Мы утверждаем, что $\tilde{s}$ не обнуляется ни в одной точке $(Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}) \cap \mathrm{Diag}$. Отсюда следует утверждение леммы с V, определенным как локус нулей $\tilde{s}$.

Итак, предположим, что $\tilde{s}$ обнуляется в какой-то точке $(z, z) \in (Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}) \cap \mathrm{Diag}$. По определению $\tilde{s}$ это означает, что $p_2^* s$ обнуляется вдоль $p_1^{-1}(z) \cap \mathrm{Diag}^{(i+1)}$, значит, $z \in Z_{i+1}$. Но $Z_i^\circ \cap Z_{i+1} = \varnothing$ по определению. Это противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Пусть $D \subset \mathcal{C}$ — дивизор Картье, такой, что проекция $D \to B$ является изоморфизмом (т.е. D определяет сечение f).

Лемма 4.7.2. *Пусть $U \subset \mathcal{C}$ — такая подсхема, что $U^{\mathrm{red}} \subset D$. Если $U \times_B D^{(k)} \subset \mathrm{Diag}^{(i)}$, то $U \subset D^{(i-k+1)}$.*

Доказательство. Доказываемое утверждение локально, поэтому можно считать, что $U = \mathrm{Spec}(A)$ аффинно, дивизор D главный и задается уравнением $z = 0$. Обозначим $z_i = p_i^*(z)$. Тогда кольцо функций на $U \times_B D^{(k)}$ — это $A[z_2]/z_2^{k+1}$, а $\mathrm{Diag}^{(i)}$ задается уравнением $(z_1 - z_2)^{i+1} = 0$. Условие $U \times_B D^{(k)} \subset \mathrm{Diag}^{(i)}$ означает, что

$$(z_1 - z_2)^{i+1} = z_1^{i+1} - (i+1)z_1^i z_2 + \cdots + (-1)^k \binom{i+1}{k} z_1^{i-k+1} z_2^k = 0$$

в $A[z_2]/z_2^{k+1} = A \oplus Az_2 \oplus \cdots \oplus Az_2^k$, следовательно, $z_1^{i+1} = z_1^i = \cdots = z_1^{i-k+1} = 0$ в A, что эквивалентно включению $U \subset D^{(i-k+1)}$. □

Следствие 4.7.1. *Пусть U — такая подсхема Z_i°, что $U^{\mathrm{red}} \subset D$. Если $D^{(k)} \subset Z$, то $U \subset D^{(i-k+1)}$.*

Доказательство. По Лемме 4.7.1 имеем

$$U \times_B D^{(k)} \subset Z_i^\circ \times_B Z = \Big((Z_i^\circ \times_B \mathcal{C}) \cap \mathrm{Diag}^{(i)} \Big) \sqcup V.$$

Поскольку $D \to B$ — это изоморфизм и $U^{\mathrm{red}} \subset D$, мы получаем

$$(U \times_B D^{(k)})^{\mathrm{red}} \subset D \times_B D \subset \mathrm{Diag};$$

так как $V \cap \mathrm{Diag} = \varnothing$, мы делаем вывод, что $U \times_B D^{(k)} \subset \mathrm{Diag}^{(i)}$. Из Леммы 4.7.2 следует, что $U \subset D^{(i-k+1)}$. □

Лемма 4.7.3. *Предположим, что $D^{(k)} \subset Z$ и $j \leq i - k$. Тогда подсхема $Z_i \cap D^{(j)} \subset D^{(j)}$ — это локус нулей сечения векторного расслоения ранга $i - k$.*

Доказательство. Заметим, что $D^{(j)} \times_B D^{(k)} \subset \mathrm{Diag}^{(i)}$. Обозначим через α эпиморфизм ограничения

$$\alpha : p_2^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Diag}^{(i)}} \twoheadrightarrow p_2^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D^{(j)} \times_B D^{(k)}}.$$

Вычисляя его прямой образ вдоль p_1 и ограничивая его на $D^{(j)}$, мы получаем эпиморфизм

$$p_{1*}\alpha : \mathrm{J}_i(\mathcal{L}, f)|_{D^{(j)}} \twoheadrightarrow p_{1*}\Big(p_2^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D^{(j)} \times_B D^{(k)}} \Big)$$

Заметим, что пучок $p_{1*}\Big(p_2^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D^{(j)} \times_B D^{(k)}} \Big)$ является векторным расслоением ранга $(k+1)$ на $D^{(j)}$, следовательно, $\mathcal{K} = \ker(p_{1*}\alpha|_{D^{(j)}})$ является векторным подрасслоением ранга $i - k$ расслоения $\mathrm{J}_i(\mathcal{L}, f)|_{D^{(j)}}$.

Поскольку $D^{(k)} \subset Z$, схема $D^{(j)} \times_B D^{(k)}$ содержится в локусе нулей сечения $p_2^* s$. Отсюда следует, что $\mathrm{J}_i(s)|_{D^{(j)}}$ приходит из сечения $\mathcal{K}$, следовательно, $Z_i \cap D^{(j)}$ является локусом нулей этого сечения. $\square$

Предложение 4.7.1. *Предположим, что $D^{(1)} \subset Z$. Для $i > 0$ пусть U° — открытая подсхема Z_i коразмерности i в $\mathcal{C}$ такая, что $(U^\circ)^{\mathrm{red}} \subset D$ и $U^\circ \cap Z_{i+1} = \varnothing$. Тогда $U^\circ \subset D^{(i-1)}$ и $U^\circ \not\subset D^{(i-2)}$.*

Если, дополнительно, схема $U^\circ \cap D$ приведена в общей точке, то геометрическая кратность Z_i вдоль каждой компоненты, содержащейся в замыкании $(U^\circ)^{\mathrm{red}}$, равна i.

Доказательство. Применяя Следствие 4.7.1 к U°, получаем $U^\circ \subset D^{(i-1)}$, следовательно, нам надо доказать, что $U^\circ \not\subset D^{(i-2)}$.

Согласно Лемме 4.7.3, U° — это схема нулей сечения s' векторного расслоения $\mathcal{K}$ ранга $i-1$. С другой стороны, коразмерность U° в $D^{(i-1)}$ равна $i-1$. Следовательно, сечение s' регулярно, а U° является локально полным пересечением в $D^{(i-1)}$. Поскольку $D^{(i-1)}$ является в свою очередь дивизором Картье, отсюда следует, что U° также является локально полным пересечением в $\mathcal{C}$.

Зафиксируем произвольную точку $z \in U^\circ$. Пусть $f_1, \ldots, f_{i-1}$ — регулярная последовательность функций в окрестности точки z в $\mathcal{C}$, соответствующая сечению s' расслоения $\mathcal{K}$, и пусть h задает уравнение D в точке z. Тогда локус нулей $Z' \subset \mathcal{C}$ функций $f_1, \ldots, f_{i-1}$ — это подсхема Коэна-Маколея в $\mathcal{C}$ коразмерности $i-1$, $h' := h|_{Z'}$ — ненулевой дивизор на Z' и $U^\circ \subset Z'$ — главный дивизор Картье, заданный функцией $(h')^i$. В частности, $(h')^{i-1}$ не обнуляется вдоль U°, следовательно, $U^\circ \not\subset D^{(i-2)}$.

Более того, локально около z схема $U^\circ \cap D$ является главным дивизором Картье в Z', соответствующим функции h'. Если она приведена, то кратность Z_i вдоль любой компоненты U равна i. $\square$

4.7.2. Диагональная составляющая Y_i^{nice}

Напомним, что в диаграмме (4.3.2) собраны основные обозначения пространств и морфизмов, которые мы используем. По определению (4.5.5), схема Y_i^{nice} является подсхемой $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$, совпадающей со схемой вырождений вычисляющего морфизма $\pi^*\mathcal{E}_g \to \mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi)$, где $\mathcal{E}_g = \pi_* \mathcal{F}_\pi(\Delta_g)$. В этом Разделе мы опишем структуру этой схемы.

Лемма 4.7.4. *Пусть $i \geq 2$. Тогда приведенная схема $(Y_i^{\mathrm{nice}})^{\mathrm{red}}$ распадается в объединение двух схем $\mathcal{U}_i$ и $\mathcal{V}_i$ коразмерности $i-1$ в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$, определяемых как*

$$\mathcal{U}_i = \delta(X_{i-1}^{\mathrm{nice}}) = \{(C, \eta, p, p) \in \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}} \;\mid\; \eta \geq (i-1)p\}, \tag{4.7.2}$$

$$\mathcal{V}_i = \overline{\{(C, \eta, p, q) \in \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}} \;\mid\; \eta + p \geq iq,\ p \neq q\}}. \tag{4.7.3}$$

Более того, Y_i^{nice} приведено в общей точке $\mathcal{V}_i$.

Доказательство. Согласно Замечанию 4.4.8, все компоненты Y_i^{nice} имеют коразмерность не более ожидаемой коразмерности $i-1$ в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$, более того, как будет видно из анализа ниже, коразмерность равна ожидаемой. Пусть $(C,\eta,p,q) \in Y_i^{\mathrm{nice}}$. По определению (4.0.2), это означает, что $\eta + p \geq iq$. Рассмотрим три варианта:

- $p = q$. Тогда $\eta + p \geq iq$ эквивалентно $\eta \geq (i-1)p$, следовательно,

$$(Y_i^{\mathrm{nice}})^{\mathrm{red}} \cap \Delta_g = \delta(X_{i-1}^{\mathrm{nice}})$$

(напомним, что $X_{i-1}^{\mathrm{nice}} \subset X_1^{\mathrm{nice}}$ по определению). Коразмерность X_{i-1}^{nice} в X_1^{nice} равна $i-2$ по Теореме 4.1, следовательно, коразмерность $\delta(X_{i-1}^{\mathrm{nice}})$ в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$ равна $i-1$. Следовательно, $\mathcal{U}_i = \delta(X_{i-1}^{\mathrm{nice}})$ — это компонента $(Y_i^{\mathrm{nice}})^{\mathrm{red}}$.

- $p \neq q$ и $h^0(\eta(-iq)) = 0$. По Теореме 4.1 схема $Y_i^{\mathrm{nice}} \subset \mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{nice}}$ является гладкой подсхемой коразмерности i в (C,η,p,q). Поскольку $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}} = X_1^{\mathrm{nice}} \times_{\mathcal{S}_g^{\mathrm{nice}}} \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{nice}}$ является дивизором в $\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{nice}}$, мы заключаем, что Y_i^{nice} имеет коразмерность $i-1$ в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$ в точке (C,η,p,q). Следовательно, это множество соответствует открытой части другой компоненты $\mathcal{V}_i$ схемы $(Y_i^{\mathrm{nice}})^{\mathrm{red}}$.

- $p \neq q$ и $h^0(\eta(-iq)) > 0$. Тогда (C,η,p,q) принадлежит локусу $\mathbf{q}^{-1}(X_i^{\mathrm{nice}})$. Поскольку $\mathbf{q}$ конечно (см. Замечание 4.3.3), мы выводим из Теоремы 4.1, что $\mathbf{q}^{-1}(X_i^{\mathrm{nice}})$ имеет коразмерность i в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$. Следовательно, этот локус содержится в замыкании двух предыдущих; поскольку схема $\mathcal{U}_i$ уже замкнута, этот локус содержится в $\mathcal{V}_i$.

Подводя итог вышесказанному, мы можем сделать вывод, что множество точек Y_i^{nice} совпадает с $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{V}_i$, где $\mathcal{U}_i$ и $\mathcal{V}_i$ определяются теоретико-множественно посредством (4.7.2) и (4.7.3). Мы также заключаем, что и $\mathcal{U}_i$, и $\mathcal{V}_i$ имеют коразмерность $i-1$ в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$. Более того, согласно второму пункту выше, схема Y_i^{nice} — гладкая в общей точке $\mathcal{V}_i$, что завершает доказательство. □

Следующая конструкция предоставляет альтернативный способ описания схемной структуры Y_i^{nice} вдоль $\mathcal{U}_i$.

Пусть $\mathcal{Z}_i \subset \mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$ обозначает схему вырождений естественного морфизма

$$\pi^*\pi_*\mathcal{F}_\pi \to \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi, \pi) \to \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi). \tag{4.7.4}$$

Заметим, что $(C,\eta,p,q) \in \mathcal{Z}_i$ тогда и только тогда, когда $\eta + p \geq (i+1)q$. Более того, рассуждения из доказательства Леммы 4.7.4 показывают, что теоретико-множественно мы имеем

$$\mathcal{Z}_i^{\mathrm{red}} = \mathbf{q}^{-1}(X_{i+1}^{\mathrm{nice}}) \cup \delta(X_i^{\mathrm{nice}}) = \mathbf{q}^{-1}(X_{i+1}^{\mathrm{nice}}) \cup \mathcal{U}_{i+1} \tag{4.7.5}$$

(мы использовали (4.7.2) для написания последнего равенства). Согласно Теореме 4.1, схема $\mathbf{q}^{-1}(X_{i+1}^{\mathrm{nice}})$ имеет коразмерность $i+1$ в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$, в то время как $\mathcal{U}_{i+1}$ имеет коразмерность i в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$ по Лемме 4.7.4. Таким образом, ввиду (4.7.5), компоненты $(Y_{i+1}^{\mathrm{nice}})^{\mathrm{red}}$, сосредоточенные на Δ_g, находятся во взаимно однозначном соответствии с компонентами $\mathcal{Z}_i^{\mathrm{red}}$, сосредоточенными на

Δ_g. Назовем такие компоненты диагональными.

Напомним, что $\Delta_g^{(i)}$ обозначает i-ю инфинитезимальную окрестность Δ_g в $\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}$.

Лемма 4.7.5. *Выполняется следующее тождество*

$$\mathcal{Z}_i \cap \Delta_g^{(i)} = Y_{i+1}^{\mathrm{nice}} \cap \Delta_g^{(i)}. \tag{4.7.6}$$

Доказательство. Заметим, что функтор $\mathrm{J}_i(\cdot, \pi)$ точен и

$$\mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}, \pi) \cong \pi^*\pi_*(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}) \otimes \mathcal{O}_{\Delta_g^{(i)}}$$

по Лемме 4.4.3. Используя этот изоморфизм, мы заключаем, что точная последовательность джетов, связанных с $0 \to \mathcal{F}_\pi \to \mathcal{F}_\pi(\Delta_g) \to \mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g} \to 0$, выглядит следующим образом:

$$0 \longrightarrow \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi, \pi) \longrightarrow \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi) \longrightarrow \pi^*\pi_*(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}) \otimes \mathcal{O}_{\Delta_g^{(i)}} \longrightarrow 0. \tag{4.7.7}$$

Между этой последовательностью и последовательностью (4.3.4) существует морфизм:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^*\pi_*\mathcal{F}_\pi \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\mathcal{E}_\pi \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\pi_*\Big(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}\Big) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi, \pi) \arrow[r] & \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi) \arrow[r] & \pi^*\pi_*(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}) \otimes \mathcal{O}_{\Delta_g^{(i)}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{4.7.8}$$

Ограничивая эту диаграмму на $\Delta_g^{(i)}$, получаем

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^*\pi_*\mathcal{F}_\pi|_{\Delta_g^{(i)}} \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\mathcal{E}_\pi|_{\Delta_g^{(i)}} \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\pi_*\Big(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}\Big)|_{\Delta_g^{(i)}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi, \pi)|_{\Delta_g^{(i)}} \arrow[r] & \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi)|_{\Delta_g^{(i)}} \arrow[r] & \pi^*\pi_*(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g})|_{\Delta_g^{(i)}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Правая вертикальная стрелка является изоморфизмом, следовательно, локус вырождений средней вертикальной стрелки совпадает с локусом вырождений ее композиции с первой стрелкой в верхнем ряду, т. е. с ограничением на $\Delta_g^{(i)}$ морфизма (4.7.4), определяющего схему $\mathcal{Z}_i$. Это доказывает лемму. $\square$

Лемма 4.7.6. *Выполняется следующее соотношение:* $\mathcal{Z}_i \cap \Delta_g = \delta(X_i^{\mathrm{nice}})$.

Доказательство. Рассмотрим ограничение на Δ_g морфизма двух коротких точных последовательностей (4.4.5) пучков джетов:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_\pi \otimes \omega_\pi^{\otimes i}|_{\Delta_g} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi, \pi)|_{\Delta_g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}_\pi, \pi)|_{\Delta_g} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] & 0, \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_\pi(\Delta_g) \otimes \omega_\pi^{\otimes i}|_{\Delta_g} \arrow[r] & \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi)|_{\Delta_g} \arrow[r] & \mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi)|_{\Delta_g} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Левая вертикальная стрелка индуцируется отображением $\Delta_g \colon \mathcal{F}_\pi \to \mathcal{F}_\pi(\Delta_g)$, следовательно, после ограничения на Δ_g она обнуляется; это объясняет существование пунктирной стрелки φ, сохраняющей коммутативность диаграммы. Из диаграммы следует, что

$$\mathrm{Coker}(\varphi) = \mathrm{Coker}(\mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi, \pi)|_{\Delta_g} \to \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi)|_{\Delta_g}) \cong (\pi^*\pi_*(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g)|_{\Delta_g}))|_{\Delta_g},$$

последний изоморфизм следует (4.7.7). Мы заключаем, что пучок $\mathrm{Coker}(\varphi)$ обратим на Δ_g, следовательно, φ — это мономорфизм векторных расслоений на Δ_g.

Наконец, заметим, что композиция

$$(\pi^*\pi_*\mathcal{F}_\pi)|_{\Delta_g} \xrightarrow{\mathrm{ev}_{i-1}} \mathrm{J}_{i-1}(\mathcal{F}_\pi, \pi)|_{\Delta_g} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{J}_i(\mathcal{F}_\pi(\Delta_g), \pi)|_{\Delta_g}$$

— это ограничение на Δ_g морфизма (4.7.4), определяющего $\mathcal{Z}_i$. Следовательно, схема $\mathcal{Z}_i \cap \Delta_g$ — это нулевой локус морфизма ev_{i-1}, т.е. схема $\delta(X_i^{\mathrm{nice}})$.

□

Основным результатом этого раздела является следующее

Предложение 4.7.2. *Пусть $i \geq 1$ — целое число, а $\mathcal{U}_{i+1}$ — подсхема $(Y_{i+1}^{\mathrm{nice}})^{\mathrm{red}}$, описанная в Лемме 4.7.4. Тогда геометрическая кратность Y_{i+1}^{nice} вдоль $\mathcal{U}_{i+1}$ равна i.*

Доказательство. Доказательство основано на соотношении (4.7.6) и других свойствах схемы $\mathcal{Z}_i$.

Сначала докажем, что кратность любой диагональной компоненты $\mathcal{Z}_i$ равна i. Для этого мы применим Предложение 4.7.1 для $\mathcal{L} = \mathcal{F}_\pi(\Delta_g)$ и $D = \Delta_g$. Напомним, что

$$\mathcal{F}_\pi(\Delta_g) = \mathbf{q}^*\mathcal{F}_{\mathrm{pr}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}}(\Delta_g) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1^{\mathrm{nice}}}(\mathbf{q}^{-1}(X_1^{\mathrm{nice}}) + \Delta_g)$$

по Лемме 4.3.1, и дивизор Картье $Z := \mathbf{q}^{-1}(X_1^{\mathrm{nice}}) + \Delta_g$ содержит $D = \Delta_g$ с кратностью 2. Следовательно, условия Предложения 4.7.1 выполнены, и мы заключаем, что

$$\mathcal{Z}_i \setminus (\mathcal{Z}_{i+1} \cup \overline{\mathcal{Z}_i \setminus \Delta_g}) = Z_i^\circ \subset \Delta_g^{(i-1)}. \tag{4.7.9}$$

Заметим, что Z_i° плотна в любой диагональной компоненте U схемы $\mathcal{Z}_i$, поскольку коразмерность U равна i, а коразмерность $\mathcal{Z}_{i+1}$ равна $i+1$ ввиду (4.7.5) и Теоремы 4.1. Более того, схема

$\mathcal{Z}_i \cap \Delta_g$ приведена по Лемме 4.7.6 и Теореме 4.1, следовательно, геометрическая кратность $\mathcal{Z}_i$ вдоль любой диагональной компоненты равна i.

Комбинируя это с (4.7.6), мы заключаем, что

$$(Y_{i+1}^{\mathrm{nice}} \cap \Delta_g^{(i)}) \setminus \mathcal{Z}_{i+1} \subset \Delta_g^{(i-1)}. \tag{4.7.10}$$

Пусть y_0 — общая точка диагональной компоненты Y_{i+1}^{nice}. Пусть $\mathcal{O}_{Y_{i+1}^{\mathrm{nice}},y_0}$ — локальное кольцо в y_0 с максимальным идеалом $\mathfrak{m}_{Y_{i+1}^{\mathrm{nice}},y_0} \subset \mathcal{O}_{Y_{i+1}^{\mathrm{nice}},y_0}$. Пусть h — уравнение диагонали в $\mathcal{O}_{Y_{i+1}^{\mathrm{nice}},y_0}$. Включение (4.7.10) влечет, что

$$h^i \in (h^{i+1}).$$

Следовательно, для некоторой $f \in \mathcal{O}_{Y_{i+1}^{\mathrm{nice}},y_0}$ выполняется $h^i + fh^{i+1} = h^i(1+fh) = 0$. Но y_0 принадлежит диагонали, следовательно, $h \in \mathfrak{m}_{Y_{i+1}^{\mathrm{nice}},y_0}$, а значит, $1+fh$ обратима в $\mathcal{O}_{Y_{i+1}^{\mathrm{nice}},y_0}$. Отсюда мы выводим, что $h^i = 0$, следовательно, y_0 содержится в $\Delta_g^{(i-1)}$. Наконец, из равенства (4.7.6) и включения (4.7.9) следует, что длина Y_i^{nice} в точке y_0 равна длине $\mathcal{Z}_i$ в точке y_0 (которая является общей точкой ее компоненты), которая, как было показано выше, равна i. □

4.8. Еще об отображении Гаусса–Валя

В этом разделе мы обсудим некоторые известные результаты, связанные с отображением Гаусса–Валя. Во-первых, мы поговорим о его геометрической интерпретации, во-вторых, обсудим связь этого отображения и локусов тэта-характеристик с большим количеством сечений.

4.8.1. Геометрический смысл отображения Гаусса–Валя

Следуя [63], можно предложить следующую геометрическую интерпретацию отображения Гаусса–Валя. Пусть $C \subset \mathbb{P}^n$ — гладкая проективная кривая и $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C(1)$, будем считать, что $H^0(C,\mathcal{F}) \cong H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Рассмотрим отображение $\xi : C \to \mathrm{Gr}(n+1,2)$, которое каждой точке C сопоставляет конус над касательной прямой к C в этой точке. Пусть $N = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ и $\psi : C \to \mathbb{P}^N$ — композиция ξ и плюккерова вложения. Заметим, что

$$H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \cong \Lambda^2 H^0(C,\mathcal{F}),$$
$$\psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \cong \Omega_C(2) \cong \Omega_C \otimes \mathcal{F}^{\otimes 2}$$

(второй изоморфизм мы обсудим ниже). Следовательно, отображение ограничения $\psi^* : H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \to H^0(C, \psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ индуцирует некоторое отображение

$$\Lambda^2 H^0(C,\mathcal{F}) \to H^0(C, \Omega_C \otimes \mathcal{F}^{\otimes 2}). \tag{4.8.1}$$

Утверждается, что отображение (4.8.1) является отображением Гаусса–Валя d_Λ.

Чтобы увидеть это, обозначим через $E \to \mathrm{Gr}(n+1,2)$ тавтологическое расслоение и пусть $V = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^\vee$, так что $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Заметим, что имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \arrow[r, "\psi^*"] & H^0(C, \psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \\
\Lambda^2 V^\vee \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "f"] & H^0(C, \xi^*\Lambda^2 E^\vee), \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

где нижняя строчка f индуцирована включением $E \subset V \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(n+1,2)}$. Заметим, что $V^\vee \cong H^0(C, \mathcal{F})$ по предположению. Таким образом, нам достаточно показать, что найдется изоморфизм $\xi^*\Lambda^2 E \cong \Omega_C \otimes \mathcal{F}^{\otimes 2}$ такой, что композиция

$$\Lambda^2 H^0(C, \mathcal{F}) \cong \Lambda^2 V^\vee \xrightarrow{f} H^0(C, \xi^*\Lambda^2 E^\vee) \cong H^0(C, \Omega_C \otimes \mathcal{F}^{\otimes 2}) \tag{4.8.2}$$

является отображением Гаусса–Валя.

Рассмотрим естественное отображение $V \otimes \mathcal{O}_C \to (T\mathbb{P}^n|_C) \otimes \mathcal{O}_C(-1)$, являющееся частью последовательности Эйлера для $\mathbb{P}^n$, суженной на C. По определению ξ, подрасслоение $\xi^* E \subset V \otimes \mathcal{O}_C$ есть не что иное, как прообраз $TC \otimes \mathcal{O}_C(-1) \subset (T\mathbb{P}^n|_C) \otimes \mathcal{O}_C(-1)$ в $V \otimes \mathcal{O}_C$ относительно этого отображения, то есть имеется мономорфизм точных последовательностей

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)|_C \arrow[r] & V \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] & (T\mathbb{P}^n|_C) \otimes \mathcal{O}_C(-1) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_C(-1) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \xi^* E \arrow[r] \arrow[u, hook] & TC \otimes \mathcal{O}_C(-1) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0,
\end{tikzcd}$$

где верхняя последовательность — это последовательность Эйлера для $\mathbb{P}^n$. В двойственных терминах эта диаграмма имеет вид

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_{\mathbb{P}^n}(1)|_C \arrow[r] \arrow[d] & V^\vee \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_C \otimes \mathcal{O}_C(1) \arrow[r] & \xi^* E^\vee \arrow[r] & \mathcal{O}_C(1) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{4.8.3}$$

Нетрудно показать, что $V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong \mathrm{J}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ и верхняя последовательность есть не что иное, как последовательность (4.4.2). Более того, тождественное отображение $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} = V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong \mathrm{J}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ соответствует отображению вычисления ev_1.

Таким образом, из диаграммы (4.8.3) и функториальности J_1 и ev_1 следует, что $\xi^* E^\vee \cong \mathrm{J}_1(\mathcal{O}_C(1)) = \mathrm{J}_1(\mathcal{F})$ и нижняя последовательность в диаграмме (4.8.3) есть не что иное, как последовательность (4.4.2) для $\mathrm{J}_1(\mathcal{F})$, а отображение $V^\vee \otimes \mathcal{O}_C \to \xi^* E^\vee$ соответствует отображению вычисления $\mathrm{ev}_1 : H^0(C, \mathcal{F}) \to \mathrm{J}_1(\mathcal{F})$.

Если мы теперь возьмем в качестве изоморфизма $\xi^*\Lambda^2 E \cong \Omega_C \otimes \mathcal{F}^{\otimes 2}$ изоморфизм, следующий из нижней последовательности диаграммы (4.8.3), то отображение (4.8.2) действительно будет отображением Гаусса–Валя, что очевидно следует из замечаний выше.

4.8.2. Локусы тэта-характеристик с большим количеством сечений

Следуя [19], введем обозначение

$$\mathcal{S}_g^r = \{(C,\eta) \in \mathcal{S}_g \ \mid \ h^0(C,\eta) \geq r+1, \ h^0(C,\eta) \equiv r+1 \mod 2\}. \tag{4.8.4}$$

Например, $\mathcal{S}_g^{-1} = \mathcal{S}_g^{\mathrm{even}}$, $\mathcal{S}_g^0 = \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$ и $\mathcal{S}_g^1 = \Theta_{\mathrm{null}}$ (см. Раздел 3.9 Главы 3). Другая крайность — это $r = \frac{g-1}{2}$ (если $g-1$ четно), в этом случае $\mathcal{S}_g^r$ соответствует гиперэллиптическим кривым (см. [10, Теорема 2.13]). Заметим, что если $r > \frac{g-1}{2}$, то локус $\mathcal{S}_g^r = \varnothing$ по теореме Клиффорда.

В общем случае известны две оценки на коразмерность $\mathcal{S}_g^r$:

$$2r - 1 \leq \operatorname{codim} \mathcal{S}_g^r \leq \frac{r(r+1)}{2}. \tag{4.8.5}$$

Верхнюю оценку доказал Харрис [29], используя представление Мамфорда $H^0(C,\eta)$ как пересечения двух изотропных подпространств. Нижняя оценка была получена в работе [10]. Как мы видели из примеров выше, обе оценки достигаются, если мы рассматриваем все возможные значения r. Естественно возникает вопрос, как будет устроено поведение $\operatorname{codim} \mathcal{S}_g^r$, если мы наложим на r дополнительные ограничения. Например, верно ли, что для всякого r соотношение $\operatorname{codim} \mathcal{S}_g^r \asymp r^2$ выполняется для достаточно большого g.

Имеется следующая теорема, связывающая локусы $\mathcal{S}_g^r$ и отображение Гаусса–Валя d_Λ. Напомним, что кокасательное пространство к (C,η) в $\mathcal{S}_g$ отождествляется с $H^0(C,\omega_C^{\otimes 2})$ (см. Раздел 4.2).

Теорема 4.2. *Пусть* $r \geq 1$, $(C,\eta) \in \mathcal{S}_g^r \setminus \mathcal{S}_g^{r+2}$ *и* $H^0(C,\eta^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$ *отождествлено с* $H^0(C,\omega_C^{\otimes 2})$ *посредством изоморфизма* $\eta^{\otimes 2} \cong \omega_C$*. Тогда естественное отображение*

$$\Lambda^2 H^0(C,\eta) \xrightarrow{d_\Lambda} \left(N^*_{\mathcal{S}_g^r/\mathcal{S}_g}\right)_{C,\eta}$$

является сюръекцией.

Доказательство. см. [54, Теорема 1]. □

Используя Теорему 4.2, Фаркаш [19] получил следующий результат:

Теорема 4.3 (Farkas)**.** *Для всякого* $1 \leq r \leq 11$, $r \neq 10$ *существует некоторое* $g(r)$*, такое, что для всех* $g \geq g(r)$ *локус* $\mathcal{S}_g^r$ *имеет компоненту, коразмерность которой в* $\mathcal{S}_g$ *равна* $\frac{r(r+1)}{2}$.

Отметим также, что нижняя оценка (4.8.5) легко следует из Теоремы 4.2 и Леммы 4.4.5:

Теорема 4.4 (Montserrat Teixidor I Bigas)**.** *Для всех $r \geq 1$ и $g \geq 1$ выполняется*

$$2r - 1 \leq \operatorname{codim} \mathcal{S}_g^r.$$

Доказательство с использованием отображения Гаусса–Валя. Пусть $(C, \eta) \in \mathcal{S}_g^r$. Для доказательства нам достаточно построить $w_1, \ldots, w_{2r-1} \in \Lambda^2 H^0(C, \eta)$ такие, что их образы $d_\Lambda(w_1), \ldots, d_\Lambda(w_{2r-1})$ будут линейно независимы в $H^0(C, \eta^{\otimes 2} \otimes \omega_C)$. Пусть $p \in C$ — некоторая точка и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r+1} \in H^0(C, \eta)$ выбраны так, чтобы

$$\operatorname{ord}_p \sigma_1 < \operatorname{ord}_p \sigma_2 < \ldots < \operatorname{ord}_p \sigma_{r+1}.$$

Введем обозначение $a_i = \operatorname{ord}_p \sigma_i$ и пусть

$$A = \{a_i + a_j \mid 1 \leq i < j \leq r + 1\}.$$

Нетрудно видеть, что A содержит не меньше $2r-1$ различных элементов, скажем, $A_1, \ldots, A_{2r-1}$. Пусть

$$A_k = a_{i_k} + a_{j_k}.$$

Положим $w_k = d_\Lambda(\sigma_{i_k} \wedge \sigma_{j_k})$. Тогда, согласно Лемме 4.4.5

$$\operatorname{ord}_p(d_\Lambda(w_k)) = A_k - 1,$$

в частности, все $d_\Lambda(w_k)$ имеют попарно-различные порядки в p, следовательно, являются линейно независимыми. $\square$

Глава 5. Универсальный дискриминант на пространстве модулей спектральных накрытий Хитчина

Результаты, представленные в данной главе, основаны на статье [8].

Интегрируемые системы Хитчина возникают в результате размерной редукции самодвойственного уравнения Янга–Милса, см. [30], [31], [2]. Гамильтонианы системы Хитчина закодированы в так называемом *спектральном накрытии* $\widehat{\Sigma}$ (см. [14], [15]), которое представляет собой n-листное накрытие (гладкой или, более общо, стабильной) комплексной проективной кривой Σ. Это накрытие определяется, как подмногообразие $T^*\Sigma$:

$$\widehat{\Sigma} = \{(x, v) \in T^*\Sigma \ \mid \ P(v, x) = 0\}, \tag{5.0.1}$$

где

$$P(v, x) = v^n + q_1(x)v^{n-1} + \cdots + q_n(x), \tag{5.0.2}$$

q_j — это j-дифференциал на Σ (т.е. голоморфное сечение $K_\Sigma^{\otimes j}$). В терминах работы [14] уравнение, определяющее $\widehat{\Sigma}$, задается характеристическим многочленом $P(v, x) = \det(\Phi(x) - vI)$ так называемого поля Хиггса Φ на Σ.

Мы рассматриваем пространство модулей $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ спектральных накрытий Хитчина в случае $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ систем Хитчина, в котором все дифференциалы q_j считаются произвольными. Точка из $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ параметризует пару $(\Sigma, [P])$, где Σ — это кривая рода g, а P — многочлен вида (5.0.2), рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевую константу ξ, заданного правилом $(\xi \cdot P)(v, x) = \xi^n P(\xi^{-1}v, x)$. Как пространство, $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ — это расслоение над компактификацией Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_g$ пространства модулей кривых рода g. Слои этого расслоения изоморфны взвешенному проективному пространству, подробности см. в Разделе 5.2.

Заметим, что если $n = 1$, то $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ совпадает с тотальным пространством проективизированного расслоения Ходжа над $\overline{\mathcal{M}}_g$, которое можно рассматривать как замыкание пространства модулей абелевых дифференциалов (рассматриваемых с точностью до мультипликативной константы) на гладких проективных кривых рода g. А. Кокотов и Д. Короткин [38] построили тау-функцию на этом пространстве модулей, названную тау-функцией Бергмана (см. Главу 3). Тау-функция Бергмана является обобщением эта-функции Дедекинда (они совпадают, если $g = 1$) и может быть интерпретирована как определитель семейства операторов Коши–Римана в духе [55]. С глобальной точки зрения, тау-функция Бергмана — это сечение некоторого линейного расслоения. Можно показать, что это сечение не равно нулю в любой точке пространства модулей, соответствующей дифференциалу с простыми нулями на гладкой кривой. В [44] Д. Короткин и П. Зограф описали асимптотику тау-функции Бергмана при вырождении кривой и слиянии нулей дифференциала. Используя эту асимптотику, Д. Короткин и П. Зограф [44] выразили класс локуса дифференциалов с кратными нулями через стандартные образующие рациональной группы Пикара. В дальнейшем конструкция тау-функции Бергмана была обобщена на случай пространства модулей n-дифференциалов (см.[45] для $n = 2$ и [43] для $n > 2$). Это обобщение позволило получить новые соотношения в рациональной группе Пикара $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ для любого n [46] с помощью рассмотрения прообраза тау-функции Бергмана на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ при дискриминантном отображении; а именно, исследование свойств тау-функции Бергмана на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ позволило выразить класс полного дискриминантного локуса в рациональной группе Пикара $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ через набор стандартных образующих (см. Теорему 5.1). В качестве первого результата этой главы мы уточняем этот результат, используя стандартные методы алгебраической геометрии.

Пусть Σ — гладкая кривая рода g, а P — многочлен вида (5.0.2). Тогда дискриминант $W(x) = \mathrm{Discr}(P(\cdot, x))$ является $n(n-1)$-дифференциалом на Σ, а дивизор W равен дивизору ветвления спектрального накрытия $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$, ассоциированного с P. При общем выборе параметров все нули W оказываются простыми, что означает, что $\widehat{\Sigma}$ гладкое, а накрытие $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ имеет лишь простые ветвления. Когда два нуля W склеиваются, локальная структура отображения $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ изменяется одним из следующих трех способов (мы следуем терминологии [46] в этом описании):

1) Нодальная особенность (нормальное самопересечение $\widehat{\Sigma}$) возникает в точке ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ над двойным нулем W. Локус, параметризующий такие накрытия, мы называем **“граничным локусом”**.

2) Две различные точки ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ возникают в прообразе двойного нуля W. Мы называем локус таких накрытий **“стратом Максвелла”**.

3) Две точки ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ склеиваются, образуя точку ветвления порядка 3 над нулем W кратности два. Мы называем локус таких накрытий **“каустикой”**.

Мы используем терминологию “страт Максвелла” и “каустика” в соответствии с терминологией, традиционной для школы В. Арнольда, см., например, [47].

Соответствие $P \mapsto \mathrm{Discr}(P)$ определяет отображение $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ в пространство модулей пар (Σ, W), где W — $n(n-1)$-дифференциал на Σ, рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевую константу. Пусть $P\overline{D}_W$ обозначает прообраз дивизора, состоящего из тех W, у которых есть хотя бы один кратный ноль (подробности см. в Разделе 5.3). Носитель $P\overline{D}_W$ состоит из объединения трех компонент $P\overline{D}_W^{(b)} \cup P\overline{D}_W^{(m)} \cup P\overline{D}_W^{(c)}$ в соответствии с тремя возможностями, описанными выше. Мы называем дивизор $P\overline{D}_W$ *полным дискриминантным локусом.* Класс дивизора $P\overline{D}_W$ в рациональной группе Пикара $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ называется *классом универсального дис-*

криминанта Хитчина. Следующая теорема доказана в [46, Теорема 3.2]:

Теорема 5.1. *Дивизор $P\overline{D}_W$ удовлетворяет соотношению*

$$P\overline{D}_W = P\overline{D}_W^{(b)} + 2P\overline{D}_W^{(m)} + 3P\overline{D}_W^{(c)},$$

а класс $P\overline{D}_W$ в $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ выражается через стандартные образующие $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ следующим образом:

$$[P\overline{D}_W] = n(n-1)\Big((n^2-n+1)(12\lambda-\delta) - 2(g-1)(2n^2-2n+1)\phi\Big).$$

Здесь $\delta = \sum_{j=0}^{[g/2]} \delta_j$ — это прообраз класса границы Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_g$, класс ϕ — это тавтологический класс, определяемый естественным действием $\mathbb{C}^*$ на $\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$, а λ — это прообраз класса Ходжа с $\overline{\mathcal{M}}_g$. Напомним, что если $\nu : \overline{\mathcal{M}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ — универсальная кривая, то класс Ходжа определяется как $c_1(\nu_*\omega_\nu)$, где ω_ν — относительный дуализирующий пучок. Мы обсудим эти обозначения более подробно в разделе 5.3.1.

Мы обобщаем этот результат, выражая класс каждой из трех компонент полного дискриминантного дивизора через набор образующих $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$:

Теорема 5.2. *Пусть $n \geq 3$ и $g \geq 1$. В $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}
[P\overline{D}_W^{(b)}] &= n(n-1)\Big((n+1)(12\lambda-\delta) - 2(g-1)(2n+1)\phi\Big),\\
[P\overline{D}_W^{(m)}] &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}\Big(12\lambda-\delta-4(g-1)\phi\Big),\\
[P\overline{D}_W^{(c)}] &= n(n-1)(n-2)\Big(12\lambda-\delta-4(g-1)\phi\Big).
\end{aligned}$$

В качестве второго результата мы выводим соотношение, связывающее два класса Ходжа на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. Заметим, что, поскольку степень накрытия $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ равна n, а степень дивизора ветвления равна $\deg \mathrm{div}(W) = 2n(n-1)(g-1)$, род $\widehat{\Sigma}$ равен $\widehat{g} = g(\widehat{\Sigma}) = n^2(g-1)+1$. Таким образом, у нас есть два морфизма $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ и $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to \overline{\mathcal{M}}_{\widehat{g}}$, где первый морфизм сопоставляет $(\Sigma, [P])$ модули кривой Σ, а второй сопоставляет $(\Sigma, [P])$ модули $\widehat{\Sigma}$. Поднимая класс Ходжа вдоль второго морфизма, мы получаем второй класс Ходжа $\widehat{\lambda}$ на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. Следующая теорема представляет формулу в $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$, которая связывает $\widehat{\lambda}$ с λ:

Теорема 5.3. *Пусть $n \geq 3$ и $g \geq 1$. В $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ выполняется следующее соотношение:*

$$\widehat{\lambda} = n(2n^2-1)\lambda - \frac{n(n-1)(4n+1)(g-1)}{6}\phi - \frac{n(n^2-1)}{6}\delta.$$

Заметим, что все коэффициенты в правой части формулы Теоремы 5.3 являются целыми числами.

5.1. Многообразие монических многочленов

Напомним, что многочлен $P(t) = t^n + q_1t^{n-1} + \cdots + q_n$ с единичным старшим коэффициентом называется *моническим.* В этом разделе мы предполагаем, что $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{C}^n$. Дискриминант $\mathrm{Discr}(P)$ — это многочлен от $q_1, \ldots, q_n$, а уравнение $\mathrm{Discr}(P) = 0$ определяет аффинное многообразие $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ монических многочленов с кратными корнями (см.[47]). Многообразие $\mathcal{D}$ не является гладким: оно имеет нормальное самопересечение вдоль подмногообразия $\mathcal{D}^{(m)} \subset \mathcal{D}$, которое параметризует многочлены с двумя кратными корнями, и имеет касп вдоль подмногообразия $\mathcal{D}^{(c)} \subset \mathcal{D}$, соответствующего многочленам с корнем порядка 3 или больше. Чтобы построить нормализацию $\mathcal{D}$, рассмотрим многообразие $\widehat{\mathcal{D}} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, заданное формулой

$$\widehat{\mathcal{D}} = \{(q_1, \ldots, q_n, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid \ P(t) = 0,\ P'(t) = 0\}, \tag{5.1.1}$$

где $P(t) = t^n + q_1t^{n-1} + \cdots + q_n$. Забывающая проекция $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ отображает $\widehat{\mathcal{D}}$ на $\mathcal{D}$, а индуцированное отображение $\widehat{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ имеет степень один над открытым подмножеством $\mathcal{D}$. Чтобы увидеть, что $\widehat{\mathcal{D}}$ гладкое, заметим, что функции $t, P(t), P'(t), \ldots, P^{(n-1)}(t)$ образуют систему координат на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. В этих координатах $\widehat{\mathcal{D}}$ — это просто линейное подпространство, заданное двумя линейными уравнениями $P(t) = 0,\ P'(t) = 0$.

Группа $\mathbb{C}^*$ действует на пространстве $\mathbb{C}^n$ монических многочленов по правилу $(\xi \cdot P)(t) = \xi^n P(\xi^{-1}t)$. В терминах коэффициентов $q_1, \ldots, q_n$ это действие можно переписать как

$$\xi \cdot (q_1, q_2, \ldots, q_n) = (\xi q_1, \xi^2 q_2, \ldots, \xi^n q_n). \tag{5.1.2}$$

Обозначим через $P\mathbb{C}^n$ проективизацию относительно этого действия. Взвешенное проективное пространство $P\mathbb{C}^n$ представляет собой гладкий орбифолд. Многообразие $\mathcal{D}$ эквивариантно относительно действия $\mathbb{C}^*$, мы обозначаем его проективизацию через $P\mathcal{D}$. Действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^n$ переходит в действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, определяемое формулой $\xi \cdot (P, t) = (\xi \cdot P, \xi t)$. Многообразие $\widehat{\mathcal{D}}$ эквивариантно относительно этого действия, обозначаем его проективизацию как $P\widehat{\mathcal{D}}$. Заметим, что отображение $\widehat{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ индуцирует отображение $P\widehat{\mathcal{D}} \to P\mathcal{D}$ (заметим, что отображения между $P(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C})$ и $P\mathbb{C}^n$ не определено) проективных многообразий.

Лемма 5.1.1. *Пусть $n \geq 3$. Для монического многочлена $P(t) = t^n + q_1t^{n-1} + \cdots + q_n$ обозначим через $P_{n-2}(t) = t^{n-2} + q_1t^{n-3} + \cdots + q_{n-2}$ многочлен $t^{-2}(P(t) - q_{n-1}t - q_n)$. Существуют многочлены*

$R_0, R_1, S \in \mathbb{C}[q_1, \ldots, q_n]$ *такие, что уравнение*

$$\mathrm{Discr}(P) = -q_n q_{n-2}^3 \mathrm{Discr}(P_{n-2}) + q_n(q_{n-1}R_1 + q_n R_0) + q_{n-1}^2 S$$

выполняется при любом выборе $P(t) = t^n + q_1 t^{n-1} + \cdots + q_n$.

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{Discr}(P)$ лежит в идеале в $\mathbb{C}[q_1, \ldots, q_n]$, порожденном q_n и q_{n-1}, поэтому мы можем найти $S_1, S_2 \in \mathbb{C}[q_1, \ldots, q_n]$ такие, что $\mathrm{Discr}(P) = q_n S_1 + q_{n-1} S_2$, где S_2 не зависит от q_n. Пусть $S_2 = q_{n-1}S + S_3$, где S_3 не зависит от q_{n-1}. Мы получаем

$$\mathrm{Discr}(P) = q_n S_1 + q_{n-1}^2 S + q_{n-1} S_3. \tag{5.1.3}$$

Рассмотрим многочлен

$$P_z(t) = (t - z)(t - 2z)P_{n-2}(t) = t^n + q_1(z)t^{n-1} + \cdots + q_n(z)$$

где z — формальная переменная. Тогда $q_n(z)$ делится на z^2, а $q_{n-1}(z)$ делится на z, но не на z^2. Используя (5.1.3), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \mathrm{Discr}(P_z) &= q_n(z)S_1(q_1(z), \ldots, q_n(z)) + q_{n-1}(z)^2 S(q_1(z), \ldots, q_{n-1}(z)) + \\ &\qquad\qquad + q_{n-1}(z)S_3(q_1(z), \ldots, q_{n-2}(z)) \\ &= q_{n-1}(z)S_3(q_1, \ldots, q_{n-2}) + z^2 Q_1, \end{aligned}$$

где $Q_1 \in \mathbb{C}[z, q_1, \ldots, q_n]$ — некоторый многочлен. Поскольку $\mathrm{Discr}(P_z)$ делится на z^2, мы видим, что S_3 должен быть равен нулю, следовательно, $S_2 = q_{n-1}S$ и

$$\mathrm{Discr}(P) = q_n S_1 + q_{n-1}^2 S. \tag{5.1.4}$$

Существуют такие $R_0, R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{C}[q_1, \ldots, q_n]$, что многочлен R_2 не зависит от q_n, q_{n-1}, R_3 не зависит от q_n, q_{n-1}, q_{n-2} и выполняется $S_1 = q_n R_0 + q_{n-1}R_1 + q_{n-2}R_2 + R_3$. Уравнение (5.1.4) тогда выглядит следующим образом

$$\mathrm{Discr}(P) = q_n q_{n-2} R_2(q_1, \ldots, q_{n-2}) + q_n(q_{n-1}R_1 + q_n R_0) + q_{n-1}^2 S + q_n R_3(q_1, \ldots, q_{n-3}). \tag{5.1.5}$$

Положим $P_{n-3}(t) = t^{n-3} + q_1 t^{n-2} + \cdots + q_{n-3}$ и рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} &P_z(t) = (t - 3z)(t - 6z)(t + 2z)P_{n-3}(t) = \\ &= (t^3 - 7zt^2 + 36z^3)P_{n-3}(t) = t^n + q_1(z)t^{n-1} + \cdots + q_n(z) \end{aligned}$$

где z — формальная переменная. Тогда $q_n(z)$ и $q_{n-1}(z)$ делятся на z^3, а $q_{n-2}(z)$ делится на z.

Используя эти наблюдения и (5.1.5), мы заключаем, что

$$\mathrm{Discr}(P_z) = q_n(z)R_3(q_1, \dots, q_{n-3}) + z^4 Q_2,$$

где $Q_2 \in \mathbb{C}[z, q_1, \dots, q_n]$ — некоторый многочлен. Заметим, что $\mathrm{Discr}(P_z)$ делится на z^4 (и даже на z^6). Поскольку $q_n(z)$ не делится на z^4, многочлен R_3 должен быть равен нулю. Следовательно, мы можем переписать (5.1.5) как

$$\mathrm{Discr}(P) = q_n q_{n-2} R_2(q_1, \dots, q_{n-2}) + q_n(q_{n-1}R_1 + q_n R_0) + q_{n-1}^2 S. \tag{5.1.6}$$

Используя это уравнение и еще раз те же свойства $q_n(z), q_{n-1}(z)$ и $q_{n-2}(z)$, мы заключаем, что

$$\mathrm{Discr}(P_z) = q_n(z)q_{n-2}(z)R_2(q_1(z), \dots, q_{n-2}(z)) + z^6 Q_3,$$

где $Q_3 \in \mathbb{C}[z, q_1, \dots, q_n]$ — некоторый многочлен. Поскольку $\mathrm{Discr}(P_z)$ делится на z^6, тогда как $q_n(z)q_{n-2}(z)$ делится только на z^4, многочлен $R_2(q_1(z), \dots, q_{n-2}(z))$ должен делиться на z^2. Легко показать, что это возможно только в том случае, если $R_2(q_1, \dots, q_{n-2})$ делится на q_{n-2}^2, т.е. существует многочлен $R_4 \in \mathbb{C}[q_1, \dots, q_{n-2}]$ такой, что

$$\mathrm{Discr}(P) = q_n q_{n-2}^3 R_4(q_1, \dots, q_{n-2}) + q_n(q_{n-1}R_1 + q_n R_0) + q_{n-1}^2 S. \tag{5.1.7}$$

Теперь рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned}
&P_z(t) = (t^2 - z)P_{n-2}(t) = \\
&\ = t^n + q_1 t^{n-1} + (q_2 - z)t^{n-2} + (q_3 - zq_1)t^{n-3} + \dots + (q_{n-2} - zq_{n-4})t^2 - zq_{n-3}t - zq_{n-2}
\end{aligned}$$

Из (5.1.7) следует, что

$$\mathrm{Discr}(P_z) = -zq_{n-2}^4 R_2(q_1, \dots, q_{n-2}) + z^2 Q_4, \tag{5.1.8}$$

где $Q_4 \in \mathbb{C}[z, q_1, \dots, q_n]$ — некоторый многочлен. С другой стороны,

$$\mathrm{Discr}(P_z) = z \cdot \mathrm{Discr}(P_{n-2}) \cdot \mathrm{Res}(t^2 - z, P_{n-2}(t))^2 = zq_2^4 \cdot \mathrm{Discr}(P_{n-2}) + z^2 Q_5,$$

где $Q_5 \in \mathbb{C}[z, q_1, \dots, q_n]$ — некоторый многочлен. Сравнивая это уравнение с (5.1.8), мы обнаруживаем, что $R_2 = -\mathrm{Discr}(P_{n-2})$. Подставляя это равенство в (5.1.7), мы получаем наконец утверждение леммы. $\square$

5.2. Пространство модулей спектральных накрытий Хитчина

Пусть Σ — гладкая проективная кривая рода g. Обозначим через $\mathfrak{M}^{(n)}_{g,\Sigma}$ пространство модулей $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ спектральных накрытий Σ:

$$\mathfrak{M}^{(n)}_{g,\Sigma} = \bigoplus_{j=1}^{n} H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes j}), \tag{5.2.1}$$

где K_Σ — канонический класс Σ. Имеем

$$\dim \mathfrak{M}^{(n)}_{g,\Sigma} = n^2(g-1)+1. \tag{5.2.2}$$

Точки $(q_1,\dots,q_n) \in \mathfrak{M}^{(n)}_{g,\Sigma}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с многочленами $P(t,x) = t^n + q_1(x)t^{n-1} + \cdots + q_n(x)$. Для каждой $x \in \Sigma$ и $v \in T^*_x\Sigma$ значение $P(v,x)$ является элементом $(T^*_x\Sigma)^{\otimes n}$. Спектральное накрытие $\widehat{\Sigma}$, задаваемое P, является подмногообразием в $T^*\Sigma$, определяемым как

$$\widehat{\Sigma} = \{(x,v) \in \Sigma \times T^*_x\Sigma \mid \; P(v,x) = 0\};$$

ясно, что $\widehat{\Sigma}$ — проективная кривая. В общем положении кривая $\widehat{\Sigma}$ гладкая и все точки ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ простые. Если $\widehat{\Sigma}$ гладкая, то по формуле Римана–Гурвица род $\widehat{\Sigma}$ равен $\widehat{g} = n^2(g-1)+1$. Определим действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathfrak{M}^{(n)}_{g,\Sigma}$ по формуле

$$(\xi \cdot P)(t,x) = \xi^n P(\xi^{-1}t, x) \tag{5.2.3}$$

и обозначим через $P\mathfrak{M}^{(n)}_{g,\Sigma}$ соответствующую проективизацию.

Пусть $\overline{\mathcal{M}}_g$ — компактификация Деliня–Мамфорда (см. Раздел 2.1.3 Главы 2) пространства модулей кривых рода g, а $\nu : \overline{\mathcal{M}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ — забывающая проекция. В этой главе мы будем рассматривать $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ как гладкий комплексный орбифолд, так что $\nu : \overline{\mathcal{M}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ естественным образом отождествляется с универсальной кривой. Для более алгебраического подхода можно рассматривать не орбифолд, но стек модулей (см. Раздел 2.1.2 Главы 2). Определим пространство модулей $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ спектральных накрытий Хитчина формулой

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}_{g} = \bigoplus_{j=1}^{n} \nu_*(\omega_\nu^{\otimes j}), \tag{5.2.4}$$

где ω_ν — относительный дуализирующий пучок. Забывающая проекция $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}_{g} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ — это расслоение со слоем над Σ изоморфным $\mathfrak{M}^{(n)}_{g,\Sigma}$ (в случае, когда Σ не гладкая, необходимо заменить K_Σ относительным дуализирующим пучком Σ). Действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathfrak{M}^{(n)}_{g,\Sigma}$, определяемое (5.2.3), продолжается до действия на $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}_{g}$. Пусть $P\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}_{g}$ обозначает соответствующую проективизацию. Тогда $P\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}_{g}$ — это гладкий орбифолд (или стек Деliня–Мамфорда). Обозначим через

$\mathcal{L} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ тавтологическое линейное расслоение (относительно проективизации).

Пусть $\pi : \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ — прообраз универсальной кривой $\overline{\mathcal{M}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{M}}_g$. Обозначим через $\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ универсальное семейство спектральных кривых Хитчина, так, что слой $\widehat{\pi}$ над точкой $(\Sigma, [P]) \in P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ изоморфен кривой $\widehat{\Sigma}$, задаваемой P. Точка в $\widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)}$ может быть представлена четверкой (Σ, x, P, v), где $P \in \mathfrak{M}_{g,\Sigma}^{(n)}$, $x \in \Sigma$, $v \in T_x^*\Sigma$ и $P(v, x) = 0$. Несложно проверить, что отображение $p : \widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)} \to \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$, которое забывает v, является разветвленным накрытием, которое послойно совпадает с $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ над $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. Обозначим через $\widehat{\mathfrak{B}} \subset \widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)}$ дивизор ветвления p и через $\mathfrak{B} = p(\widehat{\mathfrak{B}}) \subset \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ образ дивизора ветвления.

Рассмотрим проекцию $\widehat{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,1}$, отображающую (Σ, x, P, v) в (Σ, x). Для каждой отмеченной кривой (Σ, x) рассмотрим подпространство

$$(\mathfrak{M}_{g,\Sigma}^{(n)})_x \subset \mathfrak{M}_{g,\Sigma}^{(n)},$$

состоящее из $(q_1, \ldots, q_n)$, таких, что $q_j(x) = 0$ для каждого j. Слой $\widehat{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ (не канонически) изоморфен проективизации $P(\widehat{\mathcal{D}} \times (\mathfrak{M}_{g,\Sigma}^{(n)})_x)$. Точно так же, слой проекции $\mathfrak{B} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ изоморфен $P(\mathcal{D} \times (\mathfrak{M}_{g,\Sigma}^{(n)})_x)$ (см. Раздел 5.1, где мы определяем $\mathcal{D}$ и $\widehat{\mathcal{D}}$). Заметим, что

$$(\mathfrak{M}_{g,\Sigma}^{(n)})_x \simeq \mathbb{C}^{n^2(g-1)-n+1} \tag{5.2.5}$$

(см. (5.2.2)). Определим действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^{n^2(g-1)-n+1}$ через этот изоморфизм. Следующая лемма очевидна.

Лемма 5.2.1. *(1) Проекция $\widehat{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ — это расслоение со слоем, изоморфным $P(\widehat{\mathcal{D}} \times \mathbb{C}^{n^2(g-1)-n+1})$ (т.е. локально эту проекцию можно представить как каноническую проекцию $P(\widehat{\mathcal{D}} \times \mathbb{C}^{n^2(g-1)-n+1}) \times X \to X$). В частности, многообразие $\widehat{\mathfrak{B}}$ гладкое.*

(2) Проекция $\mathfrak{B} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ представляет собой расслоение со слоем изоморфным $P(\mathcal{D} \times \mathbb{C}^{n^2(g-1)-n+1})$. В частности, особенностями $\mathfrak{B}$ являются нормальное самопересечение и касп.

(3) Отображение $\widehat{\mathfrak{B}} \to \mathfrak{B}$ — это морфизм расслоений, который послойно задается отображением $\widehat{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$.

(4) Отображение $p : \widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)} \to \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ имеет простое ветвление в общей точке дивизора ветвления.

5.3. Компоненты универсального дискриминантного локуса

Пусть $P = t^n + q_1 t^{n-1} + \cdots + q_n$ представляет элемент в $\mathfrak{M}_{g,\Sigma}^{(n)}$. Рассмотрим дискриминант $W(x) = \mathrm{Discr}(P(\cdot, x))$. Напомним, что W — это N-дифференциал, где $N = n(n-1)$, а дивизор W равен дивизору ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ спектрального накрытия, ассоциированного с P. В общем случае все нули W просты, при этом $\widehat{\Sigma}$ гладко и $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ имеет простое ветвление. Рассмотрим теперь ноль x порядка 2 формы W. Тогда локальная геометрия накрытия $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ описывается одним из следующих трех способов; мы будем следовать обозначениям [46]:

1) Есть одна простая точка ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ над x и $\widehat{\Sigma}$ имеет в этой точке нодальную особенность (нормальное самопересечение). Мы называем локус таких накрытий **“граничным локусом”**.

2) накрытие $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ имеет две точки ветвления порядка 2 над x и $\widehat{\Sigma}$ в этих точках гладкая. Мы называем локус таких накрытий **“стратом Максвелла”**.

3) накрытие $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ имеет точку ветвления порядка 3 над x и $\widehat{\Sigma}$ гладкая в этой точке. Мы называем локус таких накрытий **“каустикой”**.

Пусть $\overline{\mathbf{Q}}_g^N$ — пространство модулей пар (Σ, W), где Σ — кривая рода g, а W — N-дифференциал на ней (или сечение $\omega_\Sigma^{\otimes N}$, если Σ негладкое). Отображение $P \mapsto \mathrm{Discr}(P)$ продолжается до отображения $\mathrm{Discr} : \overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to \overline{\mathbf{Q}}_g^N$. Пусть $D_{\deg}$ обозначает дивизор на $\overline{\mathbf{Q}}_g^N$, параметризующий пары (Σ, W), в которых W имеет кратные нули. Локус $\mathrm{Discr}^{-1}(D_{deg})$ имеет три компоненты $\overline{D}_W^{(b)}$, $\overline{D}_W^{(m)}$ и $\overline{D}_W^{(c)}$ в соответствии с тремя вариантами, описанными выше. Положим $\overline{D}_W = \mathrm{Discr}^* D_{\deg}$. Локальный анализ (см.[46]) позволяет заключить, что

$$\overline{D}_W = \overline{D}_W^{(b)} + 2\overline{D}_W^{(m)} + 3\overline{D}_W^{(c)}$$

(также это соотношение следует из Леммы 5.2.1). Мы называем дивизор $\overline{D}_W$ *универсальным дискриминантом Хитчина*. Заметим, что $\overline{D}_W$, $\overline{D}_W^{(b)}$, $\overline{D}_W^{(m)}$ и $\overline{D}_W^{(c)}$ эквивариантны под действием $\mathbb{C}^*$ на $\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. Следовательно, мы можем определить их проективизации $P\overline{D}_W$, $P\overline{D}_W^{(b)}$, $P\overline{D}_W^{(m)}$ и $P\overline{D}_W^{(c)}$, которые являются дивизорами на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. Наша цель — представить классы $P\overline{D}_W^{(b)}$, $P\overline{D}_W^{(m)}$ и $P\overline{D}_W^{(c)}$ как линейные комбинации стандартных образующих $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$.

5.3.1. Образующие $\mathrm{Pic}(\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$

Положим

$$\phi = c_1(\mathcal{L}), \tag{5.3.1}$$

где $\mathcal{L} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ — тавтологическое линейное расслоение, соответствующее действию $\mathbb{C}^*$ на $\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. По построению, пространство $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ является расслоением над $\overline{\mathcal{M}}_g$, слои которого изоморфны взвешенному проективному пространству. Поэтому $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ порождается классом ϕ и прообразами образующих $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$. Как известно (см. Раздел 2.1.4 Главы 2), стандартный набор образующих $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$ состоит из класса Ходжа λ и классов граничных дивизоров $\delta_0, \ldots, \delta_{[g/2]}$. Мы сохраним те же обозначения для прообразов этих классов на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$, так, что $\phi, \lambda, \delta_0, \ldots, \delta_{[g/2]}$ порождают $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$.

Пусть

$$\delta = \sum_{j=0}^{[g/2]} \delta_j$$

обозначает полный класс границы.

Следующее наблюдение понадобится нам в дальнейшем. Обозначим через ω_π относительный дуализирующий пучок для отображения $\pi : \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ и положим

$$\psi = c_1(\omega_\pi). \tag{5.3.2}$$

Пучок ω_π — это прообраз относительного дуализирующего пучка ω_ν для с универсальной кривой $\nu : \overline{\mathcal{M}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{M}}_g$. Таким образом, поднимая формулу Мамфорда (см. Формулу (5.2) и следствие из нее в [51]) для $\nu_* c_1(\omega_\nu)^2$ на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$, мы получаем

$$\pi_* \psi^2 = 12\lambda - \delta. \tag{5.3.3}$$

5.3.2. Разложение классов компонент универсального дискриминантного локуса

В этом разделе мы докажем Теорему 5.2. Следующая лемма очевидна.

Лемма 5.3.1. *Пусть X — комплексный орбифолд, пусть $h : L \to X$ — линейное расслоение, а n — целое число. Рассмотрим фактор-пространство*

$$L_{(n)} = \{(v, \alpha) \in L \times \mathbb{C}\}/_\sim$$

по модулю отношения $(\xi v, \alpha) \sim (v, \xi^n \alpha)$, выполняющегося для любого $\xi \in \mathbb{C}^*$. Тогда $L_{(n)}$ — это комплексный орбифолд, проекция $L_{(n)} \to X$, заданная $(v, \alpha) \mapsto h(v)$, — это линейное расслоение на X, а отображение $(v, \alpha) \mapsto \alpha \cdot v^{\otimes n}$ — это изоморфизм между $L_{(n)}$ и $L^{\otimes n}$.

Как и выше, мы обозначаем через $\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ универсальную спектральную кривую Хитчина и через $\pi : \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ универсальную кривую над $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. Разветвленное накрытие $p : \widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)} \to \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ послойно задано отображением $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$. Дивизор $\widehat{\mathfrak{B}} \subset \widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)}$ обозначает дивизор ветвления p, а дивизор $\mathfrak{B} = p(\widehat{\mathfrak{B}}) \subset \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ обозначает образ дивизора ветвления p. Класс $c_1(\omega_\pi)$ обозначается через ψ.

Лемма 5.3.2. *Имеет место следующее соотношение в $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$:*

$$\widehat{\pi}_*(p^*\psi \cdot \left[\widehat{\mathfrak{B}}\right]) = n(n-1)(12\lambda - \delta - 2(g-1)\phi).$$

Доказательство. Из Леммы 5.2.1 и конструкции $\widehat{\mathcal{D}}$ следует, что проекция $\widehat{\mathfrak{B}} \to \mathfrak{B}$ имеет степень один. Следовательно,

$$\widehat{\pi}_*\left[p^*\psi \cdot \widehat{\mathfrak{B}}\right] = \pi_* p_* \left[p^*\psi \cdot \widehat{\mathfrak{B}}\right] = \pi_*\left[\psi \cdot p_*\widehat{\mathfrak{B}}\right] = \pi_*\left[\psi \cdot \mathfrak{B}\right] \tag{5.3.4}$$

Определим отображение $h:\pi^*\mathcal{L}_{(n(n-1))}\to\omega_\pi^{\otimes n(n-1)}$ (см. Лемму 5.3.1) следующим образом. Пусть $(\Sigma,x,P)\in\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$, так, что $P\in\mathcal{L}|_{(\Sigma,[P])}$. Положим $h(P,\xi)=\xi\mathrm{Discr}(P)|_x$. Из Леммы 5.3.1 следует, что $h(P,\xi)$ хорошо определено и линейно зависит от $(P,\xi)\in\mathcal{L}_{(n(n-1))}$. Более того

$$\operatorname{div} h=\mathfrak{B}.$$

Следовательно,

$$\pi_*\Big[\psi\cdot\mathfrak{B}\Big]=\pi_*\Big[\psi\cdot(n(n-1)(\psi-\pi^*\phi))\Big]=n(n-1)(12\lambda-\delta-2(g-1)\phi); \tag{5.3.5}$$

мы использовали (5.3.3) в последнем уравнении. Комбинируя (5.3.4) и (5.3.5), мы получаем заявленную формулу. □

Доказательство Теоремы 5.2. Пусть (Σ,x,P,v) представляет некоторую точку из $\widehat{\mathfrak{B}}$, так, что $(x,v)\in\widehat{\Sigma}$ является точкой ветвления $\widehat{\Sigma}\to\Sigma$. Пусть $P\widehat{D}_W\subset\widehat{\mathfrak{B}}$ обозначает замыкание локуса в $\widehat{\mathfrak{B}}$, параметризующего такие точки (Σ,x,P,v), для которых x является нулем $\mathrm{Discr}(P)$ порядка два. Тогда $\widehat{\pi}(P\widehat{D}_W)=\mathrm{supp}(P\overline{D}_W)$ (для дивизора $D=a_1D_1+\cdots+a_kD_k$ носитель определяется как $\mathrm{supp}(D)=D_1\cup\cdots\cup D_k$). Дивизор $P\widehat{D}_W$ распадается на три компоненты $P\widehat{D}_W^{(b)}$, $P\widehat{D}_W^{(m)}$ и $P\widehat{D}_W^{(c)}$ в соответствии с тремя вариантами, описанными в начале раздела 5.3. Имеем $\widehat{\pi}_*P\widehat{D}_W^{(b)}=P\overline{D}_W^{(b)}$, $\widehat{\pi}_*P\widehat{D}_W^{(m)}=2P\overline{D}_W^{(m)}$ и $\widehat{\pi}_*P\widehat{D}_W^{(c)}=P\overline{D}_W^{(c)}$.

Теперь пусть (Σ,x_0,P,v_0) — общая точка в $\widehat{\mathfrak{B}}$. Без ограничения общности можно предположить, что Σ гладкая в точке x_0. Пусть $U\subset\Sigma$ — маленькая окрестность x_0, а v — голоморфный 1-дифференциал на U такой, что $v(x_0)=v_0$. Рассмотрим многочлен

$$P(t+v(x),x)=t^n+q_1(x)t^{n-1}+\cdots+q_n(x)$$

где $x\in U$. Заметим, что выполняется равенство $\mathrm{Discr}(P(t+v(x),x))=\mathrm{Discr}(P(t,x))$ для дискриминантов относительно t, поскольку дискриминант инвариантен относительно сдвига аргумента. Положим

$$P_{n-2}(t,x)=t^{n-2}+q_1(x)t^{n-3}+\cdots+q_{n-2}(x)$$

как в Лемме 5.1.1. Пусть z — некоторая локальная координата на Σ в x_0, такая, что $z(x_0)=0$. Поскольку $t=0$ является нулем второго порядка $P(t+v_0,x_0)$, имеем $q_{n-1}(x)=O(z(x))$ и $q_n(x)=O(z(x))$. Используя разложение дискриминанта из Леммы 5.1.1, получаем

$$\mathrm{Discr}(P(t+v(x),x))=-q_n(x)(q_{n-2}(x))^3\,\mathrm{Discr}(P_{n-2}(t,x))+O(z(x)^2) \tag{5.3.6}$$

при $x\to x_0$. Заметим, что первое слагаемое в правой части (5.3.6) имеет ноль порядка 1 в x_0, если точка (Σ,x_0,P,v_0) принадлежит всюду плотному непустому открытому подмножеству $\widehat{\mathfrak{B}}$. С другой стороны, если точка (Σ,x_0,P,v_0) принадлежит $P\widehat{D}_W$, то выполняется $\mathrm{Discr}(P(t+v(x),x))=$

$O(z(x)^2)$ при $x \to x_0$, что эквивалентно условию $q_n(x)(q_{n-2}(x))^3 \operatorname{Discr}(P_{n-2}(t,x)) = O(z(x)^2)$ для первого слагаемого. Напомним, что $q_n(x) = O(z(z))$. Поскольку $q_n(x)(q_{n-2}(x))^3 \operatorname{Discr}(P_{n-2}(t,x))$ является произведением трех факторов, мы получаем следующие три возможности, при которых это условие выполняется:

1) Формула для $[P\overline{D}_W^{(b)}]$**.** Предположим, что $q_n(x) = O(z(x)^2)$ при $x \to x_0$. Тогда $\operatorname{Discr}(P(t+v(x),x)) = O(z(x)^2)$ при $x \to x_0$ в виду (5.3.6). Заметим, что в этом случае 0 является корнем порядка 2 многочлена $P(t+v_0,x_0)$ и $\operatorname{Discr}(P_{n-2}(0,x_0)) \neq 0$ в общем случае, поэтому (Σ, x_0, P, v_0) не принадлежит $P\widehat{D}_W^{(m)}$ или $P\widehat{D}_W^{(c)}$. Поэтому $(\Sigma, x_0, P, v_0) \in P\widehat{D}_W^{(b)}$.

Наоборот, предположим, что $(\Sigma, x_0, P, v_0) \in P\widehat{D}_W^{(b)}$. Пусть $P(v,x) = F(v,x)\,dz^n$, где F — голоморфная функция, определенная в окрестности T^*U точки $(x_0,v_0) \in T^*\Sigma$. По определению, $\widehat{\Sigma} \cap T^*U$ задается уравнением $F = 0$ в T^*U. Поскольку в $\widehat{\Sigma}$ не является гладкой в (x_0,v_0), должно выполняться $dF(v_0,x_0) = 0$. Точка v_0 является корнем второго порядка P, поэтому $dF(v_0,x_0) = \partial_2 F(v_0,x_0)$, где ∂_2 обозначает частную производную по второму аргументу. Теперь предположим, что $q_n(x) = f_n(x)\,dz^n$. Тогда

$$dF(v_0,x_0) = \partial_2 F(v_0,x_0) = df_n(x_0). \tag{5.3.7}$$

Следовательно, равенство $dF(v_0,x_0) = 0$ равносильно тому, что $q_n(x) = O(z(x)^2)$ при $x \to x_0$. Мы заключаем наконец, что равенство $q_n(x) = O(z(x)^2)$ равносильно тому, что $(\Sigma, x_0, P, v_0) \in P\widehat{D}_W^{(b)}$.

Введем обозначение

$$\Phi(\Sigma, x_0, P, v_0) = dF(v_0,x_0)\,dz^n(x_0) \in (T^*_{x_0}\Sigma)^{\otimes(n+1)}. \tag{5.3.8}$$

Поскольку $F(v_0,x_0) = 0$, этот объект хорошо определен (т.е. не зависит от выбора локальной координаты). Заметим, что если $\xi \in \mathbb{C}^*$, то $\Phi(\Sigma, x_0, \xi \cdot P, \xi v_0) = \xi^n \Phi(\Sigma, x_0, P, v_0)$, где действие $\xi \cdot P$ определяется с помощью (5.2.3). Из Леммы 5.3.1 следует, что Φ продолжается до гомоморфизма

$$\widehat{\Phi} : \widehat{\pi}^* \mathcal{L}_{(n)}|_{\widehat{\mathfrak{B}}} \to p^* \omega_\pi^{\otimes(n+1)}|_{\widehat{\mathfrak{B}}}, \tag{5.3.9}$$

определенного как $(P,\xi) \mapsto \xi \Phi(\Sigma, x_0, P, v_0)$. Наблюдения, сделанные нами выше, показывают, что локус нулей $\widehat{\Phi}$ совпадает с $P\widehat{D}_W^{(b)}$, так что $\operatorname{div} \widehat{\Phi} = P\widehat{D}_W^{(b)}$ и мы имеем

$$P\widehat{D}_W^{(b)} \equiv ((n+1)p^*\psi - n\widehat{\pi}^*\phi) \cdot \widehat{\mathfrak{B}} \tag{5.3.10}$$

в кольце Чжоу $\widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)}$, где мы использовали, что $\mathcal{L}_{(n+1)} \simeq \mathcal{L}^{\otimes(n+1)}$. Применяя Лемму 5.3.2, мы заключаем из (5.3.10), что

$$[P\overline{D}_W^{(b)}] = [\widehat{\pi}_* P\widehat{D}_W^{(b)}] = n(n-1)\Big((n+1)(12\lambda - \delta) - 2(g-1)(2n+1)\phi\Big).$$

2) Формула для $[P\overline{D}_W^{(m)}]$. Предположим, что выполняется равенство $\mathrm{Discr}(P_{n-2}(t,x_0))=0$. Это равносильно тому, что $(\Sigma,x_0,P,v_0)\in P\widehat{D}_W^{(m)}$ по определению $\widehat{D}_W^{(m)}$. Введем обозначение

$$\Phi(\Sigma,x_0,P,v_0)=\mathrm{Discr}(P_{n-2}(t,x_0))\in(T^*_{x_0}\Sigma)^{\otimes(n-2)(n-3)}.$$

Заметим, что $\Phi(\Sigma,x_0,P,v_0)$ не зависит от выбора дифференциала v (хотя мы использовали v для определения P_{n-2}), и $\Phi(\Sigma,x_0,\xi\cdot P,\xi v_0)=\xi^{(n-2)(n-3)}\Phi(\Sigma,x_0,P,v_0)$. Отсюда следует, что Φ продолжается до гомоморфизма

$$\widehat{\Phi}:\widehat{\pi}^*\mathcal{L}_{((n-2)(n-3))}|_{\widehat{\mathfrak{B}}}\to p^*\omega_\pi^{\otimes(n-2)(n-3)}|_{\widehat{\mathfrak{B}}},\tag{5.3.11}$$

определенного как $(P,\xi)\mapsto\xi\Phi(\Sigma,x_0,P,v_0)$. Выполняется $\operatorname{div}\widehat{\Phi}=P\widehat{D}_W^{(m)}$, откуда мы получаем, что

$$P\widehat{D}_W^{(m)}\equiv(n-2)(n-3)\Big(p^*\psi-\widehat{\pi}^*\phi\Big)\cdot\widehat{\mathfrak{B}}\tag{5.3.12}$$

в кольце Чжоу $\widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)}$, где мы использовали изоморфизм $\mathcal{L}_{((n-2)(n-3))}\simeq\mathcal{L}^{\otimes(n-2)(n-3)}$ из Леммы 5.3.1. Лемма 5.3.2 вместе с ур. (5.3.12) влечет, что

$$2[P\overline{D}_W^{(m)}]=[\widehat{\pi}_*P\widehat{D}_W^{(m)}]=n(n-1)(n-2)(n-3)\Big(12\lambda-\delta-4(g-1)\phi\Big).$$

3) Формула для $[P\overline{D}_W^{(c)}]$. Наконец, мы рассмотрим случай, когда выполняется $q_{n-2}(x_0)=0$, или, что эквивалентно, когда $(\Sigma,x_0,P,v_0)\in P\widehat{D}_W^{(c)}$. Положим

$$\Phi(\Sigma,x_0,P,v_0)=q_{n-2}(x_0)\in(T^*_{x_0}\Sigma)^{\otimes(n-2)}.$$

Значение $q_{n-2}(x_0)$ не зависит от выбора v и $\Phi(\Sigma,x_0,\xi\cdot P,\xi v_0)=\xi^{n-2}\Phi(\Sigma,x_0,P,v_0)$. Следовательно, Φ продолжается до гомоморфизма

$$\widehat{\Phi}:\widehat{\pi}^*\mathcal{L}_{(n-2)}|_{\widehat{\mathfrak{B}}}\to p^*\omega_\pi^{\otimes(n-2)}|_{\widehat{\mathfrak{B}}},\tag{5.3.13}$$

определенного как $(P,\xi)\mapsto\xi\Phi(\Sigma,x_0,P,v_0)$, и $\operatorname{div}\widehat{\Phi}=P\widehat{D}_W^{(c)}$. Таким образом,

$$P\widehat{D}_W^{(c)}\equiv(n-2)\Big(p^*\psi-\widehat{\pi}^*\phi\Big)\cdot\widehat{\mathfrak{B}}\tag{5.3.14}$$

в кольце Чжоу $\widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}_g^{(n)}$, где мы используем, что $\mathcal{L}_{(n-2)}\simeq L^{\otimes(n-2)}$ согласно Лемме 5.3.1. Из Леммы 5.3.2 и (5.3.14) следует, что

$$[P\overline{D}_W^{(c)}]=[\widehat{\pi}_*P\widehat{D}_W^{(c)}]=n(n-1)(n-2)\Big(12\lambda-\delta-4(g-1)\phi\Big).$$

□

5.4. Классы Ходжа на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$

В этом разделе мы докажем Теорему 5.3. Мы продолжим использовать обозначения, введенные в двух предыдущих разделах.

Лемма 5.4.1. *В* $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ *выполняется следующая формула:*

$$[\widehat{\pi}_*(\widehat{\mathfrak{B}} \cdot \widehat{\mathfrak{B}})] = -\frac{n(n-1)}{2}(12\lambda - \delta - 2(g-1)\phi) + \frac{1}{2}([P\overline{D}_W^{(b)}] + [P\overline{D}_W^{(c)}]).$$

Доказательство. Напомним, что $\widehat{\mathfrak{B}}$ гладкое по Лемме 5.2.1. Проекция $\widehat{\mathfrak{B}} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ — это разветвленное накрытие степени $2n(n-1)(g-1)$, равной количеству нулей $\mathrm{Discr}(P)$, посчитанных с кратностями. Простой локальный анализ показывает, что дивизор ветвления этого разветвленного накрытия есть $P\widehat{D}_W^{(b)} + P\widehat{D}_W^{(c)}$. Это влечет следующее выражение для канонического класса $\widehat{\mathfrak{B}}$:

$$c_1(K_{\widehat{\mathfrak{B}}}) = \widehat{\pi}^* c_1(K_{P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}}) \cdot \widehat{\mathfrak{B}} + P\widehat{D}_W^{(b)} + P\widehat{D}_W^{(c)}. \tag{5.4.1}$$

Другое выражение для канонического класса $\widehat{\mathfrak{B}}$ получается из формулы присоединения:

$$c_1(K_{\widehat{\mathfrak{B}}}) = (c_1(K_{\widehat{\mathcal{C}\mathfrak{M}}_g^{(n)}}) + \widehat{\mathfrak{B}}) \cdot \widehat{\mathfrak{B}}. \tag{5.4.2}$$

Используя эти два выражения, мы получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{B}} \cdot \widehat{\mathfrak{B}} &= (\widehat{\pi}^* c_1(K_{P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}}) - c_1(K_{\widehat{\mathcal{C}\mathfrak{M}}_g^{(n)}})) \cdot \widehat{\mathfrak{B}} + P\widehat{D}_W^{(b)} + P\widehat{D}_W^{(c)} \\ &= -c_1(\omega_{\widehat{\pi}}) \cdot \widehat{\mathfrak{B}} + P\widehat{D}_W^{(b)} + P\widehat{D}_W^{(c)} \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

где $\omega_{\widehat{\pi}}$ — относительный дуализирующий пучок. Напомним, что отображение $p : \widehat{\mathcal{C}\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to \mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ — это разветвленное накрытие с простым ветвлением вдоль $\widehat{\mathfrak{B}}$ по Лемме 5.2.1. Следовательно,

$$c_1(\omega_{\widehat{\pi}}) = p^*\psi + \widehat{\mathfrak{B}}, \tag{5.4.4}$$

где ψ определено посредством (5.3.2). Подставляя это выражение в (5.4.3), мы находим, что

$$2\widehat{\mathfrak{B}} \cdot \widehat{\mathfrak{B}} = -p^*\psi \cdot \widehat{\mathfrak{B}} + P\widehat{D}_W^{(b)} + P\widehat{D}_W^{(c)}. \tag{5.4.5}$$

Применяя $\widehat{\pi}_*$ к этому уравнению и используя Лемму 5.3.2, получаем требуемое утверждение. □

Лемма 5.4.2. *В* $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ *выполняется следующее соотношение:*

$$\widehat{\pi}_* c_1(\omega_{\widehat{\pi}})^2 = 6n(3n-1)\lambda - 3n(n-1)(g-1)\phi - \frac{n(3n-1)}{2}\,\delta + \frac{1}{2}\left([P\overline{D}_W^{(b)}] + [P\overline{D}_W^{(c)}]\right). \tag{5.4.6}$$

Доказательство. Используя (5.4.4), мы можем написать

$$\widehat{\pi}_* c_1(\omega_{\widehat{\pi}})^2 = \widehat{\pi}_*\Big(p^*\psi^2 + 2p^*\psi \cdot \widehat{\mathfrak{B}} + \widehat{\mathfrak{B}} \cdot \widehat{\mathfrak{B}}\Big) = n\pi_*\psi^2 + \widehat{\pi}_*\Big(2p^*\psi \cdot \widehat{\mathfrak{B}} + \widehat{\mathfrak{B}} \cdot \widehat{\mathfrak{B}}\Big).$$

Комбинируя эту формулу с уравнением (5.3.3), Леммой 5.3.2 и Леммой 5.4.1 мы получаем требуемое уравнение (5.4.6). □

Доказательство Теоремы 5.3. Обозначим через $V_{\mathrm{nodal}} \subset \widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}{}_g^{(n)}$ локус нодальных точек слоев $\widehat{\pi}$, т.е.

$$V_{\mathrm{nodal}} = \{(\Sigma, x, P, v) \ \mid \ (x, v) \text{ является нодальной точкой } \widehat{\Sigma}\}. \tag{5.4.7}$$

Заметим, что $P\widehat{D}_W^{(b)}$ — это компонента V_{nodal} и

$$\widehat{\pi}_* V_{\mathrm{nodal}} = n\delta + [P\overline{D}_W^{(b)}]. \tag{5.4.8}$$

Применим формулу Гротендика–Римана–Роха к структурному пучку $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}{}_g^{(n)}}$ и морфизму $\widehat{\pi}$: $\widehat{\mathcal{C}\overline{\mathfrak{M}}}{}_g^{(n)} \to P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. Рассмотрев слагаемые степени один в обеих частях формулы, мы получим следующее соотношение в $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$:

$$12\widehat{\lambda} = \widehat{\pi}_*(c_1(\omega_{\widehat{\pi}})^2 + V_{\mathrm{nodal}}). \tag{5.4.9}$$

Используя Лемму 5.4.2 и (5.4.8), мы заключаем, что

$$12\widehat{\lambda} = 6n(3n-1)\lambda - 3n(n-1)(g-1)\phi - \frac{n(3n-3)}{2}\,\delta + \frac{3}{2}[P\overline{D}_W^{(b)}] + \frac{1}{2}[P\overline{D}_W^{(c)}] \tag{5.4.10}$$

Напомним формулы для $[P\overline{D}_W^{(b)}]$ и $[P\overline{D}_W^{(c)}]$ из Теоремы 5.2:

$$[P\overline{D}_W^{(b)}] = n(n-1)\Big((n+1)(12\lambda - \delta) - 2(g-1)(2n+1)\phi\Big),$$
$$[P\overline{D}_W^{(c)}] = n(n-1)(n-2)\Big(12\lambda - \delta - 4(g-1)\phi\Big).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5.4.10), мы получаем формулу для $\widehat{\lambda}$. □

Глава 6. Заключение

Сформулируем еще раз основные результаты, представленные в диссертации, и кратко обсудим возможные пути дальнейшего развития.

Аналитический вывод соотношений Фаркаша. В Главе 3 аналитическими методами выводятся соотношения для классов $[\overline{\Upsilon}_g]$ и $[\Theta_{\text{null}}]$ в $\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$ и $\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\text{even}}) \otimes \mathbb{Q}$ соответственно. Последнее соотношение выводится при помощи стандартного применения теории тэта-функций, первое же соотношение выводится из свойств тау-функции Бергмана. Идея использовать тау-функцию для вывода соотношений в группах Пикара принадлежит Зографу и Короткину; с использованием этого метода было получено немало различных результатов. Заметим, что тау-функция Бергмана строится аналитически, как решение некоторого дифференциального уравнения, хотя сечение, которое получается из тау-функции, алгебраическое. Возникает естественный вопрос, нельзя ли найти альтернативное алгебраическое определение тау-функции Бергмана. Это, среди прочего, мотивирует изучать тау-функцию Бергмана как сечение детерминантного расслоения — возможно, такой подход позволит использовать формализм [36]. Как минимум, автор уверен, что интерпретации тау-функции Бергмана, как сечения детерминантного расслоения Сегала-Вилсона, можно придать строгий смысл, если правильно переделать аргументацию Палмера [55]. Подтверждением этому в частности являются эвристики из Раздела 3.10.3, некоторый аналог которых работает для изомонодромной тау-функции.

Локусы вырождений на пространстве $\mathcal{S}_g^{\text{odd}}$. Как уже упоминалось в Главе 4, описание локальной геометрии локусов X_i и Y_i мотивировано изучением дивизоров каустики и базовых точек. Отметим, что с аналитической точки зрения локусы X_i и Y_i, $i \geq 2$, соответствуют некоторым стратам в пространствах модулей голоморфных и мероморфных дифференциалов соответственно. В терминах, введенных в Разделе 3.1, локус X_i совпадает с замыканием образа $\mathcal{H}_g^{\text{odd}}(2i, 2, \dots, 2) \to \mathcal{S}_g^{\text{odd}}$, а локус Y_i — с замыканием образа $\mathcal{H}_g^{\text{odd}}(2(i-1), 2\dots, 2) \cup \mathcal{H}_g^{\text{odd}}(-2, 2i, 2, \dots, 2) \to \mathcal{S}_g^{\text{odd}}$. Из этого наблюдения, например, следует, что дивизор каустики неприводим — действительно, все упомянутые выше страты связны, как мы знаем благодаря работам [11], [41], так что неприводимость следует из Теоремы 4.1. Несмотря на это, мы не можем ничего сказать про дивизор базовых точек, поскольку Y_1 не имеет такой интерпретации, как выше. Однако, вполне вероятно, что его неприводимость тоже можно доказать, используя теорию плоских поверхностей и явное описание конормального пространства, полученное автором.

Также отметим, что вопрос о коразмерностях локусов $\mathcal{S}_g^r$ (см. Раздел 4.8.2) все еще остается открытым.

Класс универсального дискриминанта на пространстве спектральных накрытий Хитчина. В Главе 5 выводятся соотношения в рациональной группе Пикара пространства модулей спектральных накрытий Хитчина для компонент универсального дискриминанта. Это делается алгебраическими методами; до этого соотношение для полного класса универсального дивизора было получено Зографом и Короткиным [46] с помощью тау-функции Бергмана. Отметим, что все вышеупомянутые формулы получены в случае $\mathrm{GL}(n)$ спектральных накрытий. Также, результаты Короткина и Зографа были обобщены на случай $\mathrm{Sp}(2n)$ в работе [5]; мы не сомневаемся, что и результаты соискателя тоже могут быть легко обобщены на этот случай. Представляет интерес дальнейшее обобщение этих формул на случай других линейных групп. Отметим, что в произвольном случае даже сама классификация компонент класса универсального дискриминанта может представлять интерес.

Литература

[1] Enrico Arbarello and Maurizio Cornalba. The Picard groups of the moduli spaces of curves. *Topology*, 26(2):153–171, 1987.

[2] Michael F. Atiyah. Riemann surfaces and spin structures. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Ser. 4, 4(1):47–62, 1971.

[3] Matt Bainbridge, Dawei Chen, Quentin Gendron, Samuel Grushevsky, and Martin Moeller. Strata of k-differentials. *Algebraic Geometry*, 6(2):196–233, 2019.

[4] Matt Bainbridge, Dawei Chen, Quentin Gendron, Samuel Grushevsky, and Martin Möller. Compactification of strata of Abelian differentials. *Duke Math. J.*, 167(12):2347–2416, 2018.

[5] Michael Lee Baker. Class of discriminant for $\mathrm{Sp}(2n)$ Hitchin spectral covers. arXiv:2005.05644.

[6] Fabio Bardelli. Lectures on stable curves. In Maurizio Cornalba, Xavier Gomez-Mont, and Alberto Sola, editors, *Lectures on Riemann Surfaces*, pages 648–704. World Scientific Publishing Company, 1989.

[7] Mikhail Basok. Tau Function and Moduli of Spin Curves. *International Mathematics Research Notices*, 2015(20):10095–10117, 2015.

[8] Mikhail Basok. Discriminant and Hodge classes on the space of Hitchin covers. *Letters in Mathematical Physics*, 110:2659–2674, 2020.

[9] Mikhail Basok. On some degeneracy loci in the moduli space of pointed odd spin curves. *Алгебра и Анализ*, 32(5):1–36, 2020.

[10] Montserrat Teixidor I Bigas. Half-canonical series on algebraic curves. *Transactions of the American Mathematical Society*, 302(1):99–115, 1987.

[11] Corentin Boissy. Connected components of the strata of the moduli space of meromorphic differentials. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 90(2):255–286, 2015.

[12] Maurizio Cornalba. Moduli of curves and theta-characteristics. In *Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987)*, pages 560–589. World Sci. Publ., 1989.

[13] Maurizio Cornalba. A remark on the Picard group of spin moduli space. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni*, 2(3):211–217, 1991.

[14] Ron Donagi. Spectral covers. In *Volume 28 of MSRI Series*, pages 65–86. Cambridge University Press, 1995.

[15] Ron Donagi and Eyal Markman. Spectral covers, algebraically completely integrable, hamiltonian systems, and moduli of bundles. In Mauro Francaviglia and Silvio Greco, editors, *Integrable Systems and Quantum Groups: Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993*, pages 1–119. Springer Berlin Heidelberg, 1996.

[16] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1995.

[17] Maurizio Cornalba Enrico Arbarello and Phillip Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves: Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[18] Alex Eskin, Maxim Kontsevich, and Anton Zorich. Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow. *Publ.math.IHES*, 120:207–333, 2014.

[19] Gavril Farkas. Gaussian maps, Gieseker-Petri loci and large theta-characteristics. *J. reine angew. Math.*, 581:151–173, 2005.

[20] Gavril Farkas. The birational type of the moduli space of even spin curves. *Advances in Mathematics*, 223:433–443, 2010.

[21] Gavril Farkas and Alessandro Verra. The geometry of the moduli space of odd spin curves. *Annals of Mathematics*, 180(3):927–970, 2014.

[22] John D. Fay. *Theta Functions on Riemann Surfaces*, volume 352 of *Lect. Note in Math.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1973.

[23] Gerard Geer and Alexis Kouvidakis. The Hodge bundle on Hurwitz spaces. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 7(4):1297–1308, 2011.

[24] John Harer. The second homology group of the mapping class group of an orientable surface. *Inventiones mathematicae*, 72:221–239, 1983.

[25] John Harer. The cohomology of the moduli space of curves. In Edoardo Sernesi, editor, *Theory of Moduli*, volume 1337 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 138–221. Springer, Berlin, Heidelberg, 1988.

[26] John Harer. The rational Picard group of the moduli space of Riemann surfaces with spin structure. In *Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces (Gottingen, 1991/Seattle, WA, 1991)*, volume 150, pages 107–136. Contemp. Math., 1993.

[27] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of Curves*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, first edition, 1998.

[28] Joe Harris and David Mumford. On the Kodaira dimension of the moduli space of curves. *Inventiones mathematicae*, 67(1):23–86, 1982.

[29] John Harris. Theta characteristics on algebraic curves. *Transactions American Mathematical Society*, 271:611–638, 1982.

[30] Nigel Hitchin. The self-duality equations on a Riemann surface. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3-55(1):59–126, 1987.

[31] Nigel Hitchin. Stable bundles and integrable systems. *Duke Math. J.*, 54(1):91–114, 1987.

[32] John Hubbard and Howard Masur. Quadratic differentials and foliations. *Acta Math.*, 142:221–274, 1979.

[33] Yoichi Imayoshi and Masahiko Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Springer-Verlag Tokyo, first edition, 1992.

[34] Michio Jimbo, Tetsuji Miwa, and Kimio Ueno. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: I. general theory and τ-function. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2(2):306–352, 1981.

[35] Dennis Johnson. Spin Structures and Quadratic forms on Surfaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 2-22(2):365–373, 1980.

[36] Finn Knudsen and David Mumford. The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on "det" and "div". *Mathematica Scandinavica*, 39:19–55, 1976.

[37] Aleksey Kokotov and Dmitry Korotkin. Tau-functions on Hurwitz spaces. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 7:47–96, 2004.

[38] Aleksey Kokotov and Dmitry Korotkin. Tau-functions on spaces of Abelian differentials and higher genus generalizations of Ray–Singer formula. *J. Differential Geom.*, 82(1):35–100, 2009.

[39] Alexey Kokotov, Dmitry Korotkin, and Peter Zograf. Isomonodromic tau function on the space of admissible covers. *Advances in Mathematics*, 227:586–600, 2011.

[40] Maxim Kontsevich and Anton Zorich. Lyapunov exponents and Hodge theory. In *Conference on the Mathematical Beauty of Physics (In Memory of C. Itzykson)*, pages 318–332, 1996.

[41] Maxim Kontsevich and Anton Zorich. Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities. *Invent. math.*, 153:631–678, 2003.

[42] Dmitry Korotkin. Matrix Riemann-Hilbert problems related to branched coverings of $\mathbb{CP}^1$. In Israel Gohberg, Nenad Manojlovic, and António Ferreira dos Santos, editors, *Factorization and Integrable Systems*, volume 141, pages 103–129. Birkhäuser Basel, 2003.

[43] Dmitry Korotkin, Adrien Sauvaget, and Peter Zograf. Tau functions, Prym-Tyurin classes and loci of degenerate differentials. *Math. Ann.*, 375:213–246, 2019.

[44] Dmitry Korotkin and Peter Zograf. Tau function and moduli of differentials. *Math. Res. Lett.*, 18(03):447–458, 2011.

[45] Dmitry Korotkin and Peter Zograf. Tau function and the Prym class. In Pierce VU Dzhamay A, Maruno K, editor, *Aalgebraic and geometric aspects of integrable systems and random matrices*, pages 241–261. American Mathematical Society, 2013.

[46] Dmitry Korotkin and Peter Zograf. Tau functions, Hodge classes, and discriminant loci on moduli spaces of Hitchin's spectral covers. *Journal of Mathematical Physics*, 59(9):091412, 2018.

[47] Sergei Lando and Alexander Zvonkin. *Graphs on Surfaces and Their Applications*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[48] David Mumford. Abelian quotients of the Teichmüller modular group. *Journal d'Analyse Mathématique*, 18:227–244, 1967.

[49] David Mumford. Theta characteristics of an algebraic curve. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Ser. 4, 4(2):181–192, 1971.

[50] David Mumford. Stability of projective varieties. *L'Enseignement Mathématique. IIe Série*, 23:39–110, 1977.

[51] David Mumford. *Towards an Enumerative Geometry of the Moduli Space of Curves*, pages 271–328. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[52] David Mumford. *Tata Lectures on Theta I.* Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, second edition, 2007.

[53] David Mumford, John Fogarty, and Kirwan Frances. *Geometric Invariant Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, third edition, 1994.

[54] D. S. Nagaraj. On the moduli of curves with theta-characteristics. *Compositio Mathematica*, 75(3):287–297, 1990.

[55] John Palmer. Determinants of Cauchy–Riemann operators as τ-functions. *Acta Applicandae Mathematica*, 18:199–223, 1990.

[56] John Palmer. Tau functions for the Dirac operator in the Euclidean plane. *Pacific J. Math.*, 160(2):259–342, 1993.

[57] Daniel Quillen. Determinants of Cauchy–Riemann operators over a Riemann surface. *Funct Anal Its Appl*, 19:31–34, 1985.

[58] Oscar Randal-Williams. The Picard group of the moduli space of r-spin Riemann surfaces. *Advances in Mathematics*, 231(1):482–515, 2012.

[59] Daniel B. Ray and Isadore M. Singer. Analytic torsion for complex manifolds. *Annals of Mathematics*, 98(1):154–177, 1973.

[60] Graeme Segal and George Wilson. Loop groups and equations of kdv type. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 61:5–65, 1985.

[61] Edoardo Sernesi. *Deformations of Algebraic Schemes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[62] Montserrat Teixidor i Bigas. The divisor of curves with a vanishing theta-null. *Compositio Mathematica*, 66(1):15–22, 1988.

[63] Jonathan Wahl. Gaussian maps on algebraic curves. *J. Differential Geom.*, 32(1):77–98, 1990.