ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертационной работе С. Ю. Новака
"Предельные теоремы и оценки скорости сходимости в теории экстремальных значений",
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Бо́льшая часть рассматриваемой диссертации относится к *теории экстремальных значений* — разделу теории вероятностей и математической статистики, которая имеет дело с анализом событий, отвечающих экстремумам случайных величин, например, событий, состоящих в превышении заданного высокого уровня. Теория экстремальных значений имеет многочисленные применения в финансовой и актуарной математике, метеорологии, гидрологии, сейсмологии и др. и, как следствие, является востребованной и динамично развивающейся областью математики.

Классический этап развития теории экстремальных значений имел дело с последовательностями независимых одинаково распределенных случайных величин и связан с именами таких математиков как Мизес, Фреше, Фишер, Типет, Гнеденко. Однако для большинства приложений характерна зависимость между наблюдениями. Современный этап развития теории связан с исследованием асимптотических свойств распределений экстремальных значений в стационарных последовательностях случайных величин.

К числу вопросов, рассматриваемых в диссертации, относятся предельные теоремы и оценки точности аппроксимаций для случайных величин и процессов, возникающих в теории экстремальных значений, для стационарных последовательностей случайных величин, а также статистические задачи оценивания характеристик этих величин и процессов. Таким образом, тема диссертации несомненно является актуальной.

Рассмотрим более подробно содержание диссертации, состоящей из введения, шести глав, списка литературы из 418 наименований, списка сокращений и списка обозначений.

В главе 1 приводятся результаты, в доказательстве которых использован разработанный автором для оценивания скорости сходимости в предельных теоремах теории экстремальных значений *метод рекуррентных неравенств*. Из первых двух параграфов выделим теорему 1.1, описывающую асимптотику распределения последовательности стационарных случайных величин, удовлетворяющей условию φ-перемешивания, и теорему 1.5, дополняющую известный результат Лидбеттера о характеризации экстремального индекса последовательности стационарных случайных величин. Параграф 1.3 посвящен предельным теоремам для максимума частичных сумм Эрдёша–Реньи. В основе полученных результатов лежит теорема 1.6, полученная методом рекуррентных неравенств. Теорема 1.12, результат типа закона повторного логарифма, уточняет результаты Деовельса и др. Теорема 1.13 о предельном распределении максимума частичных сумм обобщает результат Питербарга на целый спектр возможных асимптотик. В параграфе 1.4 с помощью метода рекуррентных неравенств впервые получены оценки скорости сходимости в предельных теоремах (полученных Арратия, Карлином, Зубковым и др.) в ряде специальных задач (число выходов за высокий уровень, число длин общих фрагментов в дискретных последовательностях и т.д.), связанных с выборками *случайного объёма*.

Глава 2 посвящена вопросам точности пуассоновской и сложнопуассоновской аппроксимации. Задачей о точности пуассоновской аппроксимации биномиального распределения занимались, в частности, Прохоров, Ле Кам, Чен, Барбур, Иглсон, П. Холл, Деовельс, Пфайфер и др. Роос (1999) получил оценку (2.3), в которой константа $3/(4e)$ при главном члене неулучшаема. В параграфе 2.1 в теореме 2.1 автор уточняет результат Рооса, а именно, уточняет асимптотику второго порядка. В теореме 2.3 предложено новое доказательство теоремы Прохорова–Рооса об асимптотике расстояния по вариации между биномиальным и пуассоновским распределениями и показано, что главный член асимптотики может быть выражен в терминах специального преобразования пуассоновского распределения.

В параграфе 2.2 рассматривается вопрос точности пуассоновской аппроксимации для сумм случайных величин с целыми значениями.

Получена правильная по порядку оценка точности пуассоновской аппроксимации для сумм независимых случайных величин в терминах расстояния по вариации и расстояния Джини–Канторовича–Вассерштейна (теорема 2.6) и впервые найдена оценка точности пуассоновской аппроксимации для сумм зависимых случайных величин с целыми значениями (теоремы 2.7 и 2.8). Полагаю, что эти результаты, полученные комбинацией метода общего вероятностного пространства и метода Стейна, открывают новое направление в тематике пуассоновской аппроксимации.

Параграфы 2.3 и 2.4 посвящены предельным теоремам и точности аппроксимации числа выходов стационарной случайной последовательности за высокий уровень. В частности, для вектора числа выходов за высокие уровни получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости к сложно-пуассоновскому случайному вектору с независимыми компонентами (теорема 2.11), а также необходимые и достаточные условия слабой сходимости в общем случае, когда компоненты предельного случайного вектора могут быть зависимы (утверждение 2.12 и теорема 2.13). Отметим также лемму 2.17, обобщающую на многомерный случай теорему Бредли о задании независимой копии случайного вектора на одном вероятностном пространстве, имеющую самостоятельное значение.

Глава 3 посвящена асимптотической теории эмпирических точечных процессов выходов за высокий уровень (ПВВУ). Изучаются как одномерные, так и двумерный ПВВУ, учитывающий как расположение экстремумов, так и их размах. При определенном условии перемешивания стационарной последовательности доказано, что одно и то же условие является необходимым и достаточным для слабой сходимости одномерного (учитывающего размах выбросов) и двумерного ПВВУ к соответствующим сложно-пуассоновским процессам (теоремы 3.2 и 3.4). Но в отличие от случая независимых случайных величин, класс предельных распределений указанных эмпирических процессов богаче класса сложно-пуассоновских процессов. В теоремах 3.6 и 3.7 описан класс предельных распределений одномерных ПВВУ и установлены необходимые и достаточные условия сходимости к заданному пределу, а теорема 3.8 оценивает точность аппроксимации. В теореме 3.9 и следствии 3.10 дана характеризация предельных распределений двумерного ПВВУ. Предельный двумерный точечный процесс охарактеризован как процесс, являющийся композицией двух одномерных точечных процессов. Найдены необходимые и достаточные условия слабой сходимости распределения двумерного ПВВУ к заданному предельному процессу. Полученные результаты формируют целостную теорию эмпирических процессов выхода за высокий уровень, начатую в работах Мори (1977) и Хсина (1987).

Глава 4 посвящена задачам статистического оценивания характеристик распределений с тяжелыми хвостами. Предложены непараметрические оценки показателя скорости убывания хвоста распределения, вероятности выхода за высокий уровень и экстремальной квантили, доказаны их состоятельность и асимптотическая нормальность в условиях слабой зависимости при минимальных ограничениях на коэффициенты перемешивания, предложена процедура выбора управляющего параметра непараметрических оценок. Более подробно, для оценивания показателя скорости убывания хвоста распределения предложена статистика, обобщающая RE-оценку Голди и Смита (1987); ее свойства доказаны в теоремах 4.2 и 4.4. Свойства предложенной оценки экстремальной квантили описаны в теоремах 4.7–4.10, а оценки вероятности выхода за высокий уровень — в теоремах 4.11 и 4.12. Представлены результаты моделирования всех предложенных оценок.

В главе 4 также найдены нижние границы точности оценивания характеристик распределений с тяжелыми хвостами. При этом не требуется, в отличие от ряда предшествующих работ, чтобы возможные значения показателя скорости убывания хвоста распределения принадлежали интервалу фиксированной длины; найдены соответствующие информационные функционалы. Точнее, в теореме 4.14 доказывается аналог теоремы Пфанцагля о невозможности оценивания с оптимальной точностью равномерно по шарам в метрике Хеллингера. Теорема 4.15 устанавливает нижнюю границу точности оценивания показателя скорости убывания хвоста распределения; теорема 4.16 устанавливает нижнюю границу для средне-квадратичных ошибок оценок константы хвоста распределения, а теорема 4.17 — для оценок экстремальной квантили. В теоремах 4.18–4.20 получены нижние границы точности оценивания функции распределения выборочного максимума. Отметим, что ранее нижние границы точности оценивания экстремальных квантилей вообще не рассматривались.

В главе 5 исследуется задача получения оценок типа Берри-Эссеена для точности нормальной аппроксимации распределения статистики Стьюдента и подобных ей. В теореме 5.1 с помощью метода Стейна получена оценка точности нормальной аппроксимации для квадратичных функционалов суммы пар случайных величин. Далее рассматриваются нормальные аппроксимации так называемых самонормированных сумм случайных величин (когда сумма случайных величин нормируется не стандартным уклонением, а его оценкой). В теоремах 5.2 и 5.3 впервые получены оценки точности нормальной аппроксимации для распределений самонормированных сумм случайны величин *с явными константами.* Оценки скорости сходимости получены также в случае стационарной последовательности зависимых случайных величин (теоремы 5.4 и 5.7). Из результатов этой главы выделим еще неравенства типа Берри-Эссеена для точности нормальной аппроксимации статистики Стьюдента, также полученные впервые с явными константами (теоремы 5.13 и 5.18). Утверждение 5.16 дает новую оценку снизу наилучшей возможной константы в неравенстве Берри-Эссеена, а в утверждении 5.17 установлено, что неравномерное неравенство Берри-Эссеена для статистики Стьюдента, вообще говоря, не имеет места.

Заключительная глава 6 содержит известные сведения из теории вероятностей и математической статистики, используемые в диссертации.

В целом диссертация С. Ю. Новака представляет собой законченное математическое исследование, в котором решен большой ряд задач теории экстремальных значений и смежных областей, в том числе, предложены и разработаны новые методы, позволившие получить ряд окончательных результатов или решить давно стоящие задачи. О значительности вклада соискателя говорят и упомянутые выше имена математиков, работавших над задачами, получивших решение в диссертации. Их список можно продолжить. Поскольку в область моих интересов входит тематика нижних границ качества оценивания параметров, должен отметить, что на меня, как на специалиста, результаты второй половины главы 4 о нижней границе точности оценивания характеристик распределений с тяжелыми хвостами произвели очень сильное впечатление.

Существенных погрешностей в диссертации я не заметил. Могу сделать лишь несколько замечаний. В конце диссертации приведены список сокращений и список обозначений, которые в большинстве являются общеупотребительными. Было бы гораздо удобнее иметь список обозначений и условий, используемых в тексте. Читателю сложно догадаться, что условие $(D\{u_n\})$, которое в первый раз встречается на странице 10, определяется на странице 192 приложения, а символ d_G, используемый в теоремах главы 2, вводится на странице 186 и означает расстояние Джини-Канторовича-Вассерштейна. Здесь же как курьез отметим, что на странице 187 в числе полезных сведений имеется неравенство для расстояния d_{LP}, определение которого остается загадкой, так как это обозначение нигде в тексте больше не встречается. Еще одно замечание касается нумерации утверждений в автореферате, которая не всегда совпадает с нумерацией в диссертации.

Сказанное выше позволяет охарактеризовать диссертацию С. Ю. Новака как глубокое, законченное и цельное математическое исследование, содержащее решение фундаментальных проблем теории экстремальных значений и являющееся крупным научным достижением. Для решения рассматриваемых задач автором развиты новые методы исследования, свидетельствующие о его широкой математической эрудиции, и преодолены существенные трудности. Все результаты строго доказаны и своевременно опубликованы в 23 статьях в ведущих отечественных и зарубежных журналах. Автореферат правильно и полно отражает содержание работы.

Исходя из вышеизложенного, считаю, что диссертация С. Ю. Новака "Предельные теоремы и оценки скорости сходимости в теории экстремальных значений" полностью удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор, Сергей Юрьевич Новак, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика.

27 марта 2014 года.
Ведущий научный сотрудник МИАН,
доктор физ.-мат. наук А. А. Гущин

Подпись А.А. Гущина заверяю.
Ученый секретарь МИАН Печень А.Н.