"УТВЕРЖДАЮ"
Проректор по научной работе
Санкт-Петербургского государственного
электротехнического университета,
доктор технических наук, профессор
Шестопалов М. Ю..
. . сентября 2014 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации - Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета о диссертационной работе Иванисвили Пааты "Функция Беллмана, аппроксимация, исправление", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

П.Иванисвили исследует в своей диссертации три различных задачи математического анализа. Большая часть работы посвящена активно развивающемуся новому направлению – получению разного рода оценок с помощью функции Белмлана, т.е. на основе методов оптимизации. Идея систематического применения такого подхода принадлежит Ф.Л.Назарову, С.Р.Трейлю и А.Л.Вольбергу. Она оказалась очень привлекательной, но технически сложной. В работах В.И.Васюнина и его учеников были открыты геометрически подходы к задачам такого рода, сделавшие соответствующие конструкции более удобными для работы. В диссертации успешно продолжаются и систематизируются эти исследования.

Второй раздел диссертации имеет дело с понятиями K и J замкнутости наборов банаховых пространств. Здесь получены интересные продвижения исследований интерполяционных соотношений между пространствами Харди, проведенных С.В.Кисляковым.

Третий раздел диссертации посвящен обобщению классической теоремы Меньшова об исправлении. Этот результат вековой давности всегда привлекал внимание специалистов по рядам Фурье, а в последнее время активно исследуется в рамках функционального анализа. В диссертации предприняты исследования такого рода, продолжающие исследования С.В.Кислякова.

Диссертация изложена на 139 страницах. Она состоит из введения трех разделов (глав) и списка литературы.

Разделы диссертации не связаны между собой и посвящены трем вышеупомянутым темам, в которых автору удалось получить существенные результаты.

Большая часть диссертации посвящена активно развивающемуся методу – доказательству оценок с помощью функции Беллмана. Новая точка зрения на классически вопросы естественная для решения задач о неравенствах, в частности, она всегда позволяет "автоматически" решать вопрос о точных константах. Наиболее сильное впечатление от этой части диссертации производит необычайно работоспособная смесь дифференциальной геометрии, уравнений в частных производных и тонких рассуждений о свойствах дифференцируемых функций одной вещественной переменной. Одним из примеров такой ситуации является формулировка теоремы об оценках мартингалов. В ходе доказательства приходится многократно применять теорему о неявной функции, в результате описание точных оценок использует серию решений неявных уравнений, необходимых для формулировки результата. Но изложение построено так, что возникновение этих уравнений имеет естественную геометрическую природу и именно она позволила автору разобраться в хитросплетении многочисленных параметров и ограничений.

В вводном параграфе, открывающем раздел посвященный функции Беллмана, дано формальное описание функции Беллмана в общем случае, и доказана теорема 2.1 утверждающая, что несколько просто формулируемых условий — "аксиом" определяют функцию Беллмана единственным образом. Работа этой схемы обсуждается на двух примерах. Первый, простой, неравенство Гельдера, позволяет почувствовать, что стоит за абстрактной схемой теоремы. Второй, более сложный пример — вычисление точной константы равномерной выпуклости в пространствах L^p, показывает типичные трудности, возникающие при построении функции Беллмана, и, главное, как эта методика позволяет "опустить" задачу оптимизации из пространства L^p в пространство R^3, сводя все к нетривиальному анализу кривых и поверхностей. Механизм этого перевода одной задачи другую — одно из ключевых мест того, что родоначальники методики назвали "охотой на функцию Беллмана". Из решения этих задач видно, что важную роль здесь играет анализ структуры выпуклой оболочки пространственной кривой вида $(s, g(s), f(s))$, $s \in [a, b]$, играющую роль граничных значений для задачи оптимизации. График функции Беллмана оказывается "нижней" частью поверхности упомянутой выше выпуклой оболочки.

Параграф 2.2 готовит базу для работы с поверхностями такого вида. Автор замечает, что условия выпуклости и минимальности приводят к тому, что функция Беллмана должна удовлетворять уравнению Монжа-Ампера. Следовательно, соответствующая поверхность оказывается линейчатой. Для анализа таких поверхностей автор вводит понятие фолиации. Так названо семейство проекций в координатную плоскость прямых, лежащих на поверхности. Автор тщательно исследует структуру фолиации и устанавливает, что при естественных ограничениях на функции g и f область проекции распадается на подобласти, где структура линейчатого покрытия гладко зависит от точек на граничной кривой. После чего возникает большое число аналитических характеристик, отвечающих возникшей геометрической конструкции и важных для решения задачи. Главным и совершенно не очевидным обстоятельством оказывается то, что фолиация восстанавливается по кривой единственным образом (это составляет содержание леммы 2.3, с.39). Первоначально фолиация возникает только на "хороших" подобластях, где линейчатое покрытие гладко зависит от точки на граничной прямой. Далее автор показывает, как можно склеить решения для соседних областей. Но для этого требуется тщательно проанализировать устройством фолиации в окрестности точки, где кривая $(s, g(s), f(s))$ меняет знак кривизны.

После этой подготовки автор переходит к главному результату этого раздела — новому доказательству неравенства Бурхольдера. Пусть $\{F_n\}$ мартингал на вероятностном пространстве $([a, b], \mathcal{B}, dx/(b-a))$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_n\}$, далее пусть $\forall n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_n(x)$, — функция измеримая относительно $\mathcal{F}_{n-1}$ и такая, что $|\varepsilon_n(x)| \leq 1$, определим новый мартингал

$$G_n = G_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(F_k - F_{k-1}, \quad |G_0| \leq |f_n|$$

тогда при $1 < p < \infty$ имеет место неравенство

$$||G_n||_{L^p} \leq (p^* - 1)||F_n||_{L^p}, \quad p^* = \max(p-1, \frac{1}{p-1})$$

В диссертации дано уточненное доказательство обобщения этого результата, полученного Боросом, Вольбергом и Янакерманом.

Теорема 2.3
1) если $u(\frac{1}{p-1}) \leq 0$, то

$$||(G_n^2 + \tau^2 F_n^2)^{1/2}||_{L^p} \leq C_1 ||F_n||_{L^p}$$

2) если $u(\frac{1}{p-1}) > 0$, то

$$E((G_n^2 + \tau^2 F_n^2)^{p/2}) \leq C_2 E|F_n|^p$$

здесь $u(x)$ конкретная функция, возникающая в ходе доказательства. Благодаря применяемой технике автору удается трудная работа по вычислению точных значений постоянных C_1 и C_2.

Главная цель этой части работы — доказать что функции Беллмана имеет вид:

$$H(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \sup\{EB(\phi(F,G)) : E\phi(F,G) = (x_1, x_2, x_3), |F_n - F_{n-1}| = |G_n - G_{n-1}|, n \in \mathbf{N}\}$$

где $\phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, |x_1|^p)$, $\quad B(\phi(x_1, x_2)) = (x_2^2 + \tau^2 x_1^2)^{p/2}$
Теперь утверждение теоремы можно записать в виде

$$H(x_1, x_2, x_3) \leq C x_3$$

Простой анализ свойств функции H позволяет сделать замены, порождающие функции более удобные для работы

$$N(y_1, y_2, y_3) = H(y_1 - y_2, y_1 + y_2, y_3), \quad M(y_2, y_3) = n(1, y_2, y_3).$$

Далее доказано, что функция M выпуклая, наследует нужные граничные значения и условия на частные производные от функции H и, более того, является минимальной функцией с такими свойствами. Граничные значения для функции M можно записать в виде

$$M(t, g(t)) = f(t), \quad g(t) = (1-t)^p, \ f(t) = ((1+t)^2 + \tau^2(1-t)^2)^{p/2}, \ |t| \leq 1$$

Это открывает возможность использовать ранее заготовленную технику для построения фолиации в области задания функции M и затем по ней восстановить саму функцию. Эта часть работы производит наиболее сильное впечатление. Весьма абстрактная процедура флолиации применена в конкретной сложной ситуации, когда алгоритм сильно ветвиться из-за обилия параметров, а каждый отдельный шаг требует изощренного анализа функций по производным.

Далее в диссертации получено уточнение теоремы 2.3 в духе исходного результата Бурхольдера, когда на функции удовлетворяют дополнительному условию $|EG| \leq \beta|EF|$. Доказано, что в этом случае имеют место аналогичные оценки. Внешнее сходство теорем и одинаковый план решения — построение кандидата на функцию Беллмана, не воплощаются в сходство доказательств. Вся конструкция строится заново и существенно отличается от предшествующей.

Заключительный параграф этой части работы посвящен построению оптимайзеров по фолиации. Используя созданную технику, автор сравнительно легко получает точный вид функции Беллмана для задачи о равномерной выпуклости пространств L^p, рассмотрение соответствующего неравенства было вводным примером, но тогда не могло быть и речи о предъявлении точного вида функции.

Третий раздел посвящен одному вопросу об интерполяции пространств типа Харди. Пусть $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ — совместимый набор квазибанаховых пространств, а $(Y_0, Y_1, \ldots Y_n)$ — набор замкнутых подпространств. Он называется K-замкнутым в $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, если любые представления элемента $y \in Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$ в виде суммы $y = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$, $x_k \in X_k$ можно заменить на $y = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ $y_k \in Y_k$, при этом $||y_k|| < C||x_k||$. Набор $(Y_0, Y_1, \ldots Y_n)$ называется J-замкнутым в $(X_0, X-1, \ldots, X_n)$, если для всякого $x \in X_0 \cap X_1 \cap \cdots \cap X_n$ существует $y \in Y_0 \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_n$ такой, что $dist(y, Y_k) < C\,\varepsilon\, dist(y, X_k)$, где ε не зависит от x. "Основная лемм теории интерполяции" говорит, что при $n = 1$ эти понятия эквивалентны. Однако, при $n > 1$ это уже не так. Рассмотрим ситуацию, когда $X_0, X_1, \ldots, X_n$ — решетки измеримых функций на окружности, а $Y_0, Y_1, \ldots Y_n$ — пространства типа Харди: $Y_k = X_k \cap (N_+|_T)$, где N_+ — класс Смирнова. В работах С.В.Кислякова и К.Шу было установлено, что в этом случае K-замкнут имеет место, если $X_0, X_1, \ldots, X_n$ удовлетворяют некому фундаментальному условию, называемому "BMO-регулярности". В диссертации аналогичное утверждение доказано для J-замкнутых пространств. В диссертации приведено три различных варианта доказательства того, что при условии "BMO-регулярности" свойства K-замкнутости и J-замкнутости эквивалентны. Первое сводит доказательство к справедливости этого утверждения для наборов из двух пространств. Второе опирается понятии частичной ретракции, используя которое автор переводит задачу в весовые пространства Харди, а для таких пространств эта задача решена в работе Кислякова. Третье доказательство основано на том, как эти понятия преобразуются при переходе к двойственным пространствам. Автор обнаружил, что имеет место следующее свойство: J-замкнутость пары наборов квазинормирванных решеток эквивалентна K-замкнутости для набора ануляторов и набора сопряженных пространств, и показал, что, опираясь на него, можно получить доказательство эквивалентности.

В четвертом разделе диссертации рассматривается вопрос об обобщениях теоремы Меньшова, утверждающей, что любую непрерывную периодическую функцию можно исправить на множестве малой меры так, что бы ряд Фурье исправленной функции равномерно сходился. Этот результат вековой давности многократно модифицировался и обобщался. Автор, развивая идеи С.В.Кислякова, ставит точку в этих обобщениях. Рассматривается произвольная компактная абелева группа G и двойственная к ней группа Γ. Теорема Меньшова обобщается на функции $f \in L^\infty(G)$. Ряд Фурье понимается как $\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)\gamma$. В преамбуле раздела автор отмечает, что "все уточнения *(результата Кислякова)* получаются с помощью более правильных слов, сказанных в нужном месте". В чем то с этим нельзя не согласиться, определения и терминология составляют большую текста раздела. Эта ситуация является неизбежной расплатой за степень общности, на которую претендует автор. Проблема определения частичных сумм решается введением базиса суммирования $\mathcal{B}$. Для функций p с конечным спектром (многочленов) норма определяется как

$$\sup\{|\sum_{\gamma\in E} \hat{p}(\gamma)\gamma| : E \in \mathcal{B}\}.$$

Замыкание многочленов в этой норме формирует пространство $U(G, \mathcal{B})$ – аналог пространства равномерно сходящихся рядов. Автор отмечает, что в работе интересны большие базисы. Но нельзя взять в качестве базиса все конечные подмножества, так как при этом получится пространство $l^1(\gamma)$, для которого теорема об исправлении неверна. Целью работы становится поиск описания базисов суммирования, для которых теорема об исправлении остается справедливой. Доказательство теоремы требует от автора очень тщательной и аккуратной работы. Оно ведется для многочленов, с последующим предельным переходом. Заложенная в определения структура позволяет свести дело к теореме А.Б.Александрова об оценке в пространстве $L^r(G)$, $0 < r < 1$, расстояния между многочленом и единицей. Удивительным образом в этой теореме возникают те же групповые структуры, что и в описаниях базисов суммирования.

Все установленные в диссертации П.Иванисвили результаты являются достоверными научными фактами. Результаты его работы интересны для широкого круга специалистов по вещественному и гармоническому анализу. Работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Основное содержание диссертации опубликовано в трех статьях. Все они помещены в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Изложение материала в диссертации ясное и последовательное. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

К недостаткам можно отнести некоторую небрежность в изложении, как правило, относящуюся к оформлению текста и не касающуюся математической строгости изложения. Приведем несколько примеров:

– на с.25 сбиты обозначения, там сказано, что $m : R^n \to R^k$, $w : R^n \to R$ и далее пишется некорректно определенная суперпозиция $w(m(\cdot))$,

– в разделе "описание диссертации по главам и параграфам" (с.23) слово "глава" не употребляется нигде, кроме заголовка, зато символ "параграф"используется как универсальный, независимо от глубины вложения,

– на с.127 имеется заголовок "доказательство теоремы 5.1", а открывает раздел фраза "теорема 4.1 доказывается...".

Однако, эти недостатки, которые в большей степени можно отнести к курьезам, не умаляют хорошего впечатления об работы П.Иванисвили. Он проявил себя как разносторонний математик с большим потенциалом. С диссертацией рекомендуется ознакомиться в ПОМИ РАН, на математико-механическом факультете СПбГУ, на механико-математическом факультете МГУ, в МИАН, на механико-математическом факультете Новосибирского ГУ.

Диссертационная работа Пааты Иванисвили "Функция Беллмана, аппроксимация, исправление" соответствует требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а соискатель, безусловно, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры Высшей математики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета от 29 августа 2014 года, протокол номер 1.

Зав. кафедрой ВМ-2 СПбГЭТУ
доктор физ.-мат. наук
А.М.Коточигов

ПОДПИСЬ РУКИ Коточигова ЗАВЕРЯЮ
НАЧ ОК ШУБИНСКИЙ
09. 2014 Г

ОТДЕЛ КАДРОВ