Отзыв официального оппонента

на диссертацию Хартова Алексея Андреевича

СЛОЖНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация Хартова Алексея Андреевича посвящена важным, актуальным и интересным вопросам изучения возможности построения аппроксимаций гауссовских случайных полей; зависящих от большого числа параметров.

Построение хороших аппроксимаций для гауссовского случайного поля - одна из важных задач в теории многопараметрических задач. Эта задача представляет как теоретический, так и практический интерес, в частности, для компьютерного моделирования, для построения численных решений стохастических уравнений в частных производных и так далее.

Диссертация Хартова А.А. состоит из введения, пяти глав, заключения и внушительного списка литературы, содержащего 101 ссылку. Во введении диссертант приводит общую постановку задачи и историю вопроса, проанализировав большое количество работ. Здесь же кратко описывается содержание диссертации.

В первой главе диссертант приводит обзор теории информационной сложности, описывает происхождение этой теории, ее основные понятия и задачи, а также их мотивации.

Пусть Q и H - некоторые нормированные функциональные пространства, элементами которых являются функции $f : D \to R$ где $D \subset R^d$ и d – натуральное число. Пусть задано отображение . При этом возникает естественная задача построения конечномерной аппроксимации отображения с той или иной точностью. Примером такого отображения может служить отображение вида $Sf = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$ где $Q \subset L_1([0,1]^d)$ и $H = R$, или операция вложения $Sf = f$, где $Q = C([0,1]^d)$, и $H = L_1([0,1]^d)$. Поскольку f элемент бесконечномерного пространства, то его естественно приблизить элементом конечномерного пространства, содержащим конечную информацию о функции f, например, задав $I_n(f) = (y_1(f), \ldots, y_n(f))$, где $y_i(f), i = 1, \ldots, n$ значения некоторых функционалов от f. Вычисление $y_i(f)$ называется информационной операцией и при этом $I_n(f)$ называют частичной информацией об $f \in Q$. В этих терминах задача аппроксимации оператора S в рамках порога точности ε сводится к поиску такой информации $I_n : Q \to R^n$ с подходящим $n = n(\varepsilon) \in N$ и такого отображения $\mathcal{A}_n : R^n \to H$, чтобы значения оператора $\tilde{S}_n = \mathcal{A}_n \circ I_n$ отличались от значений S в некоторой метрике не более чем на ε.

При этом оператор S_n называют аппроксимацией ранга n оператора S, а отобра-жение $\tilde{S}_n$ – алгоритмом аппроксимации. Наименьший подходящий ранг называю информационной сложностью задачи аппроксимации оператора S.

В диссертационной работе изучаются два типа информационной сложности сложность аппроксимации оператора S в среднем и по вероятности. Для опре-деления этих понятий рассматривается сепарабельное банахово пространство функций, определенных на $D \subset R^d$ и заданная на нем гауссова мера μ с нуле-вым средним и корреляционным оператором $K_\mu : Q^* \to Q$, а также сепарабельно гильбертово пространство H с нормой $\| \cdot \|_H$, индуцированной на нем гауссово мерой $\nu = \mu S^{-1}$ с нулевым средним и корреляционным оператором $K_\nu = SK_\mu S$ При этом предполагается, что $e(S;\mu) = \left(\int_Q \|Sf\|_H^2 \mu(df)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Сложностью ап-проксимации оператора S в среднем при заданном пороге ошибки ε называю величину

$$n^{avg}(\varepsilon) = \min\{n \in N : \tilde{S}_n \in \mathbf{\tilde{S}_n}, e^{avr}(\tilde{S}_n) \le \varepsilon e(S, \mu)\},$$

где

$$e^{avr}(\tilde{S}, \mu) = \left(\int_Q \|Sf - \tilde{S}_n f\|_H^2 \mu(df)\right)^{\frac{1}{2}}$$

имеет смысл ошибки в среднем при использовании аппроксимирующего оператор $\tilde{S}_n$. Сложностью аппроксимации оператора S по вероятности при заданном порог ошибки ε и уровне значимости $\delta \in (0, 1)$ называют величину

$$n^{prob}(\varepsilon) = \min\{n \in N : \tilde{S}_n \in \mathbf{\tilde{S}_n}, Prob(\tilde{S}_n, \varepsilon) \le \delta\},$$

где

$$Prob(\tilde{S}_n, \varepsilon) = \mu\{f \in Q : \|Sf - \tilde{S}_n f\|_H > \varepsilon e(S, \mu)\}$$

имеет смысл ошибки в среднем при использовании аппроксимирующего оператор $\tilde{S}_n$. Вводится также понятие оптимальной n-ранговой аппроксимации по вероят-ности и задача нахождения $n^{avg}(\varepsilon)$ и $n^{prob}(\varepsilon)$ сводится к поиску и описанию по-следовательностей оптимальных конечноранговых аппроксимаций. В п.1.1.5 при-водится наглядная стохастическая интерпретация линейных задач. Пусть $(\lambda_i, \psi_i$ – последовательность собственных чисел и собственных функций оператора K_ν При этом $e^2(S;\mu) = \Lambda = \sum_{i\in N} \lambda_i$, $X(t, \omega) \in H$ – случайный элемент, заданный н некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, и для каждого $n \in N$ случайны элемент $X_n(\omega) = \tilde{S}_n S^{-1} X(\omega) \in H$ представим в виде

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} (X, \psi_i)_H \psi_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \xi_i \psi_i,$$

где $\xi_i = \lambda^{-\frac{1}{2}} (X(\omega), \psi_i)_H$ – независимые стандартные гауссовские случайные вели-чины. При этом, используя разложение Карунена-Лоэва $X = \sum_{i\in N} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \xi_i \psi_i$, выра-жения для $n^{avg}(\varepsilon)$ и $n^{prob}(\varepsilon, \delta)$ удается представить в виде

$$n^{avg}(\varepsilon) = \min\{n \in N : \sum_{i>n} \lambda_i \le \varepsilon^2 \Lambda\}\},$$

При этом оператор S_n называют аппроксимацией ранга n оператора S, а отображение $\tilde{S}_n$ – алгоритмом аппроксимации. Наименьший подходящий ранг называют информационной сложностью задачи аппроксимации оператора S.

В диссертационной работе изучаются два типа информационной сложности – сложность аппроксимации оператора S в среднем и по вероятности. Для определения этих понятий рассматривается сепарабельное банахово пространство Q функций, определенных на $D \subset R^d$ и заданная на нем гауссова мера μ с нулевым средним и корреляционным оператором $K_\mu : Q^* \to Q$, а также сепарабельное гильбертово пространство H с нормой $\| \cdot \|_H$, индуцированной на нем гауссовой мерой $\nu = \mu S^{-1}$ с нулевым средним и корреляционным оператором $K_\nu = SK_\mu S^*$. При этом предполагается, что $e(S;\mu) = \left(\int_Q \|Sf\|_H^2 \mu(df) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Сложностью аппроксимации оператора S в среднем при заданном пороге ошибки ε называют величину

$$n^{avg}(\varepsilon) = \min\{n \in N : \tilde{S}_n \in \tilde{\mathbf{S}}_\mathbf{n}, e^{avr}(\tilde{S}_n) \leq \varepsilon e(S,\mu)\},$$

где

$$e^{avr}(\tilde{S},\mu) = \left(\int_Q \|Sf - \tilde{S}_n f\|_H^2 \mu(df) \right)^{\frac{1}{2}}$$

имеет смысл ошибки в среднем при использовании аппроксимирующего оператора $\tilde{S}_n$. Сложностью аппроксимации оператора S по вероятности при заданном пороге ошибки ε и уровне значимости $\delta \in (0,1)$ называют величину

$$n^{prob}(\varepsilon) = \min\{n \in N : \tilde{S}_n \in \tilde{\mathbf{S}}_\mathbf{n}, Prob(\tilde{S}_n, \varepsilon) \leq \delta\},$$

где

$$Prob(\tilde{S}_n, \varepsilon) = \mu\{f \in Q : \|Sf - \tilde{S}_n f\|_H > \varepsilon e(S,\mu)\}$$

имеет смысл ошибки в среднем при использовании аппроксимирующего оператора $\tilde{S}_n$. Вводится также понятие оптимальной n-ранговой аппроксимации по вероятности и задача нахождения $n^{avg}(\varepsilon)$ и $n^{prob}(\varepsilon)$ сводится к поиску и описанию последовательностей оптимальных конечноранговых аппроксимаций. В п.1.1.5 приводится наглядная стохастическая интерпретация линейных задач. Пусть (λ_i, ψ_i) – последовательность собственных чисел и собственных функций оператора K_ν. При этом $e^2(S;\mu) = \Lambda = \sum_{i \in N} \lambda_i$, $X(t,\omega) \in H$ – случайный элемент, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, и для каждого $n \in N$ случайный элемент $X_n(\omega) = \tilde{S}_n S^{-1} X(\omega) \in H$ представим в виде

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} (X, \psi_i)_H \psi_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \xi_i \psi_i,$$

где $\xi_i = \lambda^{-\frac{1}{2}} (X(\omega), \psi_i)_H$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины. При этом, используя разложение Карунена-Лоэва $X = \sum_{i \in N} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \xi_i \psi_i$, выражения для $n^{avg}(\varepsilon)$ и $n^{prob}(\varepsilon, \delta)$ удается представить в виде

$$n^{avg}(\varepsilon) = \min\{n \in N : \sum_{i > n} \lambda_i \leq \varepsilon^2 \Lambda\}\},$$

раметрических гауссовских случайных полей. В ней содержится как изложение истории развития исследований теории аппроксимации многопараметрических случайных полей, так и оригинальные интересные результаты.

Основные положения диссертации четко сформулированы и строго доказаны.

К числу недочетов диссертации следует отнести наличие стилистических неточностей и опечаток, впрочем не затрудняющих понимание текста, а также не всегда удачный выбор русской терминологии для вводимых объектов. Приведем несколько примеров:

1) стр. 5. ... Задача изучения ...... изучена слабо.

2) стр.105 ... рассуждения, которые были сделаны в доказательстве...

2) стр.11. По-видимому, неудачен термин "оператор решения"для оператора S примером которого является линейный функционал вида $Sf = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$.

Аналогичный вопрос вызывает термин трактабильность и ряд других.

3) стр 28. Опечатка в формуле $\|f\|_{Q_d} = \sup_{t\in[0,1]} |f(x)|$.

Приведенные выше замечания не влияют на окончательную высокую положительную оценку данной диссертационной работы.

Основные результаты работы опубликованы в 3 статьях в журналах, входящих в список, рекомендованный ВАК России и двух тезисах докладов на международных конференциях. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

По моему мнению диссертация Хартова А.А. удовлетворяет всем требованиям предъявляемым ВАК России к кандидатским диссертациям, а ее автор безусловно заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор ф.-м.н., профессор Белопольская Я.И.

Подпись Белопольской Я.И.

ЗАВЕРЯЮ

Начальник управления кадров

СПбГАСУ

«28» мая 2014 г.

Министерство образования и науки Российской Федерации федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»

УПРАВЛЕНИЕ КАДРОВ