Отзыв официального оппонента о диссертационной работе
Белова Юрия Сергеевича
"Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)",
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации изучаются три класса гильбертовых пространств целых функций: пространства де Бранжа, пространства с базисом Рисса из воспроизводящих ядер и пространства фоковского типа. Систематическое исследование гильбертовых пространств целых функций началось в начале 60-х годов с пионерских работ Луи де Бранжа. Введенный им класс таких пространств – пространств де Бранжа – оказался очень полезным при изучении многих задач. Так, Луи де Бранж получил решение обратной спектральной задачи для класса *всех* канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. К каноническим системам могут быть сведены многие классические уравнения математической физики, такие как матричное уравнение струны, уравнение Штурма–Лиувилля, уравнение Шредингера, система Дирака и т.д.

Другие важные примеры гильбертовых пространства целых функций, пространства Пэли–Винера и Фока, появились еще в 30-х годах.

Выяснилось, что теория пространств де Бранжа имеет большое значение и при решении ряда классических проблем анализа, таких как проблема полноты полиномов и других систем специальных функций, проблемы лакуны в спектре меры с малым носителем и т.д. В 2002 году И. Ортега-Серда и К. Сейп описали все вещественные фреймы из экспонент при помощи теории пространств де Бранжа. В 2012-м году А. Полторацкий решил знаменитую задачу о лакуне в спектре при помощи этой теории. Теория пространств де Бранжа тесно связана также с теорией сингулярных интегральных операторов. Задача об описании *бесселевых последовательностей из воспроизводящих ядер* – частный случай знаменитой проблемы об ограниченности преобразования Гильберта как оператора из одного весового пространства в другое. Эта задача была решена в 2014-м году М. Лэйси, Э. Сойером, К. Шеном и И. Уарто-Туэро.

Таким образом, актуальность предпринятого автором исследования не вызывает сомнений.

Работа состоит из введения (глава 1) и десяти глав.

В главе 1 вводятся основные объекты работы: пространства де Бранжа, пространства с базисом Рисса и т.д. При этом описываются их свойства и даются различные способы определения, включая аксиоматический. Такой подход играет важную роль в дальнейшем исследовании. Глава 1 содержит также формулировки и обсуждение основных результатов, доказательство которых приводится в последующих главах.

Во второй главе автор рассматривает класс малых пространств де Бранжа, то есть пространств с лакунарным носителем меры Кларка – дискретной меры, ассоциированной с пространством де Бранжа, с носителем $\{t_n\}$ на вещественной оси. Под лакунарностью понимается условие $\inf_n t_{n+1}/t_n > 1$. Оказывается, что в таких пространствах многие классические задачи (описание карлесоновых мер, бесселевых последовательностей, базисов Рисса из воспроизводящих ядер) могут быть полностью решены. Например, теорема 1.2.2 дает полное описание карлесоновых мер для малых пространств де Бранжа и, в частности, дает необходимые и достаточные условия ограниченности двухвесового преобразования Гильберта в случае, когда носитель одной из мер лакунарен. Теорема 1.2.4 обнаруживает, в частности, не известный ранее феномен – существование суперлакунарных бесселевых последовательностей.

Пожалуй, наиболее эффектными результатами главы 2 являются теоремы 1.2.9, 1.2.10, дающие полное геометрическое описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер (или, что то же самое, полных интерполяционных последовательностей) для малых пространств де Бранжа с некоторыми дополнительными условиями на меру Кларка. Здесь возникает неожиданный эффект "лишней точки"для базисов Рисса из воспроизводящих ядер, подчеркивающий деликатность задачи и полученных результатов. Доказательство опирается на более общий критерий, полученый автором – теорему 1.2.7 – не имеющий геометрического характера. Отмечу, что полное описание карлесоновых мер и базисов Рисса из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа было известны только для пространства Пэли–Винера и близких к нему весовых пространств Пэли–Винера (работы Ю. Любарского и К. Сейпа).

Глава 3 посвящена задаче полноты систем, биортогональных к системам из воспроизводящих ядер. Эта задача мотивирована спектральной теорией одномерных возмущений самосопряженных операторов. Вопрос о полноте таких систем в пространствах де Бранжа был поставлен Н.К. Никольским в 2000-х. Автор не только дал (отрицательный) ответ на этот вопрос (верно ли, что система, биортогональная к точной системе из воспроизводящих ядер в пространстве де Бранжа, всегда полна), но и выявил связь между свойствами меры Кларка и коразмерностью биортогональной системы. Это позволило классифицировать пространства де Бранжа в соответствии с возможным дефектом биортогональной системы. Полученые ранее результаты Янга и Фрикена являются частными случаями построенной в диссертации красивой теории. Также автору удалось найти глубокие связи этой задачи с классической задачей о полноте полиномов (см. доказательство теоремы 1.3.6).

В четвертой главе Ю.С. Белов обращается к задаче о наследственной полноте для систем из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа. Напомним, что полная минимальная система $\{x_n\}$ векторов в гильбертовом пространстве обладает свойством наследственной полноты, если любой вектор x лежит в замкнутой линейной оболочке элементов $\{(x, y_n)x_n\}$ – членов формального ряда Фурье; здесь $\{y_n\}$ – система, биортогональная к $\{x_n\}$. Даже для систем из экспонент на отрезке (или, что то же, воспроизводящих ядер в пространстве Пэли-Винера) вопрос о наследственной полноте был открыт. Автор не только построил ненаследственно полную систему из экспонент, но и получил следующий красивый результат: возможный дефект смешанной системы не более чем одномерен. Этот факт тем более эффектен, что для произвольных пространств де Бранжа размерность ортогонального дополнения смешанной системы может быть сколь угодно большой (теоремы 1.4.3, 1.4.4).

Более того, автору удалось исчерпывающим образом решить задачу о наследственной полноте для *всех* пространств де Бранжа. Теорема 1.4.2 показывает, что наследственная полнота для всех точных систем из воспроизводящих ядер имеет место только для двух классов пространств де Бранжа: пространств с конечной мерой Кларка и пространств де Бранжа, изоморфных некоторому весовому пространству Фока. Для второго класса автор получил полное описание соответствующих мер Кларка. Доказательству этого результата посвящена глава 9, краткое описание которой приводится ниже. Появление весовых пространств Фока в задаче о наследственной полноте весьма неожиданно и является одним из открытий автора.

В данной главе ярко проявилось стремление Ю.С. Белова не просто решить поставленную конкретную задачу, но докопаться до причин, порождающих тот или иной эффект. Это стремление характерно и для всей работы в целом. Оно свидетельствует о зрелости исследовательского таланта соискателя.

В пятой главе доказывается гипотеза Карлсона–Сандберга о полноте в L^2 систем из сдвигов функции на конечном интервале. Отметим, что вопросы полноты для различных систем сдвигов – классическая проблематика анализа. Верный своему стилю, Ю.С. Белов изучает более общую задачу, чем изначально поставленную Карлсоном и Сандбергом (теорема 1.5.1), и доводит результат до (в определенном смысле) неулучшаемого – см. замечание 1.5.1. Автор обнаружил интересные связи этой задачи с задачей Полиа о функциях нулевого экспоненциального типа и с теорией Берлинга–Мальявена. Эти результаты в комбинации с техникой, развитой для доказательства теоремы 1.4.2, послужили важными ингредиентами доказательства.

В шестой главе автор развивает проблематику главы 4, изучая наличие следующего свойства у наследственно полных систем (существование линейного метода суммирования): каждый вектор x не только можно приблизить конечными линейными комбинациями элементов системы $\{(x, y_n)x_n\}$, но при этом коэффициенты линейных комбинаций не зависят от x. Таким образом, существование линейного метода суммирования – свойство более сильное, чем наследственная полнота, но более слабое, чем базисность. Хорошо известный результат Б. Павлова говорит, что для систем из экспонент на отрезке базисность эквивалентна условию Карлесона и Макенхаупта. Автору удалось показать, что одного условия Макенхаупта на порождающую функцию $G(z)$ уже достаточно для наличия линейного метода суммирования (теорема 1.6.3). Ранее похожий вопрос исследовался Г. Губреевым и А. Тарасенко, показавшими, что условие Макенхаупта влечет наследственную полноту.

Седьмая глава посвящена одному интересному геометрическому свойству пространств де Бранжа – локализации нулей (т.е. расположению нулей "вблизи" носителя меры Кларка). Предполагается, что носитель удовлетворяет условию $|t_{n+1} - t_n| \geq C|t_n|^{-N}$ для некоторых $C > 0$ и $N \in \mathbb{N}$. Здесь обнаружена красивая связь между наличием свойства сильной локализации и плотностью полиномов в $L^2(\mu)$ (теорема 1.7.4), установлено нетривиальное свойство упорядоченности аттракторов (теорема 1.7.8; автор приводит два доказательства этой теоремы). Наличие локализации и сильной локализации описано в терминах гамильтониана соответствующей канонической системы дифференциальных уравнений (теорема 1.7.14). Так, наличие локализации эквивалентно тому, что гамильтониан имеет специальный вид. А именно, состоит из неделимых интервалов, сгущающихся влево (см. определение 1.7.13). По-видимому, это единственный известный результат, дающий взаимно однозначное соответствие между классами пространств де Бранжа и классами канонических систем (взаимно однозначное соответствие между регулярными пространствами де Бранжа и всеми каноническими системами было ранее установлено де Бранжем). Также автор получил полное описание пространств с локализацией специального вида (конечного типа).

Замечательной иллюстрацией эффективности развитой в главах 1 – 5 техники служит восьмая глава, в которой рассматривается задача Б. Коренблюма о спектральном синтезе в пространстве $C^\infty(a,b)$ в случае бесконечного дискретного спектра суженного оператора дифференцирования. Чтобы применить эту технику, проблема сводится к задаче в гильбертовом пространстве целых функций. Автор не только построил контрпример к гипотезе Б. Коренблюма, но провел исчерпывающее исследование вопроса о том, при каких дополнительных ограничениях на спектр спектральный синтез имеет место.

Из результатов главы 9 отметим теорему 1.9.2, в которой дается описание (в терминах условий на меру Кларка) пространств де Бранжа, совпадающих с пространствами фоковского типа, т.е. пространствами целых функций F, для которых

$$\int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)}\, dm(z) < \infty,$$

где $\varphi(t)$ – некоторая непрерывная функция на $(0,\infty)$ и m – плоская мера Лебега. При доказательстве работают методы, развитые в главе 2. Кроме того, для любой полной и минимальной системы из воспроизводящих ядер в пространстве Фока доказана полнота биортогональной системы. Примечательно здесь то, что в пространстве Фока нет базиса Рисса из воспроизводящих ядер, и методы главы 4 непосредственно применить нельзя.

В десятой главе автор описывает все пространства де Бранжа, в которых вещественные последовательности Бесселя Λ удовлетворяют условию

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \#\{\Lambda \cap [t_n, t_{n+1}]\} < \infty.$$

В заключительной главе 11 автор дает положительный ответ на вопрос Х. Накамуры о дополняемости систем из экспонент и распространяет этот результат на все пространства де Бранжа. Деликатность доказанных теорем подчеркивает тот факт, что дополненная система (даже в случае экспонент) не обязана быть базисом Рисса.

Из сказанного видно, что автором проведено глубокое исследование пространств де Бранжа и ряда смежных вопросов. Характерна обстоятельность подхода к изучаемым задачам. Как правило, Ю.С. Белов не только дает ответ на поставленный вопрос, но рассматривает гораздо более общую ситуацию.

В диссертации решены задачи (в том числе давно поставленные другими учеными), имеющие большое значение для различных разделов математического анализа. При этом открыт ряд новых, подчас неожиданных эффектов. Не менее важны и развитые диссертантом методы. Их эффективность убедительно продемонстрирована на серии задач теории функций, теории аппроксимации, теории операторов. Эти результаты и методы могут найти дальнейшие приложения в различных разделах анализа и в теории уравнений математической физики.

Диссертация свидетельствует об исследовательском таланте и эрудиции автора, свободно владеющего широким набором средств современного анализа.

Недостатки работы носят редакционный характер. Подчас изложение излишне сжато (что, впрочем, легко объясняется обилием материала и ограниченностью объема диссертации), имеются опечатки. Разумеется, эти недочеты нисколько не умаляют ценности исследования.

Все основные результаты являются новыми и строго доказанными фактами. Выносимые на защиту результаты получены автором лично. Они своевременно опубликованы в 16 публикациях в ведущих российских и иностранных журналах (GAFA, Adv. Math., J. Funct. Anal., IMRN, Алгебра и Анализ и т.д.). Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Таким образом, представленная диссертация является научно-квалификационной работой, в которой решены задачи, имеющие существенное значение для теории функций и теории операторов. Она "с запасом" удовлетворяет всем требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к докторским диссертациям. Безусловно, диссертант Белов Юрий Сергеевич заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Профессор университета штата Индиана (США),
доктор физ.-мат. наук профессор В.Я. Эйдерман

5 июня 2016 г.

Подпись руки В.Я. Эйдермана

УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
ПОМИ РАН А.Н. Антонова
06 06 2016 г.