ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Ю.С.Белова
«Гильбертовы пространства целых функций
(системы из воспроизводящих ядер, базисность,
полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)»,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01 –
вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Ю. С. Белова «Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)» посвящена ряду задач анализа, большую часть которых можно назвать классическими. Значительная часть результатов диссертации связана с пространствами де Бранжа, которые, несмотря на некоторую сложность наиболее известного их определения, являются очень естественными гильбертовыми пространствами целых функций. Эти пространства являются обобщением пространств Пэли-Винера, которые можно определить через преобразование Фурье функций с носителем на отрезке. Известный результат де Бранжа об упорядоченности цепочки подпространств де Бранжа приводит к изометрическому изоморфизму между пространством целых функций и L^2-пространством относительно некоторой представляющей меры на отрезке, которая в случае пространств Пэли-Винера является мерой Лебега. Отсюда происходят многочисленные постановки естественно возникающих вопросов, суть которых можно свести к обобщению известных результатов о пространствах Пэли-Винера и о преобразовании Фурье к более общему случаю пространств де Бранжа. Кроме того, во многих отношениях пространство Пэли-Винера устроено проще, чем пространство де Бранжа в общем случае, поэтому возникают вопросы о прояснении разнообразных явлений, специфических для пространств де

Бранжа. Так, интересный и важный класс вопросов касается выяснения свойств представляющей меры по соответствующему ей пространству де Бранжа: прояснение соотношений между непрерывной частью меры и точечными массами, что включает в себя и вопросы о так называемых неделимых интервалах, соответствующих одномерному скачку между двумя “соседними” подпространствами де Бранжа. Практически любые результаты о пространствах де Бранжа находят своё отражение в приложениях к операторам, ибо уравнения Шрёдингера, Дирака, уравнение струны и другие сводятся к каноническим системам, для которых спектральная унитарно эквивалентная модель записывается именно в терминах пространства де Бранжа. Кроме того, пространства де Бранжа простым преобразованием деления на целую функцию, определяющую пространство, сводятся к модельным подпространствам класса Харди в полуплоскости. Это приводит к взаимосвязи между разнообразными задачами, изначально существующими в различных исходных пространствах, и сводящихся друг к другу стандартным унитарным преобразованием. Тематикой, связанной с пространствами де Бранжа, занимается огромное число современных математиков; среди известных зарубежных учёных можно назвать имена самого Л. де Бранжа, а также К. Сейпа, И. Ортега-Серда, Х. Дыма, К. Ремлинга и других. Кроме того, эта тема тесно связана с традиционной для Санкт-Петербургской школы анализа тематикой. Отметим в первую очередь современные результаты в этой области представителей этой школы Н.Г.Макарова, А.А.Боричева, А.Г.Полторацкого, А.Д.Баранова, Д.В.Якубовича. Поэтому актуальность темы диссертации несомненна.

Диссертация состоит из 11 глав. Первая глава представляет собой введение, где представлена необходимая предварительная информация, главным образом о пространствах де Бранжа. Остальные главы диссертации содержат оригинальные достижения её автора. Результаты диссертации можно разбить на несколько тематических блоков. Главы 2 и 10 связаны с так называемыми малыми пространствами де Бранжа; они устроены проще, чем в общем случае, и для них доказан ряд важных новых результатов, на основании которых можно считать, что структура таких пространств в значительной степени прояснена. Главы 3, 4, 6 и 9 касаются работы с формальными рядами Фурье, в этих главах по сути разрабатывается новая техника работы со смешанными системами, используемая далее в главах 5 и 8 для решения более конкретных известных задач: в диссертации даются положительный ответ к проблеме Карлссона-Сандберга и отрицательный ответ на вопрос Коренблюма.

По-видимому, наиболее значительным и интересным достижением, представленным в диссертации, является ответ на вопрос Н.К.Никольского о наследственной полноте систем воспроизводящих ядер: наследственная полнота пространства де Бранжа возможна в двух очень разных между собой случаях: либо когда соответствующая мера Кларка конечна, либо когда само пространство как множество совпадает с пространством Фока, только с эквивалентной нормой.

В диссертации большое внимание уделено смешанным системам, связанным с минимальными и полными системами воспроизводящих ядер. Смешанная система представляет собой внешне несколько странное объединение части элементов исходной системы и элементов биортогональной к ней системы, соответствующих дополнительному множеству. Тем не менее, свойства именно таких систем отвечают за наследственную полноту и другие изучаемые в диссертации свойства, что привело к необходимости разработки соответствующего технического аппарата. Новые методы привели автора диссертации к решению задачи Карлссона-Сандберга о полноте смешанных систем, составленных из сдвигов заданной функции с носителем на половине отрезка, и элементов биортогональной системы, построенной по нулям преобразования Фурье исходной функции.

Упомянутый выше вопрос Коренблюма касается спектрального синтеза в подпространствах пространства бесконечно дифференцируемых функций на интервале, инвариантных относительно оператора дифференцирования и таких, что спектр сужения оператора дифференцирования на такое подпространство представляет собой дискретное множество. В этом случае ответ на вопрос, всегда ли инвариантное подпространство является замыканием суммы его резидуальной части и подпространства, порождённого содержащимися в нём корневыми векторами, зависит от плотности точечного спектра и длины резидуального интервала. Диссертантом получены достаточные условия для спектрального синтеза, но также построен и класс примеров, когда спектрального синтеза нет.

Также в диссертации решён и ряд других задач, представляющих большой интерес. Диссертация производит впечатление большим количеством содержащихся в ней сильных результатов. Тем не менее, рассматриваемый круг вопросов при этом оказывается достаточно цельным. В диссертации удачно сочетаются результаты, представляющие самостоятельный интерес, с техникой, которая, с одной стороны, необходима для решения исследуемых задач, а с другой – имеет достаточно универсальный характер и может пригодиться где-либо и в будущем. Существенных недостатков, влияющих на научное качество диссертации, по-видимому, нет. Некоторое неудобство представляет отсутствие тематического порядка в диссертации: так, малым пространствам де Бранжа посвящены связанные между собой главы 2 и 10, которым было бы естественнее идти подряд. Тем не менее это замечание касается лишь внешнего оформления диссертации и не относится к её содержанию.

Результаты диссертации получены самим диссертантом, строго доказаны и обоснованы, являются новыми, актуальными и достоверными. Они были многократно представлены на семинаре ПОМИ по математическому анализу, на семинаре по комплексному анализу в МИАН, в нескольких университетах Франции, а также на многочисленных российских и международных конференциях. Диссертация написана качественно и оформлена должным образом. Автореферат диссертации правильно отражает её содержание. Список публикаций содержит необходимое количество публикаций по специальности 01.01.01 в журналах из перечня ВАК.

Представленная Ю. С. Беловым диссертация «Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)» является научно-квалификационной работой, результаты которой вносят значительный вклад в теорию гильбертовых пространств целых функций. Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям, представляемым на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а диссертант заслуживает присвоения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

Зам. директора отдела Международный математический институт им. Л. Эйлера ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук,

доктор физико-математических наук

Капустин Владимир Владимирович Капуст 06.06.2016

kapustin@pdmi.ras.ru

+7 812 310 71 64

ПОМИ РАН, наб. р. Фонтанки, д. 27
Санкт-Петербург, 191023

Подпись руки В.В. Капустина

УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
ПОМИ РАН ______ А.Н. Антонова
"06" 06 2016 г.