

## Отзыв

научного руководителя о диссертационной работе Салимова Р. Ф.

**«Оптимальные процедуры различения двусторонних гипотез и двустороннего доверительного оценивания в  $d$ -апостериорном подходе»,**

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»

В диссертационной работе Салимова Р.Ф. изучаются свойства процедур статистического вывода для трех традиционных проблем математической статистики – гарантийного различения гипотез, точечного и интервального оценивания с заданной надежностью. Упор делается на оптимизацию вывода с точки зрения величины функции  $d$ -апостериорного риска. Подход, основанный на подобной функции риска, использует байесовскую парадигму, т.е. предполагается, что неизвестный параметр, о котором необходимо сделать вывод, есть реализация некоторой случайной величины с заданным априорным распределением. Если потери от принятия неверного решения описываются посредством некоторой функции потерь, то  $d$ -апостериорный риск определяется как условное математическое ожидание этой функции потерь относительно сигма-алгебры, порожденной статистическим правилом. Этот подход начинался с трудов Володина И.Н. и его учеников в 80-х годах прошлого века. Замечу, что контроль подобной функции риска востребован в медицине, генетике, эпидемиологии, а также при контроле качества массовой продукции, что обуславливает актуальность исследований в этом направлении. Как факт, подтверждающий этот тезис, отмечу, что популярные в настоящее время характеристики процедур множественного тестирования  $pFDR$  и  $pFNR$  в байесовской постановке совпадают с функцией  $d$ -апостериорного риска при различении двух гипотез. За прошедшие годы был доказан ряд важных фактов, касающихся в основном задач различения односторонних гипотез и одностороннего доверительного оценивания. Замечу еще, что эти результаты можно с легкостью применить только для вероятностных моделей с монотонным отношением правдоподобия – при различении двусторонних гипотез и интервальном оценивании это свойство модели мало помогает. Поэтому здесь, главным образом, необходимо ориентироваться на асимптотические свойства процедур. Анализ этих свойств и посвящена диссертация Р.Ф. Салимова.

В первой главе диссертации находится формула для приближенного вычисления величины необходимого объема выборки при гарантийном различении двух сложных гипотез, одна из которых совпадает с некоторым конечным интервалом числовой прямой. Ранее подобная формула была установлена И.Н. Володиным и А.А. Новиковым для задачи различения двух односторонних гипотез. Случай с двусторонней нулевой гипотезой позволил немного ослабить условия, при которых эта формула справедлива. Доказательство результата потребовало больших усилий и обширных знаний со стороны Салимова Р.Ф., и заняло значительное время. Вкратце, новизна подхода к доказательству состоит в

применении теоремы Бернштейна-фон Мизеса об асимптотическом распределении апостериорной вероятности справедливости нулевой гипотезы. Кроме того, в первой главе методом стохастического моделирования проводится сравнение процедуры с фиксированным (необходимым) объемом выборки и последовательной процедуры первого перескока, останавливающейся, когда апостериорный риск байесовского правила не превосходит заданных ограничений. Показывается, что такая последовательная процедура существенно улучшает характеристики момента остановки. Конечно, здесь хотелось бы видеть доказательство конечности этого момента и его математического ожидания, тем более что при различии односторонних гипотез процедура первого перескока может иметь бесконечное среднее значение числа наблюдений. Пока этот вопрос остается открытым. Надеюсь, будущие научные интересы Салимова Р.Ф. не оставят без внимания эту проблематику. Отмечу, что для конкретных моделей можно предложить алгоритм построения гарантийной процедуры с минимальным необходимым объемом выборки, однако каждый раз такой алгоритм требует специальной проработки и не может быть описан для всех моделей сразу.

Вторая глава посвящена вопросу построения семейств двусторонних доверительных интервалов в  $d$ -апостериорном подходе. Идея таких семейств восходит к идее Неймана о связи доверительного оценивания с задачей проверки гипотез. К сожалению, в  $d$ -апостериорном подходе её реализация привела к сложной конструкции, трудно применимой на практике. Ранее, в трудах И.Н. Володина и его учеников, рассматривался случай односторонних интервалов и для этого случая были получены асимптотические аналоги наиболее точных семейств доверительных границ. В диссертации Салимова Р.Ф. решается аналогичная задача для двусторонних интервалов в рамках нормально-нормальной модели. С помощью классических методов асимптотического анализа лапласовских интегралов удалось установить скорость изменения функции, описывающей точность оптимального семейства, что, в свою очередь, позволило построить асимптотически наиболее точные аналоги такого семейства.

Наконец, третья глава посвящена задаче точечного оценивания с функцией потерь типа 1-0, при этом потери считаются нулевыми, если оценка попадает в двусторонний интервал, покрывающий истинное значение. Следует сказать, что проблема оценивания в  $d$ -апостериорном подходе не рассматривалась широко. Был указан только способ построения оценки на фиксированном числе наблюдений, для которой можно ожидать равномерной минимальности её функции  $d$ -риска. Однако возможность реализации такого способа не исследована. Кроме того, остается открытым вопрос о минимальном объеме выборки, при котором возможно достижение заданных ограничений на всю функцию  $d$ -риска. В диссертации Салимова Р.Ф. эти проблемы изучаются в ситуации, когда одномерный действительный параметр априори положителен и, более того, заведомо мал. Предлагается вариант описания такой ситуации с помощью показательного априорного распределения с «малым» средним значением (в качестве примера здесь рассматривается реальная задача аттестации пищевого продукта на наличие вредных примесей). Рассмат-

риваются два способа задания точности оценки – через абсолютное отклонение от истинного значения параметра и через относительное отклонение с заданной границей. Из результатов этой главы отмечу интересный эффект, связанный с последовательной процедурой первого перескока и обнаруженный соискателем. Оказалось, что эта процедура обязательно останавливается, когда число наблюдений достигает значения, равного минимальному объему выборки для байесовской оценки. Другой интересный факт состоит в том, что при построении оценки с минимальным необходимым объемом выборки можно ограничиться классической байесовской оценкой, а не оценкой с равномерно минимальным  $d$ -риском.

Таким образом, в диссертации Салимова Р.Ф. решен ряд важных и трудных задач теории и практики статистического вывода. Результаты диссертации опубликованы в 3 журналах, индексируемых в базе данных WoS, и в центральном российском журнале, регулярно докладывались на российских и международных конференциях. Отмечу высочайшее трудолюбие Салимова Р.Ф. и его самостоятельность при выборе способов решения поставленных задач. Оценивая работу в целом, я считаю, что представленная диссертация выполнена на высоком научном уровне, а Салимов Р.Ф. заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - «Теория вероятностей и математическая статистика».

Доцент кафедры математической статистики  
Казанского федерального университета,  
кандидат физико-математических наук



С.В. Симушкин

04.02.2021

