Отзыв официального оппонента

на диссертацию Платоновой Марии Владимировны

Аппроксимация решения задачи Коши

для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувилля

математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Диссертация Платоновой Марии Владимировны посвящена важным и интересным вопросам связанным с разработкой общих подходов к установлению связей между теорией случайных процессов и теорией уравнений в частных производных старших порядков и интегро-дифференциальных уравнений с нестандартными особенностями ядер интегральных членов. Объект, выбранный для изучения – это эволюционные уравнения с операторами, порядок α которых может быть как целым числом больше двух, так и нецелым. Эволюционные уравнения такого типа привлекают внимание исследователей, поскольку они возникают в качестве математических моделей в самых разных областях математической физики и ее приложений, таких как гидродинамика, физика плазмы, физика твердого тела, динамика эпитаксиального роста тонких пленок и других.

В диссертации развит общий подход, позволяющий строить аппроксимацию решений задачи Коши для этих уравнений в определенных функциональных классах в терминах распределений соответствующих случайных процессов.

Диссертация состоит из введения, списка обозначений, четырех глав и списка литературы, включающего 53 наименования.

В первой главе диссертантка рассматривает эволюционные уравнения, содержащие оператор Римана-Лиувилля $\mathcal{D}^\alpha$ для $\alpha > 2$, и строит вероятностные аппроксимации решения задачи Коши как для несимметричного случая

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^\alpha_+ u, \quad u(0,x) = \phi(x), \quad \text{где } c_\alpha = (-1)^{[\frac{\alpha}{2}]}, \tag{1}$$

$$(\mathcal{D}^\alpha_\pm f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x \mp t) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(\mp t)^j}{t^{1+\alpha}} dt, \quad \alpha \neq 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

так и для симметричного случая

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^\alpha u, u(0,x) = \phi(x), \quad \text{где } \mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}^\alpha_+ + \mathcal{D}^\alpha_-. \tag{3}$$

В несимметричном случае при $\alpha \in \cup_{k=1}^\infty [(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)]$ показано, что функция

$$u_\epsilon(t,x) = E[\phi * \omega^t_\epsilon(x - \xi^+_\epsilon(t))] \tag{4}$$

где $\omega^t_\epsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\hat{\omega}^t_\epsilon(p) = \exp\left(-t\int_\epsilon^\infty \left(\sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{i^k p^k y^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right),$$

аппроксимирует решение задачи (1). Здесь $\epsilon > 0$, $\xi^+_\epsilon(t) = \int_0^t\int_\epsilon^\infty x\nu(ds,dx)$, $\xi^-_\epsilon(t) = \int_0^t\int_{-\infty}^\epsilon x\nu(ds,dx)$, $\nu(ds,dx)$ пуассоновская случайная мера, задная на $[0,T] \times R$ с интенсивностью $E\nu(ds,dx) = \frac{dsdx}{|x|^{1+\alpha}}$.

Теорема 1.1. *Пусть* $\phi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(R), l \geq 0$, $u(t,x)$ *– решение задачи (1) и* $\alpha \in \cup_{k=1}^{\infty}[(4k, 4k+1)\cup(4k+1, 4k+2)]$. *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$ *такая, что* $\|u_\epsilon(t) - u(t)\|_{W_2^l(R)} \leq Ct\|\phi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(R)}\epsilon^{1-\{\alpha\}}$, *где* $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае $\alpha \in \cup_{k=1}^{\infty}[(4k-2, 4k-1)\cup(4k-1, 4k)]$. Выбрав процесс $\sigma\xi_\epsilon^+(t)$, где σ -комплексная константа и введя в рассмотрение функцию

$$u_\epsilon(t,x) = E[\phi_M^- * \omega_\epsilon^t(x - \sigma_+\xi_\epsilon^+(t)) + \phi_M^+ * \omega_\epsilon^t(x - \sigma_-\xi_\epsilon^+(t))], \qquad (5)$$

где $\phi_M = \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}\hat{\phi}(p)e^{-ipx}dp$, $\phi(x) = P_+\phi(x) + P_-\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$, $P_\pm$ – проекторы Рисса из пространства L_2 на пространство Харди $H_\pm^2$, диссертантка доказывает соответствующее утверждение – теорему 1.3.

В симметричном случае в работе вводятся в рассмотрение случайные процессы $\xi_\epsilon^+(t) = \int\int_{[0,t]\times[\epsilon,\infty)}x\nu(ds,dx)$, $\xi_\epsilon^-(t) = \int\int_{[0,t]\times(-\infty,\epsilon]}x\nu(ds,dx)$, $\xi_\epsilon(t) = \xi_\epsilon^+(t) + \xi_\epsilon^-(t)$, и функция $u_\epsilon(t,x) = E[\phi * \omega_\epsilon^t)(x - \xi_\epsilon(t))]$, где ω_ϵ^t, как и выше, определяется своим преобразованием Фурье. При этом доказана сходимость $u_\epsilon(t,x)$ к решению задачи (1) в соответствующих пространствах Харди – теоремы 1.5 и 1.6.

Вторая глава диссертации посвящена построению вероятностных аппроксимаций решения задачи для уравнений старшего целочисленного порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad u(0,x) = \phi(x), \quad \text{где } c_m = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } m = 2k+1, \\ (-1)^{k+1}, & \text{если } m = 2k\ . \end{cases} \qquad (6)$$

В этом случае показано, что развиваемый подход позволяет выделить четыре класса: 1) m=4k+2, 2) m=4k+1, 3) m=4k, 4) $m = 4k-1$. В случае 1) роль подходящего процесса играет процесс $\xi_\epsilon^{e\epsilon} = \xi_\epsilon^{e\epsilon}(t) = \int\int_{[0,t]\times[\epsilon,e\epsilon]}x\nu(ds,dx)$, $R_\epsilon = R\backslash(-\epsilon,\epsilon)$ и вероятностная аппроксимация имеет вид $u_\epsilon(t,x) = E[(\phi * \omega_\epsilon^t)(x - \xi_\epsilon^{e\epsilon}(t))]$, где $\omega_\epsilon^t(x)$ задана своим преобразованием Фурье

$$\hat{\omega}_\epsilon^t(p) = \exp\left(-t\int_\epsilon^\infty\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{i^kp^ky^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+m}}\right).$$

В этой главе доказаны утверждения следующего типа.

Теорема 2.1. *Пусть* $\phi \in W_2^{l+m+1}(R), l \geq 0, m = 4k+2$, *и* $u_\epsilon(t,x)$ *имеет вид* $u_\epsilon(t,x) = E[(\phi * \omega_\epsilon^t)(x - \xi_\epsilon^{e\epsilon}(t))]$,. *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$ *такая, что* $\|u_\epsilon(t) - u(t)\|_{W_2^l(R)} \leq Ct\|\phi\|_{W_2^{l+m+1}(R)}\epsilon$.

Аналогичные утверждения получены и в остальных случаях 2)–4) – теоремы 2.3, 2.5, 2.7.

Третья глава диссертации посвящена задаче Коши для уравнений целочисленного порядка больше двух, содержащих члены меньшего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \sum_{k=1}^{5}\frac{a_k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}, u(0,x) = \phi(x), \qquad (7)$$

и показано, что ее решение допускает аппроксимацию с помощью семейства функций вида

$$u_\epsilon(t,x) = E[(\phi_M * \omega_\epsilon^t)(x - \sum_{k=0}^{5}\beta_k\xi_\epsilon^k(t))]. \qquad (8)$$

Здесь процесс $\xi_\epsilon^k(t)$ имеет вид $\xi_\epsilon^k(t) = \int\int_{[0,t]\times[\epsilon,e\epsilon]}x^{k+1}\nu(dt,dx)$, коэффициенты β_k зависят только от коэффициентов a_k, а функция ω_ϵ^t определяется своим преобразованием Фурье $\hat{\omega}_\epsilon^t = exp\left(-t\int_\epsilon^{e\epsilon}G(p,y)\frac{dy}{y^7}\right)$, где $G(p,y)$ – явно заданная функция.

Последняя глава диссертации посвящена более подробному исследованию поведения распределений случайных величин $\xi_\epsilon = \int_{R_\epsilon}x\nu(dx)$, ассоциированных со случайными процессами, которые фигурировали в предыдущих главах. Здесь $\nu(dx)$ – пуассоновская мера с интенсивностью $E\nu(dx) = \Lambda(dx)$. При этом стандартное для теории вероятностей предположение $\int_R (x^2 \wedge 1)\Lambda(dx) < \infty$ заменено условиями $\int_R (x^4 \wedge 1)\Lambda(dx) < \infty$ или $\int_R (x^4 \wedge 1)\Lambda(dx) = \infty$, но $\int_R (x^2 \wedge 1)\Lambda(dx) < \infty$. Наряду с этим в работе рассмотрена последовательность серий $\xi_{11}; \xi_{21}, \xi_{22}; \dots; \xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ независимых в каждой серии одинаково распределенных симметричных случайных величин ξ_{nk}, функции распределения F_n которых удовлетворяют некоторым дополнительным условиям и показано, что, после некоторой регуляризации, последовательность распределений случайных величин $\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ сходится при $n \to \infty$ к знакопеременной мере Q.

Диссертационная работа Платоновой Марии Владимированы представляет собой серьезное научное исследование, посвященное развитию общего подхода к построению вероятностных аппроксимаций решения задачи Коши для уравнений старшего порядка. Результаты диссертации оригинальны и строго доказаны. Диссертация написана четко и аккуратно.

К числу замечаний следует отнести некоторые стилистические шероховатости изложения и несколько мелких опечаток.

Приведенные замечания не влияют на окончательную высокую положительную оценку рассматриваемой диссертационной работы. В работе получен ряд новых интересных результатов, которые опубликованы в 4 статьях в журналах, включенных в список ВАК, и докладывались на ряде международных конференций. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут послужить основой развития общей теории построения вероятностных аппроксимаций решения задачи Коши для параболических уравнений старшего порядка с переменными коэффициентами, а также соответствующих нелинейных уравнений, важных для приложений. Полученные в диссертации результаты могут быть также использованы для чтения соответствующих специальных курсов в Московском и Санкт-Петербургском университетах.

Диссертационное исследование Платоновой М. В. "Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувилля математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов "соответствует критериям, изложенным в п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а его автор Платонова Мария Владимировна безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Доктор физико-математических наук,

профессор Белопольская Я.И.

Подпись проф. Белопольской заверяю 06.04.2017

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» (СПбГАСУ)
190005, Россия, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 4.
Телефон (812)316-49-30
Адрес электронной почты matem@spbgasu.ru