

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский
государственный университет»
профессор



С. В. Аплонов

25 сентября 2017 года

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу Пронько Андрея Георгиевича «Корреляционные функции вершинных моделей с фиксированными граничными условиями и их приложения к задачам комбинаторики» представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Диссертация А. Г. Пронько посвящена решению математической задачи точного вычисления корреляционных функций вершинных моделей статистической механики, заданных на плоских решётках конечного размера с фиксированными граничными условиями. Представленное исследование носит теоретический характер и во многом обусловлено современными математическими задачами лежащими на стыке статистической физики, комбинаторики и теории квантовых интегрируемых систем. Решение этих задач в существенной степени использует методы математической физики, а сами задачи во многом стимулируют развитие и совершенствование этих методов.

Как указано автором во введении к диссертации, существующие подходы к вычислению корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей, к которым принадлежат и вершинные модели статистической механики, в существенной степени, помимо собственно интегрируемости (уравнения Янга-Бакстера), используют трансляционную инвариантность систем. Это действительно имеет место в случае периодических (или более общих твистованных, совместных с интегрируемостью) граничных условий, в случае систем в конечном объёме, или пренебрежение эффектами от границ, в случае систем в бесконечном объёме. Такие предположения являются стандартными при вычислении корреляционных функций, например, спиновых цепочек Гейзенберга. В случае же вершинных моделей на конечных решётках с

фиксированными граничными условиями трансляционная инвариантность отсутствует по постановке задачи. По этой причине вычисление корреляционных функций для таких моделей представляет из себя сложную математическую задачу, и требует развития новых методов, приспособленных для получения замкнутых выражений.

Основным достижением диссертации является именно решение указанной задачи. А именно, разработан новый подход, основанный на рекуррентных соотношениях, которые связывают корреляционные функции со статистическими суммами моделей на решётках меньших размеров. Это позволило автору получить существенно новые результаты, в частности для нелокальных корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, для которых выведены представления в терминах кратных контурных интегралов. На основе этих представлений решена задача об арктической кривой этой модели, которая, при специальном значении параметров также описывает предельную форму матриц чередующихся знаков.

Кроме того, при исследовании проблемы вычисления корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки были также решён ряд часто математических задач связанных с комбинаторикой. В частности, была установлена тесная связь перечислений матриц чередующихся знаков с классическими полиномами из схемы Аски-Вильсона. Также уделено внимание пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями, при которых эта модель тесно связана с плоскими разбиениями (трёхмерными диаграммами Юнга) в ящике.

Результаты диссертации полно и своевременно опубликованы в ведущих российских (5 публикаций) и зарубежных (16 публикаций) журналах. Диссертация изложена на 260 страницах и структурно состоит из семи глав.

В Главе 1 выведены различные представления для статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в терминах определителей Фредгольма. Одно из этих представлений, как было обнаружено в работах других авторов, оказалось важным для установления связей с перечислениями матриц чередующихся знаков в задаче о нисходящих плоских разбиениях, а также в задачах вычисления компонент векторов основных состояний спиновых цепочек старшего спина с твистованными граничными условиями.

В Главе 2 на основе квантового метода обратной задачи развит подход к вычислению корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. В основе этого подхода лежат коммутационные соотношения алгебры Янга-Бакстера и концепция «двухщельной модели», которые позволяют выразить граничные корреляционные функции в терминах статистической суммы на решётках

меньшего размера. Вычислены одно- и двухточечные граничные корреляционные функции и показано, что для однородной модели двухточечные функции выражаются в терминах одноточечных.

В Главе 3 указаны свойства формулы Изергина-Корепина для статистической суммы однородной шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, которые позволяют установить связь перечислений матриц чередующихся знаков с классическими полиномами из таблицы Аски-Вильсона. А именно, 1-, 2-, и 3-перечисления связаны с непрерывными полиномами Хана, полиномами Мейкснера-Поллачка, и дуальными непрерывными полиномами Хана, соответственно. Обнаруженная связь позволила дать простые доказательства известных результатов об детальных 1- и 2-перечислениях, а также получить неизвестное ранее явное выражение для детальных 3-перечислений.

В Главе 4 предложенный подход к вычислению корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки применён к вычислению нелокальных корреляционных функций. Получены различные представления для вероятности образования пустоты, главным из которых является представление в терминах кратного контурного интеграла. Аналогичные формулы получены для более общей корреляционной функции, – вероятности конфигурации ряда. Эта функция может использоваться для вычисления различных корреляционных функций модели, и, в частности, вероятности образования пустоты.

В Главе 5 полученные представления для вероятности образования пустоты использованы для вывода арктической кривой шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. Вывод основан на известном термодинамическом пределе для вероятности образования пустоты и предложенном механизме воспроизведения этого предела из представления в терминах кратного контурного интеграла. В основе лежит гипотеза «конденсации», а именно, что арктическая кривая соответствует условию на параметры интеграла, при выполнении которого почти все решения системы уравнений седловой точки равны одному, известному, значению. Это позволяет вывести уравнение для арктической кривой в параметрической форме, для всех значениях параметров модели, при которых эта кривая существует. Также обсуждаются частные случаи этой кривой в приложении к задаче о предельной форме матриц чередующихся знаков.

В Главе 6 изучена вероятность образования пустоты шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в точке свободных фермионов. Получены различные представления для вероятности образования пустоты, а именно, в терминах: ганкелевых определителей, определителей Фредгольма, решения системы дифференциально-разностных уравнений типа уравнений Тоды, тау-функции шестого уравнения Пенлеве. Вычислена

свободная энергия шестивершинной модели в точке свободных фермионов на L-образной области. Установлено, что арктическая кривая является кривой фазового перехода третьего рода возникающего при деформациях ацтекских алмазиков путем вырезания прямоугольной области у угла алмазика. Обнаруженный фазовый переход тесно связан с фазовыми переходами Дугласа-Казакова и Гросса-Виттена-Вады из теории матричных моделей.

В Главе 7 рассмотрена пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями, такими, что конфигурации модели находятся в взаимно-однозначном соответствии с плоскими разбиениями (трехмерными диаграммами Юнга) ящичке, которые также эквивалентны замощениям ромбами нерегулярного шестиугольника. Вычислена одноточечная корреляционная функция пятивершинной модели в точке свободных фермионов, в однородном случае и в неоднородном, при котором такая модель описывает взвешенные перечисления плоских разбиений в ящичке. Также вычислен однородный предел детерминантной формулы для статистической суммы пятивершинной модели с граничными условиями типа «скалярного произведения» и показано, что эта величина является тау-функцией шестого уравнения Пенлеве для специальных значений параметров, соответствующих классическим решениям.

Диссертация написана простым, понятным, но строгим математическим языком. Согласно публикациям автора в списке литературы, материал в основном расположен в хронологическом порядке, что позволяет легко судить о логике развития исследования и его основных направлениях. Внутри глав прослеживается следование правилу представления результатов по убывающей значимости и возрастающей сложности. Технически громоздкие доказательства отделены от изложения основных результатов и ключевых рассуждений.

К недостаткам диссертации можно отнести несколько затянутое изложение в третьей, шестой и седьмой главах, обусловленное местами необходимостью приведением деталей вычислений. Данное замечание, однако, носит чисто стилистический характер, и не коим образом не влияет на сугубо положительную оценку работы.

Результаты диссертации могут быть использованы во многих научных центрах, в том числе, математических и физических факультетах университетов (СПбГУ, МГУ, ВШЭ и др.), в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации РАН. Материал диссертации может быть также использован при подготовке специальных курсов и семинаров.

Основные результаты диссертации своевременно и полностью опубликованы. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Исследование полностью соответствует специальности 01.01.03 – математическая физика.

В силу вышеизложенного, диссертация Пронько Андрея Георгиевича «Корреляционные функции вершинных моделей с фиксированными граничными условиями и их приложения к задачам комбинаторики» полностью соответствует требованиям Положения ВАК «О присуждении учёных степеней», а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Отзыв подготовлен профессором кафедры высшей математики и математической физики физического факультета ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», доктором физико-математических наук Федотовым Александром Александровичем (эл. почта: a.fedotov@spbu.ru).

Отзыв заслушан, обсуждён и единогласно утверждён на заседании кафедры высшей математики и математической физики физического факультета ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» 22 сентября 2017 года, протокол №2.

И. о. заведующего кафедрой
профессор
доктор физико-математических наук

А. А. Федотов

Сведения о ведущей организации:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

Университетская наб., д. 7–9, Санкт-Петербург, 199034

эл. почта: spbu@spbu.ru

веб-сайт: <http://spbu.ru>

Тел: +7 (812) 328–20–00