О Т З Ы В

о диссертации Белова Юрия Сергеевича «**Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)**», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01. 01. 01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена исследованиям аппроксимацинных свойств различных систем из гильбертовых пространств целых функций на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, выделяемых очень малым числом ограничений на них относительно фиксированной прямой на $\mathbb{C}$, в качестве которой всегда может рассматриваться *вещественная ось* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Без явного описания скалярного произведения и/или нормы эти, сейчас уже классические, *гильбертовы пространства Луи де Бранжа* $\mathcal{H}$ целых функций полностью определяют следующие три аксиомы:

(Ax1) для каждого $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ при $F \in \mathcal{H}$ и $F(w) = 0$ функция $z \mapsto \frac{F(z)(z-\bar{w})}{z-w}$, $z \in \mathbb{C}$, принадлежит $\mathcal{H}$ с той же нормой, что и F;

(Ax2) для каждого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функционал $\delta_z(F) := F(z)$, $F \in \mathcal{H}$, непрерывен;

(Ax3) если $F \in \mathcal{H}$, то функция $F^*\colon z \mapsto \overline{F(\bar{z})}$ из $\mathcal{H}$ с той же нормой, что и F.

В диссертации основной и чаще всего используемой весьма плодотворной формой определения пространств Луи де Бранжа выбран подход через мероморфные в $\mathbb{C}$ функции из специального класса, а именно:

$$T = \{t_n\} \quad \text{— последовательность на } \mathbb{R}, \text{ для которой } \lim_{|n|\to+\infty} |t_n| = +\infty, \tag{1T}$$

$$\{\mu_n\} \quad \text{— последовательность чисел } \mu_n > 0, \text{ для которых } \sum_n \frac{\mu_n}{1+t_n^2} < +\infty, \tag{1m}$$

$$\mathcal{H}(T,\mu) := \left\{ f : f(z) = \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \quad \|f\| := \sqrt{\sum_n |a_n|^2} < +\infty, \right\}, \tag{1H}$$

откуда для канонического произведения Вейерштрасса A с простыми нулями в точках $\{t_n\}$, вещественного на $\mathbb{R}$, получаем гильбертово пространство $A\mathcal{H}(T,\mu)$ - целых функций, удовлетворяющее аксиомам (Ax1)–(Ax3). Более того, любое пространство Луи де Бранжа $\mathcal{H}$ можно определить таким образом (ниже зачастую функцию A не пишем). В таком контексте мера $\mu := \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ — *мера Кларка,* полностью определяющая $\mathcal{H}$. Вводятся и исследуются в диссертации и более общие, нежели $A\mathcal{H}(T,\mu)$, пространства целых функций класса $\mathfrak{R}$, в которых допускаются не обязательно вещественные меры μ и/или ослабление аксиомы (Ax1) до аксиомы деления, отказ от (Ax3), но требование существования базиса Рисса из нормированных воспроизводящих ядер.

Другой тип рассматриваемых в диссертации пространств, выходящих за рамки пространств Луи де Бранжа, — гильбертовы пространства целых функций, задаваемые нормой-интегралом по всей плоскости $\mathbb{C}$ с некоторой весовой функцией. Введение же «*малых*» пространств Луи де Бранжа вида $A\mathcal{H}(T,\mu)$, которые выделены условием лакунарности

$$\inf_n \frac{t_{n+1}}{t_n} > 1, \tag{2}$$

хотя и не охватывающих классический случай пространства Пэли – Винера $\mathcal{P}W_\pi$, соответствующего варианту $T \overset{(1T)}{=} \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с равенством $= 1$ вместо > 1 в (2), позволило в полном объеме и форме, близкой к завершенной, если уже не таковой, решить ряд актуальных задач.

Здесь мы не останавливаемся на истоках, истории, актуальности, взаимосвязях с различными разделами математики и физики собственно тематики диссертации. Эти аспекты весьма детально отражены как во введении диссертации, так и в автореферате, во всяком случае в отношении последних 50–60 лет с особым упором на недавние работы, результаты и постановки задач 2000-х гг., принадлежащие представителям отечественной, американской, испанской, канадской, норвежской, французской, шведской, японской и др. математических школ теории функций комплексной переменной. Перейдем непосредственно к обзору содержания диссертации с обсуждением новизны и значимости исследования, а также определенной завершенности ряда результатов.

Во **введении (гл. 1)**, наряду с подробным обзором результатов по исследуемой тематике, приведены основные определения и ключевые сведения по теории пространств Луи де Бранжа, после чего сформулированы и обсуждены все основные результаты диссертации.

В **главе 2** рассматриваются упомянутые выше малые пространства де Бранжа с условием лакунарности (2). В основе их исследования — теорема 2.1.1 (1.2.2 во введении), полностью описывающая меры Карлесона ν для таких пространств. Это описание сочетает в себе локальную (условие (2.1.1)) и глобальную составляющую (условие (2.1.2)). В частных, но содержательных случаях описание можно свести к одному условию (следствия 2.2.1 и 2.2.2). В качестве применения для малых пространств де Бранжа дано геометрическое описание бесселевых последовательностей (теорема 2.2.3, во введении 1.2.4). Опираясь на доказанный в этой главе критерий полной интерполяционной последовательности для всех пространств де Бранжа (теорема 2.3.1, во введении 1.2.7) досконально исследовано новое свойство локализации полной интерполяционной последовательности Λ около последовательности T из (1T) для малых пространств де Бранжа с некоторым ограничением на последовательность $\{\mu_n\}$ из (1m), или меру Кларка μ. Для такого по-прежнему широкого класса пространств приведено исчерпывающее геометрическое описание полных интерполяционных последовательностей Λ, или базисов Рисса с показателями из Λ, с использованием нового понятия возмущения (вариации) последовательности Λ в смысле определенной близости к последовательности T и дефекта этого возмущения (теоремы 2.3.11–2.3.13, во введении теоремы 1.2.9–1.2.11). Такие точные геометрические описания нечасто удается получить в рамках гильбертовых пространств целых функций.

В **главе 3** изучаются системы, биортогональные к полным минимальным системам из воспроизводящих ядер в пространствах $\mathcal{H}(T,\mu)$ и/или в упомянутых выше пространствах класса $\mathfrak{R}$, а также взаимосвязи рассматриваемых задач с классическим свойством (не)полноты многочленов в пространствах функций с ограничениями на их рост на последовательности T. В теореме 3.1.1 (теорема 1.3.3 во введении) установлено, что *при условии* $\sum_n \mu_n \overset{(1m)}{<} \infty$ *в* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *найдется полная минимальная система из воспроизводящих ядер, биортогональная система к которой неполна.* Напротив, *если* $\sum_n \mu_n \overset{(1m)}{=} \infty$ *и, в дополнение,*

$$\inf_n \mu_n (1+|t_n|)^N > 0 \quad \textit{для некоторого } N, \tag{3}$$

то предыдущее заключение неверно (часть теоремы 3.1.2, или теоремы 1.3.4 из введения). Более того, *уже одно лишь условие* (3) *само по себе обеспечивает конечную коразмерность биортогональной к полной минимальной системе из воспроизводящих ядер* (теорема 3.1.2, или теорема 1.3.4). В то же время условие (3) не лишнее, как показывает пример 3.1.4 (1.3.5): *пространство де Бранжа вида* $\mathcal{H}(\mathbb{Z},\mu)$, *для которого* $\sum_n \mu_n = \infty$, *с полной минимальной системой из воспроизводящих ядер в нем, но с не полной биортогональной системой существует.* В главе 3 вводится и новое полезное понятие *размера ортогонального дополнения к биортогональной системе* (определение 3.2.1), сопровождающееся исследованием его связей с коразмерностью биортогональной системы (следствие 3.2.3, утверждение 3.2.4, теорема 3.2.5(1.3.6)). Пример 3.2.6 дополнительно иллюстрирует ситуации конечной коразмерности.

В **главе 4** основной объект исследования — сильные базисы Маркушевича, которые можно определить через свойство наследственной полноты в гильбертовом пространстве: *для любого разбиения множества индексов* $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ *полной минимальной системы* $\{x_n\}_{n\in N}$ *с биортогональной системой с биортогональной системой* $\{\tilde{x}_n\}_{n\in N}$ *выполнено* $\overline{\operatorname{Span}}\{x_n : n \in N_1\} = \{\tilde{x}_n : n \in N_2\}^\perp$. Применительно к пространствам де Бранжа в диссертации рассматривается свойство наследственной полноты для (полных минимальных) систем воспроизводящих ядер. Результат здесь яркий (теорема 4.1.1(1.4.2)), поскольку законченный и очень просто формулируется: *пространство де Бранжа* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *обладает свойством наследственной полноты, если и только если* $\sum_n \mu_n < \infty$ *или выполнено условие лакунарности* (2) *вместе с*

$$\sum_{|t_k|\le|t_n|} \mu_k + t_n^2 \sum_{|t_k|>|t_n|} \frac{\mu_k}{t_k^2} \le C\mu_n \quad \textit{для некоторого числа } C>0 \textit{ при всех } n. \tag{4}$$

В то же время доказательство весьма непростое, многоэтапное и потребовало оригинальных подходов и методов. В этой же главе 4 установлены тонкие результаты о дефекте базисов Маркушевича, показывающем степень «удаленности» их от сильного базиса Маркушевича (теоремы 4.6.2(1.4.3) и 4.6.3(1.4.4)). Охвачены самые разнообразные ситуации конечного и бесконечного дефекта. Они потребовали сложных явных конструкций. Отдельно разобрана наследственная полнота систем экспоненциальных функций для пространства Пэли – Винера $\mathcal{P}W_\pi$. Это теорема 4.7.5(1.4.5) об одномерности ортогонального дополнения в $\mathcal{P}W_\pi$ к смешанной системе и теорема 4.7.6(1.4.6) о полноте смешанной системы при ненулевой верхней плотности последовательности показателей системы воспроизводящих ядер.

Сведением к полноте смешанной системы в **главе 5** решена именная проблема Карлсона – Сандберга (теорема 5.0.8(1.5.1) и утверждение 5.0.9): *Для функции $f \in L^2(0,1)$ с выпуклой оболочкой носителя $[0,a]$, где $0 < a < 1$, и дивизором $\Lambda = \{(\lambda_k, n_k)\}$ ее преобразования Фурье система $\{f(x-t)\}_{0\le t\le 1-a} \cup \{x^s e^{i\lambda_k x}\}_{(\lambda_k,n_k)\in-\overline{\Lambda},\,0\le s<n_k}$ полна в $L^2(0,1)$.* Доказательство использует мощную технику, основанную на исследованиях и результатах А. Полторацкого, Н. Макарова, М. Митковского и восходящую к Полиа – Берлингу – Мальявену.

В **главе 6** показано, что *классическое условие Макенхаупта для порождающей целой функции G экспоненциального типа π полной минимальной экспоненциальной системы из $L^2(-\pi,\pi)$ означает существование линейного метода суммирования для этой экспоненциальной системы* (теорема 6.0.10(1.6.3)). Более того, такой метод суммирования строится в явном виде (теорема 6.1.5), а сама экспоненциальная система оказывается наследственно полной. Последнее, составляющее содержание результата Г. Губреева и А. Тарасенко 2010 г., новым методом доказано в диссертации (утверждение 6.2.1 и его доказательство).

В **главе 7** исследуется свойство локализации нулей для преобразования Гильберта (Коши) и структура множеств, «*притягивающих*» их нули. Показано, что это свойство соответствует специальной структуре гамильтониана канонической системы, ассоциированной с пространством (теорема 1.7.14). Таким образом, установлена биекция класса пространств де Бранжа с локализацией на класс гамильтонианов, состоящих из неделимых интервалов, сгущающихся влево. Случай конечного число аттракторов (множеств, притягивающих нули) исследован в деталях.

В **главе 8** вновь продемонстрирована определенная универсальность методов, основанных на (не)полноте смешанных систем в гильбертовых пространствах. Теорема 8.1.1(1.8.1), доказательство которой использует эти методы, решает одну проблему спектрального синтеза для оператора дифференцирования D в пространстве $C^\infty(a,b)$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$, поставленную А. Алеманом и Б. Коренблюмом в 2008 г. и рассмотренной ими в частном случае. При дискретности спектра $\sigma\big(D\,\big|_L\big)$ сужения оператора дифференцирования D на инвариантное подпространство L и при компактности в (a,b) так называемого *резидуального интервала* I_{res}, сопоставляемого по Алеману – Коренблюму инвариантному подпространству L, *строгое неравенство*

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#\big\{\lambda\in i\sigma(D\big|_L)\colon \operatorname{Re}\lambda\in[x,x+r)\big\}}{r} < \frac{\text{длина } I_{\mathrm{res}}}{2\pi} \tag{5}$$

влечет за собой *совпадение инвариантного подпространства L с замыканием суммы двух подпространств:* резидуального подпространства, состоящего из функций, все производные которых зануляются на I_{res} и линейной оболочки собственных и присоединенных векторов — экспоненциальных мономов с показателями из $\sigma\big(D\,\big|_L\big)$ с учетом кратности (теорема 8.3.1(1.8.2)). В случае равенства в (5) это уже, вообще говоря, неверно (теорема 8.1.2(1.8.2)). Наконец, когда интервал I_{res} не компактен, то вновь картина та же (теорема 8.4.1(1.8.3)). Таким образом, на одну проблему Алемана – Коренблюма о спектральном синтезе дан исчерпывающий ответ.

В **главе 9** методами главы 3 установлено, что *из полноты и минимальности системы из воспроизводящих ядер* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *с порождающей целой функцией* F *в пространстве Фока следует и полнота системы* $\left\{\frac{F(z)}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ (теорема 9.1.1(1.9.3,1.9.4)). Теорема 9.2.1(1.9.2) из этой же главы 9 дает полное описание пространств де Бранжа, являющихся пространствами фоковского типа: *это именно те пространства де Бранжа, для которых выполнено условие лакунарности* (2) *вместе с* (4).

Глава 10 посвящена вещественным бесселевым последовательностям в пространствах де Бранжа. Ситуация для бесселевых последовательностей здесь оказалась значительно более деликатной по сравнению со случаем пространства Пэли – Винера $\mathcal{P}W_\pi$. Поэтому результаты этой главы сосредоточены только на необходимых условиях для бесселевых последовательностей. Один из характерных результатов (следствие 1.10.4 теоремы 10.0.2(1.10.3)): *если для последовательности* $T = \{t_n\}$ *из* (1T)

$$\frac{1}{C}|t_n - t_{n-1}| \le |t_{n+1} - t_n| \le C|t_n - t_{n-1}| \quad \text{для некоторого числа } C > 0 \text{ при всех } n,$$

то любая бесселева последовательность Λ *из пространства де Бранжа* $\mathcal{H}(Y,\mu)$ *удовлетворяет условию* $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \#\{\Lambda \cap [t_n, t_{n+1}]\} < \infty$.

Наконец, в заключительной **главе 11** показано, что *всякая неполная экспоненциальная система в* $L^2(a,b)$ *может быть дополнена до полной минимальной экспоненциальной системы добавлением экспоненциальных функций с чисто мнимыми показателями* (теорема 11.0.6(1.11.1)). Точно такой же результат установлен для неполных систем воспроизводящих ядер для произвольных пространств де Бранжа (теорема 11.0.9(1.11.2)). Очень неожиданные в своей общности новые результаты в казалось бы давно исследованной области. Успех здесь достигнут именно на пути применений общей теории пространств де Бранжа. В заключении намечены дальнейшие перспективы исследований и поставлены открытые на момент оформления диссертации вопросы 11.0.11–11.0.18.

Таким образом, все основные результаты диссертации — новые, часто имеют достаточно завершенный характер, усиливают и обобщают как классические, так и современные результаты, охватывают серию новых проблем и открывают перспективы для дальнейших исследований. Доказано и решено несколько «именных» гипотез и проблем. Доказательства потребовали как оригинальных технических приемов, так и существенного развития предшествующих методов, использовавшихся ранее в рассматриваемых в диссертации направлениях исследований. Все утверждения строго доказаны и там, где это необходимо, сопровождаются конкретными наглядными реализациями полученных общих результатов в виде частных, но новых случаев, раскрывающих существенность условий, преимущества по сравнению с результатами других авторов. В частности, приведено несколько примеров, иллюстрирующих отдельные результаты.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации и доступно разъясняет идейную сторону исследований.

Основные результаты автора опубликованы в 16 работах в ведущих рецензируемых научных российских и зарубежных журналах и изданиях, 14 из которых входят в рекомендованный список ВАК.

Имеются замечания. Это некоторое количество описок и опечаток, хотя в целом изложение очень аккуратное. Полезно было бы отметить связанные с тематикой диссертации более ранние статьи и труды Н. Левинсона, Б. Я. Левина, А. Ф. Леонтьева, а из относительно недавних — А. М. Седлецкого и др. Шкалу (i)–(vi) свойств систем векторов $\{x_n\}$ (стр. 28 диссертации и стр. 17 автореферата) в гильбертовом пространстве уместно было бы, на наш взгляд, расположить максимально близко к началу изложения. Добавление к последовательности нулей $\mathcal{Z}_f$ целой функции f последовательности T с сохранением прежнего обозначения $\mathcal{Z}_f$ (стр. 30 и гл. 7 диссертации и стр. 19 автореферата) усложняет восприятие. Отмеченные погрешности и недочеты, частью субъективного характера, столь несущественны, что они никоим образом не могут снизить значимость, актуальность, ценность и глубокую содержательность результатов автора диссертации.

Предложенная диссертация Ю. С. Белова соответствует всем предписаниям «Положения о порядке присуждения ученых степеней».

Считаю, что диссертация Белова Юрия Сергеевича «**Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)**» вполне удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по физико-математическим наукам, а её автор — Белов Юрий Сергеевич — безусловно заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01. 01. 01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

1 июня 2016 года

Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей алгебры и геометрии БашГУ — Б. Н. Хабибуллин

Личную подпись
Б.Н. Хабибуллина
заверяю
Начальник отдела кадров Башкирского государственного университета
Л.А. Койда
«01» июня 2016 г.