Отзыв официального оппонента
на диссертацию Меркулова Алексея Сергеевича
“Некоторые типы сингулярных интегральных операторов на плоскости”,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Представленная к защите работа Меркулова посвящена важным и трудным вопросам теории сингулярных интегралов. В обширном спектре исследований сингулярных интегралов автор избрал направление заложенное в семидесятых годах двадцатого века Кальдероном и получившее мощное развитие в работах многих математиков том числе Койфмана, Мейера, Стейна. Полученные ими результаты оказались востребованными во многих отраслях математики, а идеи и методы лежащие в их основе существенно обогатили математику. Превратившись в мощный, активно работающий математический аппарат, теория Кальдерона стала развиваться в ширь, подстраиваясь под потребности разнообразных задач.

Диссертация представляет собой развитие теории операторов Калдерона преломленное в свете использования сингулярных интегралов в других задачах. Автор только упоминает об их существовании, но приведенные примеры показывают, для каких задач могут быть полезными подобные конструкции.

Ценность диссертационной работы во многом определяется тем, каким образом автор находит выход из трудных ситуаций, используя глубокие и нетривиальные связи между рассматриваемыми в доказательствах структурами. Такие действия возможны только при глубоком понимании исследуемого материала. Это позволило автору изложить больше количество содержательных материалов в небольшом тексте. Объяснения того, как эти соотношения были обнаружены, формально, не входят в обязанности автора, но оставляют хороший задел для дальнейшей работы в этом направлении. Актуальность темы диссертационной работы не вызывает сомнения.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

Целью диссертации являются оценки для сингулярных интегральных операторов заданных в весовых L^p-пространствах функций, заданных в комплексной плоскости. Такие задачи для вещественных функций в R^n досконально изучены, но для комплексной переменной эти вопросы систематически не рассматривались. Техническую базу работы, как и в вещественном, представляют оценки соответствующих максимальных операторов.

Основной технический прием (внешне рискованный, но как показывает автор риск здесь оправдан и приносит желаемые плоды), состоит в том, что утверждение об оценке последовательности операторов "переводится"в задачу оценки более сложного — "производящего"оператора. Это оказывается возможным благодаря наличию в конструкции параметров, правильный подбор которых, позволяет рассматривать ряд как геометрическую прогрессию и довести дело до оценок производящего оператора. Эти оценки в свою очередь позволяют применить стандартные оценки для коэффициентов производящего оператора. Такой вариант доказательства проходит благодаря скрупулезным оценкам коэффициентов возникающих рядов и точном подборе участвующих в работе параметров. Разумеется, такой способ оценивания возможен только для линейных операторов, а максимальные операторы таковыми не являются. Чтобы обойти эту трудность автор замечает, что максимальный оператор всегда можно оценить через "модуль"соответствующего линейного оператора, у которого интегрирование происходит по плоскости с вырезаны кругом, правда, радиус этого круга является функцией особой точки,но это обстоятельство не является критичным, т.к. конечные оценки оказываются не зависящими от радиуса круга.

В первой главе рассмотрен точный аналог максимального оператора Кальдерона

$$T_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \int_{|\zeta - z|>\varepsilon} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

здесь $f \in L^p(\mathbf{C}, \omega)$, σ – плоская мера Лебега. Существованым требованием к функции V является ее принадлежность к классу Липшеца

$$|V(\zeta) - V(z)| < w|\zeta - z|.$$

Главный результат главы – теорема 1, утверждает, что оператор T_n^* ограничен в пространствах $L^p(\mathbf{C}, \omega), 1 < p < \infty$. При условии, что вес удовлетворяет условию Макенхаупта A_p.

В соответствии с общей схемой доказательств, автор подменяет максимальный оператор аппроксимационным сингулярным оператором

$$T_{n,\varepsilon(z),\delta} f(z) = \int_{|\zeta - z|>\varepsilon(z)} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

Далее он замечает, что оценки этих операторов можно получить из оценки производящего оператора

$$L_{\lambda,\varepsilon(z),\delta} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \lambda^n T_{n,\varepsilon(z),\delta} f(z)$$

здесь $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < \frac{1}{w}$. Стандартные тождественные преобразования,основанные на том, что малость параметра λ гарантирует сходимость возникающих геометрических прогрессий позволяют записать оператор в виде

$$L_{\lambda,\varepsilon(z),\delta} f(z) = \int_{|\zeta - z|>\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta - z - \lambda(V(\zeta) - V(z)))^2}$$

Дальнейшие оценки оказываются возможными благодаря тому, что отображение $A(z) = z - \lambda V(z)$ оказывается обратимым. Это позволяет сделать замену переменной, приводящую оцениваемое выражению к виду стандартного сингулярного интеграла. Важно, что наложенное на функцию V условие Липшеца позволяет получит простую оценку для якобиана отображения. В итоге нужная оценка оператора $L_{\lambda,\varepsilon(z),\delta}$ получается из классических неравенств, Кальдерона, Койфмана, Мейры. После этого автор возвращается к оценке оператора $T_{n,\varepsilon(z),\delta}$, основанной на том, что функции $T_{n,\varepsilon(z),\delta} f(z)$ являются коэффициентами Тейлора в разложении аналитической оператор-функции $L_{\lambda,\varepsilon(z),\delta}$ по параметру λ. Отсюда легко получить оценку требуемого вида для операторов $T_{n,\varepsilon(z),\delta}$. Причем оценка оказывается не зависящей от параметра $\varepsilon(z)$. Это обстоятельство позволяет перенести полученную оценку на максимальный оператор и завершить доказательство теоремы 1.

Во второй главе аналогичная оценка доказана для операторов вида

$$P_F^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|\zeta - z|>\varepsilon} F\left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}\right) \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right|$$

где $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – произвольная целая функция. Основной результат этой главы – теорема 2 утверждает, что оператор является ограниченным в пространстве $L^p(\mathbf{C}, \omega)$, $\omega \in A_p$

$$||P_F^*|| \le const \max_{|z|=2w} |F(z)|$$

Как и в первой главе в начале оценка доказывается для аппроксимационного оператора

$$P_{F,\varepsilon(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,F,\varepsilon(z)}, \quad P_{n,F,\varepsilon(z)} f(z) = a_n \int_{|\zeta - z|>\varepsilon} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}\right)^n \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

Далее автор приводит подробное доказательство для $F(z) = \exp(z)$ и поясняет схему проведения доказательства в общем случае. Существо дела сводится к тому, что операторы $P_{n,F,\varepsilon(z)}$ оцениваются по теореме 1, суммирование этих оценок дает оценок дает оценку для $P_{F,\varepsilon(z)}$. Все оценки не зависят от параметра $\varepsilon(z)$ и поэтому переносятся на максимальный оператор.

Третья глава имеет дело с некоторыми аналогами коммутаторов Кальдерона. Начинается рассмотрение с оператора

$$S_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{|V(\zeta) - V(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right|$$

Автор интерпретирует этот оператор как обобщение оператора T_n^* из первой главы, когда одна функция V заменяется на пру функций V_1, V_2. В рассматриваемом случае $V_2 = \bar{V}_1$. Далее по стандартной схеме вводится аппроксимационный оператор

$$S_{n,\varepsilon} f(z) = \int_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{|V(\zeta) - V(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

Что бы воспользоваться оценкой теоремы 1, автор находит не тривиальные ходы. Вводится еще один вспомогательный оператор

$$M_{f,\varepsilon}(\lambda, \mu)(z) = \int_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta + \lambda V(\zeta) + \mu \bar{V}(\zeta) - (z + \lambda V(z) + \mu \bar{V}(z)))^2}$$

Рассуждения аналогичные тем, что были использованы при доказательстве теоремы 1 позволяют установить, что оператор отображает пространство $L^p(\mathbf{C}, \omega)$ в себя. Связь этого оператора с аппроксимационным, обнаруженная автором достаточно неожиданна. Во-первых, оператор можно записать в виде

$$M_{f,\varepsilon}(\lambda, \mu)(z) = \int_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (1 + q)^2},$$

$$q = \lambda \frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z} + \mu \frac{\bar{V}(\zeta) - \bar{V}(z)}{\zeta - z}$$

Если положить $t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$, $\lambda = te^{i\theta_1}$, $\mu = te^{i\theta_2}$ то окажется, что $|q| = 1 - \frac{1}{2n}$ и возможны дальнейшие преобразования

$$M_{f,\varepsilon}(\lambda,\mu)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\int_{|\zeta-z|>\varepsilon} q^k \frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$$

Далее автор доказывает, что (n,n)-й коэффициент разложения $M_{f,\varepsilon}(\lambda,\mu)(z)$ в двойном ряде Фурье лишь на постоянный множитель отличается от $S_{n,\varepsilon}f(z)$. После этого остается провести стандартные выкладки, что бы завершить доказательство.

Заключительная четвертая глава содержит усиление результата тетей главы. В качестве аналога коммутатора Кальдерона рассматривается

$$U_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|\zeta-z|>\varepsilon}\prod_{m=1}^{4}\frac{(V_m(\zeta)-V_m(z))^n}{(\zeta-z)^n}\frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right|$$

Доказано, что этот оператор то же отображает пространство $L^p(\mathbf{C},\omega)$ в себя. Техника доказательства та же, что в третей главе.

Завершается работа серией примеров, иллюстрирующих применения доказанных теорем.

Оценивая работу в целом следует еще раз повторить, что она написана на актуальную тему. Выполнена работа на высоком техническом уровне с глубоким проникновением во внутренние связи исследуемых объектов. Все приведенные в диссертации утверждения являются строго доказанными научными фактами. Результаты диссертации полностью и своевременно были опубликованы в трех статьях в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации, интересные и важные сами по себе, важны не в меньшей степени тем, что для их доказательства были найдены новые технические приемы, которые могут эффективно работать и в других задачах.

В качестве недостатков работы следует отметить, что из обзора предшествующих работ не ясно, что было известно до работ А.С.Меркулова. Работа значительно выиграла бы, если бы содержала указания на возможные приложения разработанной техники оценок сингулярных операторов Кальдерона, в многочисленных задачах, использующих такие операторы, как техническое средство. Отмеченные недостатки не снижают общего хорошего впечатления от работы.

На основании выше изложенного считаю, что диссертационная работа Меркулова Алексея Сергеевича "Некоторые типы сингулярных интегральных операторов на плоскости" соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, в том числе п.9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Зав. кафедрой ВМ-2 СПбГЭТУ
доктор физ.-мат. наук
А.М.Коточигов