

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Меркулова Алексея Сергеевича "Некоторые типы сингулярных интегралов на плоскости", представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01-вещественный, комплексный и функциональный анализ. .

**Актуальность.** Рецензируемая работа посвящена исследованию сингулярных интегральных операторов типа Кальдерона на плоскости. Данная тематика примыкает к обширным исследованиям конца 20 в. теории интеграла Коши по липшицевой кривой (Кальдерон, Койфман, Рохберг, Давид, Журне и многие другие). В теории сингулярных несверточных операторов нетривиальны уже  $L^2$ -оценки. Один из подходов для получения нужного результата ограниченности в  $L^2$  преобразования Коши по липшицевой кривой состоял в получении оценок скорости роста норм кратных коммутаторов преобразования Гильберта на прямой с фиксированной липшицевой функцией в зависимости от порядка. Существенно было показать, что данные нормы растут медленнее любой геометрической прогрессии. В диссертации данная задача распространяется на плоский случай, где кратные коммутаторы берутся не с преобразованием Гильберта на прямой, а с другими сингулярными операторами, главным из которых является плоское преобразование Коши.

Работа не ограничивается рамками  $L^2$ -теории. Все рассмотрения лежат в области современных исследований в теории сингулярных операторов, связанных с доказательством оценок для весовых пространств с  $A_p$ -весами Макенхаупта. Последнее определяет актуальность темы.

**Основные результаты автора.** В первой главе диссертации автор доказывает  $L^p$ -оценки с весами Макенхаупта для кратных коммутаторов плоского преобразования Коши с фиксированной липшицевой функцией  $V$ . Ядро данного оператора имеет вид

$$\left( \frac{V(x) - V(y)}{x - y} \right)^n \frac{1}{(x - y)^2}.$$

Оценки коммутаторов необходимы автору для доказательства ограниченности

сингулярного оператора с ядром

$$F \left( \frac{V(x) - V(y)}{x - y} \right)^n \frac{1}{(x - y)^2}, \quad (1)$$

где  $F$ -целая функция. Для того, чтобы применить развитую технику теории операторов Кальдерона-Зигмунда для доказательства весовых  $L^p$ -оценок, обычно предварительно требуется получить  $L^2$ -оценки. Автор использует оригинальный метод получения весовых оценок непосредственно в общем случае. Для этого в п.1 рассматривается специальный сингулярный оператор с ядром

$$\frac{1}{(x - y - \lambda(V(x) - V(y)))^2}.$$

При достаточно малом параметре  $\lambda$  удается получить поточечные оценки для образа функции под действием данного оператора через сумму образа функции под действием некоторого сверточного оператора и максимальной функции. Эта техническая часть диссертации определенно трудна и представляет независимый интерес. Поточечные оценки, в свою очередь, позволяют в дальнейшем доказать требуемые  $L^p$ -оценки с весами Макенхаупта для специального оператора с ядром (1) в главе 2. Здесь же в п.2. доказывается основная теорема о коммутаторах, основным моментом доказательства является наблюдение, что коммутатор представляет собой контурный интеграл от специального сингулярного из п.1.

Во второй главе техника работы с коммутаторами, а главное - полученные степенные оценки, применяются к исследованию сингулярных интегралов специального вида. Доказывается теорема 2. Особое внимание уделяется важному частному случаю (следствие 1), когда в качестве целой функции берется экспонента. Данные теоремы представляют распространение результатов Широкова на случай весов Макенхаупта.

Третья глава посвящена приложениям развитой техники к операторам, обобщающим коммутаторы Кальдерона, когда ядро оператора зависит от нескольких функций (в диссертации подробно разбираются случаи двух и четырех различных функций)

$$\frac{(V_1(x) - V_1(y))^n (V_2(x) - V_2(y))^m}{(x - y)^{n+m}} \frac{1}{(x - y)^2}.$$

Обобщенные коммутаторы Кальдерона в одном важном случае, когда в качестве

липшицевой функции  $V$  берется расстояние до замкнутого множества нулевой плоской меры Лебега подробно исследуются в четвертой главе.

**Теоретическая и практическая значимость.** В диссертации доказаны следующие основные новые результаты: – даны степенные по порядку весовые оценки сингулярных операторов – кратных коммутаторов Кальдерона с плоским преобразованием Коши; – данные оценки применены к сингулярным операторам со специальными ядрами, зависящими от аналитических функций; – доказаны теоремы для сингулярных операторов, более общих чем коммутаторы Кальдерона.

Данные результаты представляют существенный вклад в развитие теории сингулярных интегралов и имеют важное значение для приложений в теории функций. Методы работы с сингулярными интегралами с ядрами, зависящими от расстояния до множества нулевой меры имеют несомненный интерес для специалистов по гармоническому анализу.

**Замечания.** Существенных недостатков в диссертации нет. Отметим лишь следующие замечания.

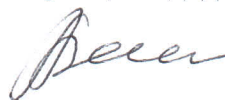
- 1). Непонятно, почему в теореме 4 существенна константа 1 в условии липшицевости. Это ограничивает применение теоремы;
- 2). Некоторая небрежность в оформлении, например, на с.26 пропущены связующие слова, а на с.50 некорректно определены исследуемые функции.

**Заключение.** Недостатки не влияют на общую положительную оценку диссертации. Развитый в диссертации метод получения поточечных оценок сингулярных интегралов является главным достоинством диссертации. Даны приложения метода для исследования конкретных сингулярных операторов типа коммутаторов Кальдерона. Результаты, полученные диссертантом, являются новыми и достоверными, выводы и заключения обоснованы, отражены в 3 печатных работах автора и неоднократно обсуждались на различных конференциях. Название диссертации отражает ее содержание и соответствует поставленным в работе целям. Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертации и свидетельствует о высоком уровне работы.

Таким образом, рецензируемая диссертация содержит новые научно обоснованные теоретические результаты, совокупность которых имеет важное значение для развития вещественного, комплексного и функционального анализа, и представляет

завершенную научную квалификационную работу. На основании вышеизложенного считаю, что работа «Некоторые типы сингулярных интегралов на плоскости» удовлетворяет всем требованиям Положения ВАК к кандидатским диссертациям по математике, а ее автор, Меркулов Алексей Сергеевич заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доцент кафедры прикладной математики Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, кандидат физ.-мат. наук, доцент



Васин А.В.



Подпись руки Васин А.В.  
удостоверяется,  
Начальник общего отдела Генерал  
"29" 10 2019 г.