Отзыв официального оппонента на диссертацию Столярова Дмитрия Михайловича "Дифференциальные операторы и анализ Фурье: теоремы вложения с предельным показателем и их приложения", представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01-вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность. Отправной точкой данной диссертации являются вопросы изоморфной классификации пространств гладких функций с равномерной нормой. Различные аспекты темы получили своё развитие в классических работах Милютина об изоморфизме пространств непрерывных функций на несчетном компакте, а также в результатах Хенкина об неизоморфности аналитических подпространств пространств непрерывных функций на многомерных торах или шарах. В 70-80 годах очень эффективным благодаря прежде всего усилиям Пелчиньского и Кислякова оказалось применение теоремы Гротендика для различения пространств гладких функций. Вместо усреднений в качестве инварианта теперь выступает утверждение одной из форм теоремы Гротендика о том, что любой оператор из пространства непрерывных функций в гильбертово пространство является 2-абсолютно суммирующим. Возможность найти оператор из исследуемого пространства X в гильбертово, который не является 2-абсолютно суммирующим, определяет неизоморфность пространства X с пространством непрерывных функций. Возможность применения развитых методов для анизотропных пространств гладких функций, нормы которых определяются при помощи дифференциальных операторов, определяют актуальность рассматриваемых задач.

Основные результаты автора. Для доказательства теорем об изоморфизме в анизотропном случае автор осуществляет подход Кислякова, основанный на двойственности, с использованием аннуляторов исследуемых пространств (после естественнного вложения в прямую сумму пространств непрерывных функций). Такой подход предполагает в дальнейшем поиск соответствующего инварианта не для исходного пространства, а для его аннулятора, который представляет собой подпространство в пространстве мер. Здесь возникает первая проблема исследования мер, подчиненных дифференциальным условиям. Известно, что для данных целей необходимо исследовать тонкие теоремы вложения с предельным показателем. В данной же диссертации в отличие от результатов предшественников теоремы вложения играют не вспомогательную, а основную роль. Поэтому первая глава диссертации посвящена подробному исследованию определенной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Основной результат первой главы (теорема 1.2.1) является, с одной стороны, распространением на многомерный случай варианта теоремы вложения с предельным показателем, доказанной Солонниковым, а с другой - анизотропным аналогом одного результата ван Шафтингена. Сразу заметим, что существование решения данной системы (с требуемыми оценками) позволяет ответить на многие вопросы об изоморфизме для анизотропных подпространств гладких функций с равномерной метрикой и распространить результаты Кислякова и Максимова на случай дифференциальных операторов со смешанной однородностью. Сложное доказательство упомянутой теоремы вложения основано на получении оценок билинейных неравенств(теоремы 1.2.4, 1.2.5). Данные утверждения по форме напоминают известные теоремы Гальярдо-Ниренберга, а также Пелчиньского-Сенатора, но в отличие от них, а также от теоремы 1.2.1. билинейные неравенства, доказываемые в диссертации, имеют место для конкретных частных производных, что представляет несомненный интерес в дальнейшем развитии теорем вложения в анизотропном случае. В п. 2.5.1 автор детально исследует отличие билинейных неравенств от соответствующих квадратичных. Существенное внимание в диссертации занимают результаты относительно оценок билинейных неравенств в неэллиптическом случае. В п.2.5.3 доказывается, что соответствующие теоремы вложения зависят от ограниченности определенных интегральных операторов, на подпространствах в L^p, представляющих замыкание функций, преобразование Фурье которых исчезает на замкнутых многообразиях. В п.2.5.4 доказывается, что данные подпространства недополняемы в L^p при $1 \leq p < 4/3$, что существенно усложняет и без того технически трудные построения второй главы, поскольку возможность применения развитой техники теорем вложения ориентирована изначально на пространства Лебега.

В третьей глава диссертации даются применения доказанных теорем вложения для изоморфной классификации пространств гладких функций, такие как теорема 3.1.3, в которой из существования двух различных (непропорциональных в диссертации) старших мономов дифференциального оператора следует недополняемость в $C(K)$ соответствующего подпространства с равномерной нормой, определяемой при помощи данного дифференциального оператора. Данная теорема является обобщением соответствующих результатов Кислякова и Максимова и, в основном, завершает работу в этом направлении. Теорема 3.3.9 дает пример утверждения, для каких дифференциальных операторов можно утверждать, что пространство $C^P(\mathbb{T}^n)$ изоморфны пространству непрерывных функций. В последней главе диссертации доказываются результаты об оценках хаусдорфовой размерности векторной меры. Главным средством доказательства служит одна вспомогательная лемма 4.1.1, называемая автором усиленной леммой Фростмана о размерности меры (размерности носителя), которая подчинена некоторым условиям типа порядка. Заметим, что оригинальная лемма Фростмана направлена в другую сторону и описывает хаусдорфовы размерности множества исходя из существования мер заданного порядка.

Замечания. Существенных недостатков в работе не обнаружено. Отметим лишь следующее. В данной диссертации неоднократно формулируются гипотезы, например, гипотеза 2.5.4, которые пока нет возможности доказать, и важность которых преувеличена. На с.152 и далее буквой P обозначается и дифференциальный полином, и проектор на определенное подпространство, что мешает пониманию материала. Высказанные замечания не затрагивают существа рецензируемой работы и не влияют на общую положительную оценку.

Таким образом, в диссертации получены следующие важные результаты:

1). Исследованы новые теоремы вложения и получены оценки для билинейных дифференциальных неравенств типа Гальярдо-Ниренберга-Солонникова.

2). Для набора P дифференциальных операторов со смешанной однородностью даны достаточные условия, когда пространство $C^P(\mathbb{T}^n)$ не вкладывается дополняемо в $C(K)$ ни для какого компакта K.

3). Получены достаточные условия, в каком случае соответствующее пространство $C^P(\mathbb{T}^n)$ изоморфно пространству $C(\mathbb{T}^n)$. На данный момент последние условия носят наиболее общий характер.

4). Получены оценки хаусдорфовых размерностей снизу векторных мер, подчиненных дифференциальным условиям, как вариант еще одного обобщения теоремы Рисса.

Все результаты диссертации достоверны и новы, корректно сформулированы и математически обоснованы. Основные теоремы имеют законченный характер и являются существенными для научного направления, связанного с анализом Фурье, геометрией банаховых пространств и их приложениями. Подход автора для получения априорных оценок для систем уравнений в частных производных первого порядка имеет независимый интерес и найдет свое применение в анализе. Техническая лемма 4.1.1 (обобщение известной леммы Фростмана) является мощным средством для оценок размерностей векторных мер, что с успехом проиллюстрировано автором на примере двух достаточно далеких друг от друга утверждений (Теорема 2.5.4 о структуре подпространства L^p, представляющего замыкание функций, преобразование Фурье которых исчезает на замкнутых многообразиях, и теорема 1.2.1 об оценках хаусдорфовой размерности носителя).

Заключение. Имеются необходимые ссылки на литературу. Полученные в диссертации результаты достаточно хорошо апробированы и подробно отражены в 3 опубликованных работах автора по теме диссертации. Диссертация и автореферат написаны грамотным математическим языком. Автореферат диссертации правильно отражает ее основное содержание.

Таким образом, рецензируемая диссертация содержит новые научно обоснованные теоретические результаты, совокупность которых имеет важное значение для развития вещественного, комплексного и функционального анализа. На основании вышеизложенного считаю, что работа «Дифференциальные операторы и анализ Фурье: теоремы вложения с предельным показателем и их приложения» удовлетворяет всем требованиям Положения ВАК к кандидатским диссертациям по математике, а ее автор, Столяров Дмитрий Михайлович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доцент кафедры прикладной математики Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Васин А.В.

Подпись руки Васин А.В.
удостоверяется, Зам
Начальник общего отдела
"28" 11 20.. г.