

Отзыв официального оппонента

о диссертации Малышева К. Л.

**«Корреляционные функции низкоразмерных неоднородных  
моделей статистической физики и их асимптотики»**

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Заметная часть исследований в современной математике и ее приложениях посвящена корреляционным функциям моделей квантовой теории поля и статистической физики. В диссертации К.Л. Малышева рассматриваются корреляционные функции и их асимптотики некоторых низкоразмерных неоднородных моделей статистической физики. Например, затрагиваются проблемы, связанные как с теорией квантовых интегрируемых систем, с одной стороны, так и с перечислительной комбинаторикой, теорией симметрических функций и случайных матриц, с другой. В диссертации применяются квантовый метод обратной задачи и подход функционального интегрирования.

В Главе 1 рассматривается вычисление некоторых температурных корреляционных функций  $XXZ$ -модели Гейзенберга, приводящих к соотношениям, которые связаны с перечислением плоских разбиений и решеточных самоизбегающих путей. А именно, для  $XXZ$  цепочки при нулевой и бесконечной анизотропии рассмотрено вычисление температурных корреляционных функций – ‘выживание ферромагнитной струны’ и ‘выживание доменной стенки’. Интерес к указанным пределам связан с тем, что именно в этих случаях  $N$ -частичные векторы состояния могут быть записаны с помощью симметрических функций Шура. Автором получены ответы для форм-факторов операторов ферромагнитной струны и доменной стенки, принимающие детерминантный вид. Полученные представления, будучи записанными в специальной  $q$ -параметризации, сводятся к выражениям, содержащим  $q$ -биномиальные определители. Вычисление  $q$ -биномиальных определителей приводит к производя-

щим функциям плоских разбиений в ящике. Иными словами, в пределе  $q \rightarrow 1$  возникают аналоги формулы Мак-Магона для числа разбиений в ящике. Далее, при  $q \rightarrow 1$  форм-факторы операторов ферромагнитной струны и доменной стенки можно проинтерпретировать с помощью самоизбегающих путей на квадратной решетке. Как следующий шаг, вычисляются асимптотики корреляционных функций выживания ферромагнитной струны и выживания доменной стенки в случае длинной, но конечной цепочки и при достаточно низкой температуре. В результате возникают матричные интегралы, принимающие вид статсуммы гауссового унитарного ансамбля с коэффициентом в виде квадрата числа плоских разбиений. Получены формулы явно выражающие асимптотическое поведение корреляционных функций в случае, когда велики все параметры модели: полное число узлов цепочки  $M$ , число спинов “вниз”  $N$ , число последовательных спинов в ферромагнитной струне или в доменной стенке  $n$ , и обратная температура. При специальном ограничении на параметры происходит убывание коррелятора.

Двухточечная корреляционная функция спиновых операторов  $\sigma_k^\pm$  в случае  $XX0$  цепочки Гейзенберга в нулевом магнитном поле над ферромагнитным состоянием играет роль производящей функции блужданий недружественных пешеходов в модели со случайными поворотами. Для  $XX0$  магнетика Гейзенберга на периодической цепочке вычисляется двухточечная корреляционная функция того же вида, но над суперпозицией собственных состояний магнетика. Ее также можно проинтерпретировать как производящую функцию случайных блужданий недружественных пешеходов на одномерной решетке в среде с переменным числом недружественных соседей. Для пешехода, перемещающегося между двумя достаточно удаленными узлами получена оценка числа путей в пределе, когда число поворотов растет как квадрат расстояния между начальным и конечным положениями.

Производящая функция корреляторов третьих компонент спинов  $XU$  цепочки Гейзенберга получена в виде функциональных интегралов по антикоммутирующим переменным. Для вычисления производящей функции используется представление в виде конечнократного грасманового интеграла. При этом для перехода от конечнократного интеграла к функциональному предлагается подчинить переменные интегрирования граничному условию квази-периодичности по мнимому времени. Регуляризованные интегралы гауссова типа сводятся к определителям матриц конечного

размера. Полученные выражения можно использовать для вывода многоточечных корреляторов третьих компонент спинов. В качестве еще одного приложения рассматривается вычисление производящей функции случайных блужданий недружественных пешеходов.

В Главе 2 функциональное интегрирование используется для вывода температурных корреляционных функций ряда квантово-статистических моделей. Во первых, рассматривается одномерный бозе-газ в гармоническом потенциале. Функциональное интегрирование используется для вывода однопетлевого эффективного действия. Бозе-конденсация при наличии удерживающего потенциала происходит как в импульсном, так и в координатном пространстве, в котором и возникает ярко выраженный пик распределения. Как следствие, приходится рассматривать модель не в импульсном представлении (как в “традиционном” подходе к корреляциям в однородном бозе-газе), а в координатном. Адекватным приближением для плотности распределения оказывается приближение Томаса–Ферми. Для слабого отталкивания (режим Гросса-Питаевского с высокой плотностью частиц) и в приближении Томаса–Ферми исследуются асимптотики двухточечных и многоточечных температурных корреляционных функций. Для неоднородного бозе-газа в диссертации получены оценки корреляторов в пределах, когда температура стремится к нулю, а объем, занимаемый квази-конденсатом растет. Определены критические индексы, которые зависят от пространственных координат и которые характеризуют убывание корреляционной функции. Результаты полученные в рамках подхода, основанного на функциональном интегрировании, сводятся, в соответствующих пределах, к соотношениям для однородного бозе-газа, получаемым в рамках анзаца Бете. Полученные критические индексы записаны в терминах физических наблюдаемых и могут на практике продемонстрировать эффект неоднородности модели.

Для сверхтекучей А-фазы гелия-3 развит подход к разложению в лондоновском пределе среднего тока частиц по степеням производных параметра порядка. Доказано само наличие поправок по степеням производных параметра порядка (что активно обсуждалось в литературе). Рассмотрен ряд характерных конфигураций параметра порядка, для каждой из которых вычислены поправки второй и третьей степеней к ведущему выражению тока первого порядка.

С помощью функционального интегрирования получен спектр коллективных возбуждений для антиферромагнитной фазы двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием как вблизи нулевой температуры, так и в окрестности температуры фазового перехода.

Существенную роль в физике нано-материалов играют дефекты кристаллической структуры – дислокации и дисклинации. “Классические” дислокационные решения, возникающие в несовместной теории упругости, характеризуются полюсной особенностью компонент напряжений на оси дефекта. В Главе 3 рассмотрены две задачи. Во-первых, предложена трансляционно-калибровочная лагранжева модель, приводящая к решениям, характеризующимся тензором напряжений со сглаженной особенностью в ядре дефекта. Уравнения (нелинейной) модели решены для прямолинейной винтовой дислокации в упругом бесконечном цилиндре. Соответствующий тензор напряжений получен в линейном и квадратичном приближениях. При этом калибровочное уравнение эйнштейновского вида играет роль нестандартного закона несовместности. Используется метод функции напряжений, при котором уравнения равновесия в напряжениях удовлетворяются тождественно. Получаемый окончательно тензор напряжений определен не только вне, но и внутри ядра. Самосогласованность решения свидетельствует об удовлетворительности предложенной модели, в рамках которой собственная энергия дислокаций описывается калибровочным лагранжианом, квадратичным по плотности дефектов.

Далее, функциональное интегрирование используется для вычисления статистической суммы и температурных корреляционных функций компонент напряжений в модели, рассматривающей набор модифицированных дислокаций как термодинамический ансамбль. Модель дислокаций при ненулевой температуре эквивалентна двумерному кулоновскому газу зарядов, потенциал взаимодействия которых имеет логарифмический вид на больших расстояниях и сглажен (стремится к нулю) для зарядов на близком расстоянии. Корреляторы компонент напряжений используются для получения закона перенормировки упругих постоянных, возникающей при зарождении дислокационных диполей. При этом основное внимание уделяется проявлениям, связанным с тем, что используются решения именно для несингулярных (модифицированных) дислокаций. Полученные в 3-ей главе формулы для перенор-

мировки модуля сдвига выявляют физические эффекты, обусловленные конечным размером ядер дефектов, присутствующих в неидеальных кристаллах. Следует отметить, что результаты, изложенные в этой главе, являются далеко идущим развитием и обобщением работ Альфреда Зигера и его сотрудников, относящихся к классике математической нелинейной теории дислокаций в кристаллах.

Что касается замечаний, то представляется крайне интересным продолжить исследование комбинаторных свойств интегрируемых моделей и, в частности, изинговского предела  $XXZ$  магнетика. Развитый диссертантом математический подход к несингулярным дислокациям также несомненно заслуживает дальнейшего использования и развития.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Диссертация хорошо написана и четко структурирована. Развитые подходы и полученные результаты могут быть применены для дальнейшего изучения новых систем статистической физики.

Представленная диссертация К. Л. Малышева является законченной научно-квалификационной работой, основные результаты которой могут быть квалифицированы как существенные научные достижения в теории квантовых интегрируемых систем и в статистической физике. Диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям по специальности 01.01.03 - математическая физика. Я считаю, что К. Л. Малышев заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

*Главный научный сотрудник кафедры высшей математики  
Института инноватики и базовой  
магистерской подготовки ФГАОУ ВПО  
"Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения",  
доктор физико-математических наук,  
профессор*

**В. Б. Матвеев**

*Подпись В. Б. Матвеева заверяю  
Начальник отдела кадров ГУАП*

**А. А. Плотников**

