Отзыв научного руководителя о кандидатской диссертации Д. М. Столярова «Дифференциальные операторы и анализ Фурье: теоремы вложения с предельным показателем и их приложения»

В 2011 г. я предложил Д. М. Столярову, поступившему тогда в аспирантуру ПОМИ, присоединиться к исследованию одной задачи об изоморфной классификации пространств гладких функций с равномерной метрикой, которой мы занимались вместе с Д. В. Максимовым. Для решения той задачи требовалась некая новая теорема вложения, довольно упорно сопротивлявшаяся всем нашим попыткам ее доказать. Д. М. Столяров, однако, довольно быстро нашел неожиданный подход к этой теореме, приведший к успеху. Это в конечном итоге послужило основой для всего материала, представленного в диссертации.

Результаты, выносимые автором на защиту, изложены в главах 2, 3 и 4. Глава 2 посвящена довольно многочисленным новым теоремам вложения. Среди них содержится и теорема, упомянутая выше. В отличие от классических теорем вложения, условия суммируемости накладываются в них не на производные одной функции, а на линейные комбинации производных разных порядков от разных функций. Иными словами, в них говорится о вложениях для векторных полей в анизотропной ситуации. Выводятся они из специальных *билинейных оценок*, по форме отдаленно напоминающих классическое неравенство Гальярдо-Ниренберга, но гораздо более изощренных: в них тоже можно говорить как об анизотропии, так и о векторных полях. Такие билинейные оценки интересны и сами по себе, и автор подробно их исследует, показывая, что, хотя они и имеют прямое отношение к теоремам вложения, все же они ведут себя несколько иначе. В некоторых случаях удается полностью описать параметры задачи, при которых такие билинейные оценки верны. Следует подчеркнуть несколько неожиданную решающую роль некоторых соображений комплексного анализа в доказательствах.

Отмечу еще одну неожиданную черту полученных оценок, которую позволил выявить применяемый метод: вместо упомянутой выше суммируемости, от линейных комбинаций производных во всех таких задачах можно требовать значительно меньшего. А именно, достаточно предполагать, что преобразование Фурье такой линейной комбинации совпадает с сужением на некоторую «поверхность» преобразования Фурье суммируемой функции от большего числа переменных. Это соображение, кстати, применимо и в контексте известных теорем вложения и, видимо, ранее оставалось в них незамеченным. С другой стороны, методы диссертации приводят и к (по-видимому) новым оценкам вполне классического вида, например, к неравенству $(\|f\|_2)^2 \leq C\|\partial_1 f\|_1 \|\Delta_{2,3} f\|_1$ для функций от трех переменных.

Глава 3 диссертации посвящена той самой задаче о неизоморфности некоторых пространств гладких функций пространству C(K), с которой началось дело, и в решении которой одна из описанных теорем вложения (достаточно нестандартная – в ней присутствуют все упомянутые выше особенности) играет главную роль. Речь в ней идет о пространстве гладких функций (на торе), порожденном произвольным конечным набором линейных дифференциальных выражений. Основной результат таков. Выберем какой угодно «шаблон» смешанной (анизотропной) однородности и выделим из этих дифференциальных выражений старшие однородные части относительно этого шаблона. *Если среди них оказались две непропорциональных, то пространство гладких функций, о котором идет речь, не вкладывается дополняемо в пространство типа* C(K). Этот результат можно рассматривать как завершение целой серии исследований, начатых Г. М. Хенкиным и продолженных в разные годы А. Пелчинским, С. Квапенем, С. В. Кисляковым, Н. Г. Сидоренко, Д. В. Максимовым и другими.