

ОТЗЫВ

официального оппонента доктора физико-математических наук Пятницкого Андрея Львовича на диссертационную работу соискателя учёной степени кандидата физико-математических наук Дородного Марка Александровича, выполненную на тему «Усреднение нестационарных периодических уравнений» по специальности 01.01.03 - «математическая физика».

Актуальность темы диссертации

В различных задачах, рассматриваемых как в прикладных науках, так и в инженерных дисциплинах, исследуются среды с периодической микроструктурой. Для макроскопического описания таких сред была создана математическая теория усреднения. Очень важную роль в этой теории, особенно с точки зрения приложений, играют оценки скорости сходимости при усреднении. Имеется обширная математическая литература, посвящённая этому вопросу. Однако в большинстве работ доказываются оценки скорости сильной сходимости, в которых все константы зависят от конкретных данных задачи.

В последние два десятилетия, начиная с работ М.Ш. Бирмана и Т.А. Суслиной, а затем В.В. Жикова, разрабатываются методы получения оценок скорости сходимости в операторных топологиях. Одна из сложных задач здесь – это получение оценок для нестационарных уравнений Шредингера и гиперболических уравнений. Поскольку эти уравнения не обладают свойством сглаживания решений, оценки скорости сходимости для них удаётся получить в операторных топологиях с понижением гладкости. Такие оценки были обоснованы в работе М.Ш. Бирмана и Т.А. Суслиной (2008) и в работе Ю.М. Мешковой (2019).

В диссертации М.А. Дородного исследована точность этих оценок, как в отношении выбора операторной топологии, так и в отношении скорости роста по времени. Показано, что эти оценки в общем случае неулучшаемы, и рассмотрен вопрос об их улучшении при дополнительных условиях. Также в диссертации обобщены оценки скорости сходимости в операторных нормах для уравнения Шредингера на случай, когда эллиптическая часть уравнения имеет младшие члены.

Структура и содержание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 70 наименований. Работа содержит 166 страниц.

Во введении автор объясняет предмет исследования и цели математической теории усреднения и даёт краткий обзор классических результатов и методов этой теории. Затем описываются имеющиеся результаты о скорости сходимости в операторных нормах, сначала для эллиптических и параболических задач, после чего автор более подробно останавливается на известных результатах для гиперболических уравнений и нестационарных уравнениях Шредингера.

Также во введении указаны цели диссертации, сформулированы основные её результаты и дано описание методов исследования.

В первой главе диссертации рассмотрена абстрактная теоретико-операторная схема для подходящих семейств операторов в гильбертовых пространствах. Основные конструкции здесь заимствованы из статей М.Ш. Бирмана и Т.А. Суслиной и успешно адаптированы для работы с операторами, изучаемыми автором.

В первой части второй главы выполняется преобразование Гельфанда и объясняется, как получающиеся при этом операторы могут быть включены в абстрактную схему. Затем выводится усредненное уравнение.

В оставшейся части второй главы и в третьей главе доказываются основные результаты работы. В заключение в третьей главе рассмотрены примеры уравнений, к которым применимы результаты диссертации, а именно уравнения акустики, нестационарная система теории упругости, магнитное уравнение Шредингера и двумерное волновое уравнение Паули.

Содержание и структура диссертации находятся в логическом единстве и соответствуют поставленной цели исследования, работа написана на хорошем математическом языке.

Научная новизна диссертации

Обоснованность научных положений и выводов, сформулированных в диссертации, подтверждается публикациями основных положений диссертационного исследования в шести статьях в рецензируемых научных журналах из перечня рекомендуемых ВАК журналов для публикации материалов по диссертациям; обсуждением результатов диссертации на научных конференциях и семинарах различного уровня; их сопоставлением с известными результатами, полученными другими авторами.

В диссертации представлены следующие новые результаты:

- 1) Для гиперболических уравнений, рассмотренных в работах [54] и [55] (здесь и далее используется библиография и формулы диссертации), исследована точность оценок скорости сходимости, которые были получены в этих работах (см. формулы (7) и (10)), относительно типа операторной нормы. Показано, что в общем случае эти оценки точные.
- 2) Исследована точность оценок (6), (7) и (10) относительно зависимости от времени. Показано, что оценки неулучшаемы, т.е. множитель $(1 + |s|)$ нельзя заменить на $(1 + |s|)^a$ с $a < 1$.

- 3) Показано также, что при дополнительных предположениях оценки (6), (7) и (10) могут быть усилены.
- 4) Показано, что оценки, полученные в работе [54] для нестационарного уравнения Шредингера, допускают обобщение на случай операторов с младшими членами вида (4).

Обоснованность и достоверность результатов

Основные утверждения диссертации четко сформулированы и доказаны. Достоверность результатов исследования подтверждается строгими и корректными доказательствами с использованием теоретической и методической базы в области математического анализа, дифференциальных уравнений, функционального анализа и спектральной теории. При теоретических исследованиях были в частности использованы хорошо известные и апробированные результаты ведущих ученых в этой области.

Практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Её результаты представляют несомненный интерес для теории усреднения дифференциальных уравнений с частными производными, а также для различных инженерных и естественно-научных приложений, в которых изучаются среды с микроструктурой.

Замечания

Имеется обширная литература, посвящённая оценкам скорости сходимости при периодическом усреднении в топологии сильной сходимости. Интерес к таким оценкам возник практически одновременно с возникновением теории усреднения.

Соответствующие работы следовало бы обсудить во введении, а фразу «Внимание к результатам подобного рода привлекла работа М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [13]» на странице 8 правильно было бы сформулировать так: «Внимание к оценкам скорости сходимости в операторных нормах привлекла работа М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [13]».

Отмечу, что это замечание не снижает научного уровня работы.

Диссертационная работа «Усреднение нестационарных периодических уравнений» выполнена на высоком научном уровне и отвечает всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Дородный Марк Александрович, безусловно заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - «математическая физика».

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Добрушинской математической лаборатории ФГБУ науки Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1

07.05.2021
А.Л.Пятницкий



Подпись
А.Л. Пятницкого
УДОСТОВЕРЯЮ
Зав. канцелярией

