Отзыв официального оппонента
о диссертационной работе
Запорожца Дмитрия Николаевича
"Нули случайных многочленов,
распределение алгебраических чисел
и выпуклые оболочки случайных процессов",
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Проблема характеризации распределения нулей случайных полиномов изучалась с давних времен. В 1943 году Кац рассмотрел случайный полином с независимыми стандартными гауссовскими коэффициентами и получил явную формулу для интенсивности числа вещественный нулей. Впоследствии появилось множество работ, продолжающих исследования Каца, среди которых особо стоит отметить работы Ибрагимова и Масловой. В 1995 году Эдельман и Костлан получили элегантное доказательство формулы Каца с помощью методов интегральной геометрии. Данное доказательство основывается на общей теории, которая описывает поведение гауссовских процессов в терминах геометрических характеристик соответствующих им выпуклых тел в гильбертовом пространстве. Истоками данной теории являются работы Судакова, Цирельсона и Шеве. Четвертая глава диссертации посвящена дальнейшему ее развитию, тогда как в первой и во второй главах исследуется поведение нулей случайных полиномов, а также случайных аналитических функций.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. В первой главе в основном рассматриваются случайные многочлены, коэффициенты которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими произвольное невырожденное распределение. Никаких дополнительных предположений на распределение не накладывается. Получена точная нижняя оценка для математического ожидания числа вещественных нулей случайных полиномов с независимыми коэффициентами, имеющими произвольное одинаковое распределение (теорема 1), а также верхняя оценка, про которую нельзя сказать, что она является оптимальной, но, заведомо, она является наилучшей из известных общих оценок (теорема 3). В качестве сопуствующих результатов получены формулы для средней площади нулевой поверхности гладкого гауссовского поля. Речь идет о хаусдорфовой мере размерности $d-1$ для прообраза $G^{-1}(0)$ гауссовскго поля $G(x)$ (теоремы 6 и 7). Из общей формулы площади (формула (1.76)), полученной Д. Запорожцем, вытекают многие известные результаты, например, формула коплощади Федерера (формула (1.78)), формула Каца для математического ожидания числа вещественных нулей случайного полинома с гауссовскими коэффициентами (пример 9). Выведен также новый результат для площади поверхности линейного гауссовского поля (формула (1.82)), из которого, собственно, и следует формула Каца.

В главе 2 рассматриваются случайные полиномы и случайные ряды Тейлора с независимыми комплексными коэффициентами и изучается поведение их комплексных нулей. Для полиномов с независимыми одинаково распределенными коэффициентами показано, что конечность логарифмического момента распределения коэффициентов является необходимым и достаточным условием того, что нормированная эмпирическая мера нулей почти наверное слабо сходится к равномерной вероятностной мере на единичной окружности с центром в начале координат (теоремы 8 и 9). Без каких-либо ограничений (кроме независимости и одинаковой распределенности) на распределение коэффициентов доказано, что предельное распределение для аргументов нулей случайного полинома есть равномерное распределение (теорема 10).

В параграфе 2.3 рассмотрены распределения, имеющие экстремально тяжелые хвосты. В теореме 11 показано, что если распределение коэффициентов имеет медленно меняющийся хвост, то нули случайного полинома концентрируются вблизи единичной окружности с вероятностью, близкой к единице. В теореме 12 показано, что если распределение повторного логарифма модуля коэффициентов имеет медленно меняющийся хвост, то нули полинома концентрируются вблизи окружностей со случайными радиусами, описываемыми уравнениями, связанными со свобоным членом, старшим и максимальным по модулю коэффициентом.

В параграфе 2.4 изучается распределение нулей случайного полинома, коэффициенты которого имеют регулярно меняющиеся логарифмические хвосты с показателем регулярности α. Описан полный класс предельных распределений в зависимости от α (теорема 13) в терминах мажоранты некоторого пуассоновского точечного процесса, свойства которого приведены в теореме 17. Из общей теоремы 13 выводятся классы распределений для различных α. В случае $\alpha > 1$ имеется конечный логарифмический момент и, значит, предельное распределение - равномерное распределение на единичной окружности. Если α близко к единице сверху, то при подходящем ремасштабировании нули концентрируются вблизи случайных окружностей, находящихся близко к единичной окружности (следствия 13 и 14). Случай $\alpha = 0$ (правильно меняющийся логарифмический хвост) рассмотрен в теореме 14 (комплексные нули) и в теореме 18 (вещественные нули). В теореме 14 показано, что комплексные нули в этом случае концентрируются в равновероятных долях вблизи единичной окружности и вблизи бесконечно удаленной окружности.

Параграф 2.5 посвящен одному из интереснейших направлений - исследованию распределения нулей случайных аналитических функций, представленных в виде ряда Тейлора с независимыми, одинаково распреленными коэффициентами, имеющими конечный логарифмический момент, помноженными на некоторые неслучайные комплексные веса. В начале параграфа приводится универсальность (говоря физическим языком, в глобальном режиме) распределения нулей для трех классических ансамблей случайных аналитических функций (плоского, эллиптического и гиперболического (теорема 19)). В теореме 21 приведена асимптотика рапсределения комплексных нулей полиномов Литтлвуда – Оффорда, когда логарифм весов убывает быстрее линейной скорости с ростом порядка коэффициента. В теореме 22 рассматриваются случайные аналиттические функции, веса которых ведут себя аналогично весам полиномов Литтлвуда – Оффорда. Приведены необходимые и достаточные условия для весов сходимости распределения нулей случайных аналитических функций. В теореме 23 приведены предельные распределения нулей аналитических функций Литтлвуда – Оффорда. Интересно отметить, что распределения, возникающие в качестве предельных в теоремах 21–23, при полуцелых значениях α ($\alpha = m/2$, где m натуральное) совпадают с предельными распределениями m-ой степени случайной матрицы из ансамбля Гирко – Жинибра, или произведения m независимых таких матриц. Случай $\alpha = 1/2$ (“круговой закон” Гирко – Жинибра) был отмечен в диссертации.

Глава 3 является хорошим примером того, как нули случайных полиномов могут применяться в других областях математики. Рассматриваются алгебраические числа произвольной фиксированной степени и высоты, не превосходящей Q, лежащие в некоторой комплексной области. Как оценить их количество асимптотически с ростом Q? Оказывается, ответ может быть дан в терминах интенсивности нулей (которая явно вычисляется) случайного полинома с независимыми коэффициентами, равномерно распределенными на интервале $[0, 1]$.

В главе 4, как уже было отмечено, продолжается развитие идей Судакова и Цирельсона, в частности, получен конический аналог их результатов. Также выведен ряд приложений, в частности, получена явная формула для среднего объема выпуклой оболочки многомерного броуновского моста, а также вычислены внутренние объемы бесконечномерных эллипсоидов в гильбертовом пространстве. Диссертант не ограничивается рассмотрением только гауссовских процессов. Рассматривается многомерное случайное блуждание, шаг которого имеет произвольное симметричное абсолютно непрерывное распределение. Найдена вероятность того, что выпуклая оболочка данного блуждания не содержит начало координат, а также вычислено среднее число граней данной выпуклой оболочки. Замечательно, что данные величины зависят только от размерности пространства и числа шагов блуждания и не зависят от распределения шага блуждания. Данный результат является многомерным обобщением известной формулы Спарре Андерсена. Для его вывода использовались методы комбинаторной геометрии из терии разбиения пространства гиперплоскостями.

Диссертация объемом почти в 400 страниц написана ясным и понятным языком и логически связно. Конечно, при таком объеме неизбежны опечатки, не влияющие, однако, на качество работы и математическую строгость доказательств. Некоторые из замеченных опечаток и неточностей я приведу. Например, на страницах 11 и 12 в выносных формулах вместо буквы "x" стоит буква "t".

В формулах (1.18) и (1.19) используется не совсем удачное обозначение, на мой взгляд, а именно, написано

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\xi_n \neq 0, \xi_0(\xi_0 + \xi_n^-) < 0\} = \frac{1}{2}\Phi\{\xi_0\xi_n\}.$$

Конечно, правая часть не зависит от n, можно было бы написать $\frac{1}{2}\Phi\{\xi_0\xi_1\}$.

Символы a, b в первой главе используются как для обозначения концов произвольного интервала, так и для обозначения вероятностей того, что случайная величина примет соответственно отрицательные или положительные значения.

На странице 35 в первой выносной формуле следует писать константу $4\alpha n$, а не $2\alpha n$. На странице 38 в 4-ой снизу строке константа α определяется равенством

$$\alpha := \frac{\gamma\alpha}{4r}.$$

Речь идет о переприсвоении, но лучше, на мой взгляд, было бы использовать отличное от α обозначение для новой константы. На той же странице в третьей снизу выносной формуле в показателе экспоненты должно быть $-\beta\gamma n$, а не $-\beta n$.

Повторю, что отмеченные опечатки никак не влияют на качество работы и ее оценку.

Все основные результаты работы являются новыми и математически строго доказанными. Выносимые на защиту результаты получены автором лично. Результаты диссертации опубликованы в 17 работах, 16 из которых из списка ВАКа. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Представленная Д. Н. Запорожцем диссертация "Нули случайных полиномов, распределение алгебраических чисел и выпуклые оболочки случайных процессов" является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории вероятностей и ее приложений (в частности, теории чисел).

Представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям, указанным в Положении о порядке присуждения ученых степеней и предъявляемых к докторским диссертациям. Диссертант – Запорожец Дмитрий Николаевич – заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика.

30 мая 2017 г.

Официальный оппонент
главный научный сотрудник
Физико-математического института
Коми научного центра УрО РАН
доктор физ.-мат. наук
167982, Республика Коми,
г. Сыктывкар, ГСП-2,
ул. Коммунистическая, 24,
тел. 8(8212)215740

Тихомиров А.Н.

Подпись Тихомирова А.Н. заверяю.
Начальник Общего отдела Федерального государственного бюджетного учреждения науки Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук

Леонова И.Н.

«30» мая 2017 г.