



(907) 474-7332

(907) 474-5394 fax

[www.dms.uaf.edu](http://www.dms.uaf.edu)

## Department of Mathematics and Statistics

101 Chapman Building, P.O. Box 756660, Fairbanks, Alaska 99775-6660

### ОТЗЫВ

официального оппонента  
профессора, доктора физико-математических наук  
Сергея Анатольевича Авдони́на  
на диссертационную работу Романа Владимировича Романова  
«Вопросы спектральной теории абстрактных и дифференциальных  
операторов для неядерных возмущений и проблема порядка»,  
представленную на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный  
анализ»

Предмет исследования диссертации Р. В. Романова находится на пересечении спектральной теории операторов, математической физики и теории граничных значений аналитических функций. Основной объект исследования – теория возмущений операторов. Рассматриваются как абстрактные операторы, так и операторы математической физики, такие как операторы Шрёдингера и Дирака и линейный оператор Больцмана. Возмущения, изучаемые в диссертации, находятся по обе стороны ядерного класса.

Результаты, относящиеся к возмущениям существенного спектра дифференциальных операторов математической физики представлены в Главах I - III. Основным результатом диссертации в этой области состоит в том, что непрерывный и дискретный операторы Шрёдингера и оператор Дирака на полуоси с неотрицательной мнимой частью потенциала имеют чисто сингулярный спектр, если мнимая часть потенциала неинтегрируема. В случае, когда мнимая часть потенциала интегрируема, локальная ядерная теория рассеяния, развитая Сахновичем, Павловым и Набоко, показывает, что абсолютно непрерывный (а. н.) спектр оператора совпадает с а. н. спектром его вещественной части. Таким образом, результат Романова в диссипативной ситуации имеет окончательный характер в том, что касается возмущений а. н. спектра. Он не имеет аналогов в самосопряженной теории, где а. н. спектр может сохраняться для сколь угодно медленно убывающих возмущений, причем для квадратично суммируемых потенциалов существенный носитель

а. н. части спектральной меры совпадает с полуосью в силу знаменитой теоремы Дайфта--Килипа. Результат Романова показывает, что в диссипативной ситуации происходит своего рода фазовый переход – а. н. спектр исчезает скачком при потере интегрируемости мнимой частью возмущения. В терминах функциональной модели Секефальви-Надя--Фояша результат состоит в том, что характеристическая функция оператора является (двусторонне) внутренней. Этот факт имеет важное для математической физики следствие об эволюции, порожденной оператором: полугруппа эволюции сильно сходится к нулю на бесконечности по времени.

Следует подчеркнуть, что теорема Романова не накладывает никаких условий на регулярность поведения мнимой части потенциала на бесконечности. Поэтому она не может быть доказана методами традиционной асимптотической теории возмущений, основанной на теореме Левинсона и ее модификациях. Кроме того, неядерность возмущения не позволяет воспользоваться методами, основанными на анализе скалярного кратного характеристической функции (детерминанта возмущения). Для доказательства теоремы Романовым были развиты оригинальные методы, основанные на анализе оператора с усредненным потенциалом и ядерной теории возмущений в ситуации, когда невозмущенный оператор далек от самосопряженного. Особо отметим построение аналога теории подчиненности Гильберт--Пирсона для несамосопряженных операторов, которое затруднено отсутствием у таких операторов спектральной меры.

Что касается вещественной части потенциала, то в случае оператора Дирака и дискретного оператора Шредингера на нее по существу не накладываются никаких ограничений, а в случае непрерывного оператора Шредингера потребовано выполнение малоограничительного условия, позволяющего применить спектральное усреднение для самосопряженного оператора, отвечающего вещественной части потенциала.

Помимо перечисленных результатов, в дискретном случае Романовым дано обобщение описанного выше результата об операторе Шредингера на случай общих матриц Якоби с несамосопряженным диссипативным возмущением диагонали.

Следующий важный результат работы относится к линейной задаче теории переноса (оператору Больцмана). Этот оператор возникает в теории переноса нейтронов в средах с размножением и активно изучается с середины двадцатого века. Возмущенный оператор представляет собой интегродифференциальный оператор, существенный спектр которого совпадает с вещественной осью. Структура этого спектра представлялась важным вопросом со времен пионерских работ Ленера и Винга. Первые шаги в анализе этой структуры были предприняты в кандидатской диссертации Романова, где была установлена абсолютная непрерывность существенного спектра и проанализирована спектральная особенность в нуле в важном частном случае изотропного рассеяния. В докторской диссертации вопрос был исследован в геометрии пластины с общим полиномиальным интегралом столкновений. Надо отметить, что возмущение в операторе переноса в

содержательных ситуациях не бывает ядерным, что существенно отличает его от рассматриваемых выше операторов типа Шредингера и усложняет его исследование.

Романову удалось преодолеть эти трудности. Основной результат состоит в том, что существенный спектр оператора абсолютно непрерывен, дискретный спектр и множество спектральных особенностей конечны, причем все спектральные особенности имеют конечный степенной порядок. Важно отметить, что и здесь удалось избежать анализа скалярного кратного. Результат получен исследованием асимптотик характеристической функции в нуле. Как следствие доказанной теоремы, в диссертации установлены асимптотики решений уравнения Больцмана при больших временах, точные в степенной шкале. В случае изотропного рассеяния автору удалось дополнить исследования своей кандидатской диссертации решением вопроса о порядке спектральной особенности в нуле – оказалось, что особенность имеет первый порядок.

Помимо перечисленных результатов, в диссертации исследовано соотношение сильного и слабого определений  $a. n.$  подпространства недиссипативных операторов. В случае ядерного возмущения их эквивалентность доказана в 80-х – начале 90-х годов в работах Тихонова и Рыжова. Для неядерных возмущений вопрос об эквивалентности оставался открытым до работы Романова. Диссертантом показано, что в диссипативном случае эти определения эквивалентны, а в недиссипативном случае существенно различны. Более точно, в диссертации построены примеры ограниченных операторов, подобных двустороннему сдвигу, для которых сильное  $a. n.$  подпространство тривиально. Дефектный оператор в этих примерах может быть сделан сколь угодно близким к ядерному, в том смысле, что для любой несуммируемой убывающей последовательности положительных чисел найдется оператор с указанными свойствами, такой что сингулярные числа дефектного оператора мажорируются этой последовательностью. Таким образом, доказана оптимальность результатов ядерной теории в шкалах компактных операторов.

В работе также приведен контрпример к проблеме двойственности спектральных компонент недиссипативных операторов. Проблема двойственности состоит в вопросе о совпадении ортогонального дополнения  $a. n.$  подпространства и подпространства сингулярного спектра сопряженного оператора. Для случая ядерных возмущений такое совпадение было установлено в работах Тихонова. Диссертанту удалось построить пример, в котором сингулярное подпространство сопряженного оператора тривиально, но  $a. n.$  подпространство не совпадает со всем пространством. Этот пример оптимален в шкалах компактных операторов в том же смысле, что и обсужденный выше контрпример к проблеме эквивалентности определений  $a. n.$  подпространства.

Диссертация Р. В. Романова вносит существенный вклад в спектральную теорию операторов и ее приложения к задачам математической физики. Все результаты диссертации полностью доказаны, их достоверность несомненна.

Главное достоинство работы – окончательность большинства полученных результатов.

Недостатком работы является некоторая фрагментарность изложения. Исследования предшественников во вводной главе описаны излишне лаконично. Там же на стр. 15 задача о предельном показателе сходимости отождествлена с поиском класса Шаттена – фон Неймана, что, строго говоря, не совсем точно. Укажем также на замеченные опечатки: на стр. 146 и в формулировке теоремы 15 говорится о неубывающей перестановке последовательности, а надо – невозрастающей.

Отмеченные недостатки не влияют на высокую оценку диссертации в целом. Работа Р. В. Романова продолжает и развивает лучшие традиции Санкт-Петербургской школы математической физики. Она сочетает широкое видение проблемы, виртуозный математический анализ и глубокое понимание физических приложений. Результаты, внесенные в диссертацию, своевременно опубликованы в журналах из списка ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает её содержание. Полученные результаты могут найти применение в исследованиях по математической физике и теории операторов, ведущихся в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, на факультете математики НИУ «Высшая школа экономики», в Московском государственном университете, в Санкт-Петербургском государственном университете, а также при чтении специальных курсов для магистрантов и аспирантов.

Таким образом, диссертационная работа Р. В. Романова удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям Положением о присуждении учёных степеней, а её автор, Романов Роман Владимирович, безусловно заслуживает присвоения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — “Вещественный, комплексный и функциональный анализ”.

Профессор Университета Аляски в Фэрбенксе,  
доктор физико-математических наук



С. А. Авдонин

1 октября 2020 г.