

На правах рукописи

МАЛЫШЕВ Кирилл Леонидович

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ
НЕОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ И ИХ АСИМПТОТИКИ**

Специальность 01.01.03 – математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2014

Работа выполнена в лаборатории математических проблем физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:

Кочетов Евгений Андреевич, доктор физико-математических наук, начальник сектора Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ (Дубна)

Матвеев Владимир Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры высшей математики Института инноватики и базовой магистерской подготовки ФГАОУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения"

Решетихин Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор математического факультета Калифорнийского Университета (Беркли), Черн-Симонс профессор математической физики (Беркли, Калифорния, США)

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный университет"

Защита состоится « ____ » _____ 2014 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 на базе ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Автореферат разослан « _____ » _____ 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук

Зайцев А. Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Квантовый метод обратной задачи рассеяния, разработанный в лаборатории математических проблем физики ПОМИ под руководством Л. Д. Фаддеева, является основным подходом к решению интегрируемых моделей квантовой теории поля и статистической физики [A1–A6]. Вычисление корреляционных функций является актуальной задачей теории квантовых интегрируемых систем [A7]. Квантовый метод обратной задачи позволяет находить корреляционные функции в конечном объеме и при различных граничных условиях. Большой интерес при этом вызывают точные ответы, связанные с представлениями в виде определителей, [A7], которые позволяют эффективно исследовать асимптотическое поведение корреляционных функций. Квантовый метод обратной задачи (а также его важная составляющая часть *алгебраический анзац Бете*) связан с такими бурно развивающимися областями современной математики и математической физики как теория квантовых групп, маломерная топология и конформная теория поля. Кроме того, возникают связи квантовой интегрируемости с теорией суперсимметричных калибровочных моделей [A8], а также удастся установить связи с пересчетной комбинаторикой, симметрическими функциями и случайными матрицами [1–4].

Функциональное интегрирование позволяет исследовать корреляционные функции систем, для которых точное решение не найдено. С помощью функционального интегрирования, в сочетании с техникой температурных функций Грина, вычисляются как статистические суммы, так и корреляционные функции. Формулировка функционального интегрирования (интегрирования по путям) восходит к Р. Фейнману [A9] и М. Кацу [A10]. Подход плодотворен во многих разделах теоретической физики, включая статистическую физику, квантовую теорию поля и теорию суперструн. Многочисленные современные приложения подхода отражены в монографиях [A11–A15].

В современной теоретической и математической физике особое место занимают исследования низкоразмерных моделей статистической физики. Информацию о моделях дают как точные корреляционные функции (функции Грина), так и их асимптотические оценки. При этом интерес к точнорешаемым моделям связан с достижениями в области практической реализации маломерных систем конечного размера (например, при моделировании огрубления (плавления) кристаллов). Прогресс в квантовой оптике и в нано-приборостроении стимулирует интерес к пространствен-

но неоднородным системам. При этом неоднородность может обуславливаться либо конечностью объема или внешним потенциалом, либо дефектами (дислокациями, дисклинациями). Неоднородные системы связаны, в частности, с атомными газами в магнито-оптических ловушках, а также, например, с нанотрубками и графеновыми пленками. Атомные газы в ловушках удается реализовать как квазиодномерные системы, в которых проявляются черты либо фермионного, либо бозонного поведения.

Переходя к конкретным моделям, выделим следующие проблемы и подходы к их решению. Например, вычисление температурных корреляционных функций некоторых операторов для спиновой XXZ цепочки Гейзенберга позволяет установить связи с перечислительной комбинаторикой. Дело в том, что при анизотропии, стремящейся к нулю ($XX0$ магнетик, свободные фермионы) или бесконечности (изинговский предел, бозоны с твердой сердцевиной), бетевские векторы состояния могут быть выражены с помощью симметрических функций Шура. В результате, форм-факторы соответствующих операторов, вычисленные в так называемой q -параметризации, выражаются через q -биномиальные определители, которые приводят к производящим функциям как плоских разбиений в ящике, так и самоизбегающих путей на решетке. Низкотемпературные асимптотики корреляторов в случае длинных, но конечных цепочек связаны с матричными интегралами гауссовых ансамблей. Случайные блуждания *недружественных пешеходов* на одномерной решетке и проблема перечисления их путей также вызывают интерес как в комбинаторике, так и в статистической физике. При этом для $XX0$ магнетика на периодической цепочке можно построить корреляционные функции, играющие роль производящих функций путей *недружественных пешеходов*.

Реализация бозе-эйнштейновской конденсации для атомных газов, удерживаемых магнито-оптическими ловушками, вызвала интерес к одномерным системам, описываемым $|\psi|^4$ -моделью бозе-поля во внешнем (гармоническом) потенциале. Функциональное интегрирование позволяет получить однопетлевое эффективное действие и исследовать многоточечные температурные корреляционные функции в приближении Томаса–Ферми. Для оценки корреляторов используется вариационный метод В. Н. Попова [A16]. В одномерном случае и для внешнего гармонического потенциала обобщаются результаты для квантового нелинейного уравнения Шредингера.

Возникновение топологических вихрей, калибровочных симметрий и аналогий с физикой элементарных частиц поддерживает интерес к сверхтекучим фазам гелия-3. Необычные свойства A -фазы связаны с обращением сверхпроводящей щели в нуль в полюсах сферы Ферми. Для тока частиц слабонеоднородной A -фазы получены в

лондоновском пределе ведущие члены асимптотического разложения по степеням первых производных от параметра порядка.

Топологически нетривиальные нарушения упорядоченных состояний (вихри, дислокации) имеют значение для фазовых переходов в двумерных системах. Дислокации, как нарушения кристаллического порядка, существенны для понимания структурных и электронных свойств твердых тел, а также интересны в связи с физикой нанотрубок. Поля напряжений классических дислокаций Вольтерры характеризуются вблизи линии дефекта полюсной особенностью первого порядка. Нефизическая особенность сглаживается в рамках теоретико-полевого подхода, приводящего к модифицированным дислокациям с конечным ядром. С помощью функционального интегрирования вычисляются корреляторы компонент модифицированного тензора напряжений, позволяющие затем исследовать перенормировку модулей упругости. Конечность размера ядер приводит к видоизменению закона перенормировки.

Цель работы:

Вычисление температурных корреляционных функций и их асимптотик для низкоразмерных моделей статистической физики, характеризующихся пространственной неоднородностью вызванной либо конечностью объема (длиной цепочки), либо наличием внешнего потенциала или дефектов.

Рассмотрены следующие конкретные проблемы:

- Развитие подхода, основанного на использовании симметрических функций Шура для представления бетеvских N -частичных состояний спиновой XXZ цепочки Гейзенберга в пределах нулевой и бесконечной анизотропии. Применение подхода к вычислению температурных корреляционных функций типа *выживания ферромагнитной струны* и *выживания доменной стенки*. Установление связи форм-факторов и асимптотик корреляторов с комбинаторикой плоских разбиений в ящике и самоизбегающих решеточных путей.
- Использование функционального интегрирования для вычисления производящих функций некоторых корреляторов спиновых $XX0$ и XU цепочек Гейзенберга. В качестве приложения рассматривается задача перечисления траекторий случайных блужданий недружественных пешеходов.
- Применение функционального интегрирования для получения и исследования корреляционных функций одномерного бозе-газа с отталкиванием в гармоническом потенциале и слабонеоднородной A -фазы гелия-3, а также для вычисления спектра коллективных возбуждений в антиферромагнитной фазе двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием.

- Построение трансляционно-калибровочной лагранжевой модели модифицированных дислокаций в упругом континууме, в рамках которой компоненты тензора напряжений дефектов не имеют особенности на оси, а сами дефекты характеризуются областью ядра конечного размера.
- Применение функционального интегрирования для вычисления статистической суммы и температурных корреляционных функций компонент напряжений в модели, рассматривающей модифицированные дислокации в упругом цилиндре как термодинамический ансамбль. Вывод закона перенормировки упругих констант, который демонстрирует влияние конечности размера ядер дислокаций.

Методы исследования

В работе используются соотношения квантового метода обратной задачи и Бете-анзаца, применяется метод функционального интегрирования, а также активно привлекаются специальные функции и их асимптотики.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет чисто теоретический характер. Разработанные в ней методы и полученные результаты могут быть применены для дальнейшего изучения как указанных систем статистической физики, так и других родственных задач.

Основные результаты работы и научная новизна

На основании единообразного подхода получены следующие новые научные результаты:

- Вычислены для XXZ модели Гейзенберга (пределы нулевой и бесконечной анизотропии) на конечной цепочке температурные корреляционные функции типа *выживания ферромагнитной струны* и *выживания доменной стенки*. Установлено, что для достаточно длинной, но конечной цепочки и большого, но умеренного числа частиц асимптотики корреляторов связаны с матричными интегралами теории случайных матриц. Показано, что при стремящейся к нулю абсолютной температуре асимптотики корреляторов принимают вид произведения статистической суммы гауссова унитарного ансамбля на квадраты чисел плоских разбиений в ящике.
- Показано, что при специальной q -параметризации форм-факторы операторов ферромагнитной струны и доменной стенки выражаются через q -биномиальные определители. Вычисление последних приводит к производящим функциям плоских разбиений в ящике. В пределе $q \rightarrow 1$ возникают биномиальные определители, имеющие интерпретацию в терминах самоизбегающих путей на решетке (*случайные блуждания*) и возникают формулы типа формулы Мак-Магона для плоских разбиений.
- Получены асимптотические оценки для числа путей пешехода, перемещающегося

в среде с переменным числом недружественных соседей из некоторого фиксированного узла в другой достаточно удаленный узел решетки ХХ0 модели. Для производящей функции корреляторов третьих компонент спинов ХУ цепочки Гейзенберга получено представление в терминах функциональных интегралов по переменным с квазипериодической зависимостью от мнимого времени.

- Показано, что двухточечная температурная корреляционная функция для слабонеоднородного бозе-газа с отталкиванием в гармоническом потенциале убывает степенным образом в случае стремящейся к нулю температуры и растущего объема. Для критического индекса, характеризующего убывание, найдена зависимость от пространственных аргументов.
- Для тока частиц в слабонеоднородной А-фазе гелия-3 в лондоновском пределе доказано наличие поправок второй степени по градиентам параметра порядка, а также методом Лапласа получены поправки третьей степени содержащие логарифм.
- Получено новое интегральное представление николсоновского типа для произведения функций параболического цилиндра с противоположными аргументами и одинаковыми комплексными значками, вещественная часть которых отрицательна.
- Получено эффективное действие для антиферромагнитной фазы трехзонной модели Хаббарда с отталкиванием как в критической области, так и вблизи нулевой температуры. Получен спектр возбуждений квазичастиц.
- Построена трансляционно-калибровочная полевая модель модифицированных дислокаций, обладающих ядром конечного размера. В первом и втором порядках малости по модулю вектора Бюргерса получены компоненты тензора напряжений винтовой дислокации в цилиндре, которые определены как вне, так и внутри ядра дефекта.
- Развита методика вычисления перенормировки упругого модуля сдвига, вызванной зарождением диполей модифицированных винтовых дислокаций. Выявлена зависимость закона перенормировки от отношения радиусов ядра дислокации и поперечного сечения цилиндра.

Апробация работы

Результаты докладывались на семинарах ПОМИ, С.-Петербургского Политехнического университета, Международного центра теоретической физики в Варшаве, Лаборатории низких температур Хельсинкского технологического университета, на международных конференциях по теоретической и математической физике:

- ◆ *Summer School on Geometry, Topology, and Gauging* (Jablonna, Poland, 1989);
- ◆ *Symposium on Vortices, Interfaces and Mesoscopic Phenomena in Quantum Systems* (Jyväskylä, Finland, June 4–9, 1994);

- ◆ Workshops on Condensed Matter Physics: ICTP (Trieste, Italy) 1994, 1995; ISI (Torino, Italy) 1995;
- ◆ *Third International Seminar POMI-Florence on Quantum Groups and Integrable Systems* (St.-Petersburg, July 2–6, 2001);
- ◆ The 6th International Conference “*Path Integrals from peV to TeV*” (Florence, Italy, August 25–29, 1998); The 8th International Conference “*Path Integrals from Quantum Information to Cosmology*” (Prague, Czech Republic, June 6–10, 2005); The 9th International Conference “*Path Integrals – New Trends and Perspectives*” (Dresden, Germany, September 23–28, 2007);
- ◆ International Workshops on “Classical and Quantum Integrable Systems” CQIS-08 (IHEP, Protvino, Russia, January 21–24, 2008), CQIS-11 (IHEP, Protvino, Russia, January 24–27, 2011), CQIS-12 (JINR, Dubna, Russia, January 23–27, 2012); International Conference “Conformal Field Theory, Integrable Systems, and Liouville Gravity” (Chernogolovka, Russia, June 27 – July 2, 2009);
- ◆ III, IV International Conferences “Models in Quantum Field Theory” (St.-Petersburg, Physical Department of St.-Petersburg State University), MQFT-2010 (October 18–22, 2010), MQFT-2012 (September 24–27, 2012);
- ◆ Marcel Grossmann Meeting MG13 on Recent Developments in General Relativity, Gravitation, and Relativistic Field Theory (Stockholm University, Stockholm, Sweden, July 1–7, 2012);
- ◆ Конференция “Квантовый и классический методы обратной задачи” (МИАН–ПОМИ, 19–21 декабря, 2012)

Публикации

В ходе исследований по теме диссертации опубликовано 30 статей в ведущих отечественных и зарубежных рецензируемых научных журналах из списка ВАК.

Личный вклад автора

Все основные результаты, выносимые на защиту, принадлежат соискателю. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь материал, который был получен непосредственно соискателем.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы. Объем диссертации – 184 страницы. Библиография включает 195 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение

Во вводной части диссертации приведена общая характеристика работы, включающая актуальность исследованных тем и обзор основных методов, а также обсуждается структура работы.

Глава 1

• XXZ магнетик Гейзенберга. Корреляционные функции и комбинаторика плоских разбиений

Гамильтониан квантовой XXZ модели Гейзенберга, описывающей состояния спинов “вверх” и “вниз” на цепочке из $M + 1$ узлов, имеет вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M (\sigma_{k+1}^- \sigma_k^+ + \sigma_{k+1}^+ \sigma_k^- + \frac{\Delta}{2} (\sigma_{k+1}^z \sigma_k^z - 1) + h \sigma_k^z), \quad (1)$$

где $\Delta \in \mathbb{R}$ – анизотропия, $h \in \mathbb{R}$ – магнитное поле, и спиновые операторы на узлах σ_k^\pm и σ_k^z подчиняются алгебре: $[\sigma_k^+, \sigma_l^-] = \delta_{k,l} \sigma_l^z$, $[\sigma_k^z, \sigma_l^\pm] = \pm 2\delta_{k,l} \sigma_l^\pm$. Цепочка периодична. Пусть вектор состояния $|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle$, $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_N)$, отвечает N спином “вниз”. Гамильтониан (1) диагонализует на векторах $|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle$, если и только если параметры $u_j^2 \equiv e^{i\theta_j}$ удовлетворяют уравнениям Бете. В работах [1–4] рассматриваются два предела XXZ модели: $\Delta \rightarrow 0$ ($XX0$ магнетик) и $\Delta \rightarrow -\infty$ (изинговский предел). В обоих пределах состояния $|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle$ при произвольном \mathbf{u} допускают представление в терминах симметрических функций Шура. Пусть координаты узлов, занятых спинами “вниз”, образуют строго убывающее разбиение $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, где $M \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N \geq 0$. Тогда при $\Delta \rightarrow 0$ имеем представление для $|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle$:

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \subseteq \{\mathcal{M}^N\}} S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}^2) \left(\prod_{k=1}^N \sigma_{\mu_k}^- \right) |\uparrow\rangle, \quad S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}^2) \equiv \frac{\det(u_j^{2(\lambda_k + N - k)})_{1 \leq j, k \leq N}}{\mathcal{V}_N(\mathbf{u}^2)}, \quad (2)$$

где $|\uparrow\rangle \equiv \bigotimes_{n=0}^M |\uparrow\rangle_n$ – состояние со всеми спинами “вверх”, $S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}^2)$ – функция Шура, и $\mathcal{V}_N(\mathbf{u}^2) = \prod_{1 \leq i < k \leq N} (u_k^2 - u_i^2)$ – определитель Вандермонда. Суммирование в (2) идет по нестрогим разбиениям $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\delta} = (N - 1, N - 2, \dots, 1, 0)$, для которых $\mathcal{M} = M + 1 - N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Состояние $|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle$ при $\Delta \rightarrow -\infty$ также задается соотношением (2), но суммирование идет по нестрогим разбиениям $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\delta}$, для которых $\mathcal{M} = M + 2 - 2N$. Представление (2) позволяет применить

теорию симметрических функций к вычислению форм-факторов и температурных корреляционных функций в пределах $\Delta \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow -\infty$.

Определим температурные корреляционные функции, называемые *выживанием ферромагнитной струны* и *выживанием доменной стенки*. Выживание ферромагнитной струны связано с оператором $\bar{\Pi}_n$, обеспечивающим возникновение n последовательных спинов “вверх”:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) \equiv \frac{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) | e^{-\beta \mathcal{H}} | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}, \quad \bar{\Pi}_n \equiv \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\sigma_j^0 + \sigma_j^z}{2}, \quad (3)$$

где \mathcal{H} – гамильтониан и β – обратная температура. В (3) приняты обозначения: $|\Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g)\rangle \equiv |\Psi_N(e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}^g})\rangle$ и $e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}^g} \equiv (e^{\frac{i}{2}\theta_1^g}, e^{\frac{i}{2}\theta_2^g}, \dots, e^{\frac{i}{2}\theta_N^g})$, где $\boldsymbol{\theta}^g = (\theta_1^g, \theta_2^g, \dots, \theta_N^g)$ – набор “фаз”, отвечающих основному состоянию. Выживание доменной стенки связано с оператором \bar{F}_n , порождающим n последовательных спинов “вниз”:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) \equiv \frac{\langle \Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g) | \bar{F}_n^+ e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{F}_n | \Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}{\langle \Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g) | e^{-\beta \mathcal{H}} | \Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}, \quad \bar{F}_n \equiv \prod_{j=0}^{n-1} \sigma_j^-, \quad (4)$$

где \bar{F}_n^+ – эрмитово сопряженный оператор, и $|\Psi_{N-n}(\boldsymbol{\theta}^g)\rangle$ определяется набором “фаз” $\boldsymbol{\theta}^g = (\theta_1^g, \theta_2^g, \dots, \theta_{N-n}^g)$.

Для ХХ0 модели бетевское решение задается набором “фаз” $\theta_j = \frac{2\pi}{M+1}(I_j - \frac{N-1}{2})$, $1 \leq j \leq N$, где $M \geq I_1 > I_2 > \dots > I_N \geq 0$, и для нормированного форм-фактора оператора $\bar{\Pi}_n$ (3) получаем выражение

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}, n) \equiv \frac{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}) \rangle}{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}) | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}) \rangle} = \det \left(\delta_{kj} - \frac{e^{i(n-1)(\theta_k - \theta_j)/2} \sin \frac{n(\theta_k - \theta_j)}{2}}{M+1 \sin \frac{\theta_k - \theta_j}{2}} \right)_{1 \leq k, j \leq N},$$

известное как *вероятность образования пустоты*, то есть вероятность того, что n спинов “вверх” оказываются последовательными. Параметры θ_j^g , $1 \leq j \leq N$, основного состояния ХХ0 модели задаются $I_j = N - j$ и для коррелятора (3) получаем:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta) = \frac{e^{\beta E_N(\boldsymbol{\theta}^g)}}{(M+1)^N} \det \left(\sum_{k,l=n}^M F_{k;l}(\beta) e^{i(\theta_k^g - k\theta_j^g)} \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad (5)$$

где $E_N(\boldsymbol{\theta}^g)$ – энергия основного состояния. В представлении (5) отражается связь коррелятора $\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta)$ с производящей функцией случайных блужданий N недружественных пешеходов $\det(F_{\mu_k^L; \mu_l^R}(\beta))_{1 \leq k, l \leq N}$ (убывающие разбиения $\boldsymbol{\mu}^L$ и $\boldsymbol{\mu}^R$, $M \geq \mu_1^\# > \mu_2^\# > \dots > \mu_N^\# \geq 0$, отвечают начальным и конечным положениям пешеходов, $\#$ есть L или R). Здесь функция

$$F_{k;l}(\beta) \equiv \frac{1}{M+1} \sum_{s=0}^M e^{\beta \cos \phi_s} e^{i\phi_s(k-l)}, \quad \phi_s = \frac{2\pi}{M+1} \left(s - \frac{M}{2} \right), \quad (6)$$

выражает амплитуду перехода $\langle \uparrow | \sigma_k^+ e^{-\beta \mathcal{H}} \sigma_l^- | \uparrow \rangle$, являющуюся производящей функцией случайных блужданий между l -ым и k -ым узлами периодической цепочки.

Вычисление форм-фактора $\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle$ оператора \bar{F}_n в ХХ0 случае связано с суммами произведений функций Шура, для которых в [4] доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1: Пусть λ есть нестрогое разбиение длины $N-n$, и разбиение $\hat{\lambda}$ длины N задается $\hat{\lambda}_p = \lambda_p$, $1 \leq p \leq N-n$, и $\hat{\lambda}_p = 0$, $N-n < p \leq N$. Тогда имеет место формула суммирования:

$$\sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^{N-n}\}} S_{\hat{\lambda}}(\mathbf{v}_N^{-2}) S_{\lambda}(\mathbf{u}_{N-n}^2) = \left(\prod_{l=1}^{N-n} u_l^{-2n} \right) \frac{\det(\bar{T}_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_{N-n}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_N^{-2})}, \quad (7)$$

где элементы матрицы $(\bar{T}_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{kj} &= \frac{1 - (u_k^2/v_j^2)^{M+1}}{1 - u_k^2/v_j^2}, \quad 1 \leq k \leq N-n, \quad 1 \leq j \leq N, \\ \bar{T}_{kj} &= v_j^{-2(N-k)}, \quad N-n+1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \end{aligned} \quad (8)$$

В доказательстве (7) используется выражение для форм-фактора:

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle = \frac{\det(\bar{T}_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{u}_{N-n}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}_N^{-2})},$$

где матрица \bar{T} задается (8), [4]. При этом вычисление коррелятора $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g, n, \beta)$ (4) приводит к замкнутому выражению такого же типа, как и выражение (5), [2, 4].

Форм-факторы $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{P}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ и $\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle$, вычисленные в q -параметризации $\mathbf{v}^{-2} = \mathbf{q} \equiv (q, q^2, \dots, q^N)$, $\mathbf{u}^2 = \mathbf{q}/q = (1, q, \dots, q^{N-1})$, связаны с производящими функциями плоских разбиений в ящике. Пусть q -биномиальный определитель \mathbf{B}_q задается выражением:

$$\mathbf{B}_q \equiv \det \left(\left[\begin{array}{c} N+L+i-1 \\ L+j-1 \end{array} \right]_{1 \leq i, j \leq \mathcal{P}} \right), \quad \left[\begin{array}{c} N \\ r \end{array} \right] \equiv \frac{[N]!}{[r]! [N-r]!}, \quad (9)$$

где $[n]! \equiv [1][2] \dots [n]$ – q -факториал, $[0]! \equiv 1$, и q -число $[n] \equiv \frac{1-q^n}{1-q}$ есть q -аналог положительного целого $n \in \mathbb{Z}^+$ [A17]. Вычисление q -параметризованных форм-факторов использует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2: Пусть элементы (8) вычислены в q -параметризации:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{kj} &= \frac{1 - q^{(P+1)(j+k-1)}}{1 - q^{j+k-1}}, \quad 1 \leq k \leq L, \quad 1 \leq j \leq N, \\ \bar{T}_{kj} &= q^{j(N-k)}, \quad L+1 < k \leq N, \quad 1 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\frac{P}{2} < N < P$, $L \leq N$ (при $L = N$ имеем один блок). Определитель матрицы $(\bar{T})_{1 \leq j, k \leq N}$ (10) выражается соотношением:

$$q^{-\frac{L}{2}(L-1)(N-L)} \frac{\det(\bar{T})_{1 \leq j, k \leq N}}{\mathcal{V}_N(\mathbf{q}) \mathcal{V}_L(\mathbf{q}/q)} = q^{\frac{N}{2}(1-P)\mathcal{P}} \mathbf{B}_q = \prod_{k=1}^{\mathcal{P}} \prod_{j=1}^L \frac{1 - q^{j+k+N-1}}{1 - q^{j+k-1}} = Z_q(L, N, \mathcal{P}), \quad (11)$$

где $\mathcal{P} \equiv P - N + 1$, определитель \mathbf{B}_q задается (9), $\mathcal{V}_N(\mathbf{q})$, $\mathcal{V}_L(\mathbf{q}/q)$ – определители Вандермонда, и $Z_q(L, N, \mathcal{P})$ – производящая функция плоских разбиений в ящике $\mathcal{B}(L, N, \mathcal{P})$ размера $L \times N \times \mathcal{P}$.

В пределе $q \rightarrow 1$ производящая функция $Z_q(L, N, \mathcal{P})$ дает число разбиений в ящике (формула Мак-Магона):

$$Z_q(L, N, \mathcal{P}) = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{\mathcal{P}+j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} \xrightarrow{q \rightarrow 1} A(L, N, \mathcal{P}) = \det \left(\left(\begin{array}{c} N + L + i - 1 \\ L + j - 1 \end{array} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq \mathcal{P}}. \quad (12)$$

Биномиальный определитель в правой части (12) равен числу самоизбегающих путей на квадратной решетке между точками $A_i = (0, N + L + i - 1)$ и $B_i = (L + i - 1, L + i - 1)$, $1 \leq i \leq \mathcal{P}$. Это число равно также числу путей, соединяющих точки $C_i = (i, N + L + i - 1)$ и B_i и образующих конфигурацию *арбуз* [A18]. Рисунок 1 демонстрирует биекцию между арбузами и плоскими разбиениями в ящике для $\mathcal{P} = 3$. Производящая функция $Z_q(N, N, \mathcal{P})$ связана с производящей функцией плоских

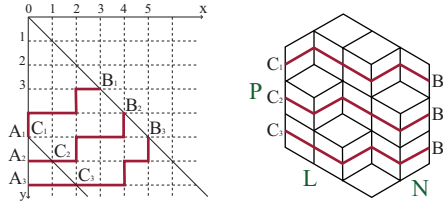


Рис. 1: Самоизбегающие решеточные пути, образующие конфигурацию *арбуз*, и плоское разбиение с градиентными линиями.

разбиений строгих по столбцам $Z_q^{\text{cspp}}(N, N, \mathcal{P})$: $Z_q(N, N, \mathcal{P}) = q^{\frac{N^2}{2}(1-N)} Z_q^{\text{cspp}}(N, N, \mathcal{P})$. Таким образом, $A^{\text{cspp}}(N, N, \mathcal{P}) = A(N, N, \mathcal{P})$.

► *Утверждение 1* Использование (11) позволяет связать форм-факторы с числами плоских разбиений. В $X\bar{X}0$ случае для форм-фактора оператора $\bar{\Pi}_n$ получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle &= q^{nN^2} \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{1 - q^{M-n+1+j-k}}{1 - q^{j+k-1}} \\ &= q^{\frac{N^2}{2}(2n+1-N)} Z_q^{\text{cspp}}(N, N, M - n) \xrightarrow{q \rightarrow 1} A^{\text{cspp}}(N, N, M - n), \end{aligned} \quad (13)$$

где $A^{\text{cspp}}(N, N, M-n)$ – число разбиений строгих по столбцам в ящике $\mathcal{B}(N, N, M-n)$. Аналогично, $\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{F}_n | \Psi_{N-n}((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle$ есть производящая функция плоских разбиений в ящике $\mathcal{B}(N-n, N, \mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{F}_n | \Psi_{N-n}((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle &= q^{\frac{n}{2}(N-n)(N-n-1)} \prod_{k=1}^{\mathcal{M}} \prod_{j=1}^{N-n} \frac{1 - q^{j+k+N-1}}{1 - q^{j+k-1}} \\ &= q^{\frac{n}{2}(N-n)(N-n-1)} Z_q(N-n, N, \mathcal{M}) \xrightarrow{q \rightarrow 1} A(N-n, N, \mathcal{M}). \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношение (12) ведет к интерпретации чисел $A^{\text{cspp}}(N, N, M-n)$ и $A(N-n, N, \mathcal{M})$ в терминах самоизбегающих путей на квадратной решетке.

Далее, оценка корреляторов (3) и (4) при $1 \ll N \ll M$ и $T \ll 1$ дает:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq \frac{(A^{\text{cspp}}(N, N, M-n))^2}{\beta^{\frac{N^2}{2}}} \times \frac{\mathcal{I}_N}{\langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}^g) \rangle}, \quad (15)$$

$$\mathcal{I}_N \equiv \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{1 \leq k < l \leq N} |x_k - x_l|^2 \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_N}{(2\pi)^N}, \quad (16)$$

где \mathcal{I}_N – интеграл Мехты, который вычисляется: $\mathcal{I}_N = e^{\varphi_N}$, $\varphi_N \equiv \sum_{k=1}^N \log \frac{\Gamma(k)}{(2\pi)^{1/2}}$. Окончательно, для $\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta)$ (15) и $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta)$ оценки имеют вид [4]:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq (A^{\text{cspp}}(N, N, M-n))^2 e^{\Phi(N, M, \beta)}, \quad (17)$$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq A^2(N-n, N, \mathcal{M}) e^{\Phi(N, M, \beta)}, \quad (18)$$

где $\Phi(N, M, \beta) \equiv N^2 \log \frac{2\pi}{M+1} - \frac{N^2}{2} \log \beta + 3\varphi_N$. ◀

Для $A^{\text{cspp}}(N, N, M-n)$ приходим к оценке:

$$\log A^{\text{cspp}}(N, N, M-n) \simeq N^2 \log \left(\mathbf{B} \frac{M-n}{N} \right), \quad M-n \gg N \gg 1,$$

где \mathbf{B} – некоторая постоянная (а также \mathbf{A} , \mathbf{C} и \mathbf{D} ниже). Окончательно,

$$\log \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq N^2 \log \left(\mathbf{C} \frac{(M-n)^2}{M(N\beta)^{1/2}} \right). \quad (19)$$

Для растущих M , N и убывающей температуры T оценка (19) описывает убывание $\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta)$ при условии соблюдения неравенства $T < \frac{1}{\mathbf{C}^2} \frac{NM^2}{(M-n)^4}$. Аналогично оцениваем число плоских разбиений в ящике $A(N-n, N, \mathcal{M})$ и для (18) получаем:

$$\log \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq N^2 \log \left(\mathbf{A} \frac{N^{3/2}}{M\beta^{1/2}} \right) + 2N(N-n) \log \left(\mathbf{D} \frac{M-n}{2N-n} \right). \quad (20)$$

Из соотношения (20) также следует убывание $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta)$ при росте M , N и $\frac{1}{T}$.

► *Утверждение 2* В изинговском случае, решение для основного состояния есть $\theta_j^g \equiv \frac{2\pi}{M+1-N} \left(\frac{N+1}{2} - j \right)$, $1 \leq j \leq N$. Оценки принимают вид, [3]:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N((\mathbf{q}/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle = A^{\text{spp}}(N, N, M - n), \quad (21)$$

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^g \approx \mathbf{0}, n, \beta) \simeq (A^{\text{spp}}(N, N, M - n))^2 e^{\Phi(N, M, \beta)}, \quad (22)$$

где $A^{\text{spp}}(N, N, M - n) = \prod_{1 \leq k, j \leq N} \frac{M-n+3-j-k}{j+k-1}$ – число строгих плоских разбиений. ◀

Таким образом, возникновение q -биномиальных определителей в выражениях для q -параметризованных форм-факторов $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ и $\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{F}_n | \Psi(\mathbf{u}_{N-n}) \rangle$ вскрывает связь соотношений (13) и (14) с перечислением плоских разбиений и самоизбегающих решеточных путей [2–4]. При этом корреляционные функции (3) и (4) асимптотически связаны с квадратами чисел плоских разбиений (решеточных путей). Показатели экспонент $\Phi(N, M, \beta)$ в (17), (18) и (22) имеют вид свободной энергии при слабой связи некоторых решеточных калибровочных моделей, демонстрирующих фазовый переход третьего рода [A19].

• ХХ0 магнетик Гейзенберга и случайные блуждания недружественных пешеходов

Исследуется связь между случайными блужданиями на периодической цепочке и корреляционными функциями ХХ0 магнетика [1, 10]. Операторные средние над ферромагнитным состоянием играют роль производящих функций для числа путей случайных блужданий *недружественных пешеходов* (при встрече в любом из узлов недружественные пешеходы уничтожают друг друга). А именно, пусть \mathcal{D}_λ^K – оператор K -кратного дифференцирования по λ в точке $\lambda = 0$. Тогда число траекторий из K звеньев между l -ым и k -ым узлами $|P_K(l \rightarrow k)|$ выражается через $F_{k;l}(\beta)$ (6):

$$|P_K(l \rightarrow k)| \equiv \mathcal{D}_{\beta/2}^K [F_{k;l}(\beta)] = \frac{(m + 2L)!}{L! (m + L)!}, \quad (23)$$

где $m \equiv |l - k| \leq K$, $K + m = 0 \pmod{2}$, и $L \equiv (K - m)/2$.

Парная корреляционная функция спинов над основным состоянием, вычисленная по всем собственным состояниям ХХ0-магнетика,

$$\tilde{F}_{m+1;1}(\beta) \equiv \langle \sigma_{m+1}^+ e^{-\beta \mathcal{H}} \sigma_1^- \rangle_N \Big|_{M, N \gg 1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}'(\sigma_{m+1}^+ e^{-\beta \mathcal{H}} \sigma_1^-), \quad (24)$$

интерпретируется как производящая функция блужданий одиночного пешехода в среде с переменным числом недружественных соседей. Получена оценка для числа путей пешехода, перемещающегося между двумя узлами решетки на расстоянии m , когда число шагов $K = m + 2L$ велико ($1 \ll m \ll L$ и $L \sim m^2$). Картина блужданий в

представлении суперпозиции собственных состояний эквивалентна блужданиям исходного (основного) и одного, двух, трех, и т.д., виртуальных пешеходов.

► *Утверждение 3* Во втором порядке $\mathcal{D}_{\beta/2}^K[\tilde{F}_{m+1;1}(\beta)]$ имеет вид:

$$\frac{2^{4L}}{\pi L} e^{-m^2/(2L)} (M + 2mZ_1(m, L) - (\pi L)^{1/2} e^{m^2/(4L)} + O(m^{-1})), \quad (25)$$

$$Z_1(m, L) \equiv -1 + e^{m^2/(4L)} \frac{2}{m} \sum_{l=0}^{m/2} e^{-l^2/L}.$$

Первое слагаемое в (25) отвечает $M|P_K(1 \rightarrow m+1)|^2$ (см. (23)). Второе и третье слагаемые в (25) сравнимы с первым, что означает сопоставимость вкладов основного и виртуального пешеходов. ◀

• XY магнетик Гейзенберга и производящие функции корреляторов третьих компонент спинов

Развит подход функционального интегрирования к вычислению продольных корреляционных функций XY магнетика Гейзенберга в постоянном однородном магнитном поле [5–9]. Для корреляторов вводятся производящие функции, которые записываются в виде функциональных интегралов по антикоммутирующим переменным. Специфика функциональных интегралов состоит в том, что переменные интегрирования зависят от мнимого времени квазипериодично. Соответствующие граничные условия учитываются как связи, интегралы гауссова типа вычисляются и приводят к ответам в виде определителей. Для XX0 магнетика Гейзенберга рассматривается приложение для случая двухточечного коррелятора третьих компонент спинов с явной зависимостью от времени. Подход допускает обобщения.

Глава 2

• Сверхтекучий одномерный бозе-газ в гармоническом потенциале

В работах [11–17] рассматривается неоднородный бозе-газ со слабым отталкиванием на вещественной оси $\mathbb{R} \ni x$ во внешнем гармоническом потенциале $V(x) \equiv \frac{m}{2} \Omega^2 x^2$. Статистическая сумма модели записывается в виде функционального интеграла:

$$Z = \int e^{S[\psi, \bar{\psi}]} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (26)$$

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \int dx \left\{ \bar{\psi}(x, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mathcal{H} \right) \psi(x, \tau) - \frac{g}{2} |\psi(x, \tau)|^4 \right\}, \quad (27)$$

где $S[\psi, \bar{\psi}]$ – функционал действия. Гамильтониан \mathcal{H} в (27) имеет вид: $\mathcal{H} \equiv \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu + V(x)$, где m – масса частиц, μ – химический потенциал, $g > 0$ – константа связи.

Интегрирование в (26) идет по комплекснозначным функциям $\bar{\psi}(x, \tau)$, $\psi(x, \tau)$, которые квадратично интегрируемы на вещественной оси $x \in \mathbb{R}$ и периодичны с периодом $\beta = (k_B T)^{-1}$ по $\tau \in [0, \beta]$ (k_B – постоянная Больцмана и T – температура).

Хотя в одномерном однородном бозе-газе с дельта-образным взаимодействием отсутствует бозе-конденсация, нетривиальность основного состояния, связанная с макроскопическим заполнением низшего квантового уровня, проявляется в возникновении *квази-конденсата* (флуктуации плотности подавлены). Учет квази-конденсата для неоднородной системы (27) достигается разложением переменных интегрирования в (26): $\psi(x, \tau) = \psi_o(x, \tau) + \psi_e(x, \tau)$ и $\bar{\psi}(x, \tau) = \bar{\psi}_o(x, \tau) + \bar{\psi}_e(x, \tau)$, где $\bar{\psi}_o(x, \tau)$, $\psi_o(x, \tau)$ отвечают квази-конденсату и $\bar{\psi}_e(x, \tau)$, $\psi_e(x, \tau)$ отвечают высокоэнергетичным возбуждениям. Переменные $\bar{\psi}_e(x, \tau)$, $\psi_e(x, \tau)$ и $\bar{\psi}_o(x, \tau)$, $\psi_o(x, \tau)$ ортогональны, и интегрирование в (26) идет сначала по $\bar{\psi}_e(x, \tau)$, $\psi_e(x, \tau)$. В случае большого числа атомов в ловушке используется *приближение Томаса–Ферми*, состоящее в отбрасывании $\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ в уравнении Гросса–Питаевского для параметра порядка. Допустимость приближения Томаса–Ферми при описании бозе-газа в магнито-оптических ловушках надежно обоснована.

После интегрирования по $\bar{\psi}_e(x, \tau)$, $\psi_e(x, \tau)$ статсумма Z принимает вид:

$$Z \approx \int e^{S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o]} \mathcal{D}\psi_o \mathcal{D}\bar{\psi}_o,$$

где $S_{\text{eff}}[\psi_o, \bar{\psi}_o]$ – однопетлевое эффективное действие, зависящее только от $\psi_o, \bar{\psi}_o$ и полученное в приближении исключенного “самодействия” полей $\bar{\psi}_e(x, \tau)$, $\psi_e(x, \tau)$. Вводя переменные *плотность–фаза*, $\psi_o(x, \tau) = \rho^{1/2}(x, \tau) e^{i\varphi(x, \tau)}$, $\bar{\psi}_o(x, \tau) = \rho^{1/2}(x, \tau) \times e^{-i\varphi(x, \tau)}$, приходим к эффективному действию $S_{\text{eff}}[\rho, \varphi]$. Условие стационарности $\delta(S_{\text{eff}}[\rho, \varphi]) = 0$ приводит к паре уравнений типа Гросса–Питаевского:

$$\begin{aligned} i\partial_\tau \varphi + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_{xx}^2 \sqrt{\rho} - (\partial_x \varphi)^2 \right) + \Lambda - V(x) - g\rho &= 0, \\ i\partial_\tau \rho - \frac{\hbar^2}{m} \partial_x (\rho \partial_x \varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Lambda = \mu - 2g\rho_{\text{nc}}(0)$ – перенормированный химпотенциал и $\rho_{\text{nc}}(0)$ – плотность надконденсатных частиц. В приближении Томаса–Ферми отбрасываем $\frac{\partial_{xx}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$, требуем $\partial_\tau \rho = 0 = \partial_\tau \varphi$, и приходим к плотности квази-конденсата в области $|x| \leq R_c$:

$$\rho_{\text{TF}}(x) \equiv \frac{\Lambda}{g} \tilde{\rho}_{\text{TF}}(x) = \frac{\Lambda}{g} \left(1 - \frac{x^2}{R_c^2} \right) \Theta \left(1 - \frac{x^2}{R_c^2} \right), \quad (29)$$

где Θ – функция Хевисайда, $R_c \equiv \sqrt{\frac{2\Lambda}{m\Omega^2}}$ – граница квази-конденсата. Решение уравнений (28) может быть представлено в следующем виде: $\rho_0(x, \tau) = \rho_{\text{TF}}(x) + \pi_0(x, \tau)$.

Линеаризуя (28) в окрестности решения $\rho_0 = \rho_{TF}(x)$ (29) и делая замену $\pi_0 = e^{i\omega\tau}u(x)$, получаем уравнение Лежандра:

$$-\frac{\omega^2}{\hbar^2 v^2} u(x) + \frac{d}{dx} \left(\left(1 - \frac{x^2}{R_c^2}\right) \frac{d}{dx} u(x) \right) = 0, \quad (30)$$

где $v^2 \equiv \frac{\rho_{TF}(0)g}{m} = \frac{\Lambda}{m}$ – квадрат скорости звука. Уравнение (30) приводит к спектру надконденсатных возбуждений: $E_n = \hbar\Omega\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$, $n \geq 0$.

Двухточечная температурная корреляционная функция задается интегралом:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) = \frac{1}{Z} \int \bar{\psi}(x_1, \tau_1) \psi(x_2, \tau_2) e^{S[\psi, \bar{\psi}]} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (31)$$

где Z – статсумма (26) и S – действие (27). Интегрируем в (31) сначала по $\bar{\psi}_e, \psi_e$, чтобы при достаточно низких температурах выделить основной вклад за счет низколежащих возбуждений. Тогда в однопетлевом приближении (31) принимает вид интеграла по $\bar{\psi}_o, \psi_o$, который оценивается методом В. Н. Попова [A16]. В результате получаем:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)} \exp\left(-\frac{1}{2} (G(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) + G(x_2, \tau_2; x_1, \tau_1))\right). \quad (32)$$

где $\tilde{\rho}(\cdot) \equiv \tilde{\rho}_{TF}(\cdot)$ определяется в (29), и функция Грина $G(x, \tau; x', \tau')$, имеющая смысл коррелятора фаз, удовлетворяет неоднородному уравнению Стрингари:

$$\frac{1}{\hbar^2 v^2} \partial_{\tau\tau}^2 G(x, \tau; x', \tau') + \partial_x \left(\left(1 - \frac{x^2}{R_c^2}\right) \partial_x G(x, \tau; x', \tau') \right) = \frac{g}{\hbar^2 v^2} \delta(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (33)$$

Представление (32) оценивается для расстояний значительно меньших, чем размер области квази-конденсата. Пусть $T \rightarrow 0$ и граница области R_c растет. Тогда имеет место

► *Утверждение 4* При $k_B T \gg \hbar v / R_c \gg 1$ (высокотемпературный предел) соотношение (32) приводится к виду:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)}}{\left| \sinh \frac{\pi}{\hbar\beta v} (|\Delta x| + i\hbar v \Delta\tau) \right|^{1/\theta(x_1, x_2)}}, \quad \theta(x_1, x_2) \equiv \frac{2\pi\hbar}{mv} \rho(x_1, x_2), \quad (34)$$

где v определяется в (30), $\Delta x \equiv x_1 - x_2$, $\Delta\tau \equiv \tau_1 - \tau_2$ и $\rho(x_1, x_2) \equiv \frac{\Lambda}{g} \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4R_c^2}\right)$. В квазиоднородном пределе $x_1, x_2 \ll R_c$, $|\Delta x| \ll \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}, R_c \right\}$, и $\rho(x_1, x_2)$ принимает вид: $\rho(x_1, x_2) \approx \frac{\Lambda}{g} \left(1 - \frac{S^2}{2R_c^2}\right)$, $S \equiv \frac{x_1 + x_2}{2}$. Оценка (34) имеет степенной вид в пределе $\frac{|\Delta x|}{\hbar\beta v}, \frac{|\Delta\tau|}{\beta} \ll 1 \ll \frac{R_c}{\hbar\beta v}$:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)}}{\left| |\Delta x| + i\hbar v \Delta\tau \right|^{1/\theta(x_1, x_2)}}. \quad (35)$$

В пределе $1 \ll \frac{|\Delta x|}{\hbar\beta v} \ll \frac{R_c}{\hbar\beta v}$ соотношение (34) экспоненциально убывает:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \sqrt{\tilde{\rho}(x_1)\tilde{\rho}(x_2)} \exp\left(\frac{-|\Delta x| + i\hbar v \Delta\tau}{\xi(x, x')}\right), \quad (36)$$

где введена корреляционная длина $\xi(x_1, x_2) \equiv \frac{\hbar\beta v}{\pi}\theta(x_1, x_2)$.

В низкотемпературном пределе $k_B T \ll \hbar v/R_c$ решение (33) принимает вид:

$$G(x, \tau; x', \tau') = \left(\frac{-g}{\beta R_c}\right) \left[\frac{\beta^2}{4} B_2\left(\frac{\Delta\tau}{\beta}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n(x)\tilde{P}_n(x') \int_0^{\infty} e^{-sE_n^2} \vartheta_3\left(\frac{\Delta\tau}{\beta} \middle| i\frac{s}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2\right) ds \right],$$

где $\Delta\tau = \tau - \tau'$, ϑ_3 – тета-функция Якоби, функции $\tilde{P}_n(x) \equiv (n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} P_n(\frac{x}{R_c})$, $n \geq 0$, определены с помощью многочленов Лежандра и составляют полную ортонормальную систему в $L_2[-R_c, R_c]$ и B_2 – многочлен Бернулли. В ведущем приближении получаем при $1 \ll \frac{\beta\hbar v}{R_c} < \frac{1}{u_*} \ll \log \frac{1}{u_*}$, $u_* \equiv \frac{||x-x'| + i\hbar v(\tau-\tau')||}{R_c}$:

$$G(x, \tau; x', \tau') \simeq \frac{\Lambda}{2\pi\hbar v\rho(x, x')} \log \frac{||x-x'| + i\hbar v(\tau-\tau')||}{R_c}, \quad \rho(x, x') = \frac{\Lambda}{g} \left(1 - \frac{S^2}{2R_c^2}\right). \quad (37)$$

Использование (37) в (32) снова приводит к оценке (35). При этом $\theta(x_1, x_2)$ определяется в (34), однако $\rho(x_1, x_2)$ в (34) только приближенно совпадает с $\rho(x_1, x_2)$ (37). ◀

Таким образом, в термодинамическом пределе и при низкой температуре $\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2)$ (32) демонстрирует степенное поведение (35).

• Сверхтекучая А-фаза гелия-3 и ток частиц

В работах [18–22] рассматривается сверхтекучая слабонеоднородная А-фаза и вычисляется ток частиц \mathbf{j} , который определяется функциональным интегралом:

$$\mathbf{j} = \frac{i}{2} \sum_{s=\downarrow, \uparrow} \int \left(\int (\boldsymbol{\partial}\psi_s^* \psi_s - \psi_s^* \boldsymbol{\partial}\psi_s) d^3x \right) e^S \mathcal{D}(\psi_s^*, \psi_s), \quad (38)$$

где S – функционал действия нерелятивистской ферми-системы, описывающей гелий-3. Переменные интегрирования – комплекснозначные антикоммутирующие функции $\psi_s^*(\tau, \mathbf{r})$ и $\psi_s(\tau, \mathbf{r})$, где τ – “мнимое” время, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ и $s = \downarrow, \uparrow$. Кроме того, $\boldsymbol{\partial}$ – вектор частных производных, и $\mathcal{D}(\psi_s^*, \psi_s)$ – мера интегрирования. Переменные интегрирования в (38) разделяются на “быстрые” и “медленные”: $\psi_s^* = \psi_{1,s}^* + \psi_{0,s}^*$, $\psi_s = \psi_{1,s} + \psi_{0,s}$. После интегрирования в (38) по “быстрым” переменным $\psi_{1,s}^*$, $\psi_{1,s}$ получаем:

$$\mathbf{j} = \frac{2}{\beta} \sum_{\omega} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{k} g_{11}, \quad (39)$$

где нормальная функция Грина g_{11} определяется уравнением Дайсона–Горькова

$$\int \frac{d^3k''}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} (\partial_{\tau} - \xi_{k''})\delta_{kk''} & \frac{-1}{(2\pi)^3}\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') \\ \frac{-1}{(2\pi)^3}\Delta^*(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) & (\partial_{\tau} + \xi_{k''})\delta_{kk''} \end{pmatrix} g(\tau, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\tau\tau'} \mathbb{I}, \quad (40)$$

и интегрирование по \mathbf{k} идет в (39) вблизи сферы Ферми. В (40) приняты обозначения: $g(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ есть 2×2 матрица нормальных и аномальных двухточечных функций Грина, \mathbb{I} – единичная матрица, $\xi_k \equiv \frac{1}{2m}(k^2 - k_F^2)$, k_F – импульс Ферми, m – масса ферми-частиц и $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')$ – параметр порядка A -фазы. Суммирование в (39) идет по фермионным мацубаровским частотам.

Для слабонеоднородной A -фазы представляет интерес, [18–22], вычислить \mathbf{j} (39) в лондоновском пределе в виде асимптотического разложения по степеням производных от параметра порядка. Параметр порядка принимает вид: $\delta^{-1}\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \widehat{k} \cdot (\widehat{\Delta}_1(\mathbf{r}) + i\widehat{\Delta}_2(\mathbf{r}))$, где $\widehat{k} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, δ – амплитуда щели, $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$ – центр масс куперовской пары частиц в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , и импульс \mathbf{k} сопряжен $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Лондоновский предел задается соотношением $\frac{1}{\chi^2} \equiv \xi_0 |\boldsymbol{\partial} \otimes \widehat{l}| \ll 1$, где $\xi_0 = c_F/\delta$ – длина когерентности (c_F – скорость Ферми) и $\widehat{l} = \widehat{\Delta}_1 \times \widehat{\Delta}_2$. Используются сферические координаты и разложение в ряд Фурье по τ . Линеаризуя $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \approx \Delta(\widehat{k}, \rho = 0) + \alpha\rho$, сводим (40) к неоднородному уравнению:

$$(i\omega + \mathcal{H})G = e^{ix\xi(\alpha c_F)^{-1/2}} \mathbf{I}, \quad \mathcal{H} = i\sqrt{\alpha c_F} \sigma_3 \frac{d}{dx} - \sqrt{\alpha c_F} \sigma_1 x + \Delta \sigma_2, \quad (41)$$

где $x = \sqrt{\frac{\alpha}{c_F}}(\rho + \rho_0)$, $\Delta(\widehat{k}, \rho = 0) \equiv \alpha\rho_0 + i\Delta$, и гамильтониан \mathcal{H} выражен через матрицы Паули. При этом (39) принимает вид:

$$\mathbf{j} = \frac{k_F^3}{8\pi^3 c_F} \int d\Omega \widehat{k} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{\omega} \mathcal{J} \right), \quad \mathcal{J}(x) = \int d\xi e^{-ix\xi(\alpha c_F)^{-1/2}} G_{11}(x), \quad (42)$$

где $\int d\Omega$ означает интегрирование по единичной сфере. Одномерность уравнения (41) показывает, что трехмерная система свелась к одномерным подсистемам. Оператор \mathcal{H} (41) связан с квантованием электрона со спином в однородном магнитном поле.

► *Утверждение 5* Использование решения уравнения (41) в соотношении (42) приводит к представлению для \mathbf{j} при $T = 0$, [18–22]:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{\text{corr}}, \quad \mathbf{j}_{\text{corr}} = -\frac{k_F^3}{8\pi^3} \int d\Omega \widehat{k} \frac{\alpha\Delta}{|\Delta|^2} \Phi(x^2, Q), \quad (43)$$

$$\Phi(x^2, Q) = \int_0^\infty e^{-Qt} \left(\sqrt{\frac{\tanh t}{t}} e^{x^2(t - \tanh t)} \right)' dt, \quad Q = \frac{|\Delta|^2}{\alpha c_F}. \quad (44)$$

Ток \mathbf{j}_0 в (43) имеет известное выражение первого порядка, $\mathbf{j}_0 = \rho \mathbf{v}_s + \frac{1}{4m} \text{rot}(\rho \widehat{l}) + \mathbf{j}_{\text{an}}$, где $\mathbf{j}_{\text{an}} = -\frac{1}{2m} C_0 \widehat{l} (\widehat{l} \cdot \text{rot} \widehat{l})$, \mathbf{v}_s – сверхтекучая скорость, ρ – плотность жидкости и $C_0 \approx \rho$.

Представляют интерес три случая: $\text{rot} \widehat{l}$ параллелен, перпендикулярен, и произвольно ориентирован по отношению к \widehat{l} . Представление (44) оценивается по Лапласу

в лондоновском пределе до третьего порядка по градиентам \widehat{l} включительно. Получены коэффициенты при квадратичных членах, и получены новые поправки третьего порядка. В первом случае есть только логарифмическая поправка третьего порядка (квадратичная поправка пропорциональна $|\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}|$). Во втором случае есть и квадратичная ($\sim (\text{rot } \widehat{l})_{\perp} |\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}|$), и кубическая поправки. В третьем случае поправки обоих типов:

$$j_3 = \frac{k_F^3}{6\pi^2} \frac{1}{\xi_0 \chi^2} \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{\chi^2} + \frac{7}{4\chi^4} \log \frac{\mathcal{B}}{\chi^2} \right),$$

где $\mathcal{A} = 2/\sqrt{\pi} - 3/2$, и присутствие квадратичного члена $\mathcal{A}/(\xi_0 \chi^4)$ означает возможность возникновения следующих вкладов: $\xi_0 |\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}| (A(v_3 - \widehat{l} \cdot \text{rot } \widehat{l}/4m) + \frac{B}{m} (\partial_1 \widehat{l}_2 + \partial_2 \widehat{l}_1))$, где A и B – некоторые постоянные. Таким образом, любая компонента \mathbf{j} (43) имеет вид:

$$j = \text{const} \times \text{gr} \left(1 + \mathcal{A} \xi_0 |\widehat{l} \times \text{rot } \widehat{l}| + \mathcal{C} \xi_0^2 (\text{gr})^2 \log(\mathcal{B} \xi_0 \text{gr}) \right),$$

где gr есть некоторая комбинация производных параметра порядка \widehat{l} . ◀

При вычислении (43)–(44) формулируется и доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3: *Для произведения двух функций параболического цилиндра $D_{\nu}(x)D_{\nu}(-x)$, $\Re \nu < 0$, $x \in \mathbb{R}$, имеет место интегральное представление:*

$$D_{\nu}(x)D_{\nu}(-x) = 2^{-1/2} \Gamma^{-1}(-\nu) \int_0^{\infty} \exp \left(\left(\nu + \frac{1}{2} \right) t - \frac{x^2}{2} \tanh \frac{t}{2} \right) \frac{dt}{\sqrt{\sinh t}}.$$

• Спектр возбуждений в антиферромагнитной фазе трехзонной двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием.

В работах [23–25] рассмотрены антиферромагнетизм и сверхпроводимость в двумерной трехзонной модели Хаббарда со слабым отталкиванием. Функциональное интегрирование используется в [24, 25] для построения эффективного действия и для вычисления спектра бозевских возбуждений в антиферромагнитной фазе.

Глава 3

• Калибровочный подход к дислокациям и геометрические соотношения

Представляет интерес описывать дефекты в твердом теле (дислокации и дисклинации) с помощью лагранжева подхода, основанного на калибровочной группе $P(3) = T(3) \otimes SO(3)$. Связь соответствующих структурных уравнений Картана с геометрическими уравнениями теории дислокаций и дисклинаций Вольтерра проанализирована в [26, 27], где предложена геометрическая интерпретация плотностей дефектов и плотностей петель дефектов.

Алгебра Ли $\mathfrak{p}(3)$ группы $P(3)$ есть полупрямая сумма алгебр $\mathfrak{t}(3)$ и $\mathfrak{so}(3)$, где для $\mathfrak{t}(3)$ скобка тривиальна, а для $\mathfrak{so}(3)$ роль скобки играет векторное умножение. Рассмотрим $\mathfrak{p}(3)$ -значные дифференциальные формы как элементы пространств $V^{(n)}(M) \equiv \mathfrak{p}(3) \otimes \wedge^n(T^*M)$, $0 \leq n \leq 3$, где M – открытое множество в \mathbb{R}^3 и T^*M – кокасательное расслоение над M . При этом имеется расщепление: $V^{(n)}(M) \ni v^{(n)} \equiv \boldsymbol{\eta}^{(n)} \oplus \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$. Определим [27] внешнюю производную Шефера как гомеоморфизм $d^{\text{Sh}} : V^{(n)}(M) \longrightarrow V^{(n+1)}(M)$, где

$$d^{\text{Sh}}v^{(n)} = \begin{pmatrix} d\boldsymbol{\lambda}^{(n)} \\ d\boldsymbol{\eta}^{(n)} + d\mathbf{x} \overset{\times}{\wedge} \boldsymbol{\lambda}^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Символ $\overset{\times}{\wedge}$ в (45) означает внешнее умножение для форм и векторное – для их коэффициентов. Оператор d^{Sh} нильпотентен, $d^{\text{Sh}} \circ d^{\text{Sh}} = 0$. Пусть $\mathcal{A} \equiv \boldsymbol{\gamma} \oplus \boldsymbol{\zeta} \in V^{(1)}(M)$ и $\mathcal{F} \equiv \boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\theta} \in V^{(2)}(M)$, и пусть соблюдается $\mathcal{F} = d^{\text{Sh}}\mathcal{A}$. Плотности дисклинаций и дислокаций традиционного подхода [A20] трактуются в [26, 27] как коэффициенты 2-форм $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, а плотности петель дисклинаций и дислокаций – как коэффициенты 1-форм $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Уравнения непрерывности для плотностей дефектов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ принимают вид условия интегрируемости $d^{\text{Sh}}\mathcal{F} = 0$. Так как 2-форма \mathcal{F} инвариантна относительно сдвигов $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} + d^{\text{Sh}}v^{(0)}$, можно сказать, что теория дислокаций и дисклинаций есть абелева калибровочная модель с калибровочной группой $\mathfrak{p}(3) \approx \mathbb{R}^6$.

Рассмотрим $P(3)$ как калибровочную группу на главном расслоении $P(3)$ -реперов над областью трехмерного пространства. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ есть $SO(3)$ -часть связности $\boldsymbol{\phi} \oplus \boldsymbol{\omega}$ на $P(3)$ -расслоении. Расщепление калибровочного преобразования $P(3)$ -кривизны $\boldsymbol{\Phi} \oplus \boldsymbol{\mathcal{R}}$ показывает, что $\boldsymbol{\Phi}$ не совпадает с кручением линейной связности $\boldsymbol{\omega}$. Переход к ассоциированному $SO(3)$ -расслоению с 3-векторным сечением $\boldsymbol{\xi}$ и введение канонической 1-формы $\mathbf{B} = \boldsymbol{\phi} + d\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}$ позволяет перейти от уравнения Картана на главном $P(3)$ -расслоении к структурным уравнениям $SO(3)$ -расслоения с кручением:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\omega} + (1/2)\boldsymbol{\omega} \overset{\times}{\wedge} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\mathcal{R}} \\ d\mathbf{B} + \boldsymbol{\omega} \overset{\times}{\wedge} \mathbf{B} = \boldsymbol{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\xi \rightarrow \mathbf{x} \ll 1} \quad d^{\text{Sh}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{R}} \\ \boldsymbol{\mathcal{T}} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

где $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\mathcal{R}} \times \boldsymbol{\xi}$ – кручение линейной связности $\boldsymbol{\omega}$. Уравнения в левой части (46) описывают геометрию Римана–Картана, характеризуемую 2-формами кривизны $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ и кручения $\boldsymbol{\mathcal{T}}$. Представляя $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ (где \mathbf{u} есть малое смещение точки \mathbf{x} исходной конфигурации), можно прийти к соотношению в правой части (46), где $\boldsymbol{\omega}$ отождествляется с 1-формой плотности петель дисклинаций $\boldsymbol{\zeta}$, а $\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ приобретает смысл 1-формы плотности петель дислокаций $\boldsymbol{\gamma}$. Инфинитезимально $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ оказываются 2-формами плотностей дисклинаций и дислокаций. Тожества Бианки переходят в

уравнения непрерывности плотностей дефектов $d\mathcal{R} = 0$, $d\mathcal{T} = \mathcal{R} \times_{\wedge} dx$. Таким образом, для $P(3)$ -калибровочного подхода возникает инфинитезимальная интерпретация в терминах дислокаций и дисклинаций.

После выбора геометрической арены необходим выбор лагранжиана. Калибровочная группа $T(3)$ имеет самостоятельный интерес, в связи с чем в [28] для описания статистики дислокаций предложена $T(3)$ -калибровочная модель, основанная на калибровочном уравнении эйнштейновского типа. Рассмотрены два варианта калибровочного уравнения. В одном варианте (*I*), в правой части уравнения стоит тензор упругих напряжений, и в линейном подходе возникают потенциалы напряжений, совпадающие в малом с классическими потенциалами напряжений. На больших расстояниях асимптотики быстро убывают и дислокации “экранируются”. Во втором варианте (*II*) в правой части стоит разность между полным и фоновым тензорами напряжений. В результате классические дислокации модифицируются за счет возникновения ядра, внутри которого отсутствуют особенности напряжений и деформаций.

• **Модифицированная винтовая дислокация и квадратичные поправки к тензору напряжений**

Подход [28] развивается в [29] на примере модифицированной винтовой дислокации, для которой вычисляются квадратичные поправки к тензору напряжений. В качестве калибровочного используется уравнение типа *II*. Особенности компонент напряжений сглаживаются в линейном и квадратичном приближениях, и в ядре конечного размера возникает регулярное описание. При этом возникают характеристические длины, зависящие от упругих модулей второго и третьего порядков. На основе подхода, учитывающего конечность ядер, построено термодинамическое описание твердых тел с большим числом несингулярных дефектов. При этом для цилиндра с прямолинейными винтовыми дислокациями возникает эквивалентное описание в терминах двумерного кулоновского газа. Конечность ядер связана со сглаживанием кулоновского потенциала и проявляется в перенормировке упругого модуля сдвига.

Традиционный подход [A21] дает квадратичный вклад $\sigma_{bg}^{(2)}$ в тензор напряжений, но при этом возникает искусственное обрезание на расстоянии от оси дефекта порядка радиуса ядра дислокации. Подход [29] обобщает [A21] и приводит к описанию, имеющему продолжение внутрь ядра, которое возникает самосогласованно. Пусть отображение $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ задает деформацию начального состояния, и $\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}$ есть смещение. Отнесем начальное и конечное состояния тела к координатным системам $\{x^i\}$ и $\{x^a\}$ с квадратами длин $g_{ij}dx^i dx^j$ и $\eta_{ab}dx^a dx^b$. Компоненты метрик связаны соотношением $\eta_{ab} = g_{ij}\mathcal{E}_a^i \mathcal{E}_b^j$, где $dx^i = \mathcal{E}_a^i dx^a$. Компоненты \mathcal{E}_a^i ортогональ-

ны триадам e^a_i , определенным с помощью $\partial_i = e^a_i \partial_a$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$. Описание в [29] (как и в [A21]) основано на эйлеровом тензоре деформаций e_{ab} :

$$\eta_{ab} d\xi^a d\xi^b - g_{ij} dx^i dx^j = 2e_{ab} d\xi^a d\xi^b, \quad 2e_{ab} \equiv \eta_{ab} - g_{ab}, \quad (47)$$

где $g_{ab} \equiv g_{ij} \mathcal{B}_a^i \mathcal{B}_b^j$ – тензор Коши, и компоненты \mathcal{B}_a^i определяются 1-формой $dx^i = \mathcal{B}_a^i d\xi^a$. Для учета дислокаций рассматриваем 1-форму с коэффициентами $\mathcal{B}_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} - \phi_a^i$, которые при неоднородных T(3)-преобразованиях $x^i \rightarrow x^i + \eta^i(x)$ инвариантны так же, как $\mathcal{B}_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a}$ – при однородных сдвигах $x^i \rightarrow x^i + \eta^i$. При этом преобразование калибровочных потенциалов ϕ_a^i обеспечивает инвариантность \mathcal{B}_a^i :

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \longrightarrow \frac{\partial x^j}{\partial \xi^a} \left(\delta_j^i + \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right), \quad \phi_a^i \longrightarrow \phi_a^i + \frac{\partial x^j}{\partial \xi^a} \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}.$$

В трансляционно-калибровочном подходе решения для (модифицированных) дислокаций связаны с компонентами ϕ_a^i калибровочного поля ϕ .

Трансляционная часть полного 8-параметрического калибровочного лагранжиана $\mathcal{L}(\omega, \mathcal{B}, \Lambda)$ [A22] квадратично зависит от кручения (от плотности дислокаций) $\mathcal{T}_{ab}^c = (\partial_a \mathcal{B}_b^i - \partial_b \mathcal{B}_a^i) B_i^c$ (потенциалы B_i^c двойственны \mathcal{B}_a^i , $B_i^c \mathcal{B}_a^i = \delta_a^c$, $B_i^c \mathcal{B}_a^j = \delta_j^c$):

$$\mathcal{B}^{-1} \mathcal{L}(0, \mathcal{B}, 0) = -\frac{1}{4} \mathcal{T}_{abc} (\beta_1 \mathcal{T}^{abc} + \beta_2 \mathcal{T}^{cab} + \beta_3 \mathcal{T}^{eb} \eta^{ac}), \quad \mathcal{B} \equiv \det \mathcal{B}_a^i. \quad (48)$$

Используем (48) для описания собственной энергии ядер дислокаций. Упругую энергию выберем в следующем виде:

$$E_{el} = J \mathcal{I}_1^2(\boldsymbol{\sigma}) + K \mathcal{I}_2(\boldsymbol{\sigma}) + L \mathcal{I}_1^3(\boldsymbol{\sigma}) + M \mathcal{I}_1(\boldsymbol{\sigma}) \mathcal{I}_2(\boldsymbol{\sigma}) + N \mathcal{I}_3(\boldsymbol{\sigma}), \quad (49)$$

где $J = \frac{1}{2E}$, $K = -\frac{1}{2\mu}$ (μ – модуль сдвига и E – модуль Юнга), в то время как L, M, N – коэффициенты упругости третьего порядка. Символы $\mathcal{I}_{1,2,3}(\boldsymbol{\sigma})$ означают инварианты тензора второго ранга $\boldsymbol{\sigma}$ в трехмерном пространстве. Определения (48) (при выборе параметров $\beta_1 = -\ell$, $\beta_2 = 2\ell$, $\beta_3 = 4\ell$) и (49) приводят к калибровочному уравнению, предложенному в [28]:

$$G^{ef} = \frac{1}{2\ell} (\sigma^{ef} - (\sigma_{bg})^{ef}), \quad (50)$$

где ℓ характеризует энергию калибровочного поля ϕ , $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}_{bg}$ – полный и фоновый тензоры напряжений. Тензор Эйнштейна $G^{ef} \equiv \frac{1}{4} \mathcal{E}^{ab} \mathcal{E}^{cd} R_{abcd}$ в (50) определяется с помощью тензора Леви–Чивиты \mathcal{E}^{abc} и кривизны Римана–Кристоффеля R_{abc}^d , вычисленных для метрики η_{ab} (47). Тензор $\boldsymbol{\sigma}_{bg}$ определяется заданным распределением дислокационных особенностей, и $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{bg}$ играет роль вынуждающей силы. Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид: $\nabla_a^{(\eta)} \sigma^{ab} = 0$, $\nabla_a^{(\eta)} (\sigma_{bg})^{ab} = 0$, где $\nabla_a^{(\eta)}$ – ковариантная производная в метрике η_{ab} .

Пусть модифицированная винтовая дислокация расположена вдоль бесконечного цилиндра. Тензор напряжений получен в [29] в двух порядках в виде сумм классического и калибровочного вкладов. В первом порядке потенциал напряжений $\phi^{(1)}$ удовлетворяет калибровочному уравнению

$$(\Delta - \kappa^2) (\phi^{(1)} - \phi_{\text{bg}}^{(1)}) = b \delta^{(2)}(x), \quad \phi_{\text{bg}}^{(1)} \equiv (-b/2\pi) \log \rho, \quad (51)$$

где b – длина вектора Бюргера, играющего роль малого параметра. Решение имеет вид в цилиндрических координатах: $\phi^{(1)} = \phi_{\text{bg}}^{(1)} - f_S$, $f_S \equiv \frac{b}{2\pi} K_0(\kappa\rho)$, где K_0 – модифицированная функция Бесселя. Единственная ненулевая компонента напряжений, $\sigma_{\phi z}^{(1)}$, принимает в первом порядке вид:

$$\sigma_{\phi z}^{(1)} = -\mu \partial_\rho \phi^{(1)} = \frac{b\mu}{2\pi} \frac{1}{\rho} (1 - \kappa\rho K_1(\kappa\rho)), \quad (\sigma_{\text{bg}})_{\phi z} = \frac{b\mu}{2\pi} \frac{1}{\rho}. \quad (52)$$

Ядро характеризуется $\rho \lesssim \kappa^{-1}$, так как калибровочная поправка к $\frac{1}{\rho}$ экспоненциально мала вне указанной области. Внутри нее $\sigma_{\phi z}^{(1)} \sim A\rho \log(B\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$. Во втором порядке отличны от нуля компоненты $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$, $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}$, $\sigma_{zz}^{(2)}$, и вне ядра получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2)} \Big|_{\kappa\rho \gg 1} &\equiv (\sigma_{\text{far}}^{(2)})_{\rho\rho} = \frac{2\tilde{n}}{\rho^2} \left(\log \frac{\rho}{\rho_1} - \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 \log \frac{\rho_e}{\rho_1} \right), \\ \sigma_{\phi\phi}^{(2)} \Big|_{\kappa\rho \gg 1} &\equiv (\sigma_{\text{far}}^{(2)})_{\phi\phi} = \frac{2\tilde{n}}{\rho^2} \left(1 - \log \frac{\rho}{\rho_1} - \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 \log \frac{\rho_e}{\rho_1} \right), \end{aligned} \quad (53)$$

где ρ_e – внешний радиус цилиндра и $\tilde{n} \sim \mu b^2$. Асимптотика $\sigma_{\text{far}}^{(2)}$ отличается от решения $\sigma_{\text{bg}}^{(2)}$ [A21] тем, что в (53) возникла длина ρ_1 вместо искусственного радиуса ядра ρ_c классического подхода. Параметр ρ_1 выражается через упругие модули второго и третьего порядков (то есть определяется материалом цилиндра) [29]. При $\rho \rightarrow 0$ компоненты $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$, $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}$ ведут себя как $o(\rho^2 \log^3 \rho)$. Компонента $\sigma_{zz}^{(2)}$ также имеет на больших расстояниях классический вид, зависящий от двух новых длин ρ_2 и ρ_* . Таким образом в калибровочной модели ядро дислокации имеет сложное “устройство”, характеризуемое длинами ρ_1 , ρ_2 , ρ_* , зависящими от упругих констант.

• Перенормировка упругих модулей и влияние ядер дефектов

Теоретико-полевой подход [30] дает термодинамическое описание несингулярных винтовых дислокаций в упругом цилиндре. Статистическая сумма \mathcal{Z} цилиндра, содержащего большое число дислокаций параллельных его оси, записывается в виде функционального интеграла:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N} \int e^{-\beta W} \mathcal{D}(\sigma_{ij}^b, \sigma_{ij}^c, u_i, e_{ij}), \quad (54)$$

где $W \equiv E - iE_{\text{ext}}$, $E \equiv E_{\text{el}} + E_{\text{core}}$, и β – обратная температура T . Функционал W состоит из вкладов:

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{1}{4\mu} \int ((\sigma_{ij}^{\text{b}} + \sigma_{ij}^{\text{c}})^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{ii}^{\text{b}} + \sigma_{ii}^{\text{c}})^2) d^3x, \\ E_{\text{core}} &= \int (\ell e_{ij} (\text{inc } e)_{ij} - e_{ij} \sigma_{ij}^{\text{c}}) d^3x, \\ E_{\text{ext}} &= \frac{1}{2} \int \sigma_{ij}^{\text{b}} (\partial_i u_j + \partial_j u_i - 2\mathcal{P}_{ij}) d^3x, \end{aligned} \quad (55)$$

где $(\text{inc } e)_{ij} = -\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \partial_k \partial_m e_{ln}$ (ϵ_{ikl} – антисимметричный тензор). Здесь E_{el} – упругая энергия, возникающая из квадратичной части (49) (ν – коэффициент Пуассона), и E_{core} – собственная энергия дислокационных ядер, соответствующая (48). Кроме того, E_{ext} задает уравнения равновесия и фиксирует распределение фоновых (сингулярных) дислокаций. При этом, σ_{ij}^{b} – фоновый тензор напряжений, отвечающий $(\sigma_{\text{bg}})_{ij}$, и напряжение σ_{ij}^{c} есть разность полного и фонового напряжений (см. (50)). Далее, u_j – компоненты перемещения, e_{ij} – полная деформация, \mathcal{P}_{ij} – пластический “источник” [30].

Статсумма (54) оценивается методом наискорейшего спуска, требующим выполнения $\delta W = 0$. При этом возникает уравнение $(\text{inc } e)_{ij} = \frac{1}{2\ell} \sigma_{ij}^{\text{c}}$, как линеаризация калибровочного уравнения (50). Так как $\partial_i (\text{inc } e)_{ij} \equiv 0$, для набора из \mathcal{N} дислокаций с векторами Бюргерса b_I , $1 \leq I \leq \mathcal{N}$, получаем $\sigma_{\phi z} = -\mu \partial_\rho \phi$ (см. (52)), где

$$\phi \equiv \phi^{(1)} = \frac{-1}{2\pi} \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} b_I \mathcal{U}(\kappa |\mathbf{x} - \mathbf{y}_I|), \quad \mathcal{U}(s) \equiv \log\left(\frac{\gamma}{2}s\right) + K_0(s). \quad (56)$$

Оценивание дает $\mathcal{Z} \simeq (\text{Det } A)^{-1} e^{-\beta \mathcal{W}}$, где \mathcal{W} есть энергия W , вычисленная для стационарного решения (56). Условие “электро-нейтральности” $\sum_{I=1}^{\mathcal{N}} b_I = 0$ сокращает большой вклад $\sim \log R$ (R – радиус сечения). Переходим к набору положительных и отрицательных дислокаций с единичными векторами Бюргерса, расположенных в точках $\{\mathbf{y}_I^+\}_{1 \leq I \leq \mathcal{N}}$ и $\{\mathbf{y}_I^-\}_{1 \leq I \leq \mathcal{N}}$, и получаем из (54) статсумму большого канонического ансамбля \mathbf{Z}_C , описывающую двумерный кулоновский газ зарядов ± 1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_C &= \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{N}! \mathcal{N}!} \prod_{I=1}^{\mathcal{N}} \int d^2 \mathbf{y}_I^+ \prod_{J=1}^{\mathcal{N}} \int d^2 \mathbf{y}_J^- \exp \left[-2\beta \mathcal{N} \lambda + \right. \\ &\left. + \frac{\beta \mu}{4\pi} \sum_{I,J} (\mathcal{U}(\kappa |\mathbf{y}_I^+ - \mathbf{y}_J^+|) + \mathcal{U}(\kappa |\mathbf{y}_I^- - \mathbf{y}_J^-|) - 2\mathcal{U}(\kappa |\mathbf{y}_I^+ - \mathbf{y}_J^-|)) \right], \end{aligned} \quad (57)$$

где $2\mathcal{N}$ – число дислокаций и λ – химпотенциал дислокации.

Определим двухточечную корреляционную функцию компонент тензора напряжений $\langle \sigma_i^\#(\mathbf{x}_1) \sigma_j^\#(\mathbf{x}_2) \rangle_P$ (где $\#$ означает b или c; кроме того, $\sigma_i^\# \equiv \sigma_{i3}^\#$ ($i = 1, 2$) в

рамках плоской задачи теории упругости) с помощью следующих функциональных средних:

$$\langle \sigma_i^\#(\mathbf{x}_1) \sigma_j^\#(\mathbf{x}_2) \rangle_P \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_o} \int \sigma_i^\#(\mathbf{x}_1) \sigma_j^\#(\mathbf{x}_2) e^{-\beta W} \mathcal{D}(\sigma_i^b, \sigma_i^c, u, e_i). \quad (58)$$

Корреляторы определены для распределения дислокаций, заданного пластическими деформациями e_i^P ($i = 1, 2$). Рассмотрим большой канонический ансамбль дислокаций в приближении *дипольной фазы*, которое соответствует связанным парам противоположных дислокаций в \mathbf{x}_I^\pm , $1 \leq I \leq \mathcal{N}$. Статсумма (57) принимает вид:

$$\mathbf{Z}_{\text{dip}} = \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{N}!} \prod_{I=1}^{\mathcal{N}} \int d^2 \boldsymbol{\xi}_I \int d^2 \boldsymbol{\eta}_I \exp \left[-2\beta \mathcal{N} \lambda - \beta \left(\sum_{I=1}^{\mathcal{N}} w(\boldsymbol{\eta}_I) + \sum_{I < J} w_{IJ} \right) \right],$$

где $w(\boldsymbol{\eta}_I)$ – энергия I -ого диполя с центром $\boldsymbol{\xi}_I = (\mathbf{x}_I^+ + \mathbf{x}_I^-)/2$ и плечом $\boldsymbol{\eta}_I = \mathbf{x}_I^+ - \mathbf{x}_I^-$. Далее, w_{IJ} – энергия взаимодействия I -ого и J -ого диполей:

$$\beta w_{IJ} \equiv -\mathcal{K}(\boldsymbol{\eta}_I, \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}_I})(\boldsymbol{\eta}_J, \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}_J}) \mathcal{U}(\kappa |\boldsymbol{\xi}_I - \boldsymbol{\xi}_J|), \quad (59)$$

где $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}}$ означает 2-вектор $(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) \equiv (\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2})$ и $(\boldsymbol{\eta}_I, \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}_I})$ – скалярное произведение $\boldsymbol{\eta}_I$ и $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}_I}$. Усредняя корреляторы (58) по положениям диполей, приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_i(\mathbf{x}_1) \sigma_j(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle &= \mathbf{Z}_{\text{dip}}^{-1} \sum' \langle \sigma_i(\mathbf{x}_1) \sigma_j(\mathbf{x}_2) \rangle_P \\ &= \frac{-\mu}{2\pi\beta} \partial_{(\mathbf{x}_1)_i} \partial_{(\mathbf{x}_2)_j} \mathcal{U}(\kappa |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) + \mathbf{Z}_{\text{dip}}^{-1} \sum' \sigma_i(\mathbf{x}_1) \sigma_j(\mathbf{x}_2) e^{-\beta W}, \end{aligned} \quad (60)$$

где $\sigma_i(\mathbf{x}) \equiv \sigma_i^b(\mathbf{x}) + \sigma_i^c(\mathbf{x})$, \sum' означает суммирование по числу и положениям диполей, \mathbf{Z}_{dip} – статсумма в дипольном приближении.

Вычисление коорреляционной функции (60) с учетом диполь-дипольного взаимодействия (59) приближенно дает:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_i(\mathbf{x}_1) \sigma_j(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle &\approx \frac{-\mu}{2\pi\beta} \left(\partial_{(\mathbf{x}_1)_i} \partial_{(\mathbf{x}_2)_j} \mathcal{U}(\kappa |\Delta \mathbf{x}|) + \right. \\ &\left. + \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \partial_{(\mathbf{x}_1)_k} \partial_{(\mathbf{x}_2)_l} \frac{\beta \mu d \mathcal{U}(\kappa |\Delta \mathbf{x}|) + \log(1 + \beta \mu d) D_\kappa K_0(\kappa |\Delta \mathbf{x}|)}{1 + \beta \mu d} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

При этом суммирование по положениям было заменено интегрированием, и основным техническим средством при вычислении (61) выступило

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4: Пусть $(D_\kappa)_l \equiv \prod_{n=0}^{l-1} (D_\kappa + n)$, где $D_\kappa \equiv \frac{-\kappa}{2} \frac{d}{d\kappa}$, и пусть $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}}$ – 2-вектор $(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2})$. Тогда имеет место интеграл:

$$\int (\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{U}(\kappa |\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|), \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\xi}} (D_\kappa)_l K_0(\kappa |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2|)) d^2 \boldsymbol{\xi} = \frac{-2\pi}{l+1} (D_\kappa)_{l+1} K_0(\kappa |\Delta \mathbf{x}|),$$

где $\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, и интегрирование идет по \mathbb{R}^2 . При $l = 0$ считается $(D_\kappa)_0 \equiv 1$.

Перенормированный модуль сдвига μ_{ren} выражается с помощью (60):

$$\frac{1}{\mu_{\text{ren}}} \equiv \frac{\beta}{\mu^2 \mathcal{S}} \sum_{i,k=1,2} \iint \langle\langle \sigma_i(\mathbf{x}_1) \sigma_k(\mathbf{x}_2) \rangle\rangle d^2 \mathbf{x}_1 d^2 \mathbf{x}_2, \quad (62)$$

где \mathcal{S} – площадь сечения, μ – модуль сдвига в отсутствие дефектов.

► *Утверждение 6* Подстановка (61) в (62) дает закон перенормировки:

$$\frac{\mu}{\mu_{\text{ren}}} = \frac{(1 + 2\beta\mu d) \mathcal{C}_1(\kappa R) - \log(1 + \beta\mu d) \mathcal{C}_D(\kappa R)}{1 + \beta\mu d}, \quad (63)$$

где $\mathcal{C}_1(\kappa R)$, $\mathcal{C}_D(\kappa R)$ выражаются через функции Бесселя, и d – средняя площадь, занимаемая всеми диполями, [30]. При $\kappa R \gg 1$ имеем: $\mathcal{C}_1(\kappa R) \approx 1 - \frac{1}{\kappa R} + \dots$, $\mathcal{C}_D(\kappa R) \approx \frac{1}{2\kappa R} - \frac{9}{16(\kappa R)^3} + \dots$. В перенормировке (63) учитываются корреляции между ядрами дефектов. Зависимость μ_{ren} от безразмерного параметра κR демонстрирует влияние конечности дислокационных ядер. Из (63) возникает перенормированный модуль сдвига вблизи температуры плавления T_c как функция температуры $T < T_c$:

$$\frac{\mu_{\text{ren}}(T)}{\mu_{\text{ren}}(T_c^-)} \approx 1 + \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right) h(\kappa R, 8\pi d), \quad h(z, w) \equiv \frac{w g(z, w)}{(1+w)(1+2w)},$$

$$g(z, w) \equiv \frac{1 - \mathcal{C}^*(z)(1 - \log(1+w))}{1 - \mathcal{C}^*(z) \frac{\log(1+w)}{1+2w}}, \quad \mathcal{C}^*(z) \equiv \frac{\mathcal{C}_D(z)}{\mathcal{C}_1(z)},$$

где T_c определяется соотношением $\mu\beta_c = 8\pi$. При сравнимых размерах площадей сечения цилиндра и ядер, $R \gtrsim \kappa^{-1}$, имеется оценка:

$$\frac{\mu_{\text{ren}}(T_c^-)}{T_c} \approx \frac{8\pi}{\mathcal{C}_1(\kappa R)} \xrightarrow{\kappa R \gg 1} 8\pi, \quad d \ll 1. \quad \blacktriangleleft \quad (64)$$

Соотношение (64), означающее отклонение $\frac{\mu_{\text{ren}}(T_c^-)}{T_c}$ от “универсального” значения 8π , связано с размером ядер и может быть проверено экспериментально, [A23].

В **ЗАКЛЮЧЕНИИ** обсуждаются результаты.

Литература

[A1] Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга*, Усп. матем. наук **34** No. 5 (1979), 13–63.

[A2] L. D. Faddeev, *Quantum completely integrable models in field theory*, Sov. Sci. Rev. Math. С **1** (1980), 107–160; In: 40 Years in Mathematical Physics, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 2 (World Sci., Singapore, 1995), 187–235.

[A3] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи. I*, Теор. матем. физ. **40** No. 2 (1979), 194–220.

[A4] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments*, Lecture Notes in Phys., vol. 151 (Springer, 1982), 61–119.

[A5] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантование групп Ли и алгебр Ли*, Алгебра и анализ **1** No. 1 (1989), 178–206.

- [A6] Н. Ю. Решетихин, *Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок*, Алгебра и анализ **1** No. 2 (1989), 169–188.
- [A7] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (CUP, Cambridge, 1993).
- [A8] Л. Д. Фаддеев, *Новая жизнь полной интегрируемости*, Усп. физ. наук **183** No. 5 (2013), 487–495.
- [A9] R. P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20** No. 2 (1948), 367–387.
- [A10] М. Кас, *On distributions of certain Wiener functionals*, Trans. AMS **65** No. 1 (1949), 1–13.
- [A11] В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике* (Атомиздат, Москва, 1976).
- [A12] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике* (Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1976).
- [A13] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей* (Наука, Москва, 1978, 1988).
- [A14] V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations* (CUP, Cambridge, 1990).
- [A15] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets* (World Scientific, Singapore, 2004).
- [A16] В. Н. Попов, *Возможность нарушения закона подобия при фазовом переходе бозе-системы в сверхтекучее состояние*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **150** (1986), 87–103.
- [A17] A. Klimyk, K. Schmudgen, *Quantum Groups and their Representations* (Springer, Berlin, 1997).
- [A18] M. E. Fisher, *Walks, walls, wetting, and melting*, J. Statist. Phys. **34** No. 5/6 (1984), 667–729.
- [A19] D. J. Gross, E. Witten, *Possible third-order phase transition in the large- N lattice gauge theory*, Phys. Rev. D **21** No. 2 (1980), 446–453.
- [A20] R. de Wit, *A view of the relation between the continuum theory of lattice defects and non-Euclidean geometry in the linear approximation*, Int. J. Engng Sci. **19** No. 12 (1981), 1475–1506.
- [A21] H. Pfeiderer, A. Seeger, E. Kröner, *Non-linear elasticity theory of straight dislocations*, Z. Naturforsch. **15a** (1960), 758–772.
- [A22] М. О. Катанаев, *Геометрическая теория дефектов*, Усп. физ. наук **175** No. 7 (2005), 705–733.
- [A23] H. H. von Grünberg, P. Keim, K. Zahn, G. Maret, *Elastic behavior of a two-dimensional crystal near melting*, Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 255703.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] Н. М. Боголюбов, К. Л. Малышев, *Корреляционные функции ХХ-магнетика Гейзенберга и случайные блуждания недружественных пешеходов*, Теор. матем. физ. **159** No. 2 (2009), 179–193.
- [2] Н. М. Боголюбов, К. Малышев, *Корреляционные функции ХХZ цепочки Гейзенберга для нулевой или бесконечной анизотропии и случайные блуждания недружественных пешеходов*, Алгебра и анализ **22** No. 3 (2010), 32–59.

- [3] Н. М. Боголюбов, К. Л. Малышев, *Изинговский предел ХХZ-магнетика Гейзенберга и некоторые температурные корреляционные функции*, Теор. матем. физ. **169** No. 2 (2011), 179–193.
- [4] N. M. Bogoliubov, S. Malyshev, *Correlation functions of ХХ0 Heisenberg chain, q-binomial determinants, and random walks*, Nucl. Phys. B **879** (2014), 268–291.
- [5] К. Малышев, *Функциональное интегрирование, дзета-регуляризация и корреляторы третьих компонент спинов в ХХ0-модели Гейзенберга*, Зап. научн. семин. ПОМИ **269** (2000), 269–291.
- [6] К. Малышев, *Функциональное интегрирование и корреляторы z-компонент локальных спинов в ХУ и ХХ магнетиках Гейзенберга*, Зап. научн. семин. ПОМИ **291** (2002), 206–227.
- [7] К. Малышев, *Функциональное интегрирование с “автоморфным” граничным условием и корреляторы третьих компонент спинов в ХХ-модели Гейзенберга*, Теор. матем. физ. **136** No. 2 (2003), 285–298.
- [8] S. Malyshev, *Functional integration with “automorphic” boundary conditions and correlators of z-components of spins in the ХУ and ХХ Heisenberg chains*, In: New Developments in Mathematical Physics Research. Ed., Charles V. Benton (Nova Science Publishers, New York, 2004), 85–116.
- [9] К. Малышев, *Условие квазипериодичности по мнимому времени как связь при функциональном интегрировании и временной ZZ-коррелятор ХХ магнетика Гейзенберга*, Зап. научн. семин. ПОМИ **317** (2004), 142–173.
- [10] N. M. Bogoliubov, S. Malyshev, *A path integration approach to the correlators of ХУ Heisenberg magnet and random walks*, In: Proceedings of the 9th Intern. Conf. “Path Integrals: New Trends and Perspectives” (Dresden, Germany, September 23–28, 2007). Eds., W. Janke, A. Pelster (World Scientific, Singapore, 2008), 508–513.
- [11] N. M. Bogoliubov, S. Malyshev, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, J. Timonen, *Asymptotic behaviour of correlation functions in the trapped Bose gas*, Физ. элем. частиц и атомного ядра (Физика ЭЧАЯ) **31** No. 7B (2000), 115–121.
- [12] N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, S. Malyshev, J. Timonen, *Finite-temperature correlations in the trapped Bose–Einstein gas*, Europhys. Lett. **55** No. 6 (2001), 755–761.
- [13] Р. К. Буллоу, Н. М. Боголюбов, В. С. Капитонов, К. Л. Малышев, Й. Тимонен, А. В. Рыбин, Г. Г. Варзугин, М. Линдберг, *Квантовые интегрируемые и неинтегрируемые модели, основанные на нелинейном уравнении Шредингера для реализуемой конденсации Бозе–Эйнштейна в размерности $d + 1$ ($d = 1, 2, 3$)*, Теор. матем. физ. **134** No. 1 (2003), 55–73.
- [14] N. M. Bogoliubov, S. Malyshev, R. K. Bullough, J. Timonen, *Finite-temperature correlations in the one-dimensional trapped and untrapped Bose gases*, Phys. Rev. A **69** (2004), 023619 (15 pages).
- [15] Н. М. Боголюбов, К. Малышев, *Функциональное интегрирование и двухточечная корреляционная функция одномерного бозе-газа в гармоническом потенциале*, Алгебра и анализ **17** No. 1 (2005), 84–114.

- [16] C. Malyshev, N. M. Bogoliubov, *The functional integration and the two-point correlation functions of the trapped Bose gas*, Proceedings of the 8th Intern. Conf. “Path Integrals from Quantum Information to Cosmology” (Prague, Czech Republic, June 6–10, 2005). Eds., Ā. Burdik, O. Navrátil, S. Pořta (JINR, Dubna, 2005), 20 p.
- [17] Н. М. Боголюбов, К. Малышев, *О вычислении асимптотик двухточечной корреляционной функции одномерного бозе-газа в удерживающем потенциале*, Зап. научн. семина. ПОМИ **347** (2007), 56–74.
- [18] К. Малышев, *О двух способах вычисления сверхтекучего тока в А-фазе гелия-3*, Зап. научн. семина. ПОМИ **209** (1994), 179–193.
- [19] C. Malyshev, *A new representation for the supercurrent in $^3\text{He-A}$ and its zero temperature limit*, Physica B **210** No. 3/4 (1995), 359–365. *Erratum*: Physica B, **222** (1996), 252.
- [20] C. Malyshev, *Some exact representations for the mass current in $^3\text{He-A}$ and their zero temperature implications*, Зап. научн. семина. ПОМИ **224** (1995), 250–266.
- [21] C. Malyshev, *Higher corrections to the mass current in weakly inhomogeneous superfluid $^3\text{He-A}$* , Phys. Rev. B **59** No. 10 (1999), 7064–7075.
- [22] C. Malyshev, *A Nicholson-type integral for the product of two parabolic cylinder functions $D_\nu(x) D_\nu(-x)$ at $\Re \nu < 0$* , Integral Transforms and Special Functions **14** No. 2 (2003), 139–148.
- [23] C. L. Malyshev, V. N. Попов, *On superconductivity in the three-band two-dimensional repulsive Hubbard model*, Теор. матем. физ. **105** No. 1 (1995), 149–162.
- [24] V. Kapitonov, C. Malyshev, V. N. Попов, P. Sevastyanov, *Path integration and Bose spectrum in the antiferromagnetic state of the two-dimensional weakly repulsive Hubbard model*, Phys. Lett. A **236** No. 1/2 (1997), 89–96.
- [25] V. Kapitonov, C. Malyshev, *On the Bose-spectrum in the 2D weakly repulsive Hubbard model at half filling*, In: Proceedings of the Sixth Intern. Conf. on “Path-Integrals from peV to TeV” (Florence, Italy, August 25–29, 1998). Eds., R. Casalbuoni, R. Giachetti, V. Tognetti, R. Vaia, P. Verrucchi (World Scientific, Singapore, etc., 1999), 414–417.
- [26] C. Malyshev, *Underlying algebraic and gauge structures of the theory of disclinations*, Arch. Mech. (Warsaw) **45** No. 1 (1993), 93–105.
- [27] C. Malyshev, *An approach to gauge potentials in the non-Abelian ISO(3)-gauge model of defects in solids*, Arch. Mech. (Warsaw) **48** No. 6 (1996), 1089–1100.
- [28] C. Malyshev, *The T(3)-gauge model, the Einstein-like gauge equation, and Volterra dislocations with modified asymptotics*, Ann. Phys. (NY) **286** No. 2 (2000), 249–277.
- [29] C. Malyshev, *The Einsteinian T(3)-gauge approach and the stress tensor of the screw dislocation in the second order: avoiding the cut-off at the core*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** No. 34 (2007), 10657–10684.
- [30] C. Malyshev, *Non-singular screw dislocations as the Coulomb gas with smoothed out coupling and the renormalization of the shear modulus*, J. Phys. A: Math. Theor. **44** No. 34 (2011), 285003 (17 pages).