На правах рукописи

Тихомиров Михаил Игоревич

О СЛОЖНОСТИ РАСПОЗНАВАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Московского физико-технического института (государственного университета).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Райгородский Андрей Михайлович**
Официальные оппоненты:	**Малышев Дмитрий Сергеевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики» в Нижнем Новгороде
	Соколов Дмитрий Олегович, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории математической логики ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук»
Ведущая организация:	Хабаровское отделение ФГБУН Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится 28 декабря 2016 г. в 17:00 на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 на базе ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук» по адресу 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук» http://pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан “___” ____________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Малютин Андрей Валерьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности. Диссертация посвящена определению вычислительной сложности ряда задач, связанных с классическими объектами дискретной геометрии — геометрическими графами.

Дискретная геометрия (или *комбинаторная геометрия*) занимается изучением комбинаторных свойств геометрических объектов различной природы. Хотя систематическое начало современной дискретной геометрии было положено в конце XIX века, многие ее проблемы в силу своей естественности были известны гораздо раньше. Так, например, вопрос о максимальном количестве сфер одинакового радиуса, одновременно касающихся «центральной» сферы, восходит к спору Ньютона и Грегори в XVII веке, а свойства замощений и многогранников исследовались еще Кеплером и Коши. Среди первых объектов современной дискретной геометрии можно выделить геометрию чисел в трудах Минковского[1], проективные конфигурации Стейница[2] и раскраски плоских карт[3].

Многие современные проблемы дискретной геометрии связаны с именем Пала Эрдеша, среди достижений которого можно выделить вклад в развитие теории Рамсея и применения вероятностного метода в различных областях дискретной математики. В работе 1946 года[4] Эрдеш ставит следующий вопрос: рассмотрим множество из n точек на плоскости. Какое максимальное количество пар среди данных точек может находиться на единичном расстоянии? В той же работе Эрдеш приводит сверхлинейную нижнюю оценку данной величины ($\Omega(n^{1+o(1)})$). Отметим, что эта нижняя граница до сих пор не была улучшена, и зазор с наилучшей доказанной[5] верхней границей $O(n^{4/3})$ достаточно велик, тем самым проблема до сих пор открыта.

Приведенную задачу удобно формулировать в терминах *дистанционных графов*, или *графов единичных расстояний* (*unit distance graphs*). Дистанционным графом множества точек на плоскости называется граф с вершинами в точках множества и ребрами между всеми парами точек на евклидовом расстоянии 1. Произвольный граф называется дистанционным, если он изоморфен дистанционному графу некоторого множества точек на плоскости. Задача Эрдеша состоит в нахождении максимального числа ребер дистанционного графа на n вершинах.

С момента введения понятия дистанционных графов было поставлено и изу-

---

[1] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen (2 vol.)* Teubner, Leipzig, 1896.

[2] E. Steinitz, *Über die Konstruktion der Konfigurationen n_3*. Druck v. Dr. R. Galle, 1894.

[3] P. G. Tait, “Remarks on the colouring of maps”, in *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 10, 1880, pp. 501–503.

[4] P. Erdős, “On sets of distances of n points”, *American Mathematical Monthly*, pp. 248–250, 1946.

[5] L. A. Székely, “Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry”, *Combinatorics, Probability and Computing*, vol. 6, no. 03, pp. 353–358, 1997.

чено множество связанных с ними задач[6]. Отдельно стоит отметить связь дистанционных графов с классической проблемой Хадвигера — Нельсона. Проблема состоит в определении *хроматического числа* плоскости — минимального числа цветов, необходимого для раскраски точек плоскости таким образом, чтобы никакие две точки на расстоянии 1 не были раскрашены в один цвет. Проблема Хадвигера — Нельсона имеет богатую историю[7]. Несмотря на значительное количество работ, касающихся данной проблемы, хроматическое число плоскости $\chi(\mathbb{R}^2)$ до сих пор точно не определено; наилучшими оценками являются неравенства $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$, каждое из которых практически тривиально.

Проблема Хадвигера — Нельсона естественным образом обобщается на пространства высшей размерности. Несмотря на значительное количество результатов[8—13], касающихся оценок хроматического числа $\mathbb{R}^d$ для различных значений d, на данный момент точное значение $\chi(\mathbb{R}^d)$ неизвестно ни для какого d, большего единицы. Аналогичным образом в пространство произвольной размерности переносится и понятие дистанционного графа. Легко видеть, что построение дистанционных графов с большим хроматическим числом позволяет получать нижние оценки на хроматическое число пространства соответствующей размерности. Замечательный факт, касающийся проблемы Хадвигера — Нельсона, состоит в том, что (в предположении аксиомы выбора) хроматическое число пространства $\mathbb{R}^d$ не меньше k тогда и только тогда, когда в $\mathbb{R}^d$ существует *конечный* дистанционный граф с хроматическим числом k; в этом заключается знаменитая теорема Эрдеша — де Брейна[14]. Это означает, что метод поиска конечных дистанционных графов теоретически позволяет предъявить наилучшую нижнюю оценку для хроматического числа пространства.

Помимо чисто теоретической важности, дистанционные графы и их разновидности также служат удобной моделью для описания широкого класса объектов из разных областей. Действительно, конфигурации из точек с фиксированными

[6] P. Brass, W. O. Moser, and J. Pach, *Research problems in discrete geometry.* Springer, 2005, vol. 18.

[7] A. Soifer, *The mathematical coloring book: Mathematics of coloring and the colorful life of its creators.* Springer Science & Business Media, 2008.

[8] O. Nechushtan, “On the space chromatic number”, *Discrete Mathematics*, vol. 256, no. 1, pp. 499–507, 2002.

[9] А. Б. Купавский, «О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$», *Математический Сборник*, т. 202, № 6, с. 83—110, 2011.

[10] K. Cantwell, “Finite Euclidean Ramsey theory”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, vol. 73, no. 2, pp. 273–285, 1996.

[11] R. Radoičić and G. Tóth, “Note on the chromatic number of the space”, in *Discrete and Computational Geometry*, Springer, 2003, pp. 695–698.

[12] А. М. Райгородский, «Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств», *Успехи Математических Наук*, т. 56, № 1 (337), с. 107—146, 2001.

[13] A. M. Raigorodskii, “On the chromatic number of a space”, *Russian Mathematical Surveys*, vol. 55, no. 2, pp. 351–352, 2000.

[14] N. de Bruijn and P. Erdős, “A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations”, *Indag. Math.*, vol. 13, no. 5, pp. 371–373, 1951.

расстояниями между некоторыми парами точек позволяют описывать пространственное расположение систем узлов и шарниров в инженерном деле, молекул заданного строения в химии, сети беспроводного обмена данными и так далее.

В различных контекстах бывает удобно рассматривать дистанционные графы в более слабом смысле. Так, например, классическое понятие дистанционного графа запрещает располагать несмежные вершины на расстоянии 1, в то время как в ряде приложений данное ограничение не имеет смысла. Кроме того, в классическом дистанционном графе различные вершины не могут располагаться в одной точке пространства, хотя иногда это ограничение несущественно. В дальнейшем мы будем называть граф *дистанционно вложимым* (или просто *вложимым*) в пространство $\mathbb{R}^d$, если он допускает гомоморфизм на $\mathbb{R}^d$, располагающий пары смежных вершин на евклидовом расстоянии 1; соответствующий гомоморфизм будем называть *вложением* графа в $\mathbb{R}^d$. Будем называть данное вложение *строгим*, если никакая пара несмежных вершин графа во вложении не располагается на расстоянии 1; кроме того, будем называть вложение *инъективным*, если никакие две вершины в этом вложении не располагаются в одной точке. Граф будем называть *строго/нестрого инъективно/неинъективно вложимым* в $\mathbb{R}^d$, если существует его вложение в $\mathbb{R}^d$ соответствующего типа. Легко видеть, что классические дистанционные графы эквивалентны строго инъективно вложимым графам.

Принимая во внимание теоретический и практический интерес дистанционных графов, естественно рассматривать связанные с ними задачи, в том числе и вычислительные. Одной из наиболее естественных таких задач является проверка реализуемости данного графа как дистанционного в пространстве заданной размерности, тем самым мотивировано изучение ее вычислительной сложности. Мы рассматриваем постановку задачи, в которой размерность пространства d считается константой (то есть, по сути, изучается целое семейство задач, параметризованное числом d). В постановку задачи естественно также включить и один из четырех вариантов типов вложимости, определенных выше.

Классической дихотомией для вычислительных задач разрешимости с точки зрения сложности является принадлежность к классу P либо NP-трудных; отметим, что некоторые задачи не принадлежат ни одному из этих классов (либо эта принадлежность не доказана), но в типичном случае эта дихотомия имеет место. Также отметим, что разделение на эти два случая имеет смысл лишь в предположении неравенства классов P и NP; этот вопрос является одной из «задач тысячелетия» и, несмотря на бурную активность, на данный момент открыт (для обзора истории задачи см., например, обзор Фортноу[15]).

[15] L. Fortnow, "The status of the P versus NP problem", *Communications of the ACM*, vol. 52, no. 9, pp. 78–86, 2009.

Легко убедиться, что при $d = 1$ (т.е. вложение осуществляется в вещественную прямую) все четыре вариации задачи проверки вложимости в $\mathbb{R}^d$ имеют несложное полиномиальное решение. Хронологически одной из первых работ, касающихся задачи проверки вложимости, является статья Сейкса[16], в которой установлено, что проверка существования произвольного вложения данного графа в $\mathbb{R}^d$ является NP-трудной, если $d \geqslant 2$. В статье Хорвата и др.[17] показана NP-трудность всех четырех вариаций задачи при $d \geqslant 2$, а в работе Шефера[18] установлена $\exists\mathbb{R}$-полнота (т.е. эквивалентность разрешимости формулы общего вида над вещественными переменными) всех вариаций задачи при $d = 2$.

При ближайшем рассмотрении в работе Хорвата и др.[17] обнаруживаются существенные пробелы. Доказательство NP-трудности задачи проверки вложимости в этой работе разбито на две части: для случаев $d = 2$ и $d > 2$. Доказательство для случая $d = 2$ основано на непосредственном сведении задачи 3-SAT и не содержит ошибок. Однако, доказательство для случая $d > 2$ опирается на результат Ловаса[19] о хроматическом числе сферы определенного радиуса. Этот результат был опровергнут[20,21] Райгородским, тем самым этот случай требует нового доказательства.

Прямым обобщением классических дистанционных графов являются так называемые *мультидистанционные* или *$\mathcal{A}$-дистанционные графы*. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное множество положительных чисел. Назовем $\mathcal{A}$-дистанционным графом множества точек $S \subseteq \mathbb{R}^d$ граф с вершинами в точках S и ребрами между всеми парами точек, расстояние между которыми принадлежит множеству $\mathcal{A}$. Понятия $\mathcal{A}$-вложимости, а также строгости и инъективности $\mathcal{A}$-вложения, полностью аналогичны соответствующим понятиям для стандартной вложимости. Легко видеть, что принимая в определении $\mathcal{A} = \{1\}$, мы получаем классические дистанционные графы. Отдельные свойства $\mathcal{A}$-дистанционных графов для конечных множеств $\mathcal{A}$ (главным образом, хроматическое число) обсуждаются в работах Райгородского и Купавского[22,23].

---

[16] J. B. Saxe, "Embeddability of weighted graphs in k-space is strongly NP-hard", in *Proc. 17th Allerton Conf. Commun. Control Comput.*, 1979, pp. 480–489.

[17] B. Horvat, J. Kratochvíl, and T. Pisanski, "On the computational complexity of degenerate unit distance representations of graphs", in *Combinatorial algorithms*, Springer, 2011, pp. 274–285.

[18] M. Schaefer, "Realizability of graphs and linkages", in *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, 2013, pp. 461–482.

[19] L. Lovász, "Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere", *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 45, no. 1-4, pp. 317–323, 1983.

[20] А. Райгородский, «О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах», *Доклады Академии Наук*, т. 432, № 2, с. 174—177, 2010.

[21] A. Raigorodskii, "On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$", *Combinatorica*, vol. 32, no. 1, pp. 111–123, 2012.

[22] A. M. Raigorodskii, "Coloring distance graphs and graphs of diameters", in *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, 2013, pp. 429–460.

[23] А. Купавский, «Хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$ с множеством запрещенных расстояний», *Доклады*

Понятие $\mathcal{A}$-дистанционного графа обобщает как классические дистанционные графы, так и многие другие классы геометрических графов: графы единичных интервалов, кругов и шаров (см. далее), графы целых расстояний и т.д. В связи с этим вычислительная сложность общей задачи о распознавании $\mathcal{A}$-дистанционных графов в $\mathbb{R}^d$ в зависимости от множества $\mathcal{A}$ и размерности d также представляет существенный интерес. Мы рассматриваем постановку задачи, в которой размерность d, множество $\mathcal{A}$ и тип вложения считаются фиксированными, а единственным входным параметром задачи является граф, $\mathcal{A}$-вложимость которого необходимо проверить.

Сложность проверки $\mathcal{A}$-вложимости в $\mathbb{R}^d$ изучена лишь в немногих частных случаях. Наиболее значимым из таких частных случаев является случай $\mathcal{A} = (0, 1]$, полученные $\mathcal{A}$-дистанционные графы называются *графами единичных шаров*. В случае $d = 1$ (вложения в прямую) $(0, 1]$-вложимые графы называют *графами единичных отрезков* (*unit interval graphs*); их структура хорошо изучена[24] и проверка $(0, 1]$-вложимости в этом случае разрешима за линейное время[25,26]. В то же время проверка $(0, 1]$-вложимости в плоскость является NP-трудной[27] и даже $\exists\mathbb{R}$-трудной[28]. В работе Хлинени и Кратохвила[29] предложен интересный подход к доказательству NP-трудности $(0, 1]$-вложимости в $\mathbb{R}^d$, основанный на наличии в $\mathbb{R}^d$ плотных решеток, и таким образом установлена NP-трудность проверки $(0, 1]$-вложимости в $\mathbb{R}^d$ для значений $d = 3, 4, 8, 24$.

С систематической точки зрения наиболее «простым» частным случаем задачи о проверке $\mathcal{A}$-вложимости является случай, когда $\mathcal{A}$ — конечное множество и вложение осуществляется в $\mathbb{R}^1$. Нетрудно убедиться, что в этом случае любая компонента связности $\mathcal{A}$-дистанционного графа $\mathbb{R}^1$ изоморфна $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$ — графу Кэли свободной абелевой группы $G = \langle S \rangle_+$, порожденной элементами множества $S = \mathcal{A} \cup (-\mathcal{A})$ с операцией сложения; более того, для любой свободной конечно порожденной абелевой группы G и симметричной системы порождающих S можно предъявить конечное множество чисел $\mathcal{A}$, чтобы граф $\mathrm{Cay}(G, S)$ был изоморфен любой компоненте связности $\mathcal{A}$-дистанционного графа $\mathbb{R}^1$. Таким образом,

---

Академии Наук, т. 435, № 6, с. 740—743, 2010.

[24] C. Lekkeikerker and J. Boland, “Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line”, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 51, no. 1, pp. 45–64, 1962.

[25] K. S. Booth and G. S. Lueker, “Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using pq-tree algorithms”, *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 13, no. 3, pp. 335–379, 1976.

[26] P. J. Looges and S. Olariu, “Optimal greedy algorithms for indifference graphs”, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 25, no. 7, pp. 15–25, 1993.

[27] H. Breu and D. G. Kirkpatrick, “Unit disk graph recognition is NP-hard”, *Computational Geometry*, vol. 9, no. 1, pp. 3–24, 1998.

[28] R. J. Kang and T. Müller, “Sphere and dot product representations of graphs”, *Discrete & Computational Geometry*, vol. 47, no. 3, pp. 548–568, 2012.

[29] P. Hliněný and J. Kratochvíl, “Representing graphs by disks and balls (a survey of recognition-complexity results)”, *Discrete Mathematics*, vol. 229, no. 1, pp. 101–124, 2001.

описанный частный случай можно переформулировать как задачу существования гомоморфизма определенного типа данного графа на граф Кэли группы G.

Цель работы и основные задачи. Основной задачей работы является установление вычислительной сложности задач, связанных с проверкой вложимости и $\mathcal{A}$-вложимости графов в $\mathbb{R}^d$. Цель работы состоит в расширении сложностной дихотомии на новые естественные, но неизученные ранее вычислительные задачи и развитии метода построения геометрических конструкций-«гаджетов», служащих для выражения различных вычислительных задач в геометрических терминах с последующим установлением их сложности.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы алгоритмической теории сложности, а также теории групп, линейной алгебры и выпуклого анализа.

Научная новизна. Доказательство утверждения, составляющего результат главы 1, было заявлено в работе Хорвата и др.[17], но позже опровергнуто; приведенное в главе 1 новое доказательство является полностью оригинальным. Результаты глав 2 и 3 являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит главным образом теоретический характер. Полученные результаты дают новую информацию о сложности вычислительных задач из области теории геометрических графов и важны в таких областях computer science, как теория сложности и вычислительная геометрия. Кроме того, отдельные результаты важны в геометрической теории графов и теории групп.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Получено доказательство NP-трудности задачи проверки дистанционной вложимости данного графа в пространство $\mathbb{R}^d$ для случая $d > 2$ и любого из четырех типов вложимости: произвольная, строгая, инъективная, строгая инъективная.

2. Получена полная классификация конечных множеств положительных чисел $\mathcal{A}$ с точки зрения сложности проверки $\mathcal{A}$-вложимости графов в пространство $\mathbb{R}^1$ для каждого из четырех типов вложимости: произвольная, строгая, инъективная, строгая инъективная.

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы получены автором лично.

Апробация результатов работы. Материалы диссертации опубликованы в трех работах ([1]—[3]), из которых две в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

([1], [2]). Результаты докладывались и получили одобрение специалистов на международной конференции “The 5th German-Russian Week of the Young Researcher — Discrete Geometry” (МФТИ, Долгопрудный, 2015 г.), международном семинаре “Workshop on Algorithms in Communication Complexity, Property Testing and Combinatorics” (Одинцово, 2016 г.), научном семинаре «Теоретическая информатика и комбинаторика» (ФКН ВШЭ, 2016 г.), а также на научных семинарах под руководством профессора А. М. Райгородского в МФТИ (кафедра дискретной математики) и в МГУ им. М. В. Ломоносова (кафедра математической статистики и случайных процессов) (2014 — 2016 г.г.).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 65 страниц. Список литературы содержит 51 наименование.

Основное содержание работы

Во **введении** приводятся определения основных объектов диссертации — дистанционных и мультидистанционных графов и описывается их место в контексте прочих объектов и результатов дискретной геометрии. Классические *дистанционные графы* в пространстве $\mathbb{R}^d$ определяются как графы, вершины которых можно расположить в точках $\mathbb{R}^d$ таким образом, чтобы смежные вершины находились на евклидовом расстоянии 1. Дается несколько естественных вариаций этого определения, а именно понятие *дистанционной вложимости* и некоторых ее типов. *Мультидистанционные графы* (или $\mathcal{A}$-*дистанционные графы*) определяются как обобщение классических дистанционных графов с произвольным множеством разрешенных расстояний $\mathcal{A}$, на них переносится и понятие дистанционной вложимости каждого из типов. Для случая конечного множества $\mathcal{A}$ поясняется эквивалентность задачи $\mathcal{A}$-дистанционной вложимости в $\mathbb{R}^1$ и существования гомоморфизма на граф Кэли определенной свободной конечно порожденной абелевой группы, тем самым дается мотивация вспомогательного результата, которому посвящена вторая глава диссертации. Кроме того, во введении дается подробный комментарий, касающийся понятия вычислительной сложности, и приводится обзор результатов, касающихся распознавания описанных выше и других типов геометрических графов.

Первая глава диссертации посвящена сложности задачи проверки дистанционной вложимости графов в $\mathbb{R}^d$ при $d > 2$. Основным результатом главы является

Теорема 1. *Задача проверки дистанционной вложимости данного графа в* $\mathbb{R}^d$ *является NP-трудной для любого* $d > 2$ *независимо от типа вложения.*

Доказательство теоремы основано на сведении известной NP-трудной задачи о трехцветной раскраске графа (**3-COLORING**) к задаче распознавания дистанционного графа в $\mathbb{R}^d$; построенное сведение универсально и применимо сразу ко всем вариациям определения дистанционного графа.

В *разделе 1.3* вводится понятие *«стержня»* как «жесткого» с точки зрения вложимости в $\mathbb{R}^d$ подграфа, сохраняющего одно и то же расстояние (которое естественно назвать *длиной* стержня) между некоторой парой вершин в любом вложении в $\mathbb{R}^d$. Для произвольного графа обосновывается эквивалентность подграфа-стержня и взвешенного ребра соответствующей длины с точки зрения вложимости всего графа. В *разделе 1.4* приводится конструктивный метод построения стержня, длина которого ограничена интервалом произвольной ненулевой длины (тем самым длины всевозможных стержней образуют всюду плотное множество). Данный метод позволяет использовать стержни как «шаткие» взвешенные ребра произвольной длины, что значительно облегчает построение конструкции.

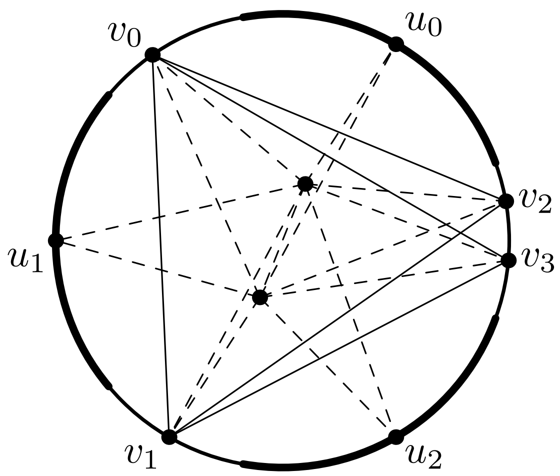

Рис. 1: Иллюстрация сведения **3-COLORING** к задаче проверки вложимости в $\mathbb{R}^3$. Части окружности, выделенные жирным, являются «запрещенными» для вершин графа G, три маленькие нежирные дуги соответствуют возможным цветам вершин G.

В *разделе 1.5* описывается непосредственное сведение задачи **3-COLORING** к задаче проверки вложимости графа в $\mathbb{R}^d$. При помощи вспомогательных вершин и ребер положение вершин графа G — входного графа задачи **3-COLORING** ограничивается на окружность определенного радиуса. Далее, при помощи дополнительных взвешенных ребер правильно подобранной длины вершины G фиксируются в окрестности вершин некоторого правильного треугольника, вписанного в окружность, а также смежным в G вершинам запрещается расположение в окрестности одной и той же вершины треугольника. Доказывается эквивалентность вложения построенной конструкции и существования трехцветной раскраски графа G. Наконец, взвешенные ребра заменяются на стержни соответствующей длины, тем самым конструкция становится дистанционным графом (все ребра имеют длину 1). Приводится анализ размера получившейся конструкции, тем самым устанавливается корректность полиномиального сведения между задачами и NP-трудность проверки дистанционной вложимости.

Наконец, в *разделе 1.6* приводится анализ доказательства результата главы 1, данного в статье Хорвата и др.[17], которое основывается на опровергнутом результате Ловаса[19]. Приводятся соображения, согласно которым недостатки доказательства в упомянутой работе не являются легко устранимыми.

Вторая глава диссертации посвящена доказательству нетривиальной вспомогательной теоремы, касающейся автоморфизмов конечных подграфов графов Кэли свободных конечно порожденных абелевых групп. Основным результатом главы 2 является

Теорема 2. *Пусть G — свободная конечно порожденная абелева группа. Тогда для любой $\mathcal{A} \subseteq G$ — конечной симметричной системы порождающих G, не содержащей 0, существует такое целое $R(\mathcal{A})$, что при $r \geqslant R(\mathcal{A})$ все автоморфизмы B_r линейны и каждый из них однозначно продолжается до элемента* $\mathrm{Aut}_0(\mathrm{Cay}(G, \mathcal{A}))$.

В данной формулировке $\mathrm{Cay}(G, \mathcal{A})$ — граф Кэли группы G с системой порождающих $\mathcal{A}$, $\mathrm{Aut}_0(\mathrm{Cay}(G, \mathcal{A}))$ — группа автоморфизмов графа Кэли, оставляющих на месте элемент 0, B_r — подграф графа Кэли, индуцированный множеством вершин на расстоянии не более r от элемента 0 (так называемый *шар радиуса* r). Автоморфизм подграфа графа Кэли называется *линейным*, если он действует на компоненты элементов $\mathbb{Z}^k \sim G$ как линейный оператор.

Доказательство теоремы 2 основано на методе математической индукции по размеру $\mathcal{A}$. Элемент $\mathcal{A}$ называется *главным*, если он является вершиной выпуклой оболочки $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^k$. Доказывается линейность любого автоморфизма достаточно большого шара на решетках, индуцированных отдельно главными и неглавными элементами $\mathcal{A}$, после чего соответствующие линейные отображения «склеиваются» и распространяются на все элементы шара.

В **третьей главе** диссертации приводится полная классификация конечных множеств положительных чисел $\mathcal{A}$ с точки зрения сложности проверки $\mathcal{A}$-дистанционной вложимости графа в прямую $\mathbb{R}^1$. Результат главы составляет следующая

Теорема 3. *(a) Проверка $\mathcal{A}$-вложимости в $\mathbb{R}^1$ принадлежит P, если граф* Γ *двудолен, в противном случае задача NP-полна.*

(b) Проверка строгой и/или инъективной $\mathcal{A}$-вложимости в $\mathbb{R}^1$ принадлежит P, если $\langle \mathcal{A} \rangle_+ \sim \mathbb{Z}$, в противном случае задача NP-полна.

Здесь Γ — граф Кэли аддитивной группы $G = \langle \mathcal{A} \rangle_+$, порожденной элементами $\mathcal{A}$ и их отрицаниями.

Пункт (a) теоремы 3 является немедленным следствием результата[30] о сложности H-раскраски для бесконечных графов H ограниченной степени. Доказательство пункта (b) для случая $\langle \mathcal{A} \rangle_+ \sim \mathbb{Z}$ является несложным применением результата[31] о полиномиальном решении задачи **SUBGRAPH-ISOMORPHISM** для графов ограниченной древесной ширины. Основной объем главы посвящен доказательству NP-полноты задачи строгой и/или инъективной $\mathcal{A}$-вложимости в $\mathbb{R}^1$ в случае $\langle \mathcal{A} \rangle_+ \sim \mathbb{Z}^k$ при $k \geqslant 2$.

По результату главы 2 существуют конечные подграфы Γ, любой автоморфизм которых действует на элементы $\mathbb{Z}^k$ как линейный оператор и однозначно продолжается до некоторого автоморфизма Γ. Построенные таким образом графы используются в дальнейшем как жесткие элементы конструкции, не имеющие нетривиальных автоморфизмов и вложений в Γ. Теорема 2 позволяет в значительной степени абстрагироваться от постановки задачи проверки $\mathcal{A}$-вложимости в терминах графов и их автоморфизмов и описывать дальнейшие конструкции с геометрической точки зрения.

Для собственно доказательства NP-полноты задачи используется геометрическая конструкция logic engine[32], нередко применямая для сведения NP-полной задачи **NAE-3-SAT** к различным геометрическим вычислительным задачам. В *разделах 3.5 и 3.6* описывается сведение задачи проверки реализуемости данной конструкции logic engine к проверке строгой и/или инъективной $\mathcal{A}$-вложимости некоторого явно конструируемого графа отдельно для случаев $k = 2$ и $k > 2$ с использованием двух различных геометрических конструкций, реализующих поведение модели logic engine. Поведение элементов конструкции детально проанализировано, даны оценки размеров получившихся графов и установлена корректность полиномиального сведения.

В **заключении** резюмированы результаты, касающиеся сложности распознавания дистанционных и мультидистанционных графов. Перечислены некоторые возможные направления дальнейшей научной деятельности по теме диссертации, такие как установление $\exists\mathbb{R}$-трудности дистанционной вложимости в пространства размерности 3 и выше, расширение результатов главы 3 с конечных множеств $\mathcal{A}$ на счетные, борелевские и другие, а также выяснение сложности $\mathcal{A}$-дистанционной

[30] G. MacGillivray, “Graph homomorphisms with infinite targets”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 54, no. 1, pp. 29–35, 1994.

[31] J. Matoušek and R. Thomas, “On the complexity of finding iso-and other morphisms for partial k-trees”, *Discrete Mathematics*, vol. 108, no. 1, pp. 343–364, 1992.

[32] P. Eades and S. Whitesides, “The logic engine and the realization problem for nearest neighbor graphs”, *Theoretical Computer Science*, vol. 169, no. 1, pp. 23–37, 1996.

вложимости в плоскость, пространство размерности 3 и высших размерностей.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в изданиях, рекомендованных в ВАК

1. M. Tikhomirov, “On computational complexity of length embeddability of graphs”, *Discrete Mathematics*, vol. 339, no. 11, pp. 2605–2612, 2016.

2. М. Тихомиров, «О задаче проверки дистанционной и мультидистанционной вложимости графа», *Доклады Академии Наук*, т. 468, № 3, с. 261–263, 2016.

Другие публикации

3. М. Тихомиров, «О сложности распознавания мультидистанционных графов в $\mathbb{R}^1$», Деп. в ВИНИТИ 05.09.2016, № 125-В2016, 34 с.