На правах рукописи

Краско Евгений Сергеевич

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КАРТ С ОДНОЙ ГРАНЬЮ

01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования и науки «Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук»

Научный руководитель:
Омельченко Александр Владимирович
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой математических и информационных технологий Федерального государственного бюджетного учреждения высшего образования и науки «Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук»

Официальные оппоненты:
Пастор Алексей Владимирович
кандидат физ.-мат. наук,
научный сотрудник лаборатории математической логики федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук
Ландо Сергей Константинович
доктор физ.-мат. наук,
профессор федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится «__»____________ 2017 г. в __:00 на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «__»____________2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук А.В.Малютин

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности.

Под (топологической) картой M на замкнутой двумерной ориентируемой поверхности X рода g понимается такое вложение связного мультиграфа G в поверхность X, при котором вершины графа представляются различными точками поверхности X, ребра — несамопересекающимися кривыми, не имеющими общих точек, отличных от общих концевых вершин, а $X \setminus G$ представляет собой набор из f односвязных областей, гомеоморфных открытым дискам и называемых гранями карты M. Под d-регулярными картами понимаются карты, в которых каждая из вершин имеет одну и ту же степень d. Карта M с выделенным и ориентированным ребром называется корневой картой. Две карты считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм поверхности (сохраняющий ориентацию поверхности или не сохраняющий ее), переводящий вершины, ребра и грани одной карты в вершины, ребра и грани другой.

Перечисление карт на поверхностях является важным, интересным и динамично развивающимся разделом современной перечислительной комбинаторики. С одной стороны, техника перечисления таких карт использует современные результаты теории графов, комбинаторики, алгебраической топологии и др. С другой стороны, полученные в этой области результаты используются в теории узлов [1], топологии, биоинформатике, теории представлений, теории алгоритмов и в других разделах современной математики и теоретической физики [2].

Задачи перечисления непомеченных дискретных структур, в частности, непомеченных карт на поверхностях, интересны в том числе и потому, что они лежат на стыке нескольких дисциплин, а именно, комбинаторной топологии, теории групп и перечислительной комбинаторики. Разработка подходов и методов решения такого рода задач и определяет актуальность данного исследования.

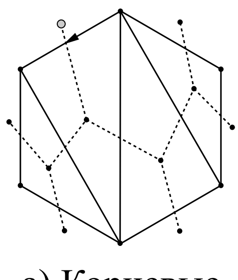
Важным подклассом карт, подробно исследуемым в данной работе, является подкласс d-регулярных карт. Эти карты имеют множество приложений в различных областях математики (таких, например, как теория узлов и зацеплений), биоинформатики, физики и др. Перечисление d-регулярных карт на сфере началось еще с работ Татта и его учеников. Однако в области перечисления

d-регулярных карт на поверхностях более высокого рода результатов к настоящему моменту получено не очень много.

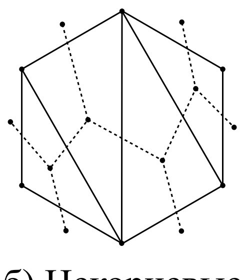
В данной работе решаются следующие задачи:

1. перечисление так называемых $1 \div d$-регулярных деревьев на сфере (плоскости) с точностью до всех гомеоморфизмов.
2. перечисление помеченных и непомеченных хордовых диаграмм без петель, а также без петель и кратных ребер; первые из них отвечают картам с одной гранью без листьев, а вторые — без листьев и вершин степени 2;
3. перечисление непомеченных d-регулярных карт с одной гранью на поверхности фиксированного рода g;
4. обобщение полученных выше результатов на случай d-регулярных карт с произвольным числом граней на поверхности фиксированного рода g.

1. Исследование первой из перечисленных выше задач началось еще в XVIII веке и было связано с задачей перечисления всех диагональных триангуляций правильного $(n+2)$-угольника. По всей видимости, первыми, кто решил эту задачу для случая правильного $(n+2)$-угольника с выделенным и ориентированным ребром, были Йоханн Андреас фон Зегнер [3] и Леонард Эйлер [4]. При решении этой задачи ими была получена последовательность чисел, известная ныне как последовательность чисел Каталана. Нас в данной работе будет особо интересовать еще одна эквивалентная комбинаторная интерпретация этих чисел: количество тривалентных планарных деревьев с $(n+2)$ вершинами степени 1, одна из которых выбрана в качестве корня (корневых деревьев). Соответствие между рассечениями $(n+2)$-угольника с выделенным внешним ребром на треугольники и такими деревьями показано на рис. 1.



а) Корневые



б) Некорневые

Рис. 1 — Двойственные структуры

Первые решения задач, связанных с перечислением некорневых триангуляций появились только во второй половине двадцатого века. В статье [5] впервые была получена числовая последовательность, описывающая количество некорневых триангуляций многоугольника в пространстве. В работе [6] Харари, Палмер и Рид обобщили полученный результат на случай рассечения правильного $(n(r-2)+2)$-угольника на n r-угольников. Однако окончательные выражения для производящих функций были довольно громоздкими, что не позволило им получить явные выражения для чисел $V_n^{(r)}$, описывающих количество таких деревьев.

Дальнейший прогресс в решении задач перечисления планарных деревьев был связан с появлением в начале восьмидесятых годов двадцатого века теории комбинаторных видов [7], [8]. Изящная переформулировка теоремы Оттера [9] на языке теории комбинаторных видов позволила достаточно элегантно решить многие задачи, связанные с перечислением древовидных структур. Несмотря на впечатляющий прогресс в решении описанных выше задач, явные формулы для количества всех некорневых рассечений многоугольников в пространстве на r-угольники до сих пор получены не были. Связано это, прежде всего, со сложностью учета симметрий отражения в таких задачах.

2. Естественным обобщением понятия дерева на плоскости является понятие карты с одной гранью на замкнутой ориентируемой поверхности произвольного рода $g \geq 0$. Такого рода карты удобно изображать с помощью так называемых хордовых диаграмм (рис. 2). Хордовая диаграмма строится следующим образом: на окружности выбираются $2n$ равномерно распределенных точек; затем эти точки разбиваются на пары, и каждая пара соединяется хордой.

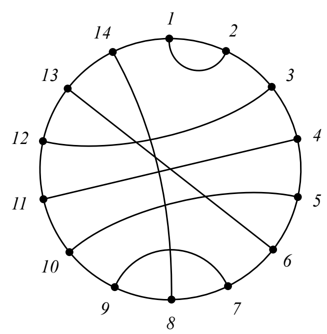


Рис. 2 — Хордовая диаграмма

На практике возникают различные классы хордовых диаграмм [10;11]. В данной работе мы изучаем два таких класса — беспетлевые и простые диаграммы. Говорят, что хорда является петлей, если она соединяет две соседние точки на окружности (например, хорда $\{1,2\}$ на рис. 2). Беспетлевой диаграммой называется диаграмма, не имеющая петель. Две хорды в диаграмме, построенной на $2n$ точках, называются параллельными, если одна из них соединяет точки i и $j+1$, а вторая — j и $i+1$, или если одна из них соединяет точки $2n$ и $j+1$, а вторая — j и 1. Под простой диаграммой мы будем понимать диаграмму, которая не имеет ни петель, ни параллельных ребер. Оба описанных типа диаграмм достаточно часто встречаются в различных комбинаторных задачах, касающихся перечисления узлов и зацеплений [1;12]. Кроме того, есть и другие комбинаторные задачи, в которых возникают такие диаграммы [12]. Простые же диаграммы отвечают так называемым формам — картам без листьев и вершин степени 2 [13].

Последовательность, описывающая количество помеченных беспетлевых хордовых диаграмм (http://oeis.org/A003436), впервые появилась в работе [14] как результат перечисления гамильтоновых циклов в n-мерных октаэдрах. Рекуррентное соотношение для этих чисел было получено в [15] с использованием биективного подхода. Для непомеченного случая соответствующие числа (http://oeis.org/A003437) были найдены с помощью компьютера в [14] для $n \leq 8$. При этом аналитического выражения получено не было. Несмотря на многочисленные применения, аналитические выражения для простых хордовых диаграмм не существовали ни для помеченного, ни для непомеченного случая.

3. Первой работой, посвященной перечислению корневых карт на поверхностях рода g, была работа Уолша и Лемана [16]. В этой работе было получено явное выражение для количества $\epsilon_g(n)$ карт с одной гранью на поверхности рода g, построенных на n ребрах, а также выведена формула для количества корневых 3-регулярных карт с одной гранью рода g.

В восьмидесятые годы прошлого века появились первые работы [17], [18], посвященные перечислению некорневых карт в планарном случае. Идеи работы [17] были существенным образом развиты и усовершенствованы в статье [19]. В этой работе для задачи перечисления некорневых карт на ориентируемой поверхности заданного рода при фиксированном числе ребер было введено понятие фактор-карты на орбифолде, то есть на факторе поверхности относительно действия конечной подгруппы группы автоморфизмов. Используя эту идею, Медных и Недела получили явную формулу для количества некорневых карт на ориентированной поверхности рода g с заданным числом ребер n. Для этого им, в частности, понадобилось вывести формулы для количества сохраняющих порядок эпиморфизмов из фундаментальной группы орбифолда в циклическую группу Z_l.

Подход Медных и Неделы достаточно хорошо разработан для перечисления карт с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов поверхности. Однако на сегодняшний день известно не так много результатов, в которых учитываеся род поверхности, а перечисление проводится с точностью до всех гомеоморфизмов.

4. Работа Уолша и Лемана [16], посвященная перечислению корневых карт на замкнутой ориентируемой поверхности рода g, была основана на подходе Татта [20], [21] к перечислению планарных карт.

Техника построения аналитических решений рекуррентных соотношений для произвольных (не обязательно имеющих одну грань) карт на поверхности заданного рода была развита в работах Бендера и Канфильда в восьмидесятых - девяностых годах прошлого века (см., например, [22], [23]). Для некоторых частных случаев (карты на торе, проективной плоскости) ими были получены точные аналитические формулы.

Работы Лисковца [17] и Вормальда [18], посвященные перечислению некорневых карт с произвольным числом граней в планарном случае, были обобщены в статье Медных и Неделы [19]. Подход, изложенный в статье [19], позволяет получать явные формулы для некоторых классов таких карт, если известны последовательности, описывающие соответствующие карты на орбифолдах.

Целью работы является перечисление карт с единственной гранью при дополнительных ограничениях на структуру таких карт.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Перечислить непомеченные деревья на плоскости, имеющие заданные степени внутренних вершин.
2. Перечислить хордовые диаграммы без петель, а также без петель и кратных ребер.
3. Перечислить регулярные карты с одной гранью, а также карты с одной гранью и одной вершиной с учётом рода поверхности вложения.

4. Обобщить полученные результаты на случай регулярных карт, имеющих несколько граней.

Научная новизна:

1. Впервые получены простые аналитические соотношения для числа непомеченных деревьев на плоскости с учётом отражений.
2. Впервые построены производящие функции для помеченных хордовых диаграмм при ограничениях на их структуру.
3. Впервые перечислены непомеченные гамильтоновы циклы в n-мерном октаэдре.
4. Впервые выписаны рекуррентные соотношения, позволяющие подсчитать количество непомеченных хордовых диаграмм без петель, а также без петель и параллельных хорд.
5. Впервые получены аналитические выражения для числа 4-регулярных карт с одной гранью.
6. Впервые получены рекурретные соотношения для числа непомеченных карт с одной гранью и одной вершиной на поверхности заданного рода, учитывающие все гомеоморфизмы.
7. Впервые построен алгоритм перечисления непомеченных r-регулярных карт на поверхности заданного рода.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств помеченных и непомеченных d-регулярных карт на поверхностях. Описанные в диссертации формулы для перечисления хордовых диаграмм могут быть использованы при классификации узлов и зацеплений над поверхностями различного рода. Разработанные подходы могут быть эффективны при решении перечислительных задач, связанных с картами на многообразиях.

Методология и методы исследования. В работе используются методы перечислительной комбинаторики, а также теории групп и асимптотических методов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Явные аналитические выражения, позволяющие подсчитать некорневые деревья с заданной степенью внутренних вершин с точностью до вращений и отражений плоскости.

2. Производящие функции для помеченных хордовых диаграмм, классифицирующие их по числу хорд, петель и параллельных хорд.
3. Рекуррентные соотношения, позволяющие перечислять непомеченные хордовые диаграммы без петель и параллельных хорд по числу рёбер.
4. Явные аналитические выражения для количества непомеченных d-регулярных карт с одной гранью при конкретных значениях параметра d.
5. Рекуррентные соотношения для количества непомеченных карт с одной гранью и одной вершиной, учитывающие гомеоморфизмы, изменяющие ориентацию поверхности.
6. Алгоритм, позволяющий вычислять количество регулярных карт с фиксированным числом рёбер на поверхности заданного рода.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами сформулированных в работе утверждений. Правильность формул была потверждена непосредственной генерацией соответствующих дискретных структур. Результаты находятся в соответствии с численными результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на SIAM Conference on Discrete Mathematics [28] (Atlanta, Georgia, USA, 2016), на семинарах по дискретной математике и математической кибернетике в ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, СПбГУ, Высшей школе экономики, Санкт-Петербургском Академическом университете.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях [24–27], входящих в список журналов, рекомендованных ВАК.

Личный вклад. Работы [24–27] написаны в соавторстве с научным руководителем.

В работе [24] научному руководителю принадлежит постановка задачи, а также гипотеза о явном виде формулы для количества симметричных относительно отражений корневых r-рассечений. Комбинаторное доказательство этой формулы принадлежит диссертанту. Формулы для перечисления некорневых S-рассечений, их комбинаторное доказательство и асимптотический анализ принадлежат диссертанту.

В работе [25] научному руководителю принадлежит постановка задачи; диссертанту принадлежат явные формулы для количества 3- и 4-регулярных карт с одной гранью, рекуррентные формулы для количества почти-d-регулярных карт с несколькими гранями и алгоритм перечисления непомеченных d-регулярных карт.

В работе [26] научному руководителю принадлежит постановка задачи, а также вывод перечислительной формулы для $(1 \div d)$-деревьев на плоскости. Диссертантом доказано сведение задачи перечисления $(1 \div 4)$-карт рода g с одной гранью к перечислению деревьев на плоскости и получен явный вид формулы для помеченных 4-регулярных карт с одной гранью. Анализ допустимых орбифолдов для непомеченных карт и явная перечислительная формула для таких карт также принадлежат диссертанту.

В работе [27] научному руководителю принадлежит постановка задачи. Диссертанту принадлежит вывод рекуррентных формул для количества помеченных и непомеченных хордовых и линейных диаграмм, анализ производящих функций для данных типов диаграмм, вывод рекуррентных соотношений для количества d-симметричных хордовых и линейных диаграмм, а также комбинаторное доказательство биекции между беспетлевыми хордовыми диаграммами и гамильтоновыми циклами в октаэдрах.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 113 страниц. Список литературы содержит 56 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, формулируются научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена перечислению непомеченных деревьев с заданными степенями вершин на плоскости и структур, двойственных к ним — рассечений многоугольника на многоугольники с заданным числом сторон. Показывается, что производящая функция для непомеченных рассечений на r-угольники с учётом всех симметрий вычисляется через производящую функцию для непомеченных рассечений $u_r(x)$ с учётом вращений, производящую функцию $H_r(x)$ для симметричных рассечений с корнем в вершине и производящую функцию $K_r(x)$ для симметричных рассечений с корнем во внешнем ребре по формуле:

$$v_r(x) = \frac{u_r(x)}{2} + \frac{H_r(x) + K_r(x)}{4}.$$

Комбинаторно доказывается, что полусумму $(H_r(x) + K_r(x))/2$ можно вычислить по формуле $(H_r(x)+K_r(x))/2 = f_r(x^2)+xf_r^{\lfloor r/2 \rfloor}(x^2)$, где $f_r(x)$ — производящая функция для помеченных рассечений на r-угольники. В частном случае простого r количество рассечений с учётом все симметрий вычисляется по формуле

$$V_n^{(r)} = \frac{B(n,r,1)}{2(n(r-2)+2)} + \frac{(r-1)B(\frac{n-1}{r},r,1)}{2r} + \frac{B(\frac{n-1}{2},r,\lfloor r/2 \rfloor)}{2} + \frac{3B(n/2,r,1)}{4},$$

где числа числа $B(n,r,k)$ обобщают числа Фусса-Каталана и выражаются по формулам

$$B(n,r,k) = \frac{k}{n}\binom{n(r-1)+(k-1)}{n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+;$$
$$B(0,r,k) = 1; \qquad B(n,r,k) = 0, \quad n \notin \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}.$$

Полученные результаты обобщаются на случай S-рассечений, то есть рассечений, степени внутренних вершин которых принадлежат заданному множеству S. Доказывается, что в этом случае формула для производящей функции имеет следующий вид:

$$v_S(x) = \frac{u_S(x)}{2} + \frac{g_S(x^2) + \sum\limits_{i \in S_{even}} g_S^{i/2}(x^2) + (x + R_S(x))^2/(1 - Q_S(x))}{4}.$$

Здесь

$$R_S(x) = \sum_{i \in S_{odd}} g_S^{(i-1)/2}(x^2) \qquad \text{и} \qquad Q_S(x) = \sum_{i \in S_{even}} g_S^{i/2-1}(x^2),$$

через S_{odd} и S_{even} обозначены подмножества нечётных и чётных элементов S соответственно, а $g_S(x)$ есть производящая функция для корневых S-рассечений. Данные формулы используются для получения асимптотических оценок количества некорневых S рассечений.

Вторая глава посвящена перечислению хордовых и линейных диаграмм без петель, а также без петель и кратных рёбер. Доказывается, что производящая функция, описывающая количество помеченных линейных диаграмм без петель, равна

$$\phi(t) = \frac{e^{-1+\sqrt{1-2t}}}{\sqrt{1-2t}},$$

а производящая функция для количества хордовых диаграмм без петель рассчитывается по формуле

$$\psi(t) = e^{-1+\sqrt{1-2t}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right) - 2 + t.$$

Выводятся рекуррентные соотношения для количества непомеченных линейных диаграмм без петель с учётом как симметрий вращения, так и симметрий вращения и отражения. Полученные формулы позволяют за полиномиальное время вычислять количество соответствующих диаграмм с n рёбрами. Показывается, что хордовые диаграммы без петель находятся в биективном соответствии с гамильтоновыми циклами в n-мерном октаэдре. Тем самым решается задача о подсчете количества таких циклов.

Далее в работе выводится следующее рекуррентное соотношение для чисел $a_{n,k,l}$ линейных диаграмм с $n+1$ рёбрами, k петлями и l парами параллельных рёбер:

$$a_{n+1,k,l} = a_{n,k-1,l} + (2n+1-k-2l)a_{n,k,l} + (k+1)a_{n,k+1,l} + 2(l+1)a_{n,k,l+1} + a_{n,k,l-1}.$$

Показывается, что это рекуррентное соотношение эквивалентно некоторому линейному дифференциальному уравнению в частных производных на функцию $w(t,z,x)$ трёх переменных, решение которого имеет следующий вид:

$$w(t,z,x) = \frac{(z-1)\sqrt{1-2t}+1}{(1-2t)^{3/2}} \exp\left((z-1)(1-\sqrt{1-2t}) - t(1-x)\right).$$

С использованием этого результата показывается, что производящая функция для линейных диаграмм без петель и параллельных хорд равна

$$W(t) = \frac{1-\sqrt{1-2t}}{(1-2t)^{3/2}} \exp\left(-1-t+\sqrt{1-2t}\right),$$

а производящая функция для числа соответствующих хордовых диаграмм рассчитывается по формуле

$$U(t) = \frac{e^{-1-t+\sqrt{1-2t}}}{\sqrt{1-2t}}(1+\sqrt{1-2t}) - (2-t)e^{-t}.$$

Полученные результаты обобщаются на случай непомеченных диаграмм с учётом как симметрий вращения, так и всех симметрий.

Третья глава посвящена перечислению регулярных карт с одной гранью на поверхности заданного рода. С помощью подхода Шапуи получается следующее простое выражение для количества помеченных 4-регулярных карт на поверхности рода g:

$$\epsilon_g^{(4)} = \frac{2\,(4g-2)!}{4^g\,g!\,(g-1)!}.$$

Кроме того, показывается, что количество $(1 \div 4)$-карт рода g, то есть карт с вершинами степеней 1 и 4, имеющих ровно k вершин степени 4, рассчитывается по формуле

$$\epsilon_g^{(1\div 4)}(k) = \frac{2\,(3k+1-2g)!}{4^g\,g!\,(2k+2-4g)!\,(k-g)!}.$$

Далее с использованием понятия фактор-карт на орбифолдах перечисляются непомеченные 4-регулярные карты с одной гранью. Выводится следующее явное выражение для количества непомеченных $(1 \div 4)$-карт с одной гранью:

$$\tilde{\epsilon}^{(4)}(g) = \frac{(4g-3)!}{4^g\,g!\,(g-1)!} + \frac{3(4g-3)!}{2\,(2g+1)!\,(2g-2)!} +$$

$$+\sum_{\mathfrak{g}=1}^{\lfloor g/2\rfloor}\sum_{k=2\mathfrak{g}-1}^{g-1}\frac{(2g-2\mathfrak{g}+k-1)!}{2\,(2k-4\mathfrak{g}+2)!\,\mathfrak{g}!\,(k-\mathfrak{g})!\,(2g-1-2k)!} +$$

$$+\sum_{\mathfrak{g}=0}^{\lfloor g/4\rfloor}\sum_{\substack{r_4=2\\ 2|r_4}}^{\lfloor 2(g+3-4\mathfrak{g})/3\rfloor}\sum_{k=2\mathfrak{g}-1+r_4/2}^{\lfloor g/2-r_4/4\rfloor}\frac{2^{2\mathfrak{g}-3+r_4}\,(k-2\mathfrak{g}+g-r_4/2)!}{\mathfrak{g}!\,(k-\mathfrak{g})!\,(g-r_4/2-2k)!\,(2k+3-4\mathfrak{g}-r_4)!\,(r_4-1)!}.$$

С помощью той же техники получается аналогичная формула для числа 3-регулярных карт с одной гранью. Описывается алгоритм перечисления непомеченных p-регулярных карт с одной гранью для простого p в случае, если известны соответствующие числа для помеченных карт. К сожалению, получение простых выражений для количества помеченных p-регулярных карт при $p \geq 5$

представляется весьма трудной и не решённой на сегодняшний день проблемой.

Далее в работе решается задача перечисления непомеченных максимальных карт, то есть карт, имеющих максимальный род при заданном числе рёбер. Приводится комбинаторное доказательство соотношения, выражающего количество непомеченных максимальных карт с учётом всех симметрий через количество помеченных максимальных карт на всех поверхностях, как ориентируемых, так и неориентируемых. Полученные соотношения позволяют вычислять количество непомеченных максимальных карт на поверхности рода g за полиномиальное время.

В **четвертой главе** приведено описание алгоритма, позволяющего перечислять регулярные карты с несколькими гранями. Согласно этому алгоритму, на первом шаге необходимо решить задачу перечисления так называемых почти-d-регулярных карт, то есть карт рода g, имеющих помимо n неразличимых вершин степени d также k выделенных вершин степеней $d_1, d_2, \ldots, d_k$. В диссертации приводится явное рекуррентное соотношение, позволяющее подсчитать количество таких карт. На втором шаге следует воспользоваться подходом Медных и Неделы и описать все орбифолды, допустимые для поверхности рода g. Затем, воспользовавшись результатами первого шага для подсчета карт на таких орбифолдах, можно вычислить количество непомеченных d-регулярных карт рода g с n ребрами. В заключительной части главы приводятся таблицы, построенные в результате работы описанного алгоритма для поверхности рода $g \leq 10$ и значений d от 3 до 6.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы диссертационного исследования.

В представленной работе перечислены различные классы карт с одной гранью (регулярные и почти регулярные, максимальные и т. д.), а также r-регулярные карты с произвольным количеством граней. Получены рекуррентные соотношения, позволяющие описать количество таких карт. В ряде случаев найдены аналитические формулы и асимптотические выражения для полученных числовых последовательностей. Результаты работы опубликованы в статьях [24–27]. Новые числовые последовательности, а также новые формулы, описывающие ранее известные последовательности, добавлены в базу http://oeis.org (последовательности $A292408$, $A003437$, $A003436$,

$A278990$, $A007474$, $A275787$, $A291172$, $A292971$, $A292972$, $A292974$, $A278991$, $A290646$, $A290819$, $A291371$, $A278992$, $A278993$, $A278994$, $A290571$, $A290722$, $A290816$, $A290937$, $A292111$).

Наиболее интересными и перспективными направлениями дальнейших исследований являются вопросы, связанные с перечислением карт с произвольным количеством граней на поверхностях заданного рода с учетом всех гомеоморфизмов таких поверхностей. В процессе перечисления такого рода объектов приходится решать новые нетривиальные задачи перечисления фактор-карт на замкнутых ориентируемых и неориентируемых поверхностях, а также на поверхностях с краем.

Список литературы

1. Enumerating the k-tangle projections / A. Bogdanov, V. Meshkov, A. Omelchenko, M. Petrov // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. — 2012. — Vol. 6.

2. *Goulden I.P., Jackson D.M.* The KP hierarchy, branched covers, and triangulations // *Advances in Mathematics*. — 2008. — Vol. 219, no. 3. — Pp. 932–951.

3. *Segner A.* Enumeratio modorum quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula // *Novis Commentar. Petropolit.* — 1758. — Vol. 7. — Pp. 203–209.

4. *Euler L.* Summarium // *Novis Commentar. Petropolit.* — 1758. — Vol. 7. — Pp. 13–15.

5. *Motzkin T. S.* Relations between hypersurface cross ratios and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance and for non-associative products // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1948. — Vol. 54. — Pp. 352–360.

6. *Harary F., Palmer E. M., Read R. C.* On the cell-growth problem for arbitrary polygons // *Discrete Mathematics*. — 1975. — Vol. 11. — Pp. 371–389.

7. *Joyal André*. Une théorie combinatoire des séries formelles // *Advances in Mathematics*. — 1981. — Vol. 42. — Pp. 1–82.

8. *Bergeron F., Labelle G., Leroux P.* Combinatorial Species and Tree-Like Structures. — Cambridge University Press, 1998.

9. *Otter R.* The number of trees // *Ann. Math*. — 1948. — Vol. 49. — Pp. 583–599.

10. *Stanley Richard P.* Enumerative Combinatorics, Volume 2. — Cambridge University Press, 2001.

11. *Aigner Martin*. A Course in Enumeration. — Springer, 2007.

12. *Jablan Slavik, Sazdanovic Radmila*. Knots, Links, and Self-Avoiding Curves // *Forma*. — 2007. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 5–13.

13. *G. Chapuy, M. Marcus, G. Schaeffer*. A Bijection for Rooted Maps on Orientable Surfaces // *SIAM J. Discrete Math*. — 2009. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 1587–1611.

14. *Singmaster David*. Hamiltonian circuits on the n-dimensional octahedron // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. — 1975. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 1–4.

15. *Hazewinkel M., V.V.Kalashnikov*. Counting Interlacing Pairs on the Circle. Department of Analysis, Algebra and Geometry: Report AM. — Stichting Mathematisch Centrum, 1995.

16. *Walsh T.R.S., Lehman A.B.* Counting rooted maps by genus, I // *J. Combin. Theory Ser. B*. — 1972. — Vol. 13. — Pp. 192–218.

17. *Liskovets V. A.* Enumeration of nonisomorphic planar maps // *Selecta Math. Sovietica*. — 1985. — Vol. 4. — Pp. 303–323.

18. *Wormald N.C.* Counting unrooted planar maps // *Discrete Math.* — 1981. — Vol. 36, no. 205–225.

19. *Mednykh A., Nedela R.* Enumeration of unrooted maps of a given genus // *J. Combin. Theory Ser. B*. — 2006. — Vol. 96, no. 5. — Pp. 709–729.

20. *Tutte William T.* A census of planar maps // *Canad. J. Math.* — 1963. — Vol. 15. — Pp. 249–271.

21. *Tutte William T.* On the enumeration of planar maps // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1968. — Vol. 74. — Pp. 64–74.

22. *E.A Bender, E.R. Canfield, R.W. Robinson*. The enumeration of maps on the torus and the projective plane // *Canad. Math. Bull.* — 1988. — Vol. 31. — Pp. 257–271.

23. *Bender E., Canfield E.* The number of rooted maps on an orientable surface // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. — 1991. — Vol. 53. — Pp. 293–299.

Публикации автора по теме диссертации

24. *E.S.Krasko, A.V.Omelchenko*. Brown’s theorem and its application for enumeration of dissections and planar trees // *The Electronic Journal of Combinatorics*. — 2015. — Vol. 22, no. 1.

25. *Е.С.Краско, А.В.Омельченко*. Перечисление регулярных карт на поверхностях заданного рода // *Записки научных семинаров ПОМИ РАН*. — 2016. — Vol. 450. — Pp. 74–108.

26. *E.S.Krasko, A.V.Omelchenko*. Enumeration of 4-regular one-face maps // *European Journal of Combinatorics*. — 2017. — Vol. 62. — Pp. 167–177.

27. *E.S.Krasko, A.V.Omelchenko*. Enumeration of Chord Diagrams without Loops and Parallel Chords // *The Electronic Journal of Combinatorics*. — 2017. — Vol. 24.

28. *E.S.Krasko, A.V.Omelchenko*. Counting 4-regular one-face maps // SIAM Conference on Discrete Mathematics. — 2016.