

На правах рукописи

**Сарафанов Олег Васильевич**

**Асимптотические и численные методы  
исследования квантовых волноводов  
и приложения к резонансному туннелированию**

Специальность 01.01.03 —  
«Математическая физика»

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор  
**Пламеневский Борис Алексеевич**

Официальные оппоненты: **Ильинский Анатолий Серафимович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Факультет вычислительной математики и кибер-  
нетики, ФГБОУ ВО Московский государственный  
университет им. М. В. Ломоносова,  
профессор Кафедры математической физики, заведую-  
щий Лабораторией вычислительной электродинамики

**Казаков Александр Яковлевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный  
университет промышленных технологий и дизайна,  
заведующий Кафедрой высшей математики и инфор-  
матики

**Кузнецов Николай Германович**,  
доктор физико-математических наук, с. н. с.,  
ФГБУН Институт проблем машиноведения Россий-  
ской академии наук, Санкт-Петербург,  
главный научный сотрудник Лаборатории мате-  
матического моделирования волновых процессов

Ведущая организация: Институт математики с вычислительным центром  
Уфимского федерального исследовательского центра  
Российской академии наук

Защита состоится " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2018 г. в " \_\_\_\_ " часов на заседании диссертационного совета  
Д 002.202.01 на базе ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А.  
Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Мате-  
матического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук, <http://www.pdmi.ras.ru> .

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного  
совета Д 002.202.01, д.ф.-м.н.

Зайцев Андрей Юрьевич

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Работа посвящена развитию асимптотических и численных методов для стационарных задач рассеяния в квантовых волноводах, а также приложениям этих методов к исследованию резонансного туннелирования. Простейшая одномерная модель резонансного туннелирования описывается стационарным уравнением Шредингера с потенциалом, состоящим из двух потенциальных барьеров. Эффект резонансного туннелирования заключается в том, что коэффициент прохождения (то есть вероятность прохождения электронов сквозь барьеры) равен единице при некоторых "резонансных" значениях энергии. Устройства, основанные на эффекте резонансного туннелирования, широко распространены в электронике. Усилия направлены на миниатюризацию и улучшение свойств резонансных структур. В настоящее время наиболее популярны резонансные структуры на основе квантовых точек. Однако, в качестве резонансной структуры может выступать квантовый волновод переменного сечения. Вместо системы "электрод—квантовая точка—электрод" можно рассмотреть квантовый волновод с двумя сужениями. Сужение волновода служит эффективным потенциальным барьером для продольного движения электронов. Часть волновода между сужениями играет роль резонатора, где может возникать резонансное туннелирование. Такие квантовые резонаторы могут использоваться в качестве элементов наноэлектронных устройств и имеют некоторые преимущества в рабочих свойствах и технологии изготовления.

Коэффициенты прохождения и отражения электронов выражаются через элементы волноводной матрицы рассеяния. В работе обосновывается оригинальный метод приближенного вычисления матрицы рассеяния в волноводах (не только квантовых), который позволяет численно исследовать резонансное туннелирование при условии, что диаметр сужений волновода не слишком мал. При стремлении диаметров сужений к нулю численная процедура теряет устойчивость и становится актуальным вопрос об асимптотическом описании резонансного туннелирования. В диссертации получены асимптотические формулы для резонансных значений энергии, описана форма резонансных пиков. Полученные формулы можно использовать, чтобы другим способом получить числовые значения для основных характеристик резонансного туннелирования. Для этого нужно рассмотреть главные части асимптотических формул и приближенно вычислить входящие в них постоянные коэффициенты. Ясно, что численные результаты, полученные из асимптотики, могут быть надежны только при достаточно малых значениях диаметров сужений, а результаты, полученные непосредственным вычислением матрицы рассеяния — при достаточно больших значениях диаметров. Сравнение "асимптотических" и "численных" результатов показывает, что существует интервал диаметров сужений, в котором они совпадают с высокой степенью точности. Таким образом, асимп-

тотические и численные методы дополняют друг друга и дают полную картину резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения.

**Цели и задачи работы.** Целью работы является разработка асимптотических и численных методов исследования стационарных задач теории рассеяния в волноводах и приложение этих методов к изучению резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения. Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Установить принцип излучения для квантовых волноводов и дать определение матрицы рассеяния на любом интервале непрерывного спектра, возможно, содержащем пороги.
2. Исследовать поведение матрицы рассеяния вблизи порогов.
3. Обосновать метод приближенного вычисления матрицы рассеяния в волноводах как вне порогов, так и в их окрестности.
4. Дать асимптотическое описание резонансного туннелирования в квантовых волноводах с двумя цилиндрическими выходами на бесконечность и с двумя сужениями при стремлении диаметров сужений к нулю.
5. Исследовать, как влияют на резонансное туннелирование усложнение формы волновода, повышение энергии электронов и присутствие в волноводе магнитного поля.
6. Сравнить результаты асимптотического и численного анализа резонансного туннелирования.

**Основные результаты работы, выносимые на защиту.**

1. В квантовом волноводе с конечным числом цилиндрических выходов на бесконечность установлен принцип излучения и определена матрица рассеяния на любом интервале непрерывного спектра, включая пороги. Показано, что матрица рассеяния как функция спектрального параметра имеет оба конечных односторонних предела на любом пороге и является на нем непрерывной справа.

2. Обоснован метод вычисления матрицы рассеяния как на интервале непрерывного спектра, отделенном от порогов, так и в окрестности порога. Предложенный метод нечувствителен к присутствию собственных чисел, погруженных в непрерывный спектр (так называемых ловушечных мод). Схема обоснования метода обобщена на волноводы, описываемые произвольной самосопряженной эллиптической системой.

3. В квантовом волноводе, занимающем на плоскости бесконечную полосу с двумя одинаковыми сужениями малого диаметра, получена асимптотика волновой функции, описывающей рассеяние электронов, приходящих в волновод через один из цилиндрических выходов. Из асимптотики волновой функции выведены асимптотические формулы для основных характеристик резонансного туннелирования.

4. В двумерном квантовом волноводе с двумя сужениями изучено, как меняются асимптотические формулы при повышении энергии электронов, при возникновении дополнительных каналов рассеяния и вырожденных собственных чисел резонатора.

5. Построена асимптотическая теория резонансного туннелирования в трехмерных квантовых волноводах с неодинаковыми сужениями. Описано расщепление резонансных пиков при наличии в квантовом волноводе магнитного поля.

6. Проведено сравнение асимптотического и численного описаний резонансного туннелирования для энергий между первым и вторым порогами. Найден интервал диаметров сужений, в котором работают оба подхода. Изучено, как влияет на согласованность двух подходов увеличение интервала энергий до третьего порога.

**Научная новизна и практическая значимость.** Все выносимые на защиту результаты получены впервые. Развита новая численная и асимптотическая методы исследования волноводов, с их помощью построена полная картина резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения. Полученные результаты могут использоваться для анализа работы электронных приборов, основанных на явлении резонансного туннелирования (см., например, [14, 15, 18]). Кроме того, развитые методы допускают обобщение для исследования аналогичных явлений в упругих и электромагнитных волноводах.

**Публикации и личный вклад.** Основные результаты по теме диссертации изложены в статьях [1–10], опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК, а также в научной монографии [11]. Эти результаты использовались при подготовке патентов [14, 15]. Цели и задачи исследования определялись совместно Л. М. Баскиным, П. Нейтгаанмяки, Б. А. Пламеневским и диссертантом. Обоснование метода вычисления волноводной матрицы рассеяния вне порогов принадлежит Б. А. Пламеневскому и диссертанту в равной степени. В окрестности порогов постановка задачи с условиями излучения в квантовом волноводе, определение матрицы рассеяния и метод ее вычисления принадлежат в равной степени Б. А. Пламеневскому, А. С. Порецкому и диссертанту. Асимптотические формулы для основных характеристик резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения получены диссертантом лично. Приведенные в диссертации численные результаты получены М. М. Кабардовым, П. Нейтгаанмяки и Н. М. Шарковой. Сравнение асимптотики и вычислений проводилось совместно Л. М. Баскиным, П. Нейтгаанмяки, Б. А. Пламеневским и диссертантом.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: The Ninth U.S. National Congress on Computational Mechanics (USNCCM IX) (Сан-Франциско, 2007), European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, (ECCOMAS) (Венеция, 2008; Вена, 2012), XXII международная конференция им. И. Г. Петровского

"Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (Москва, 2011), Шестая Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VI" (ОТНА) (Ростов-на-Дону 2016), The Eighth St. Petersburg Conference in Spectral Theory (Санкт-Петербург, 2016), 27-я Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ) (Крым, 2016); Петербургский семинар по дифракции и распространению волн (2011, 2017), Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике (Санкт-Петербург, 2017), научные семинары кафедры высшей математики и математической физики СПбГУ.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации составляет 210 страниц, список литературы содержит 48 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** описываются методы исследования, структура и содержание работы.

Основные характеристики резонансного туннелирования выражаются через элементы волноводной матрицы рассеяния. Поэтому, при изучении резонансного туннелирования, главным образом анализируется поведение матрицы рассеяния. В первых двух главах диссертации определяются матрицы рассеяния, описываются их свойства и обосновывается метод вычисления этих матриц. При этом рассматриваются волноводы более общего вида (с конечным числом цилиндрических выходов на бесконечность), чем нужно в последующих главах для исследования резонансного туннелирования. Это обстоятельство не приводит к усложнению рассуждений, зато позволяет расширить круг возможных приложений.

В **главе 1** устанавливается принцип излучения для уравнения Гельмгольца в волноводах (то есть исследуется разрешимость краевой задачи с условиями излучения), определяется матрица рассеяния и изучаются ее свойства вблизи пороговых значений спектрального параметра. Доказательство внепорогового варианта принципа излучения известно [32] и в частном случае (для уравнения Гельмгольца) приведено в приложении для удобства ссылок. В той ситуации, когда область изменения спектрального параметра содержит порог, результаты главы получены в работе [8].

Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n = 1, 2$ , с гладкой границей  $\partial G$ , совпадающая вне большого шара с объединением  $\Pi_+^1 \cup \dots \cup \Pi_+^T$  конечного числа непересекающихся полуцилиндров

$$\Pi_+^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r, t^r > 0\},$$

где  $(y^r, t^r)$  — локальные координаты в  $\Pi_+^r$  и  $\Omega^r$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  (Рис. 1). Рассмотрим краевую задачу

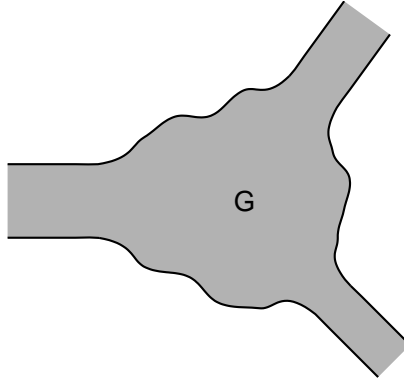


Рис. 1: Волновод  $G$ .

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= 0, & x \in G, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial G. \end{aligned} \quad (1)$$

Мы считаем, что при некоторых условиях волновая функция электрона удовлетворяет задаче (1), что она ограничена и не исчезает на бесконечности. Чтобы описать поведение волновой функции на бесконечности, используются решения задачи в цилиндре

$$\begin{aligned} -(\Delta_{y,t} + \mu)u(y,t) &= 0, & (y,t) \in \Omega \times \mathbb{R} = \Pi, \\ u(y,t) &= 0, & (y,t) \in \partial\Pi, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$  и  $\Delta_{y,t} = \Delta_y + \partial_t^2$ . Непосредственные вычисления показывают, что ненулевые функции

$$\Omega \times \mathbb{R} \ni (y,t) \mapsto \exp(\pm i(\mu - \tau)^{1/2}t)\varphi(y)$$

удовлетворяют задаче (2), только если

$$\begin{aligned} -(\Delta_y + \tau)\varphi(y) &= 0, & y \in \Omega, \\ \varphi(y) &= 0, & y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

то есть  $\varphi$  является собственной функцией задачи (3), а  $\tau$  — соответствующим собственным числом. Собственные числа задачи (3) называются порогами; они образуют возрастающую последовательность  $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ , стремящуюся к  $+\infty$ .

Зафиксируем один из порогов  $\tau < \mu$  и обозначим через  $\varphi_p$ ,  $p = 1, \dots, \varkappa(\tau)$ , ортонормированный базис в соответствующем собственном подпространстве;  $\varkappa(\tau)$  — кратность собственного числа  $\tau$  задачи (3). Положим

$$u_p^\pm(y,t) = (2|\lambda^\mp|)^{-1/2} \exp(i\lambda^\mp t)\varphi_p(y), \quad (4)$$

где  $\lambda^\pm = \pm(\mu - \tau)^{1/2}$ . Функции (4) ограничены, удовлетворяют (2) и не стремятся к нулю на бесконечности. Мы будем называть  $u_p^+$  ( $u_p^-$ ) волной, приходящей из  $+\infty$  (уходящей в  $+\infty$ ). В общем случае, когда  $\mu \in (\tau_l, \tau_{l+1})$ , число пар волн в цилиндре  $\Pi$  равно сумме  $\varkappa(\tau_1) + \dots + \varkappa(\tau_l)$ .

Пусть  $\mu$  не совпадает ни с одним из порогов, то есть ни с одним из собственных чисел задач (3) в областях  $\Omega_1, \dots, \Omega_\tau$ . Зафиксируем  $\mu$  и пронумеруем все пары

волн в цилиндрах  $\Pi_1, \dots, \Pi_\tau$  одним индексом  $j = 1, 2, \dots, M$ . В пространстве волновых функций, заданных в области  $G$ , существуют такие функции  $Y_1, \dots, Y_M$ , для которых справедливы разложения

$$Y_l(x) = u_l^+(x) + \sum_{j=1}^M S_{lj} u_j^-(x) + O(\exp(-\delta|x|)) \quad (5)$$

при  $|x| \rightarrow \infty$ , где  $\delta$  — достаточно малое положительное число и  $l = 1, \dots, M$ . Матрица

$$S(\mu) = \|S_{lj}(\mu)\|_{j,l=1}^M$$

называется матрицей рассеяния, она унитарна и симметрична. Размер  $M = M(\mu)$  матрицы  $S(\mu)$  зависит от  $\mu$ , остается постоянным между двумя соседними порогами и испытывает скачки на порогах, возрастая до  $+\infty$  при  $\mu \rightarrow +\infty$ . В диссертации показано, что на любом пороге  $\tau$  существуют оба односторонних предела матрицы  $S(\mu)$  при  $\mu \rightarrow \tau \pm 0$  и, кроме того,  $S$  можно естественным образом определить на пороге  $\tau$ , причем она будет непрерывна справа.

Пусть теперь  $\tau' < \tau''$  — пороги волновода  $G$ , между которыми расположен единственный порог  $\tau$ . Положим

$$w_k^\pm(y, t; \mu) = 2^{-1/2} \left( \frac{e^{it\sqrt{\mu-\mu_k}} + e^{-it\sqrt{\mu-\mu_k}}}{2} \mp \frac{e^{it\sqrt{\mu-\mu_k}} - e^{-it\sqrt{\mu-\mu_k}}}{2\sqrt{\mu-\mu_k}} \right) \varphi_k(y), \quad (6)$$

$$w_p^\pm(y, t; \mu) = u_p^\pm(y, t; \mu), \quad (7)$$

где  $p = 1, \dots, L$ ,  $k = L+1, \dots, M$ ,  $M = L + \varkappa(\tau)$ , а функции  $u_p^\pm$  определены формулами вида (4).

**Предложение 1.** *Функции  $\mu \mapsto w_k^\pm(y, t; \mu)$ ,  $k = L+1, \dots, M$ , допускают аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Эти целые функции гладко зависят от параметров  $y \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (т. е. любые производные по  $y$  и  $t$  также являются целыми функциями).*

Базис волн (6)–(7) будем называть устойчивым на пороге  $\tau$ . Для  $\mu \in (\tau', \tau)$  волны  $w_k^\pm$  оказываются экспоненциально растущими при  $x \rightarrow \infty$ . На интервале  $(\tau, \tau'')$  в пространстве собственных функций непрерывного спектра существует базис  $\mathcal{Y}_1(\cdot, \mu), \dots, \mathcal{Y}_M(\cdot, \mu)$ , подчиненный условиям

$$\mathcal{Y}_j(x, \mu) = w_j^+(x, \mu) + \sum_{k=1}^M \mathcal{S}_{jk}(\mu) w_k^-(x, \mu) + O(e^{-\delta|x|}). \quad (8)$$

В отличие от матрицы  $S(\mu)$  новая матрица  $\mathcal{S}(\mu) = \|\mathcal{S}_{jk}(\mu)\|$  сохраняет размер на интервале  $(\tau', \tau'')$ ; она унитарна и симметрична. Матрица  $\mathcal{S}(\mu)$  называется расширенной матрицей рассеяния. Отметим, что число  $\mu$  может оказаться собственным числом задачи (1). Тогда собственные функции непрерывного спектра (8) определены лишь с точностью до линейной комбинации собственных функций, отвечающих



числу  $\mu$ . Так как собственные функции (в отличие от  $\mathcal{Y}_j$ ) обязаны убывать на бесконечности с экспоненциальной скоростью, то матрица  $\mathcal{S}(\mu)$  определена однозначно.

Приведем корректную постановку задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) &= f, & x \in G, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial G, \end{aligned} \quad (9)$$

с "расширенными" условиями излучения в волноводе  $G$ . При целых  $l \geq 0$  обозначим через  $H^l(G)$  пространство Соболева. Пусть  $\rho_\gamma$  — гладкая положительная в  $\bar{G}$  функция, которая на  $\Pi_+$  задана равенством  $\rho_\gamma(y^r, t^r) = \exp(\gamma t^r)$ , причем  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Пусть еще  $H_\gamma^l(G)$  — пространство с нормой  $\|u; H_\gamma^l(G)\| = \|\rho_\gamma u; H^l(G)\|$ , а  $\dot{H}_\gamma^2(G)$  обозначает замыкание в  $H_\gamma^2(G)$  множества гладких на  $\bar{G}$  функций, имеющих компактный носитель в  $\bar{G}$  и обращающихся в ноль на границе  $\partial G$ . Оператор  $u \mapsto (-\Delta - \mu)u$  задачи (9) осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{A}_\gamma(\mu) : \dot{H}_\gamma^2(G) \rightarrow H_\gamma^0(G). \quad (10)$$

Обозначим через  $\mathfrak{K}$  линейную оболочку  $\mathcal{L}(w_1^-, \dots, w_M^-)$ . Норму элемента  $w = \sum c_j w_j^- + v \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$ , где  $c_j \in \mathbb{C}$  и  $v \in \dot{H}_\gamma^2(G)$ , определим равенством

$$\|w\| = \sum |c_j| + \|v; H_\gamma^2(G)\|.$$

Пусть  $\mathbf{A}(\mu)$  — сужение оператора  $\mathcal{A}_\gamma(\mu)$  на пространство  $\mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$ , тогда непрерывно отображение

$$\mathbf{A}(\mu) : \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G) \rightarrow H_\gamma^0(G).$$

**Теорема 2.** Пусть  $\mu \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$ ,  $\gamma \in (\sqrt{\delta}, \sqrt{\tau'' - \tau - \delta})$ , и пусть  $\{w_k^\pm(\cdot, \mu)\}$  — описанный выше устойчивый базис волн в  $G$ . Пусть  $z_1, \dots, z_d$  — базис в пространстве  $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu)$ ,  $f \in H_\gamma^0(G)$  и  $(f, z_j)_G = 0$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Тогда:

1. Существует решение  $w \in \mathfrak{K} \dot{+} \dot{H}_\gamma^2(G)$  уравнения  $\mathbf{A}(\mu)w = f$ , определенное с точностью до произвольного слагаемого из линейала  $\mathcal{L}(z_1, \dots, z_d)$ .

2. Справедливо включение

$$v \equiv w - c_1 w_1^- - \dots - c_M w_M^- \in H_\gamma^2(G),$$

где  $c_j = (f, \bar{\mathcal{Y}}_j)_G$ ; черта над  $\mathcal{Y}_j$  означает комплексное сопряжение.

3. Для решения  $w$  выполняется неравенство

$$\|v; H_\gamma^2(G)\| + |c_1| + \dots + |c_M| \leq \text{const} (\|f; H_\gamma^0(G)\| + \|\rho_\gamma v; L_2(G)\|). \quad (11)$$

Решение  $w_0$ , подчиненное условиям  $(w_0, z_j)_G = 0$  при  $j = 1, \dots, d$ , единственно, и для него верна оценка (11) с заменой правой части на  $\text{const} \|f; \mathcal{H}_\gamma(G)\|$ .

Перейдем к описанию аналитических свойств матриц  $S(\mu)$  и  $\mathcal{S}(\mu)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\tau' < \tau < \tau''$  — три последовательных порога для задачи (1). Тогда:

i). На интервалах  $(\tau', \tau)$  и  $(\tau, \tau'')$  существуют аналитические базисы  $\{\mu \mapsto Y_j(\cdot, \mu)\}$  в пространствах собственных функций непрерывного спектра задачи (1), удовлетворяющие формулам (5) с матрицей рассеяния  $\mu \mapsto S(\mu)$ , аналитической на указанных интервалах.

ii). На интервале  $(\tau', \tau'')$  существует аналитический базис  $\{\mu \mapsto \mathcal{Y}_j(\cdot, \mu)\}$  в пространствах собственных функций непрерывного спектра задачи (1), удовлетворяющий формулам (8) с матрицей рассеяния  $\mu \mapsto \mathcal{S}(\mu)$ , аналитической на указанном интервале.

Элементы "нерасширенной" матрицы  $S(\mu)$  выражаются в терминах, связанных только с матрицей  $\mathcal{S}(\mu)$ . Это позволяет, в частности, доказать существование конечных пределов  $\lim S(\mu)$  при  $\mu \rightarrow \tau \pm 0$  и вычислить такие пределы. Для базиса  $\{\mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu)\}_j^M$  в пространстве собственных функций непрерывного спектра (см. теорему 3, ii)) введем столбцы  $\mathcal{Y}_{(1)}^+ = (\mathcal{Y}_1^+, \dots, \mathcal{Y}_L^+)^t$  и  $\mathcal{Y}_{(2)}^+ = (\mathcal{Y}_{L+1}^+, \dots, \mathcal{Y}_M^+)^t$  и, в соответствии с этими обозначениями, запишем при  $\mu \in (\tau', \tau'')$  матрицу рассеяния в виде

$$\mathcal{S}(\mu) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)}(\mu) & \mathcal{S}_{(12)}(\mu) \\ \mathcal{S}_{(21)}(\mu) & \mathcal{S}_{(22)}(\mu) \end{pmatrix},$$

где, например,  $\mathcal{S}_{(11)}(\mu)$  — блок размера  $L \times L$ , а  $\mathcal{S}_{(22)}(\mu)$  — блок размера  $(M - L) \times (M - L)$ . Положим еще

$$D = ((\mu - \tau)^{1/2} + 1)/((\mu - \tau)^{1/2} - 1),$$

причем  $(\mu - \tau)^{1/2} = i(\tau - \mu)^{1/2}$  для  $\mu \leq \tau$  и  $(\tau - \mu)^{1/2} \geq 0$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\mu \in (\tau', \tau]$  и  $\mathcal{S}(\mu)$  — матрица рассеяния из теоремы 3, ii). Тогда

$$\begin{aligned} \ker(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)) &\subset \ker \mathcal{S}_{(12)}(\mu), \\ \text{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)) &\supset \text{Im} \mathcal{S}_{(21)}(\mu). \end{aligned}$$

Поэтому оператор  $\mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}$  определен на образе  $\text{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))$  и на образе  $\text{Im} \mathcal{S}_{(21)}(\mu)$ .

Следующее утверждение по существу содержится в [33, 34].

**Предложение 5.** Пусть  $\mu \in (\tau', \tau)$ , а  $S(\mu)$  и  $\mathcal{S}(\mu)$  — матрицы рассеяния из теоремы 3. Тогда справедливо равенство

$$S(\mu) = \mathcal{S}_{(11)}(\mu) - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{(21)}(\mu). \quad (12)$$

На интервале  $(\tau, \tau'')$  матрицу  $S$  разобьем на четыре блока с диагональными блоками  $S_{11}$  размера  $L \times L$  и  $S_{22}$  размера  $(M - L) \times (M - L)$ . Положим еще  $d^\pm = 2^{-1}(\lambda^{1/2} \pm \lambda^{-1/2})$ .

**Предложение 6.** При  $\mu \in (\tau, \tau'')$  для блоков  $S_{ij}(\mu)$  матрицы рассеяния  $S(\mu)$  справедливы представления

$$S_{11} = \mathcal{S}_{11} - \mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}\mathcal{S}_{21}, \quad (13)$$

$$S_{12} = \mathcal{S}_{12}d^+ - \mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+ + I_{M-L}d^-), \quad (14)$$

$$S_{21} = (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}\mathcal{S}_{21}, \quad (15)$$

$$S_{22} = (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+ + I_{M-L}d^-). \quad (16)$$

Так как матрица  $\mathcal{S}(\mu)$  аналитична в окрестности порога  $\tau$ , то из формул (12)–(16) вытекает

**Следствие 7.** Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \tau-0} S(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{11}(\mu) = \mathcal{S}_{(11)}(\tau) - \mathcal{S}_{(12)}(\tau)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\tau))^{-1}\mathcal{S}_{(21)}(\tau), \\ \lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{12}(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{21}(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{22}(\mu) = P - Q, \end{aligned}$$

где  $P$  — ортогональный проектор  $\mathbb{C}^{M-L}$  на ядро  $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$  и  $Q = I - P$ . В частности, если ядро  $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$  тривиально, то  $\lim_{\mu \rightarrow \tau+0} S_{22}(\mu) = -I_{M-L}$ .

Переход к устойчивому базису решений в связи со сменой асимптотических режимов является достаточно стандартным приемом в асимптотических исследованиях. Например, в [20,30] устойчивый базис вводился для исследования асимптотики решений эллиптических краевых задач в окрестности конической точки на границе. Расширенная матрица рассеяния в различных геометрических ситуациях вводилась в работах [27, 33, 35] для общих эллиптических систем, самосопряженных относительно формулы Грина. В [26] асимптотика матрицы рассеяния для дифракционной решетки (малым параметром служило удаление энергии электрона от порога) была обоснована, по существу, с использованием устойчивого базиса. В [31] свойства матрицы рассеяния вблизи порога исследовались методами работы [26].

Во **второй главе** обосновывается метод вычисления матрицы рассеяния, применяемый впоследствии для численного исследования резонансного туннелирования. Введем следующие обозначения:

$$\Pi_+^{r,R} = \{(y^r, t^r) \in \Pi^r : t^r > R\}, \quad G^R = G \setminus \cup_{r=1}^N \Pi_+^{r,R}$$

при больших  $R$ . Тогда  $\partial G^R \setminus \partial G = \Gamma^R = \cup_r \Gamma^{r,R}$ , где  $\Gamma^{r,R} = \{(y^r, t^r) \in \Pi^r : t^r = R\}$ . Мы ищем приближение для строки  $(S_{11}, \dots, S_{1M})$  матрицы рассеяния  $S = S(\mu)$ . Таким приближением служит минимизатор некоторого квадратичного функционала. Чтобы построить этот функционал, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -(\Delta + \mu)\mathcal{X}_l^R &= 0, \quad x \in G^R; \\ \mathcal{X}_l^R &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)\mathcal{X}_l^R &= (\partial_\nu + i\zeta)(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j u_j^-), \quad x \in \Gamma^R, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  фиксируется произвольным образом,  $\nu$  — вектор единичной нормали, а  $a_1, \dots, a_M$  — комплексные числа.

Поясним происхождение этой задачи. Волновая функция электрона  $\Psi_l$  является решением задачи (1), следовательно, удовлетворяет первым двум уравнениям из (17). Асимптотика (5) допускает дифференцирование, поэтому

$$(\partial_\nu + i\zeta)\Psi_l = (\partial_\nu + i\zeta)(u_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j u_j^-) + O(e^{-\gamma R})$$

при  $a_j = S_{lj}$ . Таким образом,  $\Psi_l$  удовлетворяет последнему уравнению в (17) с точностью до экспоненциально малой невязки.

В качестве приближения для строки  $(S_{l1}, \dots, S_{lM})$  возьмем минимизатор  $a^0(R) = (a_1^0(R), \dots, a_M^0(R))$  функционала

$$J_l^R(a_1, \dots, a_M) = \|\mathcal{X}_l^R - u_l^+ - \sum_{j=1}^M a_j u_j^-; L_2(\Gamma^R)\|^2, \quad (18)$$

где  $\mathcal{X}_l^R$  — решение задачи (17). Можно ожидать, что  $a_j^0(R, \mu) \rightarrow S_{lj}(\mu)$  с экспоненциальной скоростью при  $R \rightarrow \infty$  и  $j = 1, \dots, M$ . Чтобы найти зависимость решения  $\mathcal{X}_l^R$  от параметров  $a_1, \dots, a_M$ , рассмотрим краевые задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)v_j^\pm &= 0, & x \in G^R; \\ v_j^\pm &= 0, & x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)v_j^\pm &= (\partial_\nu + i\zeta)u_j^\pm, & x \in \Gamma^R; \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (19)$$

Ясно, что  $\mathcal{X}_l^R = v_{l,R}^+ + \sum_j a_j v_{j,R}^-$ , где  $v_j^\pm = v_{j,R}^\pm$  — решения задач (19). Введем матрицы размера  $M \times M$  с элементами

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ij}^R &= ((v_i^- - u_i^-), (v_j^- - u_j^-))_{\Gamma^R}, \\ \mathcal{F}_{ij}^R &= ((v_i^+ - u_i^+), (v_j^- - u_j^-))_{\Gamma^R}, \end{aligned} \quad (20)$$

и положим

$$\mathcal{G}_i^R = ((v_i^+ - u_i^+), (v_i^+ - u_i^+))_{\Gamma^R}.$$

Функционал (18) можно переписать в виде

$$J_l^R(a, \mu) = \langle a \mathcal{E}^R(\mu), a \rangle + 2\text{Re} \langle \mathcal{F}_l^R(\mu), a \rangle + \mathcal{G}_l^R(\mu),$$

где  $\mathcal{F}_l^R$  — строка матрицы  $\mathcal{F}^R$  с номером  $l$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{C}^M$ . Минимум достигается на строке  $a^0 = a^0(R, \mu)$ , удовлетворяющей системе  $a^0(R, \mu) \mathcal{E}^R + \mathcal{F}_l^R = 0$ . Таким образом, в качестве приближения  $S^R(\mu)$  для матрицы рассеяния  $S(\mu)$  принимается решение уравнения  $S^R \mathcal{E}^R + \mathcal{F}^R = 0$ .

Для того чтобы обосновать метод, необходимо убедиться, что задачи (19) однозначно разрешимы при больших  $R$  и при  $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , матрица  $\mathcal{E}^R$  невырожденная, а минимизатор  $a^0(R, \mu)$  функционала  $J_l^R(\cdot, \mu)$  стремится к строке  $(S_{l1}(\mu), \dots, S_{lM}(\mu))$  матрицы рассеяния при  $R \rightarrow \infty$  и  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ .

**Предложение 8.** При любых  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $R \geq R_0$ , где  $R_0$  — достаточно большое положительное число, задача

$$\begin{aligned} -(\Delta + \mu)v &= 0, & x \in G^R; \\ v &= 0, & x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (\partial_\nu + i\zeta)v &= h, & x \in \Gamma^R, \end{aligned}$$

имеет единственное обобщенное решение  $v \in H^1(G^R)$  для любой правой части  $h \in L_2(\Gamma^R)$ .

**Предложение 9.** Пусть  $\mu$ ,  $\zeta$  и  $R$  подчинены тем же условиям, что и в предложении 8. Тогда матрица  $\mathcal{E}^R$  с элементами (20) невырождена.

**Теорема 10.** Пусть  $[\mu', \mu'']$  — отрезок непрерывного спектра, не содержащий порогов. При всех  $R \geq R_0$ ,  $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $\mu \in [\mu', \mu'']$  существует единственный минимизатор  $a(R, \mu) = (a_1(R, \mu), \dots, a_M(R, \mu))$  функционала (18), причем

$$|a_j(R, \mu) - S_{lj}(\mu)| \leq c(\Lambda, \zeta)e^{-\Lambda R}, \quad j = 1, \dots, M,$$

где постоянные  $\Lambda$  и  $c(\Lambda, \zeta)$  положительны и не зависят от  $R$  и  $\mu$ .

Для уравнения Гельмгольца в близкой ситуации обсуждаемый метод был предложен в работе [22]. Там же была описана схема его обоснования без полного исследования разрешимости задачи в  $G^R$ ; предполагалось, что исходная задача в волноводе  $G$  не имеет вещественных собственных значений (ловушечных мод). Обобщение метода на случай самосопряженных эллиптических систем с переменными коэффициентами, стабилизирующимися на бесконечности с экспоненциальной скоростью, дано в [7]. В [3] этот результат был распространен на периодические волноводы с медленной стабилизацией коэффициентов. В упомянутых работах [7] и [3] разрешимость задачи в  $G^R$  постулировалась.

Полное обоснование метода впервые дано в работе [2] для уравнения Гельмгольца в двумерном волноводе с одним выходом на бесконечность. Для уравнения Гельмгольца в волноводах произвольной размерности и с произвольным (конечным) числом цилиндрических выходов метод обоснован в книге [11]. Метод вычисления матрицы рассеяния в электромагнитных волноводах анонсирован в заметке [36]. Реализация метода для квантовых волноводов проведена в [4, 6, 9].

На интервале непрерывного спектра, содержащем порог, аналогичным образом можно найти приближение для расширенной матрицы рассеяния  $\mathcal{S}(\mu)$ , определенной соотношениями (8). Если матрица  $\mathcal{S}(\mu)$  вычислена, то, используя связь между  $S(\mu)$  и  $\mathcal{S}(\mu)$ , установленную в первой главе, можно получить приближение для "нерасширенной" матрицы рассеяния  $S(\mu)$  в окрестности порога (в том числе и на самом пороге). Эти результаты получены в работе [8], вычисления вблизи порога проводились в [23, 24].

Отметим в этой связи метод R-матрицы, изложенный, например, в [19]. Он применим только к волноводам специфической формы — составленным из отрезков цилиндров разного радиуса (см. [37–40]). Однако такие волноводы оказываются неудовлетворительными с точки зрения физики.

В **третьей главе** начинается асимптотическое исследование резонансного туннелирования. Волновод занимает на плоскости бесконечную полосу с двумя одинаковыми сужениями диаметра  $\varepsilon$ , симметричную относительно координатных осей. Волновая функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца в этой полосе и обращается в ноль на границе. Энергия электронов (спектральный параметр в уравнении Гельмгольца) предполагается принадлежащей интервалу между первым и вторым порогами, поэтому каждому выходу на бесконечность соответствует только один канал рассеяния. Цель — вывести асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для резонансной энергии  $k_{res}^2$ , для коэффициентов прохождения  $T(k^2)$  и отражения  $R(k^2)$ , а также для добротности резонатора. Эти результаты получены в [4].

Как оказывается, асимптотические формулы существенным образом зависят от предельной формы сужений. Мы считаем, что предельный волновод вблизи каждого сужения совпадает с парой вертикальных углов. На первом этапе строится асимптотика соответствующей волновой функции методом "составных" асимптотических разложений (общая теория метода изложена, например, в [25, 29]). Такие разложения содержат слагаемые двух родов: слагаемые первого рода зависят от "медленной" переменной  $x$  и дают приближение для волновой функции "далеко" от сужений; слагаемые второго рода зависят от быстрых переменных  $x/\varepsilon$  и служат приближением в окрестности сужений. Эти слагаемые являются решениями так называемых предельных задач первого и второго рода, соответственно. Анализ полученных разложений позволяет вывести асимптотические формулы для упомянутых характеристик резонансного туннелирования.

Для того, чтобы описать область  $G(\varepsilon)$  в  $\mathbb{R}^2$ , занимаемую волноводом, мы введем две вспомогательные области  $G$  и  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^2$ . Область  $G$  — полоса

$$G = \mathbb{R} \times D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty); y \in D = (-l/2, l/2)\}.$$

Через  $K$  обозначим пару вертикальных углов с вершиной в начале координат  $O$ ; считаем, что область  $K$  содержит ось  $x$  и симметрична относительно координатных осей. Множество  $K \cap S^1$ , где  $S^1$  — единичная окружность, состоит из двух простых дуг. Предположим, что  $\Omega$  содержит  $K$  вместе с некоторой окрестностью начала  $O$ , а вне большого круга (с центром в начале)  $\Omega$  совпадает с  $K$ . Граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  предполагается гладкой (см. Рис. 2).

Обозначим через  $\Omega(\varepsilon)$  область, полученную из  $\Omega$  сжатием с центром в  $O$  и коэффициентом  $\varepsilon$ . Другими словами,  $(x, y) \in \Omega(\varepsilon)$  тогда и только тогда, когда  $(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \in \Omega$ . Пусть  $K_j$  и  $\Omega_j(\varepsilon)$  обозначают  $K$  и  $\Omega(\varepsilon)$ , сдвинутые на вектор  $\mathbf{r}_j = (x_j^0, 0)$ ,  $j = 1, 2$ . Положим  $G(\varepsilon) = G \cap \Omega_1(\varepsilon) \cap \Omega_2(\varepsilon)$  (см. Рис. 3).

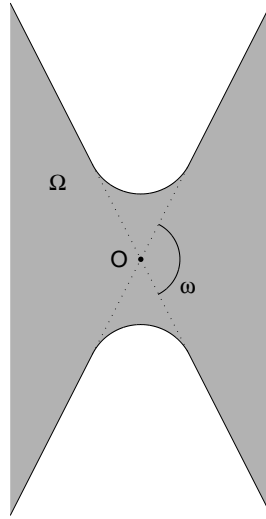


Рис. 2: Область  $\Omega$ .

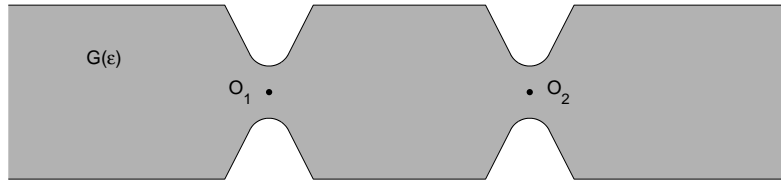


Рис. 3: Волновод  $G(\varepsilon)$ .

Волновая функция свободного электрона с энергией  $k^2$  удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) - k^2 u(x, y) &= 0, & (x, y) \in G(\varepsilon), \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial G(\varepsilon). \end{aligned} \quad (21)$$

Кроме того,  $u$  подчиняется некоторым условиям излучения на бесконечности. Предположим, что  $k^2$  лежит в интервале между первым и вторым порогами, то есть в каждом выходе на бесконечность может распространяться только одна приходящая и одна уходящая волны. Пусть, например, справедливо разложение

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1^+(x, y) + S_{11} u_1^-(x, y) + O(\exp(\delta x)), & x \rightarrow -\infty, \\ S_{12} u_2^-(x, y) + O(\exp(-\delta x)), & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (22)$$

Тогда  $u$  описывает рассеяние волны, приходящей из  $-\infty$ , и определяет первую строку  $(S_{11}, S_{12})$  матрицы рассеяния. Коэффициент прохождения определяется равенством  $T = |S_{12}|^2$ .

Положим  $G(0) = G \cap K_1 \cap K_2$  (Рис. 4); то есть  $G(0)$  состоит из трех частей  $G_0, G_1$  и  $G_2$ , где  $G_1$  и  $G_2$  — бесконечные области, а  $G_0$  — ограниченный резонатор. Краевые задачи

$$\begin{aligned} -\Delta v(x, y) - k^2 v(x, y) &= f, & (x, y) \in G_j, \\ v(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial G_j, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $j = 0, 1, 2$ , называются предельными задачами первого рода. В областях  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$ , мы рассматриваем краевые задачи

$$\begin{aligned}\Delta w(\xi_j, \eta_j) &= F(\xi_j, \eta_j), & (\xi_j, \eta_j) &\in \Omega_j, \\ w(\xi_j, \eta_j) &= 0, & (\xi_j, \eta_j) &\in \partial\Omega_j,\end{aligned}\tag{24}$$

которые называются предельными задачами второго рода;  $(\xi_j, \eta_j)$  — декартовы координаты с центром в  $O_j$ .

Пусть  $\Theta$  — срезающая функция на  $\mathbb{R}_+$ , такая, что  $\Theta(t) = 1$  при  $t < t_0$  и  $\Theta(t) = 0$  при  $t > 2t_0$ , где  $t_0$  — достаточно малое положительное число. Введем срезки

$$\begin{aligned}\chi_{1,\varepsilon}(x, y) &= (1 - \Theta(r_1/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_1}(x, y), & \chi_{2,\varepsilon}(x, y) &= (1 - \Theta(r_2/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_2}(x, y), \\ \chi_{0,\varepsilon}(x, y) &= (1 - \Theta(r_1/\varepsilon) - \Theta(r_2/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_0}(x, y),\end{aligned}$$

где  $r_j$  — расстояние от точки  $(x, y)$  до  $O_j$ ,  $\mathbf{1}_{G_j}$  — характеристическая функция множества  $G_j$ . Асимптотика волновой функции  $u$  имеет вид

$$\begin{aligned}u(x, y; \varepsilon) &= \chi_{1,\varepsilon}(x, y)v_1(x, y; \varepsilon) + \chi_{0,\varepsilon}(x, y)v_0(x, y; \varepsilon) + \chi_{2,\varepsilon}(x, y)v_2(x, y; \varepsilon) \\ &+ \varepsilon^2\Theta(r_1)w_1(\varepsilon^{-1}(x - x_1^0), \varepsilon^{-1}y; \varepsilon) + \varepsilon^2\Theta(r_2)w_2(\varepsilon^{-1}(x - x_2^0), \varepsilon^{-1}y; \varepsilon) + R(x, y; \varepsilon),\end{aligned}\tag{25}$$

где  $v_j$  — решения однородных предельных задач первого рода (23),  $w_j$  — решения предельных задач второго рода (24),  $R$  — остаток.

Обозначим через  $k_e^2$  простое собственное число задачи (23) в резонаторе  $G_0$ , а через  $k_r^2(\varepsilon)$  — резонансную энергию, такую, что  $k_r^2(\varepsilon) \rightarrow k_e^2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При  $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$  справедливы асимптотические разложения

$$T(k, \varepsilon) = \frac{1}{1 + P^2 \left( \frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon^{4\pi/\omega}} \right)^2} (1 + O(\varepsilon^{2-\delta})),\tag{26}$$

$$k_r^2(\varepsilon) = k_e^2 + Q\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega+2-\delta}),\tag{27}$$

$$\Upsilon(\varepsilon) = \frac{1}{P}\varepsilon^{4\pi/\omega} (1 + O(\varepsilon^{2-\delta})),\tag{28}$$

где  $T(k, \varepsilon)$  — коэффициент прохождения,  $\Upsilon(\varepsilon)$  — ширина резонансного пика на половине его высоты (то есть  $\Upsilon(\varepsilon)^{-1}$  — добротность резонатора),  $\omega$  — растрор углов  $K_j$  (см. Рис. 2),  $\delta$  — достаточно малое положительное число;  $P$  и  $Q$  представляют

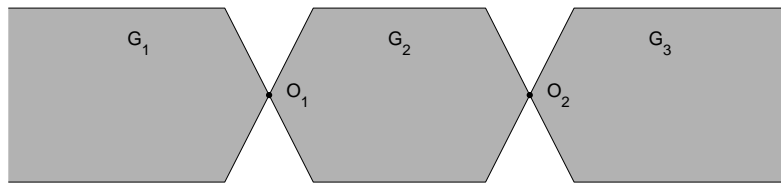


Рис. 4: "Предельный" волновод  $G(0)$ .



собой произведения нескольких постоянных из асимптотических разложений для решений предельных задач вблизи угловых точек или на бесконечности.

Опишем схему обоснования асимптотики. В первую очередь оценивается остаток  $R$  в формуле (25). Для этого  $R$  выражается из (25) и подставляется в задачу (21). Если известна оценка для резольвенты задачи

$$\Delta u + k^2 u = f \quad \text{в } G(\varepsilon), \quad u = 0 \quad \text{на } \partial G(\varepsilon), \quad (29)$$

то остаток оценивается через норму возникшей невязки. Вывод оценки для резольвенты осложняется тем, что она зависит от двух параметров  $k$  и  $\varepsilon$ . Причем резольвента, как функция параметра  $k$ , имеет полюс в нижней комплексной полуплоскости, стремящийся к вещественной оси (точнее, к собственному числу резонатора) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . На втором шаге с помощью оценки для  $R$  выводятся оценки остатков в асимптотических формулах (26)–(28).

Введем функциональные пространства для задачи (29). Пусть  $\Theta$  — та же функция, что и в (25), и пусть срезки  $\eta_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , отличны от нуля только в  $G_j$  и удовлетворяют соотношению  $\eta_1(x, y) + \Theta(r_1) + \eta_0(x, y) + \Theta(r_2) + \eta_2(x, y) = 1$  в  $G(\varepsilon)$ . Для любых  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$  и  $l = 0, 1, \dots$  пространство  $V_{\gamma, \delta}^l(G(\varepsilon))$  есть замыкание по норме

$$\begin{aligned} & \|u; V_{\gamma, \delta}^l(G(\varepsilon))\| \\ &= \left( \int_{G(\varepsilon)} \sum_{|\alpha|=0}^l \left( \sum_{j=1}^2 \Theta^2(r_j) (r_j^2 + \varepsilon_j^2)^{\gamma-l+|\alpha|} + \eta_1^2 e^{2\delta|x|} + \eta_0 + \eta_2^2 e^{2\delta|x|} \right) |\partial^\alpha v|^2 dx dy \right)^{1/2} \end{aligned}$$

множества гладких функций с компактным носителем на множестве  $\overline{G(\varepsilon)}$ . Обозначим через  $V_{\gamma, \delta}^{0, \perp}$  пространство функций  $f$ , аналитически зависящих от  $k^2$ , принимающих значения в  $V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))$  и удовлетворяющих при  $k^2 = k_e^2$  условию  $(\chi_{0, \varepsilon^\sigma} f, v_e)_{G_0} = 0$ , где  $\sigma > 0$  — достаточно малое число,  $k_e^2$  — простое собственное число задачи (23) в  $G_0$ , а  $v_e$  — собственная функция, отвечающая числу  $k_e^2$ .

**Предложение 11.** Пусть  $k_r^2$  — резонанс,  $k_r^2 \rightarrow k_e^2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и пусть  $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$ . Пусть еще  $\gamma$  удовлетворяет условию  $\pi/\omega - 2 < \gamma - 1 < \pi/\omega$ ,  $f \in V_{\gamma, \delta}^{0, \perp}(G(\varepsilon))$ , а  $u$  — решение задачи (29), допускающее представление

$$u = \tilde{u} + \eta_1 A_1^- U_1^- + \eta_2 A_2^- U_2^-,$$

где  $A_j^- = \text{const}$  и  $\tilde{u} \in V_{\gamma, \delta}^2(G(\varepsilon))$  при малых  $\delta > 0$ . Тогда

$$\|\tilde{u}; V_{\gamma, \delta}^2(G(\varepsilon))\| + |A_1^-| + |A_2^-| \leq c \|f; V_{\gamma, \delta}^0(G(\varepsilon))\|,$$

где постоянная  $c$  не зависит ни от  $f$ , ни от  $\varepsilon$ .

Главная часть асимптотики (25) допускает разложение вида (22) с некоторыми другими постоянными  $\tilde{S}_{11}$ ,  $\tilde{S}_{12}$  вместо  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ . Следующая теорема показывает, что эти постоянные служат приближением для элементов первой строки матрицы рассеяния  $(S_{11}, S_{12})$ .

**Теорема 12.** Пусть выполнены условия предложения 11. Тогда справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} |S_{11} - \tilde{S}_{11}| + |S_{12} - \tilde{S}_{12}| &\leq c|\tilde{S}_{12}|\varepsilon^{2-\delta}, \\ |S_{21} - \tilde{S}_{21}| + |S_{22} - \tilde{S}_{22}| &\leq c|\tilde{S}_{22}|\varepsilon^{2-\delta}, \end{aligned}$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $k$ ,  $\delta$  — произвольно малое положительное число.

Анализ формул для  $\tilde{S}_{11}$ ,  $\tilde{S}_{12}$  и оценки из предыдущей теоремы приводят к итоговому результату.

**Теорема 13.** Пусть выполнены условия предложения 11. Тогда справедливы асимптотические разложения (26)–(28).

В заключительном параграфе третьей главы собственное число резонатора предполагается вырожденным. Считаем, что область изменения спектрального параметра не содержит порогов, то есть число каналов рассеяния остается постоянным, но теперь может быть любым. Как было сказано выше, в окрестности простого собственного числа резонатора график коэффициента прохождения имеет острый пик при некотором "резонансном" значении энергии, которое при стремлении диаметра сужений к нулю приближается к собственному числу резонатора. В случае вырожденного собственного числа, главный член асимптотики коэффициента прохождения имеет два пика с таким же поведением.

**Теорема 14.** Пусть  $k_e^2$  — собственное число задачи (23) в резонаторе  $G_0$  кратности  $\varkappa \geq 2$ . В окрестности числа  $k_e^2$  присутствуют два резонансных значения спектрального параметра  $k_1^2$  и  $k_2^2$ , при этом справедливы разложения

$$k_j^2 = k_e^2 - \Lambda_j \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega+\tau}), \quad j = 1, 2,$$

где постоянные  $\Lambda_j$  положительны. При  $|k^2 - k_e^2| = O(\varepsilon^{2\pi/\omega})$  асимптотика коэффициента прохождения имеет вид

$$T(k, \varepsilon) = \frac{P \varepsilon^{4\pi/\omega} (k^2 - k_e^2)^2}{[(k^2 - k_1^2)^2 + Q_1 \varepsilon^{4\pi/\omega}] [(k^2 - k_2^2)^2 + Q_2 \varepsilon^{4\pi/\omega}]} (1 + O(\varepsilon^\tau)),$$

где постоянные  $P$  и  $Q_j$  положительны и зависят только от геометрии волновода;  $\tau$  — некоторое положительное число.

Отметим, что при  $k = k_e$  старший член асимптотики обращается в ноль, то есть происходит резонансное отражение, чего не наблюдалось в случае, когда собственное число резонатора предполагалось простым. Исследование многоканального резонансного туннелирования впервые проведено в книге [11] при условии, что собственное число резонатора простое. Случай вырожденного собственного числа резонатора изучен в работе [10].

Резонансы в квантовых волноводах, помещенных во внешнее поле, исследовались весьма активно (см., например, [21, 28] и приведенную там литературу).

Резонансное туннелирование, вызванное геометрией волновода (в отсутствие заполнения и внешних полей), асимптотическими средствами практически не изучалось. Упомянем в этой связи работу [16], где рассматривался случай, когда резонатор имеет форму шара и почти касается цилиндра. Случай прямоугольного резонатора, соединенного с выходами на бесконечность тонкими перемычками, рассмотрен в [17]. В обеих работах [16, 17] изучалась нестационарная задача рассеяния в рамках теории Бирмана-Като.

В четвертой главе излагается обобщение асимптотической теории, развитой в главе 3, на несимметричные трехмерные волноводы и волноводы, помещенные в магнитное поле.

В первых трех параграфах четвертой главы рассматривается трехмерный волновод с двумя непересекающимися цилиндрическими выходами  $C_1$  и  $C_2$  на бесконечность; оси этих выходов могут иметь произвольное направление. Волновод имеет два сужения: одно сужение в  $C_1$ , а второе — в  $C_2$ . Диаметры сужений  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , вообще говоря, различны. Граница волновода предполагается гладкой. Обозначим волновод через  $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Предельный волновод  $G(0, 0)$  состоит из двух неограниченных частей  $G_1, G_2$  и из ограниченного резонатора  $G_0$ . Резонатор может иметь произвольную форму. В окрестности точки  $O_j = \overline{G_0} \cap \overline{G_j}$  множество  $G(0, 0)$  совпадает с двойным конусом  $\mathcal{K}_j$ ,  $j = 1, 2$ . Конус  $\mathcal{K}_j$  состоит из двух частей, симметричных друг другу относительно общей вершины.

Волновая функция свободного электрона с энергией  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  удовлетворяет краевой задаче

$$-\Delta u - k^2 u = 0 \text{ в } G(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad u = 0 \text{ на } \partial G(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

и некоторым условиям излучения на бесконечности. Мы рассматриваем рассеяние волны, приходящей из  $C_1$ , и разыскиваем "резонансные" значения  $k_r = k_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  параметра  $k$ , при которых коэффициент прохождения  $T = T(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  принимает максимальные значения. Эти результаты получены в [1].

**Теорема 15.** Пусть  $k_e^2$  — простое собственное число (лежащее между первым и вторым порогами) задачи в резонаторе

$$-\Delta v(x) - k^2 v(x) = 0, \quad x \in G_0; \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial G_0.$$

Вблизи такого собственного числа имеется резонансное значение  $k_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , допускающее разложение

$$k_r^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = k_e^2 - \Lambda_1 \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} - \Lambda_2 \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} + O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1+\tau_1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1+\tau_2}) \quad (30)$$

при  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ . Коэффициенты  $\Lambda_j$ ,  $\mu_{j1}$  и  $\tau_j$  — положительные числа ( $j = 1, 2$ ). При условии  $|k^2 - k_r^2| = O(\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1+\tau_1} + \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1+\tau_2})$  коэффициент прохождения  $T(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  имеет асимптотику

$$T(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left( \frac{1}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 + P^2 \left( \frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}} \right)^2 \right)^{-1} (1 + O(\varepsilon_1^{\tau_1} + \varepsilon_2^{\tau_2})), \quad (31)$$

где  $\tau_j$  — те же, что и в (30),  $z = Q\varepsilon_1^{2\mu_{11}+1}/\varepsilon_2^{2\mu_{21}+1}$ ,  $P$  и  $Q$  — положительные постоянные. Ширина резонансного пика на половине его высоты (вычисленная по асимптотике коэффициента  $T$ ) равна

$$\Upsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{P} \left( z + \frac{1}{z} \right) \varepsilon_1^{2\mu_{11}+1} \varepsilon_2^{2\mu_{21}+1} (1 + O(\varepsilon_1^{\tau_1} + \varepsilon_2^{\tau_2})).$$

Из приведенных разложений следует, что в случае, когда диаметры сужений различны, резонансное значение коэффициента прохождения является бесконечно малым при стремлении диаметров сужений к нулю. То есть резонансное туннелирование практически не наблюдается. То же самое может случиться, когда  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , но сужения имеют неодинаковую форму. Число  $\mu_{j1}$  в действительности является наименьшим собственным числом оператора Лапласа-Бельтрами в области, вырезанной на единичной сфере какой-либо частью двойного конуса  $K_j$ . Поэтому, если  $\mu_{11} \neq \mu_{21}$ , то величина  $z + z^{-1}$  в разложении (31) будет бесконечно большой. Пусть теперь сужения имеют одинаковую форму и один и тот же диаметр, тогда максимум коэффициента прохождения равен  $4(Q + Q^{-1})^{-2}$  с точностью до малых поправок. Постоянная  $Q$  зависит от геометрии резонатора. Если резонатор несимметричен, то, вообще говоря,  $Q$  не равна единице. Отсюда следует, что максимальное значение коэффициента прохождения не является малым, но может и не достигать единицы, если резонатор несимметричен. Таким образом, для практического использования наиболее интересны симметричные волноводы, имеющие два одинаковых сужения.

В четвертом параграфе четвертой главы изучено влияние магнитного поля на резонансное туннелирование. Пусть волновод занимает в трехмерном пространстве цилиндр с двумя одинаковыми сужениями малого диаметра  $\varepsilon$ . Форма сужений предполагается такой же, как и в первых трех параграфах этой главы. Волновая функция  $\Psi = (\Psi_+, \Psi_-)^T$  электрона с энергией  $E = k^2 \hbar^2 / 2m$  в магнитном поле  $\mathbf{H}_0$  удовлетворяет уравнению Паули

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2 \Psi + (\hat{\sigma}, \mathbf{H}) \Psi = k^2 \Psi, \quad (32)$$

где  $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули;  $\mathbf{H} = -(e/c\hbar \mathbf{H}_0) = \text{rot } \mathbf{A}$ . Если магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , то есть  $\mathbf{H} = H\mathbf{k}$ , где  $H$  — скалярная функция, то (32) распадается на два скалярных уравнения

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2 \Psi_{\pm} \pm H \Psi_{\pm} = k^2 \Psi_{\pm}. \quad (33)$$

Пусть функция  $H$  зависит только от  $\rho = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$ , причем  $H(\rho) = 0$  при  $\rho > R$ , где  $R$  — некоторое фиксированное положительное число. Такое поле создается бесконечным соленоидом радиуса  $R$ , ось которого параллельна оси  $z$ . Тогда  $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_\psi$ , где  $\mathbf{e}_\psi = \rho^{-1}(-y + y_0, x - x_0, 0)$ ,

$$A(\rho) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \int_0^\rho tH(t) dt, & \rho < R; \\ \int_0^R tH(t) dt, & \rho > R. \end{cases}$$

Равенство  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$  определяет  $\mathbf{A}$  с точностью до слагаемого вида  $\nabla f$ . Мы пренебрегаем проникновением электронов за стенки волновода и рассматриваем уравнения (33), дополненные однородным условием Дирихле

$$\Psi_\pm = 0 \quad \text{на } \partial G(\varepsilon). \quad (34)$$

Кроме того,  $\Psi_\pm$  должны удовлетворять на бесконечности некоторым условиям излучения. Чтобы сформулировать эти условия излучения, нам нужно определить приходящие и уходящие волны. При наших ограничениях на магнитное поле и выборе вектор-потенциала коэффициенты уравнений (33) стабилизируются на бесконечности лишь со степенной скоростью. Такая медленная стабилизация создает трудности для определения упомянутых волн. Поэтому мы изменим  $\mathbf{A}$  калибровочным преобразованием так, чтобы внутри волновода коэффициенты уравнений (33) стали постоянными при достаточно больших  $|x|$ .

Пусть  $(\rho, \psi)$  — полярные координаты в плоскости  $xy$  с центром в  $(x_0, y_0)$ , причем  $\psi = 0$  на луче, сонаправленном с осью  $x$ . Введем функцию  $f(x, y, z) = c\psi$ , где  $c = \int_0^R tH(t) dt$ . Для определенности будем считать, что  $-\pi/2 < \psi < 3\pi/2$ . Функция  $f$  однозначно определена внутри волновода при  $|x - x_0| > 0$ , кроме того,  $\nabla f = \mathbf{A}$  при  $|x - x_0| > R$ . Пусть  $\tau$  — срезка на  $\mathbb{R}_+$ , равная 1 при  $t > R + 2$  и 0 при  $t < R + 1$ . Положим  $\mathbf{A}'(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) - \nabla(\tau(|x - x_0|)f(x, y, z))$ . Тогда  $\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$  и  $\mathbf{A}' = 0$  при  $|x - x_0| > R + 2$ . Волновые функции  $\Psi'_\pm = \Psi_\pm \exp\{i\tau f\}$  удовлетворяют уравнениям (33) с заменой  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}'$ . При  $|x - x_0| > R + 2$  коэффициенты уравнений (33) с новым вектор-потенциалом  $\mathbf{A}'$  совпадают с коэффициентами уравнения Гельмгольца

$$-\Delta \Psi'_\pm = k^2 \Psi'_\pm.$$

Дальнейший анализ резонансного туннелирования проводится по схеме, развитой в предыдущих параграфах для волноводов при отсутствии магнитного поля.

**Теорема 16.** Пусть  $k_{e,\pm}^2$  — простое собственное число задачи в резонаторе

$$(-i\nabla + \mathbf{A})^2 \Psi(x) \pm H\Psi_\pm(x) = k^2 \Psi(x), \quad x \in G_0; \quad \Psi(x) = 0, \quad x \in \partial G_0,$$

лежащее между первым и вторым порогами; знак  $+$  или  $-$  здесь выбирается произвольно, но считается фиксированным. Вблизи каждого такого собственного числа имеется резонансное значение  $k_{r,\pm}(\varepsilon)$ , для которого справедливо разложение

$$k_{r,\pm}^2(\varepsilon) = k_{e,\pm}^2 - \Lambda_{\pm}\varepsilon^{2\mu+1} + O(\varepsilon^{2\mu+1+\tau}) \quad (35)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Коэффициенты  $\Lambda_{\pm}$ ,  $\mu$  и  $\tau$  постоянны и положительны. При  $|k^2 - k_{r,\pm}^2| = O(\varepsilon^{2\mu+1+\tau})$  коэффициент прохождения  $T_1(k, \varepsilon)$  допускает представление

$$T_1(k, \varepsilon) = \left( \frac{1}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 + P^2 \left( \frac{k^2 - k_r^2}{\varepsilon^{4\mu+2}} \right)^2 \right)^{-1} (1 + O(\varepsilon^{\tau})),$$

где  $\tau$  — то же, что и в (35),  $z$  и  $P$  — положительные постоянные. Ширина резонансного пика на половине его высоты равна

$$\Upsilon(\varepsilon) = \frac{1}{P} \left( z + \frac{1}{z} \right) \varepsilon^{4\mu+1} (1 + O(\varepsilon^{\tau})).$$

Появление в резонаторе магнитного поля приводит не только к расщеплению резонансных пиков. Как показывают вычисления, постоянная  $z$  в асимптотике коэффициента прохождения не равна единице, даже если резонатор симметричен. Таким образом, в симметричном волноводе с двумя одинаковыми сужениями и в присутствии магнитного поля высота резонансных пиков не достигает единицы. Изложенные результаты получены в работе [5]. Аналогичное исследование в двумерном волноводе проведено в [6].

В пятой главе проведено сравнение результатов асимптотического и численного анализа резонансного туннелирования на примере плоского волновода с двумя сужениями одинаковой ширины, симметричного относительно координатных осей. Сравнение проводится как при наличии, так и в отсутствие магнитного поля. Результаты главы получены в статьях [4, 6, 9] и в монографии [11].

Асимптотические формулы в Теоремах 13–16 содержат несколько неизвестных постоянных в главных слагаемых; вопрос об их вычислении не обсуждался. Не зная этих констант, из асимптотики можно извлекать лишь качественную информацию. Если же константы найдены, то асимптотику можно рассматривать как приближенное решение задачи. Впрочем, остается неясным, в каком диапазоне параметров такое приближение будет надежным. С другой стороны, следует ожидать, что численный подход окажется эффективным, только если сужения волновода не слишком узкие, а резонансный пик коэффициента прохождения достаточно широкий. Поэтому подробную картину резонансного туннелирования можно надеяться получить при сочетании асимптотического и численного подходов.

Пусть сначала энергия электронов (спектральный параметр) лежит между первым и вторым порогами. Для вычисления неизвестных постоянных в асимптотике нужно решить предельные краевые задачи. Кроме того, независимо от асимптотического подхода приближенно вычисляется матрица рассеяния волновода. Для этой цели применяется метод из второй главы. Теперь можно сопоставить асимптотику при вычисленных постоянных и матрицу рассеяния (коэффициенты

прохождения и отражения). Оказывается, что существует интервал значений  $\varepsilon$ , где асимптотические и численные результаты практически совпадают. Если принять ширину волновода равной единице, то совпадение асимптотики и вычислений наблюдается в интервале  $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.5$ . При увеличении  $\varepsilon$  за границу этого интервала исчезает асимптотика, но сохраняет эффективность вычисление матрицы рассеяния; при уменьшении  $\varepsilon$  с выходом из интервала становится неустойчивым вычисление, но остается актуальной асимптотика.

Поскольку предполагается, что волновод симметричен относительно координатных осей на плоскости, проходящая волна, четная (соответственно, нечетная) относительно его оси, рассеивается только по четным (соответственно, по нечетным) волнам. Поэтому при увеличении диапазона энергий электронов до третьего порога дополнительные каналы рассеяния не появляются и асимптотические формулы не изменяются. Однако согласование асимптотических и численных результатов ухудшается. Для резонансной энергии оба подхода по-прежнему дают достаточно близкие результаты; различие составляет менее 5% на всем интервале  $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.5$ . Для ширины резонансного пика результаты близки лишь при  $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.15$ . С ростом  $\varepsilon$  разница между численным и асимптотическим результатами нарастает, и при  $\varepsilon = 0.3$  численное значение ширины резонансного пика почти вдвое превосходит асимптотическое. Таким образом, между вторым и третьим порогами асимптотика резонансной энергии остается надежной, а асимптотика ширины резонансного пика требует уточнения.

**Заключение** содержит основные результаты диссертации и описание их практической значимости.

В **приложении** для удобства приведены известные результаты о задачах с условиями излучения для уравнения Гельмгольца в областях с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность. По существу, это частный случай теории, развитой в [32] для общих самосопряженных эллиптических систем.

## Список литературы

### Основные публикации автора по теме диссертации

- [1] *L. M. Baskin, P. Neittaanmäki, B. A. Plamenevskii, O. V. Sarafanov.* Asymptotic theory of resonant tunneling in 3D quantum waveguides of variable cross-section. // *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2009. — V. 70, — no 5. — P. 1542–1566.
- [2] *Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* О методе вычисления матриц рассеяния для волноводов. // *Алгебра и анализ*, 2011. — Т. 23, — №1. — С. 200–231.
- [3] *П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* Излучение и рассеяние в областях с периодическими волноводами при медленной стабилизации характеристик среды. // *Проблемы математического анализа*, 2012. — Т. 64. — С. 93–117.
- [4] *Л. М. Баскин, М. Кабардов, П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* Асимптотика и численное исследование резонансного туннелирования в двумерных квантовых волноводах переменного сечения. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2013. — Т. 53, — №11. — С. 1835–1855.
- [5] *Л. М. Баскин, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* Асимптотическая теория резонансного туннелирования в трехмерных волноводах переменного сечения в присутствии магнитного поля. // *Проблемы математического анализа*, 2013. — Т. 74. — С. 27–44.
- [6] *L. Baskin, M. Kabardov, P. Neittaanmäki, O. Sarafanov.* Asymptotic and numerical study of electron flow spin-polarization in 2D waveguides of variable cross-section in the presence of magnetic field. // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2013. — V. 37, — no. 7. — P. 1072–1092.
- [7] *Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов.* О методе вычисления волноводных матриц рассеяния в присутствии точечного спектра. // *Функциональный анализ и его приложения*, 2014. — Т. 48, — №1. — С. 61–72.
- [8] *Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов.* Метод вычисления волноводной матрицы рассеяния в окрестности порогов. // *Алгебра и анализ*, 2014. — Т. 26, — №1. — С. 128–164.
- [9] *М. Кабардов, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, Н. М. Шаркова.* Сравнение асимптотического и численного подходов к исследованию резонансного туннелирования в симметричном двумерном квантовом волноводе переменного сечения. // *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2017. — Т. 461. — С. 124–139.



- [10] *О. В. Сарафанов*. Асимптотика резонансного туннелирования электронов высокой энергии в двумерных квантовых волноводах переменного сечения. // Записки научных семинаров ПОМИ, 2017. — Т. 461. — С. 260–278.
- [11] *L. Baskin, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii, O. Sarafanov*. Resonant Tunneling: Quantum Waveguides of Variable Cross-Sections, Asymptotics, Numerics, and Applications. Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer, 2015.

### **Прочие публикации автора, связанные с тематикой диссертации**

- [12] *B. Plamenevskii, O. Sarafanov*. A method for computing waveguide scattering matrices in the presence of point spectrum. // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), e-Book Full Papers. — P. 588–596.
- [13] *L. Baskin, P. Neittaanmäki, O. Sarafanov*. Asymptotics of electron flow spin-polarization in quantum waveguides of variable cross-section in presence of magnetic field. // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), e-Book Full Papers. — P. 253–262.
- [14] *L. Baskin, M. Kabardov, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii, O. Sarafanov*. Device for Detecting Magnetic Field, Patent FI 124670 B; granted 28.11.2014.
- [15] *Л. М. Баскин, М. М. Кабардов, П. Неиттаанмяки, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов*. Устройство для обнаружения магнитного поля, Патент RU 2593637 С2; выдан 14.07.2016.

### **Цитируемая литература**

- [16] *А. А. Арсеньев*. Резонансное рассеяние в квантовых волноводах. // Математический сборник, 2003. — Т. 194, — №1. — С. 3–22.
- [17] *А. А. Арсеньев*. О связи между полюсом матрицы рассеяния и коэффициентами прохождения и отражения при рассеянии в квантовом волноводе. // Теоретическая и математическая физика, 2004. — Т. 140, — №2. — С. 303–309.
- [18] *L. Baskin, M. Kabardov, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii*. Semiconductor device and method to control the states of the semiconductor device and to manufacture the same. Patent US 20090250687, granted 08.10.2009.

- [19] *J. Behrndt, H. Neidhardt, E. R. Racec, P. N. Racec, U. Wulf.* On Eisenbud's and Wigner's R-matrix: A general approach. // *Journal of Differential Equations*, 2008. — V. 244. — P. 2545–2577.
- [20] *M. Costabel, M. Dauge.* Stable asymptotics for elliptic systems on plane domains with corners. // *Communications in Partial Differential Equations*, 1994. — V. 19, — no. 9–10. — P. 1677–1726.
- [21] *P. Exner, H. Kovařík.* Quantum waveguides. *Mathematical and Theoretical Physics*, Springer, 2015.
- [22] *V. Grikurov, E. Heikkola, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii.* On computation of scattering matrices and on surface waves for diffraction gratings. // *Numerische Mathematik*, 2003. — V. 94, — no. 2. — P. 269–288.
- [23] *M. M. Kabardov, B. A. Plamenevskii, N. M. Sharkova.* Computation of waveguide scattering matrix near thresholds. // *Applicable Analysis*, 2017. — V. 96, — no. 8. — P. 1295–1302.
- [24] *M. M. Kabardov, N. M. Sharkova.* Numerical simulations of electron transport in nanowires near thresholds. // *Proc. of the International Conference Days on Diffraction 2015*. — P. 150–153.
- [25] *V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, A. Movchan.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Clarendon Press, New York, 1999.
- [26] *И. В. Камоцкий, С. А. Назаров.* Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе I, II. // *Математический сборник*, 1999. — Т. 190, — №1, №2. — С. 43–70, 109–138.
- [27] *И. В. Камоцкий, С. А. Назаров.* Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области. // *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2000. — Т. 264. — С. 66–82.
- [28] *J. T. Londergan, J. P. Carini, D. P. Murdock.* Binding and Scattering in Two-Dimensional Systems: Application to Quantum Wires, Waveguides, and Photonic Crystals. Berlin: Springer, 1999.
- [29] *V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains, vol. 1–2. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [30] *V. G. Maz'ya, J. Rossmann.* On a problem of Babushka (stable asymptotics of the solution to the Dirichlet problem for elliptic equations of second order in domains with angular points). // *Mathematische Nachrichten*, 1992. — V. 155. — P. 199–220.

- [31] *С. А. Назаров*. Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра. // Математический сборник, 2015. — Т. 206, — №6. — С. 43–70, 109–138.
- [32] *С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский*. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
- [33] *С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский*. Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы. // Алгебра и Анализ, 1992. — Т. 4, — №3. — С. 196–225.
- [34] *S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky*. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. De Gruyter exposition in mathematics 13. Berlin, New York, 1994.
- [35] *Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий*. О поведении волноводных матриц рассеяния в окрестности порогов. // Алгебра и Анализ, 2018. — Т. 30, — №2. — С. 188–237.
- [36] *Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов*. О вычислении волноводной матрицы рассеяния для системы Максвелла. // Функциональный анализ и его приложения, 2015. — Т. 49, — №1. — С. 93–96.
- [37] *P. N. Racec, T. Stoica, C. Popescu, M. Lepsa, and Th. G. van de Roer*: Physics of optimal resonant tunneling. // Physical Review B, 1997. — V. 56, — no. 7. — P. 3595–3597.
- [38] *E. R. Racec, U. Wulf*. Resonant quantum transport in semiconductor nanostructures. // Physical Review B, 2001. — V. 64. — 115318.
- [39] *E. R. Racec, P. N. Racec, U. Wulf*. Capacitance in open quantum structures. // Physical Review B, 2002. — V. 65. — 193314.
- [40] *U. Wulf, J. Kucera, P. N. Racec, and E. Sigmund*. Transport through quantum systems in the R-matrix formalism. // Physical Review B, 1998. — V. 58, — no. 24. — P. 16209–16220.