На правах рукописи

Мешкова Юлия Михайловна

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В ЗАДАЧАХ УСРЕДНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.03 — Математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математической физики ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет.

Научный руководитель:	**Суслина Татьяна Александровна,** доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики и математической физики ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет.
Официальные оппоненты:	**Панасенко Григорий Петрович,** доктор физико-математических наук, профессор университета Жан Монне, г. Сент-Этьен, Франция; **Пастухова Светлана Евгеньевна,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики-2 ФГБОУ ВО МИРЭА — Российский технологический университет.
Ведущая организация:	Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук.

Защита состоится «24» декабря 2018 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук http://www.pdmi.ras.ru/.

Автореферат разослан «___» ___________ 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Такие операторы возникают при описании физических процессов в сильно неоднородных средах, например, процесса распространения тепла в композите. Теории усреднения посвящена обширная литература. Укажем в первую очередь книги [1, 2, 9].

Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ *используем обозначения* $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\overline{\psi} := |\Omega|^{-1}\int_\Omega \psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Пример задачи усреднения — скалярное эллиптическое уравнение

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad \varepsilon > 0,$$

где $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и положительно определенная, $F \in L_2(\mathbb{R}^d)$; типичный вопрос — как ведет себя решение u_ε при $\varepsilon \to 0$. Классический качественный результат — существование предела решений: $L_2\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = u_0$. Эффект усреднения состоит в том, что функция u_0 является решением задачи того же вида, но с постоянной *эффективной* матрицей g^0:

$$-\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d.$$

Иными словами, с макроскопической точки зрения физические процессы в средах с быстро меняющимися характеристиками протекают как в однородной эффективной среде. Нас интересуют количественные результаты. „Классика" в гомогенизации — оценка вида $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(F)\varepsilon$. Здесь $C(F)$ — постоянная, зависящая от решетки периодов, матрицы коэффициентов и правой части F.

В работах [3, 4] М. Ш. Бирман и Т. А. Суслина развили теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднения. В [3, 4] изучались матричные сильно эллиптические операторы вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{1}$$

действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение системы

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,$$

$\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [3] было показано, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{u}_0$ — решение соответствующей эффективной задачи

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,$$

с постоянной положительной эффективной матрицей g^0. В силу произвольности $\mathbf{F}$ оценка (2) означает, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте эффективного оператора $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon. \tag{3}$$

В [4] была получена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon. \tag{4}$$

В этой аппроксимации учтен корректор $K(\varepsilon)$. Оператор $K(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, а потому зависит от ε. При этом $\|\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(1)$.

Оценки (3), (4) точны по порядку. Постоянные в оценках контролируются явно в терминах данных задачи. Подобные результаты получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Метод работ [3, 4] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Разумеется, спектральный метод применялся к задачам усреднения до работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной, см. [2, 6, 9, 10, 19]. Основное продвижение в [3,4] состоит в том, что рассматривается система уравнений. Это вносит дополнительные трудности в построение теории возмущений.

Впоследствии спектральный метод был распространен Т. А. Суслиной [22] на случай оператора

$$B_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{5}$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, и $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодические матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные, $Q(\mathbf{x})$ эрмитова, $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция, положительно определенная, ограниченная и ограниченно обратимая. Вещественная постоянная λ выбрана так, чтобы оператор B_ε был положительно определен. В [22] установлены аналоги оценок (3) и (4):

$$\|B_\varepsilon^{-1} - (B^0)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon, \tag{6}$$

$$\|B_\varepsilon^{-1} - (B^0)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon. \tag{7}$$

Здесь B^0 — эффективный оператор с постоянными коэффициентами.

К параболическим системам спектральный метод применялся в работах Т. А. Суслиной [20, 21], где были установлены оценки:

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A^0 t}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon(t^{-1/2} + t^{-1}), \quad t \geqslant \varepsilon^2. \tag{9}$$

Экспонента от оператора (5) изучалась в работе Ю. М. Мешковой [M1], где установлены аналоги неравенств (8) и (9).

Другой подход к получению операторных оценок погрешности был предложен В. В. Жиковым и развит им совместно с С. Е. Пастуховой. В работах [11–13] были получены оценки вида (3), (4) для операторов акустики и теории упругости. Метод, названный авторами „модифицированным методом первого приближения" или „методом сдвига", основан на анализе первого приближения к решению. Важную техническую роль играет использование сглаживания по Стеклову. К параболическим уравнениям метод сдвига применялся в работе [14], где установлены аналоги оценок (8) и (9). Дальнейшие результаты В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой отражены в обзоре [15].

Помимо задач в $\mathbb{R}^d$ в работах [11–13] изучались задачи усреднения в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$. Для операторов акустики и упругости при условии Дирихле либо Неймана на границе в [11–13] была получена $(L_2 \to H^1)$-аппроксимация при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. В качестве грубого следствия было установлено неравенство $\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon^{1/2}$. Близкие результаты для оператора $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на $\partial\mathcal{O}$ были установлены Ж. Гризо [7, 8] с помощью „unfolding"-метода. В [8] впервые была получена точная по порядку оценка

$$\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon. \tag{10}$$

Для эллиптических систем сходные результаты независимо получены в [16] и [18, 23]. Дальнейшие продвижения и подробный обзор можно найти в [24].

В присутствии младших членов задача усреднения для оператора (5) в $\mathbb{R}^d$ изучалась в статье Д. И. Борисова [5]. Было найдено выражение для эффективного оператора B^0 и получены оценки вида (6), (7). Предполагалось, что коэффициенты оператора локально периодические и достаточно гладкие. Отметим также недавнюю работу С. Е. Пастуховой и Р. Н. Тихомирова [17], рассматривавших несамосопряженное дивергентное эллиптическое уравнение второго порядка общего вида.

До сих пор речь шла об аппроксимации резольвенты в фиксированной регулярной точке. Аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ оператора (1) в зависимости от ε и спектрального параметра $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ найдена Т. А. Суслиной [24]. В этой работе также получены двухпараметрические (относительно ε и ζ) оценки погрешности при усреднении резольвент операторов $A_{D,\varepsilon}$ и $A_{N,\varepsilon}$ вида (1), действующих в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана на границе. Стимулом к получению таких оценок послужило представление $e^{-A_{D,\varepsilon}t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\,d\zeta$, где $\gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $A_{D,\varepsilon}$ в положительном направлении. Это представление позволяет выводить параболические результаты усреднения из эллиптических.

Целью диссертационной работы является получение операторных оценок погрешности при усреднении эллиптических и параболических задач в ограниченной области при условии Дирихле на границе для самосопряженного матричного сильно эллиптического дифференциального оператора второго порядка вида (5).

Постановка задачи. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Мы изучаем самосопряженный матричный сильно эллиптический ДО второго порядка $B_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, действующий в пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при условии Дирихле на границе. Формально оператор $B_{D,\varepsilon}$ задан дифференциальным выражением (5), где все матричные коэффициенты имеют, вообще говоря, комплексные элементы. Предполагается что Γ-периодическая $(m \times m)$-матрица-функция $g(\mathbf{x})$ такова, что $g(\mathbf{x}) > 0$, $g, g^{-1} \in L_\infty$; $b(\mathbf{D})$ — матричный дифференциальный оператор с символом $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$, где b_j — постоянные $(m \times n)$-матрицы. Считаем, что $m \geqslant n$ и что $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Наложенное на $b(\boldsymbol{\xi})$ условие равносильно существованию таких постоянных $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty$, что $\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Сделанные предположения обеспечивают сильную эллиптичность оператора $B_{D,\varepsilon}$. Предполагается, что Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, и $Q(\mathbf{x})$ таковы, что

$$a_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad j = 1,\dots,d; \tag{11}$$

$$Q \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2; \tag{12}$$

причем $Q(\mathbf{x})$ — эрмитова; Γ-периодическая $(n \times n)$-матрица-функция $Q_0(\mathbf{x})$ подчинена условиям $Q_0(\mathbf{x}) > 0$ и $Q_0, Q_0^{-1} \in L_\infty$. Вещественная постоянная λ выбрана так, чтобы оператор $B_{D,\varepsilon}$ был положительно определен. Строгое определение оператора дается через соответствующую квадратичную форму на классе Соболева $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Для удобства дальнейших ссылок назовем данными задачи следующий набор величин

$$\begin{gathered} d, m, n, \rho, s;\ \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}, j = 1,\dots,d, \\ \|Q\|_{L_s(\Omega)}, \|Q_0\|_{L_\infty}, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty};\ |\lambda|;\ \text{параметры решетки } \Gamma. \end{gathered} \tag{13}$$

Задачи, поставленные в ходе диссертационного исследования:

1. Изучить поведение обобщенной резольвенты оператора B_ε, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и заданного дифференциальным выражением (5). Найти аппроксимации оператора $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ с двухпараметрическими (относительно малого периода ε и спектрального параметра ζ) оценками погрешности.
2. Получить аппроксимации оператора $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ с двухпараметрическими оценками погрешности.
3. Аппроксимировать полугруппу $e^{-tB_{D,\varepsilon}}$, $t > 0$.

Научная новизна. Все **результаты работы, выносимые на защиту**, являются новыми. Ранее аналоги результатов глав 1 и 2 были известны для резольвенты оператора A_ε, не включающего младших членов. Результаты главы 3 совершенно новые. Ранее операторных оценок погрешности при усреднении параболических задач в ограниченной области известно не было.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты представляют интерес для специалистов по теории усреднения. Установленные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при изучении физических задач в сильно неоднородных средах. В качестве примеров рассмотрены скалярный эллиптический оператор (оператор акустики) и периодический магнитный оператор Шрёдингера с сильно сингулярным электрическим потенциалом. Продвижения в усреднении эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра нашли дальнейшие применения к изучению гиперболических задач в работе соискателя [М3].

Методология и методы исследования. В первой главе применяется теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам усреднения, развитый в работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной. Этот метод состоит в применении масштабного преобразования, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

Во второй главе результаты для оператора, действующего в ограниченной области, получены на основании результатов главы 1 с помощью рассмотрения ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^d$, введения и тщательного анализа поправки типа пограничного слоя. Основные трудности связаны с оцениванием интегралов по узкой окрестности границы области.

В третьей главе аппроксимации для операторной экспоненты выводятся из эллиптических результатов главы 2 с помощью обратного преобразования Лапласа.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для обобщенной резольвенты самосопряженного матричного сильно эллиптического оператора второго порядка B_ε, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, получены аппроксимации по $(L_2 \to L_2)$- и $(L_2 \to H^1)$-операторным нормам с двухпараметрическими (относительно малого периода и спектрального параметра) оценками погрешности. Оценки имеют точный порядок $O(\varepsilon)$ (при фиксированном значении спектрального параметра).
2. Для оператора $B_{D,\varepsilon}$, действующего в ограниченной области при условии Дирихле на границе, получены аппроксимации обобщенной резольвенты с двухпараметрическими оценками погрешности.

При этом оценка погрешности по $(L_2 \to L_2)$-норме имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, а оценка погрешности по $(L_2 \to H^1)$-норме имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$. Ухудшение порядка по сравнению с аналогичным результатом в $\mathbb{R}^d$ объясняется влиянием границы области.

3. Для полугруппы $e^{-B_{D,\varepsilon}t}$, $t > 0$, получены аппроксимации по $(L_2 \to L_2)$- и $(L_2 \to H^1)$-операторным нормам.

Степень достоверности и апробация. Достоверность результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Основные результаты диссертации были представлены на 14 международных конференциях, а также на 7 научных семинарах: международная конференция „Дни дифракции 2015“ (Санкт-Петербург, Россия, 25–29 мая 2015); международная конференция „Asymptotic Problems: Elliptic and Parabolic Issues“ (Вильнюс, Литва, 1–5 июня 2015); пятая международная конференция „Multiscale Modeling and Methods: Upscaling in Engineering and Medicine“ (Москва, Россия, 25–27 июня 2015); международная конференция „КРОМШ-2015“ (Батилиман, Россия, 17–29 сентября 2015); международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, Россия, 8–12 июля 2016); трехсторонняя германо-российско-украинская летняя школа „Spectral Theory, Differential Equations and Probability“ (Майнц, Германия, 4–15 сентября 2016); международная конференция „КРОМШ-2016“ (Батилиман, Россия, 17–29 сентября 2016); рождественские встречи с Пьером Делинем (Москва, Россия, 4–6 января 2017); международная конференция по дифференциальным уравнениям — Silkroad Mathematics Center series international conferences (Пекин, Китай, 10–21 апреля 2017); международная конференция „Современные методы и проблемы гармонического анализа и теории операторов и их приложения VII“ (Ростов-на-Дону, Россия, 23–28 апреля 2017); международная конференция „Дни дифракции 2017“ (Санкт-Петербург, Россия, 19–23 июня 2017); Инсубрийская летняя школа по математической физике „Spectral and scattering theory: from selfadjoint operators to boundary value problems“ (Комо, Италия, 18–22 сентября 2017); симпозиум молодых ученых (Монреаль, Канада, 20–21 июля 2018); летняя школа „Inverse and Spectral Problems for (Non)-Local Operators“ (Лейпциг, Германия, 10–14 сентября 2018); семинар по математической физике им. В. И. Смирнова (Санкт-Петербург, Россия, 24 ноября 2014); Санкт-Петербургский семинар по динамике (Санкт-Петербург, Россия, 10 октября 2016); семинар кафедры Высшей математики и математической физики (Санкт-Петербург, Россия, 19 октября 2016); исследовательский семинар „Асимптотики, операторы и функционалы" (Бат, Великобритания, 31 октября 2016); семинар по математической физике и гармоническому анализу (Колледж Стейшн, Техас, США, 17 ноября 2016); семинар по численному анализу и научным вычислениям (Безансон, Франция, 4 мая 2017); Бэйлорский аналитический семинар (Бэйлор, Техас, США, 25 апреля 2018).

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены в совместных с Т. А. Суслиной работах. Определяющий вклад в эти работы принадлежит диссертанту.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти совместных с Т. А. Суслиной работах [MSu1, MSu2, MSu3, MSu4, MSu5]. Более развернутое изложение части результатов из [MSu4] доступно в препринте [MSu6]. Также по теории усреднения автором опубликованы статья [M1] и препринты [M2–M4]. Однако материал работ [M1–M4] выходит за рамки диссертационного исследования.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации 148 страниц текста. Список литературы содержит 70 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, объясняется ее научная новизна и практическая значимость. Описываются методы исследования, структура и содержание работы.

В **первой главе** рассматривается задача усреднения для обобщенной резольвенты оператора B_ε, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и заданного дифференциальным выражением (5).

Коэффициенты оператора B_ε зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$ и быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$. Чтобы описать соответствующий эффективный оператор, рассмотрим вспомогательные задачи на ячейке. Пусть Γ-периодическая $(n \times m)$-матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является (слабым) решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Определим эффективную матрицу: $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)\, d\mathbf{x}$.

Пусть $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое $(n \times n)$-матричное решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Определим постоянные матрицы $V = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$ и $W = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$. Тогда эффективный оператор задан выражением

$$B^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} D_j - W + \overline{Q} + \lambda \overline{Q_0}. \quad (14)$$

Назовем корректором оператор

$$K(\varepsilon;\zeta) = ([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]) S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \quad (15)$$

Здесь $[\Lambda^\varepsilon]$ и $[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]$ — операторы умножения на матрицы-функции $\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x})$, соответственно; S_ε — оператор сглаживания по Стеклову: $(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\,d\mathbf{z}$, $\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Сформулируем основной результат главы 1.

Теорема 1. *Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $\phi \in (0,2\pi)$, причем $|\zeta| \geqslant 1$. Положим*

$$c(\phi) = \begin{cases} |\sin\phi|^{-1}, & \phi \in (0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi),\\ 1, & \phi \in [\pi/2,3\pi/2]. \end{cases}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_1 \varepsilon c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/2}, \quad (16)$$

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_2 c(\phi)^2 \varepsilon. \quad (17)$$

Постоянные C_1 и C_2 контролируются в терминах данных задачи (13).

Отметим, что двухпараметрические оценки (16) и (17) равномерны по ϕ в любой области вида

$$\{\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C} : |\zeta| \geqslant 1, \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\} \quad (18)$$

при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$.

Корректор (15) в общем случае содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем случаи, когда можно использовать более простой корректор.

Помимо оценок для обобщенной резольвенты мы находим аппроксимацию по $(L_2 \to L_2)$-норме операторов вида $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, отвечающих потокам.

Также мы находим аппроксимацию оператора $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, справедливую в более широкой области изменения параметра ζ.

Теорема 2. *Факторизуем $Q_0(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})^*)^{-1} f(\mathbf{x})^{-1}$, $\overline{Q_0} = f_0^{-2}$. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, где $c_\flat \geqslant 0$ — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* B_\varepsilon f^\varepsilon$ и $\widetilde{B}^0 = f_0 B^0 f_0$. Положим $\zeta - c_\flat = |\zeta - c_\flat|e^{i\psi}$, $\psi \in (0,2\pi)$, и обозначим*

$$\varrho(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1,\\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1. \end{cases} \quad (19)$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *верны оценки*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_3\varrho(\zeta)\varepsilon, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\ &\quad\leqslant C_4\big(1+|\zeta+1|^{1/2}\big)\varrho(\zeta)\varepsilon.\end{aligned} \tag{21}$$

Постоянные C_3, C_4 *контролируются через данные задачи* (13) *и* $c_\flat$.

Во **второй главе** изучаются эллиптические системы в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ класса $C^{1,1}$. Пусть оператор $B_{D,\varepsilon}$ формально задан дифференциальным выражением (5) и действует в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при условии Дирихле на границе. Строгое определение оператора $B_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму. Соответствующий эффективный оператор B_D^0 задан дифференциальным выражением (14) на области определения $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В рассматриваемом случае корректор имеет вид

$$K_D(\varepsilon;\zeta) = R_{\mathcal{O}}\big([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{22}$$

Здесь $P_{\mathcal{O}} : H^l(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, — линейный непрерывный оператор продолжения, через $R_{\mathcal{O}}$ обозначен оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$.

Выберем числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in (0,1]$ согласно следующему условию.

Условие 3. *Пусть число* $\varepsilon_0 \in (0,1]$ *таково, что полоску* $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0} = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x};\partial\mathcal{O}\} < \varepsilon_0\big\}$ *можно покрыть конечным числом открытых множеств, допускающих диффеоморфизмы класса* $C^{0,1}$*, распрямляющие границу* $\partial\mathcal{O}$*. Положим* $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$*, где* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Выпишем основной результат главы 2.

Теорема 4. *Пусть* $\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы аппроксимации*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_5 c(\phi)^5\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}\\ &\quad\leqslant C_6 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_7 c(\phi)^4\varepsilon.\end{aligned} \tag{24}$$

Постоянные C_5, C_6 *и* C_7 *зависят только от данных задачи* (13) *и от области* $\mathcal{O}$.

Оценки (23), (24) равномерны по ϕ в любой области вида (18) при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$. При фиксированном ζ оценка (23) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (24) хуже, чем в $\mathbb{R}^d$ (см. (17)), из-за влияния границы области. Порядок $(L_2 \to H^1)$-оценки можно улучшить до точного $O(\varepsilon)$, добавляя к корректору поправку типа пограничного слоя.

Корректор в (24) в общем случае содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем случаи, когда можно использовать более простой корректор.

Помимо оценок для обобщенной резольвенты мы находим аппроксимацию для „потока" $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$.

Также мы находим аппроксимации оператора $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра ζ.

Условие 5. *Пусть* $0 < \varepsilon_\flat \leqslant 1$. *Пусть* $c_\flat \geqslant 0$ *— общая нижняя грань операторов* $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$ *для всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *и* $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$.

Теорема 6. *Пусть число* ε_1 *выбрано из условия* 3, $0 < \varepsilon_\flat \leqslant \varepsilon_1$. *Предположим, что* $c_\flat \geqslant 0$ *подчинено условию* 5. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$. *Обозначим* $\psi = \arg(\zeta - c_\flat)$, $0 < \psi < 2\pi$. *Определим величину* $\varrho(\zeta)$ *согласно* (19). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat$ *выполнено*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_8 \varepsilon \varrho(\zeta),$$

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}$$
$$\leqslant C_9\big(\varepsilon^{1/2}\varrho(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho(\zeta)\big).$$

Постоянные C_8 *и* C_9 *зависят только от данных задачи* (13), *от* $c_\flat$ *и от области* $\mathcal{O}$.

В **третьей главе** изучается поведение в пределе малого периода решения первой начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O},\, t > 0; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O},\, t > 0; \quad Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Оказывается, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ сходится в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0(\cdot,t)$ эффективной задачи с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\partial_t \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) = -B^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O},\, t > 0; \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O},\, t > 0; \quad \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Сформулируем основные результаты главы 3.

Теорема 7. *Пусть число* ε_1 *выбрано из условия* 3. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t \geqslant 0$ *имеем*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_{10}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-ct} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \tag{25}$$

Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t) = \mathbf{u}_0(\cdot,t) + \varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon) S_\varepsilon P_{\mathcal{O}} \mathbf{u}_0(\cdot,t)$ *— первое приближение к решению* $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_{11}(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-ct} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \tag{26}$$

Постоянные c, C_{10}, C_{11} *зависят от данных задачи* (13) *и от области* $\mathcal{O}$.

При фиксированном значении времени $t > 0$ оценка (25) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (26) хуже: $O(\varepsilon^{1/2})$. Это объясняется влиянием пограничного слоя. Постоянные в оценках (25) и (26) не зависят от $\boldsymbol{\varphi}$. Поэтому оценки (25) и (26) можно переписать в равномерной операторной топологии. В более простом случае, когда $Q_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_n$, имеем

$$\|e^{-B_{D,\varepsilon}t} - e^{-B_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_{10}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-ct}, \quad t \geqslant 0,$$
$$\|e^{-B_{D,\varepsilon}t} - e^{-B_D^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_{11}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-ct},$$

$t > 0$. Здесь $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon) = R_{\mathcal{O}}\big([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}e^{-B_D^0 t}$. Мы выделяем условия, при которых можно использовать более простой корректор без сглаживающего оператора. Помимо оценки (26) мы получаем аппроксимацию потока $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ по L_2-норме.

Литература

[1] *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах // Наука, М., 1984.

[2] *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures // Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[3] *Бирман М.Ш., Суслина Т.А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[4] *Бирман М.Ш., Суслина Т.А.* Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ // Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.

[5] *Борисов Д.И.* Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Алгебра и анализ **20** (2008), №2, 19–42.

[6] *Conca C., Vanninathan M.* Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition // SIAM J. Appl. Math. **57** (1997), №6, 1639–1659.

[7] *Griso G.* Error estimate and unfolding for periodic homogenization // Asymptot. Anal. **40** (2004), №3/4, 269–286.

[8] *Griso G.* Interior error estimate for periodic homogenization // Anal. Appl. **4** (2006), №1, 61–79.

[9] *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов // Физматлит, М., 1993.

[10] *Жиков В.В.* Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии // Дифференц. уравнения **25** (1989), №1, 44–50.

[11] *Жиков В.В.* Об операторных оценках в теории усреднения // Докл. РАН **403** (2005), №3, 305–308.

[12] *Жиков В.В.* О некоторых оценках из теории усреднения // Докл. РАН **406** (2006), №5, 597–601.

[13] *Zhikov V.V., Pastukhova S.E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory // Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), №4, 515–524.

[14] *Zhikov V.V., Pastukhova S.E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients // Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), №2, 224–237.

[15] *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* Об операторных оценках в теории усреднения // УМН **71 (429)** (2016), №3, 27–122.

[16] *Kenig C.E., Lin F., Shen Z.* Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems // Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), №3, 1009–1036.

[17] *Пастухова С.Е., Тихомиров Р.Н.* Об операторных оценках усреднения для эллиптических уравнений с младшими членами // Алгебра и анализ **29** (2017), №5, 179–207.

[18] *Пахнин М.А., Суслина Т.А.* Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области // Алгебра и анализ **24** (2012), №6, 139–177.

[19] *Севостьянова Е.В.* Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами // Мат. сб. **115(157)** (1981), №2(6), 204–222.

[20] *Суслина Т.А.* Об усреднении периодических параболических систем // Функц. анализ и его прил. **38** (2004), №4, 86–90.

[21] *Suslina T.A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$ // Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), №4, 390–447.

[22] *Суслина Т.А.* Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка // Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.

[23] *Suslina T.A.* Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates // Mathematika **59** (2013), №2, 463–476.

[24] *Суслина Т.А.* Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра // Алгебра и анализ **27** (2015), №4, 87–166.

Публикации автора по теме диссертации

[MSu1] *Мешкова Ю.М., Суслина Т.А.* Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем // Функц. анализ и его прил. **49** (2015), №1, 88–93.

[MSu2] *Meshkova Y.M., Suslina T.A.* Two-parametric error estimates in homogenization of second-order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$ // Applicable Analysis **95** (2016), №7, 1413–1448.

[MSu3] *Meshkova Y.M., Suslina T.A.* Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients // Applicable Analysis **95** (2016), №8, 1736–1775.

[MSu4] *Мешкова Ю.М., Суслина Т.А.* Усреднение задачи Дирихле для эллиптических и параболических систем с периодическими коэффициентами // Функц. анализ и его прил. **51** (2017), №3, 87–93.

[MSu5] *Мешкова Ю.М., Суслина Т.А.* Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности // Алгебра и анализ **29** (2017), №6, 99–158.

[MSu6] *Meshkova Y.M., Suslina T.A.* Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: Two-parametric error estimates // arXiv:1702.00550v4 (2017).

Прочие публикации автора

[M1] *Мешкова Ю.М.* Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ **25** (2013), №6, 125–177.

[M2] *Meshkova Y.M.* On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients // arXiv:1705.02531 (2017).

[M3] *Meshkova Y.M.* On homogenization of the first initial-boundary value problem for periodic hyperbolic systems // arXiv:1807.03634 (2018).

[M4] *Мешкова Ю.М.* Усреднение периодических параболических систем по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме при учете корректора // St. Petersburg Mathematical Society Preprint # 2018-05 (2018).

Мешкова Юлия Михайловна

Операторные оценки погрешности в задачах усреднения дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать ??.??.2018. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____________________________________